Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ошемков, В. В. Шарко, О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 93–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:21:50

УДК 513.83

А. А. Ошемков, В. В. Шарко

О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях

Рассматривается задача топологической траекторной классификации потоков Морса–Смейла на замкнутых двумерных поверхностях. Важные результаты в этом направлении были получены М. Peixoto и его школой. Однако полное решение этой задачи до сих пор не было аккуратно изложено.

Построенные в работе новые топологические инварианты имеют более простой вид, чем инварианты, предъявленные в работах М. Peixoto. В частности, в данной работе содержится список потоков Морса–Смейла малой сложности, полученный авторами при помощи построенных ими инвариантов.

Библиография: 23 названия.

Введение

Вопросы, связанные с качественным исследованием динамических систем на двумерных многообразиях (в частности, классификация таких систем) обсуждались многими авторами. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работах А. А. Андропова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера (см. [1]–[4], а также [5]–[7] об истории вопроса). В этих работах исследовались векторные поля достаточно общего вида. В дальнейшем Смейл (S. Smale) [8], [9] выделил класс потоков (названных впоследствии потоками Морса–Смейла), которые на двумерном многообразии, с одной стороны, являются типичными, а с другой стороны, имеют простое качественное описание. В данной работе рассматриваются только замкнутые (т.е. компактные, без границы) многообразия, поэтому в дальнейшем “двумерное многообразие” или “поверхность” означает “замкнутое двумерное многообразие”.

В работе [10] Пейксото (М. Peixoto) ввел понятие “различающего графа”, сопоставляемого произвольному потоку Морса–Смейла, и сформулировал теорему о том, что этот граф является полным топологическим инвариантом, классифицирующим потоки Морса–Смейла на двумерных многообразиях с точностью до траекторной топологической эквивалентности (точные определения см. в § 1). В работе [10] доказана теорема реализации для таких графов и тем самым, как утверждает Пейксото, “задача классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях сводится к задаче классификации различающих графов”.

Однако инвариант, предъявленный Пейксото, имеет сложное описание. Поэтому трудно реализовать алгоритм сравнения двух таких графов или, например,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00240).

алгоритм их перечисления для малого количества вершин. Более того, описанный Пейксото “различающий граф” является полным траекторным топологическим инвариантом на самом деле лишь для потоков Морса–Смейла без предельных циклов (иногда такие потоки называют потоками Морса). Утверждение о том, что классы эквивалентности потоков Морса–Смейла находятся во взаимно однозначном соответствии с различающими графами в самой работе [10] не доказывалось, но приводится ссылка на работу [11], где, как говорит Пейксото, “с точностью до обозначений доказана содержательная часть этого утверждения”. Однако все рассуждения в работе [11] проводятся для достаточно близких потоков и некоторые из них становятся неверными, если отбросить это условие. Для потоков Морса–Смейла с предельными циклами различающий граф Пейксото является инвариантом, но не полным, т.е. существуют траекторно топологически не эквивалентные потоки с одинаковым различающим графом (см. пример 3.1 и предшествующее ему обсуждение).

Позже появились другие описания инварианта Пейксото или похожих инвариантов. Так, например, Флейтас (G. Fleitas) в работе [12] описал некоторый инвариант для потоков Морса на двумерных многообразиях. Подход Флейтаса отличается от подхода Пейксото, а предъявленный в работе [12] инвариант существенно проще, чем инвариант Пейксото (см. § 2).

В работе Вонга (X. Wang) [13] также предъявляется более простой, чем у Пейксото, инвариант для потоков Морса–Смейла на ориентируемых двумерных многообразиях. Но поскольку Вонг строит свой инвариант на основе работы Пейксото, этот новый инвариант также является полным инвариантом лишь для потоков Морса. Теорема 4.14 работы [13], утверждающая, что этот инвариант классифицирует потоки Морса–Смейла общего вида на двумерных многообразиях, неверна (в работе [13] она не доказывается).

Итак, коротко сформулируем сказанное выше:

- 1) инвариант Пейксото, построенный для произвольных потоков Морса–Смейла на произвольных поверхностях, является полным траекторным топологическим инвариантом на множестве потоков Морса;
- 2) инвариант Флейтаса является полным траекторным топологическим инвариантом для потоков Морса на произвольных поверхностях;
- 3) инвариант Вонга, построенный для произвольных потоков Морса–Смейла на ориентируемых поверхностях, является полным траекторным топологическим инвариантом для потоков Морса на ориентируемых поверхностях.

Одна из целей данной работы – дать аккуратное описание полного траекторно-топологического инварианта, классифицирующего произвольные потоки Морса–Смейла на произвольных двумерных многообразиях.

Другая цель заключается в следующем. В работах А. Т. Фоменко [14], [15] была получена классификация особенностей боттовских интегралов на изоэнергетических поверхностях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Позже, достаточно удобное и формальное описание этой классификации было дано в работе [16], где были введены понятия атомов и молекул. Разработанный подход, терминология, система обозначений оказались удобными для классификации не только интегрируемых гамильтоновых систем, но и других естественных геометрических объектов. Так, например, в работе [17] на языке атомов описана топо-

логическая классификация функций Морса на двумерных поверхностях. В настоящей работе классификация потоков Морса–Смейла также проводится в терминах атомов и молекул. Сначала классифицируются каким-то образом достаточно простые объекты (атомы), затем описываются правила “склейки” более сложных объектов (молекул) из этих атомов, и, наконец, классифицируются молекулы. Для траекторной классификации потоков Морса достаточно пользоваться атомами, а для классификации потоков Морса–Смейла уже потребуются молекулы. Тем самым язык атомов и молекул оказывается чрезвычайно полезным не только в симплектической геометрии и гамильтоновой механике, но и в данной задаче.

Таким образом, вторая цель данной работы – продемонстрировать, как указанный подход может быть применен к решению задачи траекторной топологической классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях. Отметим, что некоторые идеи, используемые в данной работе, были реализованы также в работе [18], но в другой форме.

В §1 строится инвариант для потоков Морса (трехцветный граф) и доказывалось, что этот инвариант классифицирует потоки Морса на двумерных поверхностях с точностью до траекторной топологической эквивалентности (теорема 1.10). Этот инвариант основан на понятии атома, введенном в работе [16] для классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Далее доказывалась теорема реализации (теорема 1.11) и, в частности, описываются инварианты, классифицирующие потоки Морса на двумерной поверхности данного топологического типа (теорема 1.12). В §2 дано описание других траекторных топологических инвариантов и, в частности, их выражение через трехцветный граф. Кроме того, здесь описана связь между классификацией потоков Морса и классификацией функций Морса на двумерных поверхностях (теорема 2.13). В §3 строится инвариант (v -молекула), классифицирующий потоки Морса–Смейла с точностью до траекторной топологической эквивалентности (теоремы 3.23–3.25). В §4 описан один из возможных способов составления списка для построенных в данной работе инвариантов. Для этого описывается представление трехцветных графов и v -молекул в виде простого кода (строчки символов некоторого алфавита) и алгоритм перечисления этих кодов. В качестве примера реализации этого алгоритма в приложении приведен полный список этих кодов для потоков Морса с ≤ 2 седловыми точками и для потоков Морса–Смейла с ≤ 3 критическими элементами.

Авторы благодарны А. В. Болсинову за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в данной статье, а также А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

§ 1. Классификация потоков Морса

В этом параграфе описано построение нового траекторного топологического инварианта, классифицирующего потоки Морса–Смейла без периодических траекторий.

1.1. Основные определения. В данной работе мы рассматриваем только гладкие векторные поля (потоки) на замкнутых двумерных многообразиях (поверхностях). Напомним некоторые определения. По поводу основных понятий, связанных с векторными полями, см., например, [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Векторные поля v_1 на поверхности M_1 и v_2 на поверхности M_2 называются *топологически траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий траектории векторного поля v_1 в траектории поля v_2 с сохранением ориентации на траекториях.

Разумеется, задача классификации всех гладких векторных полей на поверхности представляется необозримой, если не накладывать никаких дополнительных ограничений на характер особенностей. Даже локальная задача классификации весьма нетривиальна, не говоря уже о классификации на поверхности в целом. Поэтому естественно решать задачу классификации в некотором классе типичных векторных полей. В качестве такого класса мы будем рассматривать так называемые грубые векторные поля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Векторное поле v на многообразии M называется *грубым*, если при малом возмущении поля v топологическое поведение его траекторий не меняется, т.е. после возмущения поле топологически траекторно эквивалентно исходному.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Строго говоря, в определении грубости векторного поля надо указывать, в каком классе производится возмущение. Как уже было сказано, мы рассматриваем только гладкие векторные поля, т.е. поля класса C^1 . Отметим также, что в этом случае можно не делать различия между векторными полями и потоками. В дальнейшем эти термины употребляются как синонимы.

Согласно теореме Пейксо, на компактном двумерном многообразии грубыми векторными полями являются в точности поля Морса–Смейла (см. [9], [11], [19]). Этот класс полей был впервые рассмотрен в работе [8] для многообразий произвольной размерности. Для двумерных поверхностей можно определить поля Морса–Смейла следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Векторное поле v на замкнутой двумерной поверхности называется *полем Морса–Смейла*, если

- 1) v имеет конечное число особых точек и периодических траекторий, причем все они гиперболические;
- 2) не существует траекторий, идущих из седла в седло;
- 3) для каждой траектории поля v ее α -предельное и ω -предельное множества являются либо особой точкой, либо периодической траекторией (предельным циклом).

Важным этапом при траекторной классификации потоков Морса–Смейла на поверхностях является классификация потоков Морса–Смейла без периодических траекторий. Мы будем называть такие потоки *потоками Морса*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Потоки Морса имеют также другое естественное описание. Это в точности градиенто-подобные потоки без сепаратрис, идущих из седла в седло [20]. Здесь поток называется *градиенто-подобным*, если он топологически траекторно эквивалентен потоку $\text{grad } f$ для некоторой функции f и некоторой римановой метрики g_{ij} на многообразии M . См. также замечание 2.12.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Имеется ровно один (с точностью до топологической траекторной эквивалентности) поток Морса без седловых особых точек на связной замкнутой поверхности. Это – векторное поле v на сфере S^2 , которое можно описать

следующим образом: $v = \text{grad } f$, где метрика на сфере индуцирована стандартным вложением в трехмерное евклидово пространство, а функция f есть ограничение некоторой линейной функции (иногда такой поток называют *северо-южным*). Все потоки, топологически траекторно эквивалентные описанному потоку, будем называть *простейшими*. Если многообразие M несвязно, то (для краткости) фраза “поток Морса на M отличен от простейшего” будет означать, что поток не является простейшим ни на одной из компонент связности многообразия M .

1.2. Построение инварианта. Опишем теперь некоторый инвариант, траекторно классифицирующий потоки Морса на двумерных поверхностях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Граф T назовем *трехцветным графом*, если все его вершины имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Цвета будем обозначать буквами s, t, u . Два трехцветных графа назовем *изоморфными*, если они изоморфны с сохранением раскраски (т.е. при изоморфизме ребра помеченные буквами s, t, u переходят в ребра помеченные теми же буквами). Для краткости будем называть эти ребра *s-ребрами*, *t-ребрами* и *u-ребрами*.

Опишем процедуру сопоставления каждому потоку Морса (отличному от простейшего) некоторого трехцветного графа.

Пусть v – поток Морса на поверхности M , имеющий хотя бы одну седловую особую точку. Разрезая M вдоль всех сепаратрис потока v , мы разобьем поверхность на канонические области, имеющие вид, изображенный на рис. 1(a). Каждая такая область (после разрезания) представляет собой четырехугольник, вершины которого – особые точки поля v (один источник, один сток и два седла), а стороны – сепаратрисы поля v . При этом в многообразии M четырехугольник может “вырождаться”, т.е. разные стороны этого четырехугольника могут соответствовать одной и той же сепаратрисе (рис. 1(b)).

Рис. 1

Как вырожденные, так и невырожденные четырехугольники будем называть *каноническими четырехугольниками*. Все остальные траектории поля v , расположенные в таком четырехугольнике, “начинаются” в вершине-источнике и “заканчиваются” в вершине-стоке. Зафиксируем в каждом четырехугольнике одну из таких траекторий. Вместе с сепаратрисами они разбивают многообразие M на треугольники. При этом стороны одного треугольника уже не могут быть “склеены”

между собой в многообразии M . Это легко следует из того, что стороны каждого треугольника образованы тремя траекториями разных типов:

- 1) траектория, идущая из источника в седло;
- 2) траектория, идущая из седла в сток;
- 3) траектория, идущая из источника в сток.

Будем называть такие траектории, соответственно, s -траекториями, u -траекториями и t -траекториями (рис. 1(с)). Отметим, что t -траектории определены неоднозначно.

Построим трехцветный граф T , соответствующий полученному разбиению M на треугольники следующим образом:

- 1) вершины графа T взаимно однозначно соответствуют треугольникам;
- 2) если два треугольника имеют общую сторону, образованную s -траекторией, t -траекторией или u -траекторией, то соединим соответствующие этим треугольникам вершины графа T ребром с меткой s , t или u , соответственно.

ПРИМЕР 1.8. На рис. 2 показан пример построения трехцветного графа по потоку Морса на двумерной сфере. В данном примере поток имеет два источника, два седла и два стока (на рисунке один из стоков расположен на “задней” невидимой стороне сферы). На рис. 2(а) изображены траектории самого векторного поля, причем жирными линиями выделены сепаратрисы. На рис. 2(б) от векторного поля остались лишь сепаратрисы (s -траектории и u -траектории) и траектории, разделяющие канонические четырехугольники на треугольники (t -траектории). Жирными линиями на рис. 2(б) изображен трехцветный граф. На рис. 2(с) построенный трехцветный граф изображен как абстрактный (не вложенный в поверхность) граф.

Рис. 2

ЛЕММА 1.9. При описанном выше сопоставлении трехцветного графа потоку Морса

- 1) результат не зависит от выбора t -траекторий в каждом каноническом четырехугольнике;
- 2) топологически траекторно эквивалентным потокам Морса сопоставляются изоморфные трехцветные графы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы очевидно. Далее, пусть h – гомеоморфизм, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v_1 и v_2 . Так как h переводит канонические четырехугольники потока v_1 в канонические четырехугольники потока v_2 (в частности, сепаратрисы потока v_1 – в сепаратрисы потока v_2), то, учитывая первое утверждение леммы, можно считать, что h переводит треугольники одного потока в треугольники другого потока. Лемма доказана.

1.3. Теорема классификации. Утверждение леммы 1.9 означает, что мы построили некоторый топологический траекторный инвариант потоков Морса на двумерных поверхностях. Трехцветный граф, соответствующий потоку v , будем обозначать $T(v)$. Следующая теорема показывает, что построенный инвариант является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков Морса на поверхностях.

ТЕОРЕМА 1.10. *Два потока Морса v_1 и v_2 (отличные от простейшего) на двумерных поверхностях M_1 и M_2 топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им трехцветные графы $T(v_1)$ и $T(v_2)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема уже доказана (лемма 1.9). Предположим теперь, что трехцветные графы $T(v_1)$ и $T(v_2)$ изоморфны. Этот изоморфизм индуцирует биекцию между треугольниками многообразия M_1 и треугольниками многообразия M_2 . В силу определения графа $T(v)$ эта биекция согласована с пересечениями треугольников: если два треугольника многообразия M_1 имеют общую сторону (общую вершину), то соответствующие два треугольника многообразия M_2 также имеют общую сторону (общую вершину) того же типа. Напомним, что по построению вершинами каждого треугольника являются источник, седло и сток, что и определяет тип каждой вершины и каждой стороны. Таким образом имеющаяся биекция между треугольниками однозначно определяет биекцию между вершинами треугольников, т.е. между особыми точками потока v_1 и особыми точками потока v_2 , причем эти биекции согласованы.

Гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v_1 и v_2 , строится следующим образом:

- 1) в особых точках потока v_1 отображение h определено указанной биекцией;
- 2) отображение h продолжается на сепаратрисы потока v_1 так, чтобы каждая из них гомеоморфно отображалась в соответствующую сепаратрису потока v_2 ;
- 3) для каждого канонического четырехугольника (рис. 1(а)) потока v_1 отображение h , заданное на его границе (и отображающее ее в границу некоторого канонического четырехугольника потока v_2), продолжается на весь канонический четырехугольник так, чтобы это был гомеоморфизм, переводящий траектории в траектории.

Существование требуемого продолжения на последнем шаге несложно доказать стандартными методами (см., например, [4], [11]). Теорема доказана.

1.4. Реализация инвариантов. Рассмотрим произвольный трехцветный граф T . Очевидно, если выбросить из графа T все ребра какого-нибудь одного цвета, то он распадется в несвязное объединение циклов, образованных ребрами других двух цветов. Циклы, получающиеся в результате выбрасывания s -ребер (соответственно, t -ребер, u -ребер), будем называть tu -циклами (соответственно, su -циклами, st -циклами).

Следующая теорема описывает множество допустимых инвариантов $T(v)$ (т.е. множество значений инварианта T).

ТЕОРЕМА 1.11. *Трехцветный граф T соответствует некоторому потоку Морса v на двумерной поверхности тогда и только тогда, когда все его su -циклы имеют длину 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хотя трехцветный граф $T(v)$, сопоставляемый потоку Морса v на поверхности M , строится как абстрактный граф, его можно естественным образом вложить в поверхность M как граф, двойственный графу, ребрами которого являются s -траектории, t -траектории и u -траектории (см. рис. 2). При таком вложении граф $T(v)$ разбивает поверхность M на односвязные области, в каждой из которых находится ровно одна особая точка потока v . При этом граница каждой такой области является su -циклом, st -циклом или tu -циклом графа $T(v)$, т.е. состоит из $2k$ ребер графа $T(v)$ ровно двух цветов, где $2k$ — количество треугольников, для которых данная особая точка является вершиной. Ясно, что su -циклы ограничивают седла, st -циклы ограничивают источники, а tu -циклы ограничивают стоки. На рис. 3 изображено вложение графа $T(v)$ в окрестности седла, источника и стока (жирные траектории опять изображают сепаратрисы, а пунктирные — t -траектории).

Рис. 3

Из этого замечания сразу следует необходимость условия на длины su -циклов графа $T(v)$, поскольку каждая седловая особая точка потока Морса v является вершиной ровно четырех треугольников. Докажем теперь достаточность этого условия.

Опишем сначала некоторый “стандартный” треугольник с заданным на нем потоком требуемого вида. Для этого рассмотрим векторное поле v_0 на плоскости, которое в декартовых координатах (x, y) записывается следующим образом: $v_0 = (\sin(\pi x), \sin(\pi y))$. Легко проверить, что поле v_0 является полем Морса. Его

особые точки – это в точности все точки целочисленной решетки плоскости (x, y) , причем точки с двумя четными координатами – источники, точки с двумя нечетными координатами – стоки, а точки с координатами разной четности – седла потока, определяемого полем v_0 . Сепаратрисы поля v_0 направлены вдоль прямых, параллельных координатным осям. В качестве t -траекторий можно взять соответствующие диагонали квадратов, на которые сепаратрисы разбивают плоскость. Сепаратрисы и t -траектории разбивают плоскость на “одинаковые” стандартные треугольники.

Рассмотрим теперь некоторый трехцветный граф T , все su -циклы которого имеют длину 4, и построим поверхность M с потоком Морса v так, чтобы граф T был инвариантом этого потока. Для этого возьмем стандартные треугольники (в количестве, равном количеству вершин графа T) и склеим их в соответствии с метками, стоящими на ребрах графа T : если две вершины графа T соединены ребром с меткой s , t или u , то треугольники, соответствующие этим вершинам, склеиваем вдоль сторон, образованных, соответственно, s -траекториями, t -траекториями или u -траекториями.

После всех склеек мы получим некоторое многообразие M с потоком v . Во всех точках кроме источников и стоков построенный поток будет гладким относительно гладкой структуры, заданной на склеиваемых треугольниках. В источниках и стоках надо “сгладить” многообразие M так, чтобы поток стал гладким. Для рассматриваемых стандартных треугольников эту процедуру можно описать следующим образом. Рассмотрим некоторый источник построенного потока v (случай стока рассматривается аналогично). Пусть эта точка является вершиной $2k$ треугольников (отметим, что при $k = 4$ поток будет гладким в окрестности этого источника). На стандартном треугольнике заданы декартовы координаты (x, y) . Введем на нем (в окрестности источника) новые координаты (r, φ) по формулам:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = r \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = r \sin \varphi. \end{cases}$$

В координатах (r, φ) векторное поле v_0 на стандартном треугольнике имеет вид: $\dot{r} = \pi r$, $\dot{\varphi} = 0$. Такой же вид имеет линейное векторное поле с матрицей $\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ на плоскости в полярных координатах. Рассмотрим стандартный треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Отображение $(r, \varphi) \mapsto (r, 4\varphi/k)$ переводит окрестность $r < \varepsilon$ вершины $(0, 0)$ этого треугольника в сектор $\rho < \varepsilon$, $0 \leq \psi \leq \pi/k$ на плоскости с полярными координатами (ρ, ψ) . Определив аналогичным образом отображение на всех $2k$ треугольниках, примыкающих к рассматриваемому источнику, получим гомеоморфизм окрестности источника в многообразии M на двумерный диск. Зададим таким образом гладкую структуру на многообразии M в окрестности всех источников и стоков. Легко проверяется, что в результате мы получим гладкое многообразие M , на котором поток v будет потоком Морса.

Очевидно, что трехцветный граф для построенного потока Морса v на многообразии M есть в точности исходный граф T . Теорема 1.11 доказана.

Мы доказали, что трехцветные графы с su -циклами длины 4 находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с классами топологической траектор-

ной эквивалентности потоков Морса (имеющих седловые особые точки). В частности, по трехцветному графу $T(v)$ можно определить топологический тип двумерного многообразия M , на котором задан поток v . Следующая теорема показывает, как это сделать явно, и тем самым описывает множество допустимых инвариантов $T(v)$ для любого заданного двумерного многообразия M .

Для произвольного трехцветного графа T обозначим через $m_0(T)$, $m_1(T)$ и $m_2(T)$, соответственно, количество его st -циклов, su -циклов и tu -циклов.

ТЕОРЕМА 1.12. Пусть $T(v)$ – инвариант потока Морса v , заданного на поверхности M . Тогда

- 1) эйлерова характеристика поверхности M равна

$$\chi(M) = m_0(T(v)) - m_1(T(v)) + m_2(T(v));$$

- 2) поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда граф $T(v)$ (без учета раскраски) не имеет циклов нечетной длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассуждения, приведенного в начале доказательства теоремы 1.11, получаем, что число источников, число седел и число стоков потока v равны, соответственно, $m_0(T(v))$, $m_1(T(v))$ и $m_2(T(v))$. Отсюда сразу следует первое утверждение теоремы, поскольку это просто формула для суммы индексов особых точек поля v .

Докажем теперь второе утверждение. Поверхность M , на которой задан рассматриваемый поток Морса v , ориентируема тогда и только тогда, когда все треугольники, на которые она разбита сепаратрисами и t -траекториями, можно согласованно ориентировать. Ориентацию каждого канонического треугольника можно задавать, выбирая один из двух возможных циклических порядков его вершин: “источник”-“седло”-“сток” или “сток”-“седло”-“источник”. Будем считать, что треугольнику приписана метка $(+1)$ в первом случае и метка (-1) – во втором случае. Легко понять, что ориентации двух треугольников, имеющих общую сторону, будут согласованы тогда и только тогда, когда им приписаны разные метки. Поскольку между треугольниками поверхности M и вершинами графа $T(v)$ фиксирована некоторая биекция, условие ориентируемости рассматриваемой поверхности M можно сформулировать следующим образом: поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда вершинам графа $T(v)$ можно приписать метки (± 1) таким образом, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, имели разные метки. Назовем такую расстановку меток в вершинах графа *правильной*.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать следующую простую лемму.

ЛЕММА 1.13. Для произвольного графа Γ следующие два условия эквивалентны:

- 1) граф Γ не имеет циклов нечетной длины;
- 2) существует правильная расстановка меток (± 1) в вершинах графа Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из 2) следует 1), очевидно, так как в вершинах цикла нечетной длины нельзя правильно расставить метки (± 1) . Обратно, если граф Γ не имеет циклов нечетной длины, то правильно расставить метки в его вершинах можно следующим образом: возьмем некоторую вершину V_0 и поставим в ней метку $(+1)$; для любой другой вершины V_i рассмотрим какой-нибудь путь из вершины V_0 в вершину V_i и поставим в ней метку $(+1)$, если этот путь четной длины, и метку (-1) , если он нечетной длины. Лемма доказана.

1.5. Ориентируемый случай. При классификации потоков Морса–Смейла (с периодическими траекториями) мы будем выбирать некоторые ориентации на всех st -циклах и tu -циклах трехцветных графов. В общем случае нет никакого естественного способа выбрать эти ориентации. Однако для трехцветных графов, соответствующих ориентируемым поверхностям, эти ориентации можно выбрать согласованно в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Будем говорить, что ориентации st -циклов и tu -циклов трехцветного графа T *согласованы*, если они индуцируют одну и ту же ориентацию на каждом su -цикле.

ЛЕММА 1.15. *Согласованно ориентировать все st -циклы и tu -циклы связанного трехцветного графа T можно тогда и только тогда, когда граф T не имеет циклов нечетной длины. При этом для таких графов существуют ровно две согласованные ориентации, получающиеся друг из друга изменением ориентаций на всех циклах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все st -циклы и tu -циклы трехцветного графа T согласованно ориентированы. В частности, задана ориентация на всех s -ребрах графа T . Припишем начальным вершинам s -ребер метки (-1) , а конечным вершинам s -ребер – метки $(+1)$. Легко понять, что эта расстановка меток будет правильной, а значит, по лемме 1.13 граф T не имеет циклов нечетной длины.

Обратно, пусть граф T не имеет циклов нечетной длины. Тогда, рассматривая правильную расстановку меток в вершинах графа T , ориентируем s -ребра от вершины с меткой (-1) к вершине с меткой $(+1)$, а u -ребра – от вершины с меткой $(+1)$ к вершине с меткой (-1) . Эти ориентации s -ребер и u -ребер, очевидно, индуцируют согласованные ориентации всех st -циклов и tu -циклов.

Второе утверждение леммы очевидно, так как согласованные ориентации однозначно определены, если задана ориентация хотя бы одного s -ребра. Лемма доказана.

§ 2. Сравнение инвариантов

Для траекторной классификации потоков Морса можно использовать упомянутые во введении инвариант Пейксото, инвариант Флейтаса или (для ориентируемых поверхностей) инвариант Вонга. В этом параграфе мы кратко опишем эти инварианты и проведем их сравнение.

Все потоки Морса без седловых особых точек топологически траекторно эквивалентны (замечание 1.6). Поэтому при описании инвариантов в этом параграфе мы рассматриваем только потоки Морса, имеющие седловые особые точки.

2.1. Инвариант Пейксото. Инвариант, предложенный Пейксото в работе [10], можно описать следующим образом. Как уже отмечалось при построении инварианта $T(v)$ в § 1, поверхность M после разрезания ее по сепаратрисам рассматриваемого потока v распадается на канонические четырехугольники. Иначе говоря, поток Морса v определяет клеточное разбиение двумерного многообразия M (по поводу определений, связанных с клеточными пространствами, см., например, [21]). Нульмерные клетки этого разбиения – особые точки потока v , одномерные клетки – замыкания сепаратрис, двумерные клетки – замыкания канонических четырехугольников (в многообразии M). Для того чтобы описать поток v с точностью до топологической траекторной эквивалентности, достаточно предъявить одномерный остов рассмотренного клеточного разбиения и указать, каким образом к нему приклеиваются двумерные клетки (на которых поток уже задан). По существу, это и есть инвариант Пейксото для потоков Морса.

Более точно, инвариант Пейксото, который он называет *различающим графом*, есть граф с ориентированными ребрами, вершины которого расположены на трех уровнях так, что каждое ребро направлено либо от вершины первого уровня к вершине второго уровня, либо от вершины второго уровня к вершине третьего уровня, причем для каждой вершины второго уровня имеется ровно два входящих в нее ребра и ровно два выходящих из нее ребра (вершины первого, второго и третьего уровней соответствуют источникам, седлам и стокам). Кроме того, в этом графе выделены некоторые подграфы четырех типов (они изображены на рис. 4), так что выполнены некоторые специальные условия (заметим, что к каждому выделенному подграфу однозначно приклеивается канонический четырехугольник, так чтобы ориентации на ребрах подграфа и сторонах четырехугольника были согласованы).

Рис. 4

Мы не будем приводить здесь список этих условий. В работе [10] они выписаны явно и их формулировка занимает достаточно много места. Смысл этих условий проясняет теорема реализации [10, теорема 5.1], доказательство которой и составляет основное содержание статьи [10]. Эта теорема показывает, что все вместе эти условия равносильны следующему: если приклеить канонические четырехугольники ко всем выделенным подграфам, то должно получиться замкнутое двумерное многообразие.

ПРИМЕР 2.1. На рис. 5 показано, как выглядит инвариант Пейксото для потока Морса, рассмотренного в примере 1.8. В данном случае различающий граф состоит из шести вершин (по две на каждом уровне) и восьми ребер (см. рис. 5(a)), и

в нем выделено 4 подграфа (см. рис. 5(b)). Если приклеить 4 канонических четырехугольника к этим подграфам, то получится поток на сфере, изображенный на рис. 2(a).

Рис. 5

Инвариант Пейкото и трехцветный граф, рассмотренный в предыдущем параграфе, выражаются друг через друга, поскольку они являются полными топологическими траекторными инвариантами потоков Морса. Опишем построение различающего графа Пейкото, соответствующего данному трехцветному графу.

Пусть T – трехцветный граф, являющийся инвариантом некоторого потока Морса. Различающий граф, соответствующий графу T , строится следующим образом:

- 1) каждому st -циклу графа T поставим в соответствие вершину первого уровня различающего графа, каждому su -циклу – вершину второго уровня, а каждому tu -циклу – вершину третьего уровня;
- 2) для каждого s -ребра (u -ребра) графа T соединим ребром те вершины различающего графа, которые соответствуют st -циклу (tu -циклу) и su -циклу, содержащим данное s -ребро (u -ребро);
- 3) каждому t -ребру графа T сопоставим выделенный подграф построенного различающего графа, четыре (три) ребра которого соответствуют четырем (трем) ребрам графа T , пересекающимся с данным t -ребром.

Рис. 6

На рис. 6 изображены все возможные “окрестности” t -ребра в трехцветном графе T , являющемся инвариантом некоторого потока Морса. Четыре варианта (a)–(d) на рис. 6 соответствуют четырем типам подграфов (a)–(d) на рис. 4. Отметим, что в силу утверждения 2) теоремы 1.12 случай (d) возникает только на неориентируемых поверхностях.

2.2. Инвариант Флейтаса. Опишем теперь инвариант Флейтаса для потоков Морса, предложенный в работе [12]. Рассмотрим вокруг каждого источника маленькую окружность, трансверсальную потоку, и отметим на ней точки пересечения с сепаратрисами. После этого припишем всем точкам на всех окружностях некоторые метки, причем тем точкам, для которых соответствующие им сепаратрисы входят в одно и то же седло, припишем одинаковые метки. Кроме того, для каждой пары точек с одинаковыми метками указывается “спин”. Спин изображается стрелками, показывающими направление движения вдоль окружностей в окрестности каждой отмеченной точки. Эти стрелки расставляются так, что если некоторую пару точек с одинаковыми метками “сдвинуть” вдоль стрелок и выпустить из полученных точек траектории потока, то эти траектории после прохождения “возле седловой точки” пойдут “в одну сторону” (см. рис. 7). Если для некоторой пары точек с одинаковыми метками изменить направления обеих стрелок на противоположные, то по определению они будут изображать тот же спин для этой пары точек.

Рис. 7

Таким образом, инвариант Флейтаса для потока Морса (“циклические распределения раскрашенных точек”) – это набор окружностей, на которых указаны точки с метками (каждая метка встречается ровно два раза), и для каждой пары точек с одинаковыми метками указан спин. Два таких набора считаются одинаковыми, если существует гомеоморфизм, отображающий окружности одного набора в окружности другого набора с сохранением меток и спинов.

ПРИМЕР 2.2. На рис. 8 показано, как выглядит инвариант Флейтаса для потока Морса, рассмотренного в примере 1.8. В данном случае инвариант состоит из двух окружностей (соответствующих двум источникам), на которых расположены две пары точек (соответствующие двум седлам) с метками A и B и спинами, указанными стрелками.

Рис. 8

Рис. 9

Очевидно, что инвариант Флейтаса является инвариантом потоков Морса, т.е. топологически траекторно эквивалентным потокам Морса сопоставляются одина-

ковые в указанном выше смысле наборы окружностей с метками и спинами. Теорема 1с работы [12] утверждает, что он является полным топологическим инвариантом.

Соответствие между инвариантами Флейтаса и трехцветными графами можно кратко описать следующим образом: окружностям инварианта Флейтаса соответствуют st -циклы трехцветного графа, парам точек с одинаковыми метками соответствуют su -циклы, а спин определяется tu -циклами. На рис. 9 показаны “элементарные” фрагменты трехцветного графа и инварианта Флейтаса. Любой трехцветный граф с su -циклами длины 4 и любой инвариант Флейтаса являются объединением таких фрагментов. Если все элементарные фрагменты данного трехцветного графа $T(v)$ заменить в соответствии с рис. 9 на элементарные фрагменты инварианта Флейтаса, то получится инвариант Флейтаса потока v , и наоборот.

2.3. Инвариант Вонга. Еще один инвариант для потоков Морса, но лишь на ориентируемых поверхностях, был предложен в работе Вонга [13]. Подход Вонга близок к тому подходу, который использовался в §1 для построения трехцветного графа. Он рассматривает граф, двойственный графу, составленному из сепаратрис потока. Те же рассуждения, что и при построении трехцветного графа показывают, что этот граф есть объединение циклов длины 4 (вокруг каждого седла), ребра которых раскрашены в два цвета s и u так, что противоположные ребра имеют одинаковый цвет. Кроме того, учитывая ориентацию многообразия, можно ориентировать ребра этого графа так, что ориентация каждого цикла длины 4 будет согласована с ориентацией четырехугольника, границей которого является этот цикл.

Таким образом инвариант Вонга (“раскрашенный двойственный граф”) есть граф с вершинами степени 4, ребра которого раскрашены в два цвета s и u и ориентированы так, что граф есть объединение 4-циклов вида $s-u-s-u$, а ориентация ребер согласованно задает ориентацию на всех циклах из s -ребер, циклах из u -ребер и 4-циклах. При этом считается, что два таких графа изоморфны, если существует гомеоморфизм одного графа в другой, сохраняющий раскраску и либо сохраняющий, либо обращающий ориентацию всех ребер.

ПРИМЕР 2.3. На рис. 10 показано, как выглядит инвариант Вонга для потока Морса, рассмотренного в примере 1.8 (см. рис. 2(а)). Аналогично рисункам 2(б) и 2(с) на рис. 10(а) показано вложение графа Вонга в сферу, на которой задан поток, а на рис. 10(б) этот граф изображен как абстрактный граф с ориентированными и раскрашенными ребрами.

Ясно, что мы можем рассматривать граф Вонга как граф, полученный из трехцветного графа стягиванием каждого его t -ребра в точку и заданием ориентации на ребрах su -циклов. В общем случае нельзя однозначно осуществить обратную операцию, т.е. восстановить трехцветный граф после стягивания t -ребер. Но поскольку Вонг рассматривает лишь ориентируемые многообразия, это можно сделать, используя описанную выше ориентацию ребер. На рис. 11 изображено, как можно выразить один инвариант через другой, заменяя фрагменты трехцветного графа на соответствующие фрагменты графа Вонга и наоборот.

2.4. Классификация a -функций и f -графы. Опишем еще один топологический инвариант, который был введен в работе [17] для классификации функций

Рис. 10

Рис. 11

на двумерных многообразиях, но имеет ту же природу, что и рассмотренные выше инварианты потоков Морса.

Напомним некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Гладкие функции f_1 и f_2 на двумерных поверхностях M_1 и M_2 называются *сопряженными*, если существует такой гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, что $f_2 \circ h = f_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Гладкие функции f_1 и f_2 на двумерных поверхностях M_1 и M_2 будем называть *топологически послойно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий связные компоненты линий уровня функции f_1 в связные компоненты линий уровня функции f_2 .

В работе [17] решалась задача классификации функций Морса с тремя критическими значениями на замкнутых двумерных многообразиях с точностью до топологической послойной эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Гладкая функция f называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены. В двумерном случае это эквивалентно тому, что в некоторых координатах в окрестности критической точки функция записывается как $f = x^2 + y^2$ (точка минимума), $f = -x^2 - y^2$ (точка максимума) или $f = -x^2 + y^2$ (седловая точка).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Функцию Морса f на двумерной поверхности M будем называть *α -функцией*, если f имеет ровно три критических значения: $-1, 0$ и 1 .

Легко видеть, что для α -функции f на поверхности M множество $f^{-1}(-1)$ есть в точности множество точек минимума, множество $f^{-1}(1)$ есть в точности множество точек максимума, а множество $f^{-1}(0)$ связно (если поверхность M связна) и содержит все седловые критические точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Отметим, что для α -функций сопряженность и топологическая послойная эквивалентность это почти одно и то же, а именно: если α -функции f_1 и f_2 топологически послойно эквивалентны, то f_1 сопряжена либо f_2 , либо $-f_2$.

Опишем инвариант, классифицирующий α -функции с точностью до сопряжения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Конечный связный граф γ назовем *f -графом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все вершины графа γ имеют степень 3;

- 2) некоторые из ребер графа γ ориентированы, причем к каждой вершине графа γ примыкают ровно два ориентированных ребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее;
- 3) каждому неориентированному ребру графа γ приписана метка (± 1) .

Из условия 2) следует, что ориентированные ребра f -графа образуют непересекающиеся циклы (ориентированные). Кроме того, к каждой вершине такого цикла примыкает ровно одно неориентированное ребро.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Назовем два f -графа *эквивалентными*, если один из другого можно получить в результате выполнения нескольких операций следующего вида: изменение ориентации всех ребер какого-то цикла и одновременное изменение меток (на противоположные) на всех неориентированных ребрах, инцидентных этому циклу. При этом если оба конца неориентированного ребра принадлежат данному циклу, то метка на этом ребре не меняется.

Классы эквивалентности f -графов относительно данного определения назовем *f -инвариантами*.

Каждой α -функции можно сопоставить f -инвариант следующим образом. Рассмотрим линии уровня $f^{-1}(-\frac{1}{2})$ некоторой α -функции f на поверхности M . Фиксируя на поверхности некоторую метрику, рассмотрим устойчивые сепаратрисы потока $\text{grad } f$, начинающиеся на окружностях $f^{-1}(-\frac{1}{2})$. Каждая пара сепаратрис, входящих в одну седловую точку, будет образовывать неориентируемое ребро f -графа γ . Вершинами графа γ будут концы сепаратрис, лежащие на окружностях $f^{-1}(-\frac{1}{2})$. Фиксировав произвольным образом ориентацию на каждой такой окружности, мы получим ориентированные ребра графа γ (ориентированные дуги окружностей между концами сепаратрис). Для завершения построения f -графа осталось лишь расставить метки на неориентированных ребрах. Это делается по следующему правилу: в поверхности M рассмотрим маленькую окрестность пары сепаратрис, образующих неориентированное ребро; это прямоугольник, две противоположные стороны которого лежат на окружностях $f^{-1}(-\frac{1}{2})$ и поэтому ориентированы; если эти стороны индуцируют одну и ту же ориентацию границы прямоугольника, то метка равна $(+1)$, если разные – то метка равна (-1) .

Мы построили по данной α -функции некоторый f -граф. В процессе построения мы произвольным образом фиксировали ориентации на окружностях $f^{-1}(-\frac{1}{2})$. Однако легко понять, что при выборе других ориентаций мы получим эквивалентные f -графы. Кроме того, мы фиксировали некоторую метрику на поверхности, но можно показать, что от выбора этой метрики построенный f -граф не зависит (см. также теорему 2.13).

В работе [17] доказано, что f -инвариант классифицирует α -функции с точностью до сопряжения (а значит, и с точностью до топологической эквивалентности – см. замечание 2.8).

Хотя f -инвариант был введен в связи с задачей классификации функций на поверхностях, оказалось, что этот инвариант “эквивалентен” описанным выше инвариантам, т.е., в частности, траекторно классифицирует потоки Морса на поверхностях.

Проще всего описать биекцию между f -инвариантами и инвариантами Флейтаса. Если ориентировать произвольным образом каждую окружность инварианта

Флейтаса и соединить точки с одинаковыми метками неориентируемым ребром, то мы получим граф, удовлетворяющий условиям 1) и 2) из определения f -графа. Метка (± 1) на каждом неориентированном ребре полученного графа ставится в соответствии со стрелками (изображающими спин для пары точек, являющихся концами данного ребра) и выбранной ориентацией окружностей: если направление одной из этих стрелок совпадает с выбранным направлением на соответствующей окружности, а направление другой стрелки – не совпадает, то метка на данном ребре равна $(+1)$, иначе – метка равна (-1) . Ясно, что при другом выборе ориентаций на окружностях инварианта Флейтаса мы получим эквивалентный f -граф, т.е. описанная процедура однозначно сопоставляет каждому инварианту Флейтаса некоторый f -инвариант. Обратное отображение также очевидно. Описанное соответствие поясняется на рис. 12.

ПРИМЕР 2.11. На рис. 13 показано, как выглядит f -инвариант для потока Морса, рассмотренного в примере 1.8. Данный f -граф является одним из возможных изображений соответствующего f -инварианта. Отметим, что метка на ребре, концы которого лежат на одном и том же ориентированном цикле, не зависит от ориентации ребер, а метку на другом ребре можно сделать равной (-1) , изменяя ориентацию одного из циклов.

Рис. 12

Рис. 13

Описанная выше конструкция показывает, что полные топологические инварианты для α -функций и для потоков Морса одинаковы. В частности, это означает, что между классами сопряженности α -функций и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса существует естественная биекция. Это есть отражение результата, принадлежащего Мейеру (K. R. Meyer). Прежде чем его сформулировать, сделаем следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Каждой функции Морса f на поверхности M с римановой метрикой g_{ij} соответствует градиентный поток $v = \text{grad } f$. Однако, изменяя метрику, мы можем получить градиентный поток топологически траекторно не эквивалентный исходному (в частности, этот поток может вообще не являться потоком Морса). И обратно, если на поверхности задан поток Морса, то с точностью до топологической траекторной эквивалентности (см. замечание 1.5) его можно различными способами (в зависимости от выбора метрики) представить в виде градиентного потока некоторой функции Морса. При этом различные функции, соответствующие этому потоку, вполне могут оказаться топологически послойно не эквивалентными. Таким образом, соответствие между функциями Морса и потоками Морса существенным образом зависит от метрики.

Как показывает следующая теорема, для того чтобы устранить зависимость от метрики, достаточно вместо произвольных функций Морса рассмотреть α -функции.

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть M – замкнутая двумерная поверхность. Зададим на M некоторую риманову метрику g_{ij} .

1) Операция сопоставления α -функции ее градиентного потока (относительно метрики g_{ij}) устанавливает естественную биекцию между классами сопряженности α -функций и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса.

2) Эта биекция не зависит от выбора метрики g_{ij} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Теорема 2.13 фактически содержится в работе Мейера [22]. На самом деле там сформулирована не эта теорема, а более общее утверждение аналогичного характера о потоках Морса–Смейла. Однако это общее утверждение неверно (см. замечание 3.3), а приведенное доказательство проходит именно для случая потоков Морса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Утверждение теоремы 2.13, по существу, следует из доказанной в работе [17] теоремы классификации α -функций и описанного выше взаимно однозначного соответствия между f -инвариантами и инвариантами Флейтаса (а значит, и другими инвариантами, классифицирующими потоки Морса). Действительно, как легко понять, это соответствие устроено так, что α -функции f и потоку $\text{grad } f$ сопоставляются одинаковые f -инварианты. Этим и задается биекция между классами сопряженности α -функций и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.16. Если поверхность M , на которой задан поток Морса (или α -функция), является ориентированной, и мы рассматриваем гомеоморфизмы поверхностей, сохраняющие ориентацию, то определение f -инварианта в этом случае можно упростить. Неоднозначность представления f -инварианта в виде f -графа возникала из-за неоднозначности выбора ориентаций на окружностях, ограничивающих диски в поверхности. Если поверхность ориентирована, то, выбирая ориентации на окружностях в соответствии с ориентациями дисков, мы получим f -граф, все метки которого равны $(+1)$. Поэтому полным топологическим траекторным инвариантом потоков Морса на ориентированных поверхностях (относительно гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию) является f -граф без меток.

Отметим, что f -граф без меток, имеющий ровно один цикл из ориентированных ребер, аналогичен понятию хордовой диаграммы, возникающей в теории узлов (см. [23]). При таком подходе f -граф с несколькими циклами из ориентированных ребер можно рассматривать как хордовую диаграмму некоторого зацепления окружностей в $\mathbb{R}^3$.

Как было показано в этом параграфе, существует много (эквивалентных) полных топологических траекторных инвариантов для потоков Морса на поверхностях. Тот или иной инвариант может оказаться более удобным при решении различных задач. Например, используя трехцветные графы или f -графы, легко описать алгоритмы сравнения и перечисления потоков Морса (а также потоков Морса–Смейла), что будет сделано в § 4. Отметим, что в ориентируемом случае описанные инварианты являются различными “представлениями” атомов, введенных

в работе [16] в связи с классификацией интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Наша дальнейшая задача – классифицировать потоки Морса–Смейла на двумерных поверхностях. Основная идея: проводить классификацию в два этапа. Первый этап – описанная выше классификация потоков Морса, играющих в дальнейшем роль “атомов”, из которых “склеиваются” произвольные потоки Морса–Смейла. Второй этап – описание “правил склейки” для “атомов” и построение “молекул”. Этот подход будет реализован в следующем параграфе.

§ 3. Классификация потоков Морса–Смейла

Прежде чем переходить к построению инварианта, траекторно классифицирующего потоки Морса–Смейла произвольного вида на двумерных поверхностях, обсудим другой подход.

3.1. Конструкция Пейксото. Пейксото [10] обобщает понятие различающего графа на случай потоков Морса–Смейла следующим образом. В качестве вершин первого и третьего уровней добавляются, соответственно, отталкивающие и притягивающие предельные циклы. Кроме сепаратрис появляются некоторые новые ребра (соединяющие вершины первого и третьего уровней), которые можно описать следующим образом. Выбросим из многообразия все предельные циклы потока и рассмотрим те из получившихся связанных компонент, которые не содержат седловых точек. Каждая такая компонента состоит из траекторий, имеющих одно и то же α -предельное и одно и то же ω -предельное множества. Для каждой такой компоненты соединим ребром пару вершин (первого и третьего уровней), соответствующих этим предельным множествам.

Отметим, что для потока Морса, имеющего седловые точки, описанное правило построения различающего графа дает в точности граф из сепаратрис. Только в случае простейшего потока Морса (см. замечание 1.6) мы получим граф, состоящий из двух вершин (первого и третьего уровней), соединенных одним ребром. Для потоков Морса–Смейла с периодическими траекториями такие ребра уже являются типичными.

Далее, аналогично тому, как это делалось для потоков Морса, Пейксото описывает типы выделенных подграфов и формулирует условия, которым должны удовлетворять выделенные подграфы различающего графа потока. Всего получается 45 типов подграфов (36 с вершинами второго уровня и еще 9 без них) и около 10 условий. Кроме того, для вершин первого и третьего уровня теперь надо указывать, чему они соответствуют: особой точке или предельному циклу одного из двух типов (с ориентируемой или неориентируемой окрестностью).

Мы не будем описывать все типы подграфов и условия (тем более, что они не сформулированы в работе [10] полностью). Эти условия накладываются таким образом, чтобы после склеивания канонических областей (аналог канонических четырехугольников, возникавших в случае потоков Морса) в соответствии с выделенными подграфами различающего графа, получилось замкнутое двумерное многообразие. Ясно, что это требование накладывает сильные ограничения на различающий граф, откуда и возникают все условия.

Напротив, мы хотим показать, что существуют топологически траекторно не

эквивалентные потоки Морса–Смейла с одинаковыми различающими графами, т.е. вопрос заключается не в реализуемости данного различающего графа, а в однозначности этой реализации.

Поясним причину неоднозначности реализации различающего графа. Фактически, алгоритм построения различающего графа для потока Морса–Смейла заключается в следующем: мы разрезаем поверхность по периодическим траекториям (запоминая, какие из получившихся компонент границы были между собой склеены), стягиваем каждую граничную окружность в точку, затем строим различающий граф для получившегося потока Морса (возможно, на несвязном многообразии) и, наконец, склеиваем между собой те вершины различающего графа, которые соответствуют одному и тому же предельному циклу (до разрезания). При такой процедуре теряется часть информации о потоке, поэтому мы не можем восстановить его однозначно.

Действительно, рассмотрим ситуацию, возникающую при попытке осуществить обратную операцию. Используя различающий граф (в частности, его выделенные подграфы), мы можем восстановить поток на многообразии, получающемся из исходного при выбрасывании всех предельных циклов, а также указать, какие “граничные” компоненты этого многообразия примыкают к одному и тому же предельному циклу. Однако, например, для предельного цикла, окрестность которого есть кольцо, существует четыре (в общем случае, попарно не эквивалентных) возможности “склеить” эти компоненты в окрестности данного цикла: существует два способа склейки самих компонент, для каждого из которых можно выбрать одно из двух возможных направлений потока на предельном цикле. При этом топология полученной поверхности может зависеть только от способа склейки. Поэтому даже если мы знаем, каким образом надо произвести склейку (например, из соображений ориентируемости), все равно необходима информация о том, в какую сторону был направлен поток на данном предельном цикле.

ПРИМЕР 3.1. Простейший пример различающего графа, для которого существуют два топологически траекторно не эквивалентных потока, приведен на рис. 14(a). Эти потоки можно описать следующим образом. Рассмотрим на кольце K два потока, траектории которых изображены на рис. 14(b) и рис. 14(c). Для каждого из этих потоков внутренняя граничная окружность кольца является отталкивающим предельным циклом, а внешняя – притягивающим. При этом никаких других критических элементов поток не имеет. Как легко понять, потоки, изображенные на рис. 14(b) и рис. 14(c), топологически траекторно не эквивалентны. Действительно, если бы существовал гомеоморфизм, переводящий траектории одного потока в траектории другого, то при этом гомеоморфизме предельные циклы одного потока отображались бы в предельные циклы другого потока, причем с сохранением ориентации на этих циклах, индуцированной потоком. Но это невозможно, потому что для одного потока эти циклы представляют один и тот же элемент в группе целочисленных гомологий кольца $H_1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, а для другого – противоположные. Для каждого из двух рассмотренных потоков на кольце можно построить аналогичный поток на торе, склеив два экземпляра кольца с одинаковыми потоками по границе. В результате получим два топологически траекторно не эквивалентных потока Морса–Смейла на двумерном торе, каждому из которых соответствует различающий граф Пейксото, изображенный

на рис. 14(a).

Рис. 14

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Аналогичная ошибка содержится в работе [13]. При классификации потоков Морса–Смейла с предельными циклами действия Вонга аналогичны описаным выше: разрезаем поверхность по предельным циклам; для каждого получившегося куска рассматриваем “раскрашенный двойственный граф” (см. п. 2.3); описываем спаривание циклов “раскрашенных двойственных графов”. Информация о спаривании циклов позволяет однозначно склеить поверхность, поскольку Вонг рассматривает только ориентируемые многообразия, но не определяет поток в окрестности склеек. Другими словами, инвариант Вонга, как и инвариант Пейксото, не меняется, если изменить поток лишь в маленькой окрестности какого-нибудь предельного цикла так, чтобы на этом цикле направление потока изменилось на противоположное.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В работе [22] сформулирована теорема о биекции между классами сопряженности ξ -функций (аналог α -функций для потоков Морса–Смейла) и классами топологической траекторной эквивалентности потоков Морса–Смейла. Более точно, для потоков Морса–Смейла на многообразиях произвольной размерности доказано, что из топологической траекторной эквивалентности потоков следует сопряженность ξ -функций (если значения этих ξ -функций одинаковы на соответствующих критических элементах потоков). Кроме того, утверждается, что для двумерных многообразий верно и обратное, т.е. сопряженность ξ -функций влечет топологическую траекторную эквивалентность соответствующих потоков. Эти утверждения можно переформулировать следующим образом: для потока Морса–Смейла на многообразии произвольной размерности ξ -функция является топологическим траекторным инвариантом, а в двумерном случае этот инвариант является полным. Однако утверждение о том, что в двумерном случае инвариант является полным, неверно. При его доказательстве Мейер ссылается на работу [11], откуда возникает та же ошибка, что и в работах Пейксото и Вонга.

Таким образом, траекторная классификация потоков Морса–Смейла и послойная классификация ξ -функций являются разными задачами (хотя эти задачи эквивалентны в случае потоков Морса – см. теорему 2.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Отметим, что в работах [2], [3] введено понятие “схемы потока” для потоков на двумерной сфере. Для потоков Морса–Смейла эта “схема потока” аналогична различающему графу Пейксото. В общем случае описание “схемы потока” достаточно громоздко, поскольку она определяется для потоков более общего вида, чем потоки Морса–Смейла. Тем не менее “схема потока” является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков рассматриваемого вида, в частности, потокам из примера 3.1 соответствуют разные схемы.

3.2. Описание v -атомов. Как уже говорилось, для построения инварианта потока Морса–Смейла мы будем использовать идею молекулы [16].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Ниже мы будем говорить о потоке Морса–Смейла на двумерном многообразии N с границей, предполагая, что поток трансверсален границе в каждой ее точке. Отметим, что в данной ситуации всегда можно считать, что N вложено в некоторое многообразие M (без границы) так, что рассматриваемый поток есть ограничение некоторого потока Морса–Смейла, заданного на M . Топологическая траекторная эквивалентность таких потоков определяется очевидным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть N – связное компактное двумерное многообразие с границей, на котором задан поток Морса–Смейла v , трансверсальный границе в каждой ее точке. Назовем N *элементарной областью*, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) N содержит единственный критический элемент поля v , который есть либо источник, либо сток, либо предельный цикл;
- 2) все критические элементы поля v в N являются седловыми точками, причем имеется хотя бы одна седловая точка.

В последнем случае будем называть элементарную область *седловой элементарной областью*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Будем говорить, что две элементарные области *эквивалентны*, если потоки, заданные на них, топологически траекторно эквивалентны. Классы эквивалентности элементарных областей назовем *v -атомами*; в частности, классы эквивалентности седловых элементарных областей – *седловыми v -атомами*. Назовем *сложностью седлового v -атома* количество седловых особых точек в соответствующей ему элементарной области.

Легко привести список всех не седловых v -атомов. Они отличаются только типом самого критического элемента и топологией его окрестности. То, что других отличий нет, следует, по существу, из результатов работы [1] (см. также [11], [19]). Сформулируем соответствующее утверждение в следующем виде.

ЛЕММА 3.8. *Существует ровно 6 не седловых v -атомов. Соответствующие им элементарные области N можно описать следующим образом:*

- 1) N есть диск, содержащий единственный критический элемент поля v , который есть источник (сток);
- 2) N есть кольцо, содержащее единственный критический элемент поля v , который есть отталкивающий (притягивающий) предельный цикл;

- 3) N есть лист Мёбиуса, содержащий единственный критический элемент поля v , который есть отталкивающий (притягивающий) предельный цикл.

Оба v -атома из п. 1) леммы 3.8 (диск с источником и диск со стоком) будем обозначать буквой A . Остальные четыре v -атома (кольцо или лист Мёбиуса с отталкивающим или притягивающим циклом) обозначим буквой S . Элементарные области, соответствующие v -атомам A (v -атомам S), будем называть *элементарными областями типа A (типа S)*.

Опишем теперь процедуру разбиения замкнутой поверхности с потоком Морса–Смейла на элементарные области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Для поверхности M с заданным на ней потоком Морса–Смейла v назовем набор гладко вложенных в нее окружностей *разрезающим*, если эти окружности попарно не пересекаются и разбивают M на элементарные области, так что для каждой окружности хотя бы одна из прилегающих к ней элементарных областей не является седловой.

ЛЕММА 3.10. Пусть v – поток Морса–Смейла на поверхности M . Тогда

- 1) в поверхности M существует разрезающий набор окружностей;
- 2) для любых двух разрезающих наборов окружностей существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, переводящий один набор в другой и отображающий каждую траекторию потока в себя с сохранением направления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим достаточно маленькие окрестности всех источников, стоков и предельных циклов, граничные окружности которых трансверсальны потоку v . Очевидно, этот набор граничных окружностей разбивает M на элементарные области и, возможно, некоторое количество колец, на которых поток не имеет критических элементов, а все траектории идут с одной граничной окружности кольца на другую (здесь используется то, что v является потоком Морса–Смейла (свойство 3) из определения 1.4)). Выбрасывая для каждого такого кольца граничную окружность, в точках которой поток направлен внутрь кольца, получим разрезающий набор. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы. Обозначим окружности построенного разрезающего набора $R_1, \dots, R_l$. Пусть дан произвольный разрезающий набор окружностей $P_1, \dots, P_r$. Уменьшая окрестности, которые мы выбирали при построении набора $R_1, \dots, R_l$, можно считать, что окружности $P_1, \dots, P_r$ не пересекаются ни с одной из этих окрестностей.

Рассмотрим окружность P_i , пусть $\varphi \pmod{2\pi}$ – угловая координата на ней. В силу определения 3.9 по крайней мере одна из двух элементарных областей, прилегающих к окружности P_i , не является седловой. Пусть для определенности эта элементарная область содержит сток или притягивающий цикл (случай источника или отталкивающего цикла рассматривается аналогично). Тогда этот критический элемент есть ω -предельное множество для всех траекторий потока, пересекающих окружность P_i . Отсюда следует, что каждая точка φ окружности P_i при сдвиге вдоль соответствующей траектории потока v на некоторое положительное время $\tau(\varphi)$ попадает на некоторую окружность R_i (одну и ту же для всех φ).

При этом функция $\tau(\varphi)$ будет непрерывной (и даже гладкой), так как окружности P_i и R_i трансверсальны потоку. Таким образом, окружности P_i и R_i ограничивают в многообразии M кольцо, на котором траектории потока v идут с граничной окружности P_i на граничную окружность R_i .

Из приведенного рассуждения ясно, что окружности $R_1, \dots, R_l$ взаимно однозначно соответствуют окружностям $P_1, \dots, P_l$ (в частности, $l = l'$), и для каждого $i = 1, \dots, l$ существует гомеоморфизм $h_i: M \rightarrow M$, который является тождественным вне некоторой окрестности кольца, ограниченного окружностями P_i и R_i , отображает окружность P_i в окружность R_i и переводит каждую траекторию потока v в себя с сохранением направления. Композиция $h_1 \circ \dots \circ h_l$ переводит набор $P_1, \dots, P_l$ в набор $R_1, \dots, R_l$.

Для двух произвольных разрезающих наборов достаточно рассмотреть аналогичные гомеоморфизмы, переводящие каждый из этих наборов в подходящий набор $R_1, \dots, R_l$, а затем взять их композицию. Лемма доказана.

Утверждение 2) леммы 3.10 означает, в частности, что элементарные области, на которые разбивается поверхность M , с точностью до эквивалентности не зависят от выбора разрезающего набора. Таким образом, каждому потоку Морса-Смейла однозначно ставится в соответствие некоторый набор v -атомов.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. *Указанная операция сопоставления произвольному потоку Морса-Смейла набора v -атомов является топологическим траекторным инвариантом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: M_1 \rightarrow M_2$ — гомеоморфизм, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v_1 и v_2 . Он переводит некоторый разрезающий набор для потока v_1 в набор окружностей на поверхности M_2 . Этот набор окружностей не обязан быть разрезающим для потока v_2 по той причине, что образы окружностей при гомеоморфизме h могут быть не трансверсальными траекториям потока v_2 (и вообще не гладкими). Однако они, очевидно, пересекают каждую траекторию ровно в одной точке. Сгладив образы окружностей так, чтобы они стали трансверсальны потоку v_2 , получим разрезающий набор для потока v_2 . Применяя теперь утверждение 2) леммы 3.10 к построенному и исходному разрезающим наборам потока v_2 , получаем требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Очевидно, набор v -атомов, определяемый произвольным разрезающим набором окружностей, не является в общем случае полным топологическим траекторным инвариантом (например, обоим потокам, описанным в примере 3.1, соответствуют одни и те же два v -атома типа S'). Кроме того, поскольку v -атом определяется как класс эквивалентности элементарных областей, пока не ясно, насколько интересен такой инвариант. Например, сам класс эквивалентности потока Морса-Смейла является его топологическим траекторным инвариантом (и, очевидно, полным), но такой инвариант никак не помогает эффективно решить задачу классификации.

На самом деле, как показано ниже, используя результаты § 1 и § 2, легко получить "эффективную" классификацию седловых v -атомов (классификация не седловых v -атомов уже описана в лемме 3.8). Оказывается, что для потоков Морса набор v -атомов, определяемый произвольным разрезающим набором окружностей, является полным топологическим траекторным инвариантом. Поскольку в

этом случае нет ни одного v -атома типа S , классификация седловых v -атомов эквивалентна траекторной классификации потоков Морса на связных поверхностях. Это можно сформулировать в следующем виде.

ЛЕММА 3.13. Пусть v – поток Морса на связной поверхности M , отличный от простейшего и имеющий k источников и стоков. Тогда

- 1) набор v -атомов, сопоставляемый потоку v , состоит ровно из одного седлового v -атома $Z(v)$ и k штук v -атомов типа A ;
- 2) поток v однозначно (с точностью до топологической траекторной эквивалентности) восстанавливается по v -атому $Z(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы очевидно, так как вырезание маленьких дисков, содержащих стоки и источники, из поверхности M не нарушает ее связности.

Доказательство второго утверждения сводится к следующему. Поверхность M с потоком v получается в результате “приклеивания” элементарных областей типа A по всем граничным окружностям элементарной области, соответствующей v -атому $Z(v)$. Надо показать, что это “приклеивание” определено однозначно с точностью до топологической траекторной эквивалентности. Более точно, надо показать, что любой гомеоморфизм f границы элементарной области типа A на себя продолжается до такого гомеоморфизма всей этой элементарной области на себя, который переводит траектории в траектории с сохранением направления. Ясно, что такое продолжение всегда существует. Например, можно продолжать f внутрь диска так, чтобы сохранялся параметр на траекториях. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что для классификации седловых v -атомов можно использовать любой из инвариантов, рассмотренных в § 1 и § 2. Мы будем считать, что каждому седловому v -атому V сопоставлен трехцветный граф $T(V)$.

3.3. Построение v -молекулы. Рассмотрим теперь произвольный поток Морса–Смейла v на поверхности M . Согласно следствию 3.11 ему соответствует однозначно определенный набор v -атомов. Чтобы восстановить поверхность M с потоком v , нужно склеить элементарные области, соответствующие v -атомам этого набора по граничным окружностям. Каждая склейка двух областей по двум граничным компонентам (окружностям) S_1 и S_2 однозначно определяется гомеоморфизмом $f: S_1 \rightarrow S_2$, причем гомотопные гомеоморфизмы дают одинаковый в смысле топологической траекторной эквивалентности результат (см., например, [11]). Поскольку с точностью до гомотопии существует ровно два различных гомеоморфизма окружности в окружность, то с точностью до топологической траекторной эквивалентности для каждой склейки существует не более двух возможностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.14. Говоря о склейке элементарных областей (т.е. многообразий с границей, на которых задан поток), мы, естественно, подразумеваем, что после склейки получается гладкое многообразие с гладким потоком. Несложно показать, что для произвольного гомеоморфизма граничных компонент этого можно достичь либо изменяя гладкую структуру, либо заменяя потоки на траекторно эквивалентные в некоторых маленьких окрестностях этих граничных компонент.

Если на граничных компонентах склеиваемых областей фиксирована некоторая ориентация, то выбор одной из двух возможных склеек можно задавать мет-

кой (± 1) для каждой пары отождествляемых при склейке окружностей: $(+1)$ означает, что ориентации при отождествлении согласованы, а (-1) – что не согласованы.

Таким образом, для однозначного описания всех склеек необходимо задать ориентации на граничных окружностях элементарных областей. Можно считать, что на границе элементарной области типа S (кольцо или лист Мёбиуса) ориентация индуцирована потоком на содержащемся в этой области предельном цикле. На границе элементарной области типа A (диск) ориентацию можно задать произвольно, так как для этой области существует гомеоморфизм, переводящий траектории в траектории и обращающий ориентацию на границе диска. Осталось задать ориентации на граничных окружностях седловых элементарных областей.

Каждая седловая элементарная область определяет v -атом, которому соответствует некоторый трехцветный граф. Мы предполагаем, что задача классификации седловых v -атомов (или, что то же самое, потоков Морса) уже решена, т.е. имеется список всех связанных трехцветных графов (с количеством вершин, не превосходящим некоторого числа K). Поэтому можно считать, что в этом списке трехцветные графы перечислены с указанием некоторой ориентации на всех st -циклах и tu -циклах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.15. В дальнейшем, говоря о некотором седловом v -атоме V , мы всегда будем подразумевать, что это v -атом из известного списка $V_1, V_2, \dots$, в котором седловые v -атомы представлены в виде трехцветных графов $T(V_i)$, т.е. V_i – это некоторая буква, обозначающая седловый v -атом, а $T(V_i)$ – это соответствующий ему связный трехцветный граф, у которого ориентации на всех st -циклах и tu -циклах были выбраны каким-то образом (после чего он был занесен в список) и больше не меняются. При этом будем предполагать, что для трехцветных графов, не имеющих циклов нечетной длины (т.е. соответствующих ориентируемым поверхностям – см. теорему 1.12), ориентации st -циклов и tu -циклов выбраны согласованно в смысле определения 1.14.

Конечно, перечислить седловые v -атомы (связные трехцветные графы) можно множеством способов. Мы лишь предполагаем, что список составлен и фиксирован. В §4 будет указан алгоритм, позволяющий некоторым стандартным способом ориентировать все st -циклы и tu -циклы данного трехцветного графа T (см. замечание 4.16). Этот алгоритм не является “естественным” в каком-то инвариантном смысле, но позволяет выбрать все ориентации однозначно с точностью до изоморфизма графа T .

Опишем теперь, как мы будем задавать ориентацию на граничных окружностях седловых элементарных областей. Трехцветный граф, соответствующий седловой элементарной области, определен однозначно (по существу, это есть утверждение 1) леммы 1.9). Рассуждая точно так же, как при доказательстве первой части теоремы 1.11, можно считать, что трехцветный граф вложен в седловую элементарную область как граф, двойственный графу, составленному из сепаратрис потока и t -траекторий. При этом вложении st -циклы будут соответствовать граничным окружностям элементарной области, в точках которых поток направлен внутрь области, а tu -циклы – граничным окружностям, в точках которых поток направлен наружу (см. рис. 3). Ясно, что задание ориентации на каком-либо st -цикле или tu -цикле вложенного трехцветного графа однозначно определяет ориентацию

на соответствующей этому циклу граничной окружности (и наоборот).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.16. Пусть $\tilde{T}$ – трехцветный граф, вложенный указанным выше образом в седловую элементарную область N , который изоморфен трехцветному графу T из списка. Произвольный изоморфизм $f: \tilde{T} \rightarrow T$ назовем *параметризацией седловой элементарной области N* . Ясно, что любая параметризация определяет ориентации всех st -циклов и tu -циклов графа $\tilde{T}$, поскольку на соответствующих циклах графа T ориентация задана. После этого однозначно определяются ориентации всех граничных окружностей элементарной области N . Будем говорить, что ориентации на граничных окружностях, полученные в результате описанной процедуры, *индуцированы параметризацией f* . Кроме того, параметризация, естественно, определяет биекцию множества граничных окружностей области N на множество st -циклов и tu -циклов графа T .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.17. Ясно, что различные параметризации седловой элементарной области определяют, вообще говоря, различные ориентации ее граничных окружностей. Можно сказать, что группа $G(T)$ автоморфизмов трехцветного графа T действует на множестве ориентаций граничных окружностей, индуцированных некоторой параметризацией: каждый автоморфизм $g \in G(T)$ переводит ориентации, индуцированные параметризацией f , в ориентации, индуцированные параметризацией $g \circ f$. Это действие транзитивное, и ядро его есть подгруппа $G_0(T)$ группы $G(T)$, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих ориентации всех st -циклов и tu -циклов графа T . Таким образом, имеется естественная биекция между множеством всех ориентаций граничных окружностей, индуцированных некоторой параметризацией, и множеством смежных классов $G(T)/G_0(T)$. В частности, количество различных возможностей при таком способе ориентирования граничных окружностей равно индексу подгруппы $G_0(T)$ в группе $G(T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.18. Если при траекторной классификации потоков Морса–Смейла ограничиться рассмотрением ориентированных многообразий и гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, то для произвольной (ориентированной) седловой элементарной области можно канонически ориентировать все ее граничные окружности. Например, можно выбирать на окружностях ориентацию таким образом, чтобы ориентация репера (w, v) , где w – касательный вектор к окружности, задающий ориентацию на ней, а v – внутренняя нормаль, совпадала с ориентацией касательной плоскости в данной точке. При такой ориентации граничных окружностей ориентируемой седловой элементарной области мы получим либо ориентацию, соответствующую определению 3.16, либо противоположную (одновременно на всех окружностях), поскольку у трехцветного графа (из списка), соответствующего ориентируемой элементарной области, st -циклы и tu -циклы ориентированы согласованно (см. замечание 3.15). Легко показать, что в ориентируемом случае подгруппа $G_0(T)$ либо совпадает со всей группой $G(T)$, либо является подгруппой индекса 2.

Теперь мы можем дать описание инварианта, классифицирующего потоки Морса–Смейла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.19. Назовем *v -молекулой* граф W , у которого все ребра ориентированы, а каждой вершине поставлен в соответствие либо v -атом A , либо

v -атом S , либо некоторый седловой v -атом из имеющегося списка $V_1, V_2, \dots$ (будем называть вершины графа W , соответственно, A -вершинами, S -вершинами и седловыми вершинами), причем выполнены следующие условия:

- 1) каждая A -вершина графа W имеет степень 1;
- 2) каждая S -вершина графа W имеет степень 1 или 2, причем если степень равна 2, то оба ребра одновременно либо входят в эту вершину, либо выходят из нее;
- 3) для каждой седловой вершины графа W , которой соответствует некоторый v -атом V_i , фиксирована произвольная биекция множества ребер, инцидентных этой вершине, на множество st -циклов и tu -циклов трехцветного графа $T(V_i)$ из списка, причем ребра, соответствующие st -циклам, входят в вершину, а ребра, соответствующие tu -циклам, выходят из нее (назовем эту биекцию *параметризацией данной седловой вершины*);
- 4) ни одно ребро графа W не соединяет две седловые вершины;
- 5) если ребро графа W соединяет две вершины, ни одна из которых не является A -вершиной, то на этом ребре стоит метка (± 1) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.20. Пусть v – поток Морса–Смейла на многообразии M . Будем говорить, что v -молекула есть v -молекула потока v (и обозначать ее $W(v)$), если она построена в результате описанной ниже процедуры.

1) Рассматривая некоторый разрезающий набор для потока v на многообразии M , получаем разбиение M на элементарные области. Эти области будут соответствовать вершинам графа $W(v)$, которые мы обозначим соответствующими буквами A, S или $V_1, V_2, \dots$ из имеющегося списка седловых v -атомов.

2) Для каждой окружности из данного разрезающего набора проведем ребро, соединяющее те две вершины, для которых соответствующие им элементарные области граничат по этой окружности, после чего ориентируем это ребро в соответствии с направлением потока v в точках рассматриваемой окружности (в точках окружности поток трансверсален ей, т.е. направлен из одной элементарной области в другую). В результате получим граф $W(v)$.

3) В соответствии с предыдущим пунктом для каждой седловой вершины V_i построенного графа имеется биекция между ребрами, инцидентными этой вершине, и граничными окружностями соответствующей ей седловой элементарной области. Фиксируя (произвольную) параметризацию этой элементарной области, получаем параметризацию вершины V_i .

4) Граничные окружности всех элементарных областей, кроме областей типа A , ориентированы: для седловых элементарных областей ориентации индуцированы выбранными на предыдущем шаге параметризациями, а на границах областей типа S ориентации заданы направлением потока на их предельных циклах. Это определяет две ориентации на каждой окружности рассматриваемого разрезающего набора, разделяющей области, отличные от областей типа A . Если эти ориентации совпадают, то поставим на соответствующем ребре построенного графа $W(v)$ метку $(+1)$, а если не совпадают, то (-1) .

Для того чтобы учесть неоднозначность, присутствующую в п. 3) изложенного правила построения v -молекулы $W(v)$, введем следующим образом отношение эквивалентности на множестве v -молекул.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.21. Пусть V_i – седловая вершина v -молекулы W (в частности, для вершины V_i задана некоторая параметризация φ_i – см. п. 3) определения 3.19). Рассмотрим произвольный автоморфизм g трехцветного графа $T(V_i)$, вообще говоря, не сохраняющий имеющиеся ориентации его st -циклов и tu -циклов (см. замечание 3.17). Пусть λ и μ – такие два st -цикла или два tu -цикла графа $T(V_i)$, что автоморфизм g переводит цикл λ в цикл μ (без учета их ориентаций). Тогда скажем, что ориентация цикла λ (не) *сохраняется при автоморфизме g* , если ориентации циклов $g(\lambda)$ и μ (не) согласованы. Назовем *перепараметризацией вершины V_i* операцию следующего вида: заменяем параметризацию φ_i вершины V_i на параметризацию $g \circ \varphi_i$ и изменяем метки на противоположные на тех ребрах $e_1, \dots, e_l$, инцидентных вершине V_i , для которых ориентации циклов $\varphi_i(e_1), \dots, \varphi_i(e_l)$ не сохраняются при автоморфизме g . При этом если какое-то из этих ребер e_j было без метки, то оно и остается без метки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.22. Две v -молекулы W и W' назовем *изоморфными*, если после некоторых перепараметризаций их седловых вершин они будут изоморфны как графы с сохранением обозначений вершин, ориентаций ребер, меток и параметризаций седловых вершин (сохранение параметризаций седловых вершин при изоморфизме графов означает следующее: если изоморфизм $h: W \rightarrow W'$ переводит вершину V с параметризацией φ в вершину V' с параметризацией φ' , то $\varphi = \varphi' \circ h$).

3.4. Теорема классификации и реализация инвариантов. Следующие утверждения показывают, что задача траекторной классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях эквивалентна классификации v -молекул с точностью до изоморфизма.

ТЕОРЕМА 3.23. Два потока Морса–Смейла v и v' на двумерных поверхностях M и M' топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что v -молекулы топологически траекторно эквивалентных потоков изоморфны. Пусть $h: M \rightarrow M'$ – гомеоморфизм, устанавливающий топологическую траекторную эквивалентность потоков v и v' . Поскольку на любом многообразии все разрезающие наборы эквивалентны (утверждение 2) леммы 3.10), можно считать, что разрезающие наборы, используемые при построении v -молекул $W(v)$ и $W(v')$, переводятся друг в друга гомеоморфизмом h . Действуя в соответствии с п. 1) и п. 2) из определения 3.20, построим графы $W(v)$ и $W(v')$ с ориентированными ребрами. Гомеоморфизм h очевидным образом определяет отображение $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$, являющееся изоморфизмом графов с сохранением ориентации на ребрах. Выбирая теперь произвольные параметризации седловых элементарных областей, построим полностью v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$.

Пусть f_i и f'_i – параметризации седловых элементарных областей, соответствующих некоторой вершине V_i графа $W(v)$ и вершине $V'_i = \tilde{h}(V_i)$ графа $W(v')$. Здесь также можно считать, что трехцветные графы, вложенные в эти седловые элементарные области, переводятся друг в друга гомеоморфизмом h . Тогда $g_i = f'_i \circ h \circ f_i^{-1}$ есть автоморфизм трехцветного графа $T_i = T(V_i) = T(V'_i)$, где T_i – граф из списка. Сделаем перепараметризацию вершины V_i с помощью автоморфизма g_i графа T_i . Легко понять, что после аналогичных перепараметризаций всех

седловых вершин v -молекулы $W(v)$ отображение $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$ будет изоморфизмом, сохраняющим обозначения вершин, ориентации ребер, метки и параметризации седловых вершин, т.е. v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ изоморфны.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть v и v' – два таких потока Морса–Смейла на многообразиях M и M' , соответственно, что v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ изоморфны. Очевидно, что любую перепараметризацию некоторой вершины v -молекулы $W(v)$, определяемую автоморфизмом g соответствующего трехцветного графа, можно рассматривать как результат замены параметризации f соответствующей ей седловой элементарной области на параметризацию $g \circ f$. Поскольку каждая параметризация f произвольно выбирается при построении v -молекулы $W(v)$, будем считать, что v -молекулы $W(v)$ и $W(v')$ были построены таким образом, что существует отображение $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$, являющееся изоморфизмом графов, сохраняющим обозначения вершин, ориентации ребер, метки и параметризации седловых вершин. Необходимо доказать, что в этом случае существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, переводящий траектории потока v в траектории потока v' .

Поскольку $\tilde{h}$ сохраняет обозначения седловых вершин и их параметризации, для седловой элементарной области N_i , соответствующей вершине V_i графа $W(v)$, и седловой элементарной области N'_i , соответствующей вершине $\tilde{h}(V_i)$ графа $W(v')$, существует гомеоморфизм $h_i: N_i \rightarrow N'_i$, переводящий траектории потока v в траектории потока v' и “совпадающий” с отображением $\tilde{h}$ на множестве граничных окружностей (т.е. для любого ребра e , инцидентного вершине V_i , граничная окружность области N_i , соответствующая этому ребру, переходит при гомеоморфизме h_i в граничную окружность области N'_i , соответствующую ребру $\tilde{h}(e)$). Поскольку в v -молекуле не бывает ребер, соединяющих седловые вершины, можно считать, что требуемый гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$ уже определен на седловых элементарных областях формулой $h|_{N_i} = h_i$. В частности, он определен на окружностях разрезающего набора, являющихся граничными для какой-либо седловой области.

Определим гомеоморфизм h на всех остальных окружностях разрезающего набора многообразия M так, чтобы они переходили в соответствующие (при отображении $\tilde{h}$) окружности разрезающего набора многообразия M' с согласованием ориентаций, индуцированных на них предельными циклами в примыкающих элементарных областях типа S . Это возможно, так как изоморфизм $\tilde{h}: W(v) \rightarrow W(v')$ сохраняет метки на ребрах. Для окружности разрезающего набора, разделяющей две области типа A (такая ситуация возникает лишь для простейшего потока, описанного в замечании 1.6), определим гомеоморфизм h на этой окружности произвольно.

Теперь гомеоморфизм h определен на всех окружностях разрезающего набора и на всех седловых элементарных областях. Чтобы полностью построить гомеоморфизм h , необходимо для каждой элементарной области типа A или типа S продолжить его с границы на всю область. При этом для элементарных областей типа S гомеоморфизм, заданный на граничных окружностях, согласован с их ориентациями, индуцированными ориентациями предельных циклов. В этой ситуации существование требуемого продолжения доказано в [11]. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.24. *Для любой v -молекулы W существует такой поток Морса–Смейла v на двумерной поверхности M , что W изоморфна $W(v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемый поток Морса–Смейла v легко построить, используя структуру v -молекулы W . Действительно, чтобы получить поверхность M с потоком, необходимо лишь склеить элементарные области, соответствующие вершинам v -молекулы W , по граничным окружностям. Ориентации на граничных окружностях заданы параметризацией седловых вершин и направлением потока на предельных циклах, а правила склейки определяются метками (± 1) на ребрах v -молекулы W . Теорема доказана.

Теорема 3.24 утверждает, что любая v -молекула является допустимой. Приведем еще один результат, описывающий множество v -молекул, являющихся допустимыми для многообразия данного топологического типа.

ТЕОРЕМА 3.25. *Пусть $W(v)$ – v -молекула потока Морса–Смейла v , заданного на поверхности M . Тогда*

- 1) *эйлерова характеристика поверхности M равна*

$$\chi(M) = (\text{количество } v\text{-атомов } A) - \sum_i c(V_i),$$

где через $c(V)$ обозначена сложность v -атома V , а суммирование происходит по всем седловым вершинам v -молекулы $W(v)$;

- 2) *поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда все v -атомы, соответствующие вершинам v -молекулы $W(v)$, ориентируемы, и для каждого цикла в графе $W(v)$ (без учета ориентаций ребер) произведение всех меток, стоящих на ребрах этого цикла, равно $(-1)^k$, где k – количество седловых вершин на этом цикле (каждая вершина считается столько раз, сколько раз цикл проходит через нее).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение есть просто формула для суммы индексов особых точек поля v .

Докажем второе утверждение. Пусть C – некоторый цикл в графе $W(v)$. Этот цикл разбивается седловыми вершинами на отрезки, каждому из которых в поверхности M соответствует кольцо, склеенное из нескольких элементарных областей типа S . Рассмотрим одно из таких колец K . Его граница есть пара окружностей, являющихся граничными окружностями некоторых седловых элементарных областей. Поэтому на границе кольца K фиксирована ориентация, индуцированная параметризациями этих элементарных областей (выбранными при построении v -молекулы $W(v)$). Легко понять, что произведение меток (± 1) , стоящих на ребрах рассматриваемого отрезка цикла C , равно $(+1)$, если ориентации граничных окружностей кольца K одинаковы (т.е. эти окружности изотопны в кольце K с сохранением ориентации), и равно (-1) , если они противоположны.

Напомним, что для ориентируемых седловых элементарных областей мы всегда выбираем на границе ориентацию, индуцированную ориентацией самой области (см. замечание 3.18). Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.26. Пусть $P_1, \dots, P_m$ — двумерные ориентированные поверхности с краем, причем на граничных окружностях задана индуцированная ориентация. Рассмотрим поверхность M , склеенную из этих поверхностей по некоторым диффеоморфизмам их граничных окружностей. Изобразим эту склейку в виде графа Γ с вершинами $p_1, \dots, p_m$, где вершина p_i соответствует поверхности P_i , а каждой склейке P_i с P_j соответствует ребро, соединяющее p_i с p_j , на котором стоит метка $(+1)$, если эта склейка сохраняет ориентации склеиваемых окружностей, или (-1) , если не сохраняет.

Поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда для любого цикла C графа Γ произведение меток на ребрах цикла C равно $(-1)^{l(C)}$, где $l(C)$ — длина цикла C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда ориентации на склеиваемых поверхностях $P_1, \dots, P_m$ можно изменить так, чтобы они стали согласованы после склейки. Согласованность ориентаций означает, что все метки на ребрах графа Γ равны (-1) . Изменению ориентации поверхности P_i соответствует изменение меток на противоположные на всех ребрах графа Γ , инцидентных вершине p_i . При выполнении такой операции произведение меток на ребрах произвольного цикла графа Γ не меняется. Поэтому если поверхность M ориентируема, то требуемое условие выполнено.

Для доказательства утверждения в обратную сторону рассмотрим следующую одномерную цепочку α на графе Γ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$:

$$\alpha(e) = \begin{cases} 0, & \text{если метка на ребре } e \text{ равна } (-1), \\ 1, & \text{если метка на ребре } e \text{ равна } (+1). \end{cases}$$

Очевидно, что условие

$$(\text{произведение меток на ребрах цикла } C) = (-1)^{l(C)}$$

равносильно условию $\alpha(C) = 0$. Так как это условие выполнено для любого цикла C , то цепочка α точна: $\alpha = \delta(\beta)$. При изменении ориентаций всех поверхностей P_i , для которых $\beta(p_i) = 1$, все метки на ребрах графа Γ станут равны (-1) . Лемма доказана.

§ 4. Кодирование и перечисление потоков

Для построенных в § 1 и § 3 инвариантов (трехцветных графов и v -молекул) легко описать алгоритмы сравнения и перечисления. Один из возможных способов сделать это излагается в данном параграфе.

4.1. Кодирование и перечисление потоков Морса. В силу теоремы 1.11 трехцветные графы, у которых длины всех su -циклов равны 4 (и только они), являются инвариантами потоков Морса. В этом параграфе мы рассматриваем только такие трехцветные графы. Поэтому в дальнейшем “трехцветный граф” означает “трехцветный граф, у которого длины всех su -циклов равны 4”.

Мы хотим “записать” каждый трехцветный граф в виде строки символов некоторого алфавита. Из описания алгоритма будет ясно, что количество символов в

алфавите, необходимое для кодирования трехцветного графа T , есть число $m_1(T)$ (количество *su*-циклов графа T). Мы будем считать, что символы нашего алфавита – это цифры. Этого заведомо достаточно для описания различных примеров и составления начальной части списка трехцветных графов (см. таблицу 1 в приложении).

Определим сначала, какой вид может иметь строка цифр, сопоставленная трехцветному графу в качестве кода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Назовем *допустимой строчкой сложности N* строчку символов вида

$$(0 X_1^{(1)} \dots X_{l_1}^{(1)} 0 X_1^{(2)} \dots X_{l_2}^{(2)} 0 \dots 0 X_1^{(m)} \dots X_{l_m}^{(m)}) ,$$

где $X_i^{(j)}$ – символы из набора $A_N = \{1, 1', \bar{1}, \bar{1}', \dots, N, N', \bar{N}, \bar{N}'\}$. Причем для каждого $K \in \{1, \dots, N\}$ ровно один из пары символов $K, \bar{K}$ и ровно один из пары символов $K', \bar{K}'$ встречаются в этой строчке (в частности, $l_1 + l_2 + \dots + l_m = 2N$). Часть допустимой строчки вида $0 X_1^{(j)} \dots X_{l_j}^{(j)}$ будем называть ее *отрезком*, а число $l_j \geq 0$ – *длиной* этого отрезка. При этом будем предполагать, что все отрезки нулевой длины расположены в начале допустимой строчки (например, $(00011')$ – допустимая строчка сложности 1, состоящая из двух отрезков длины 0 и одного отрезка длины 2).

Про допустимую строчку сложности $N \geq 1$ будем говорить, что она *распадается*, если множество ее отрезков можно разбить на два таких непересекающихся подмножества, что каждая пара символов, соответствующих одной и той же цифре, содержится в одном из этих подмножеств. Все допустимые строчки сложности 0, состоящие из нескольких отрезков, по определению считаем распадающимися.

Нераспадающиеся строчки сложности $N \geq 1$ будут соответствовать связным трехцветным графам с $4N$ вершинами, а каждый отрезок нулевой длины – связанной компоненте многообразия, на которой поток является простейшим (см. замечание 1.6). Поэтому при кодировании потоков Морса на связных поверхностях можно было бы вообще не рассматривать распадающиеся строчки (в частности, строчки сложности 0 из нескольких отрезков). Однако аналогичный подход будет использован и для кодирования потоков Морса–Смейла, где приходится рассматривать уже произвольные строчки.

Изложим теперь схему, по которой мы будем действовать при классификации трехцветных графов.

(i) Сначала описывается алгоритм, который позволяет по данному трехцветному графу T с $4N$ вершинами построить некоторую допустимую строчку $\tilde{C}(T)$ сложности N . Эта строчка строится неоднозначно, так как в процессе построения мы произвольным образом выбираем некоторые ребра трехцветного графа и ориентации на них. Но если для каждого неоднозначного выбора рассмотреть все возможности, то можно построить все строчки $\tilde{C}_i(T)$, соответствующие данному трехцветному графу T . Их будет конечное число, и по каждой из них трехцветный граф T восстанавливается однозначно.

(ii) Далее определяется алгоритм сравнения любых двух допустимых строчек. Применяя этот алгоритм, мы можем из любых двух строчек выбрать ту, которая

“меньше” другой. Таким образом, на множестве всех допустимых строчек вводится отношение порядка.

(iii) После этого мы определяем код $C(T)$, сопоставляемый трехцветному графу T , как минимальную строчку из всех $\tilde{C}_i(T)$. При этом мы описываем операции над строчками, при помощи которых можно построить минимальную строчку $C(T)$ по данной произвольной строчке $\tilde{C}_i(T)$.

Если пп. (i)–(iii) реализованы, то алгоритм сравнения двух трехцветных графов T_1 и T_2 можно описать следующим образом: строим (неоднозначно) строчки $\tilde{C}(T_1)$ и $\tilde{C}(T_2)$ (п. (i)), находим соответствующие им минимальные строчки $C(T_1)$ и $C(T_2)$ (п. (iii)), сравниваем эти строчки (п. (ii)). Алгоритм перечисления трехцветных графов можно реализовать так: выписываем все допустимые строчки сложности N , после чего для каждой из них находим соответствующую минимальную строчку, из которых уже формируем список (выбрасывая распадающиеся строчки). В результате получаем упорядоченный список всех связных трехцветных графов с $4N$ вершинами (т.е. список всех потоков Морса с N седловыми точками).

Итак, пусть T – некоторый трехцветный граф. Опишем алгоритм построения некоторой допустимой строчки $\tilde{C}(T)$ сложности $N = m_1(T)$, состоящей из $m_0(T)$ отрезков.

АЛГОРИТМ 4.2. (1) Занумеруем все su -циклы цифрами $1, 2, \dots, N$ и выберем в каждом su -цикле некоторую вершину (произвольно). Будем называть такие вершины *отмеченными*. После этого введем следующие обозначения для ориентированных s -ребер графа T : ориентированное s -ребро, началом которого является какая-либо из отмеченных вершин, обозначим символом K , соответствующим номеру su -цикла, содержащего эту вершину; ориентированное s -ребро, противоположное ребру K в su -цикле и задающее на нем ту же ориентацию, обозначим K' ; ориентированные s -ребра, отличающиеся от ребер K и K' ориентацией, обозначим, соответственно, $\bar{K}$ и $\bar{K}'$ (см. рис. 15, где отмеченные вершины обведены кружком). В результате каждое ориентированное s -ребро графа T будет обозначено некоторым символом из набора A_N .

Рис. 15

(2) Для каждого st -цикла выберем на нем ориентацию и некоторое начальное s -ребро (произвольно). После этого для каждого st -цикла строится отрезок строчки $\tilde{C}(T)$ следующим образом: будем идти вдоль данного st -цикла по s -ребрам (начиная с выбранного s -ребра и в выбранном направлении), записывая последовательно обозначения соответствующих s -ребер, ориентированных на

правлением движения по st -циклу. Приписывая символ 0 в начале каждой из построенных последовательностей символов, получаем строчки вида $0 X_1 X_2 \dots X_l$, где $X_i \in A_N$, а $2l$ – длина соответствующего st -цикла.

(3) Упорядочим все st -циклы (произвольно) и запишем в этом порядке соответствующие последовательности вида $0 X_1 X_2 \dots X_l$, построенные на предыдущем шаге. Очевидно, полученная строчка $\tilde{C}(T)$ является допустимой. Она состоит из $m_0(T)$ отрезков и имеет сложность $m_1(T)$.

Рис. 16

ПРИМЕР 4.3. На рис. 16 показан процесс выписывания строчки $\tilde{C}(T)$ для трехцветного графа T , соответствующего потоку, описанному в примере 1.8 (см. рис. 2(с)). Этот граф имеет два st -цикла и два su -цикла. Поэтому соответствующая строчка $\tilde{C}(T)$ должна состоять из двух отрезков и иметь сложность 2. Отмеченные вершины обведены кружком, рядом указаны номера содержащих их su -циклов; в каждом st -цикле выделено ориентированное s -ребро, задающее на нем направление и “начало отсчета”, после этого однозначно выписываются два отрезка 01 и $0\bar{1}'2'2$, соответствующие двум st -циклам рассматриваемого графа T ; окончательный результат – строчка $\tilde{C}(T) = (010\bar{1}'2'2)$.

Покажем теперь, как восстановить трехцветный граф T по построенной строчке $\tilde{C}(T)$.

ЛЕММА 4.4. Для любой допустимой строчки C без отрезков нулевой длины существует единственный (с точностью до изоморфизма) трехцветный граф T , для которого $C = \tilde{C}(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – некоторая допустимая строчка сложности N . Рассмотрим N циклов длины 4, у каждого из которых одна пара противоположных сторон – цвета s , а другая – цвета u . Пусть эти циклы занумерованы цифрами $1, 2, \dots, N$, и в каждом из них одна из вершин отмечена. Тогда точно так же, как в п. (1) алгоритма 4.2, каждому ориентированному ребру цвета s в цикле с номером K однозначно сопоставляется обозначение X вида $K, K', \bar{K}$ или $\bar{K}'$ (см. рис. 15). В результате каждому символу строчки C , отличному от нуля, ставится в соответствие некоторое ориентированное ребро цвета s в рассматриваемом наборе циклов.

Построим трехцветный граф T , в котором рассматриваемые циклы будут su -циклами, следующим образом: для каждого отличного от нуля символа X в строчке C соединим ребром цвета t конец ребра, соответствующего этому символу, и начало ребра, соответствующего следующему за X символу в строчке C . При этом если X

последний символ в отрезке строчки C , то будем считать, что следующий за ним символ – это первый отличный от нуля символ данного отрезка. Легко понять, что в результате получится некоторый трехцветный граф T . Из описанного процесса построения графа T ясно также, как надо выбрать все необходимые нумерации и ориентации его элементов, чтобы получить исходную строчку C как $\tilde{C}(T)$.

Докажем единственность построенного графа T . Предположим, что алгоритм 4.2 сопоставляет одну и ту же строчку C двум трехцветным графам T_1 и T_2 (при некоторых ориентациях и нумерациях циклов этих графов). Тогда легко построить отображение $F: T_1 \rightarrow T_2$, устанавливающее изоморфизм этих графов. Действительно, отображение, переводящее su -циклы графа T_1 в su -циклы графа T_2 с теми же номерами, так чтобы отмеченные вершины графа T_1 переходили в отмеченные вершины графа T_2 , очевидно, продолжается до отображения всего графа T_1 и является изоморфизмом. Лемма доказана.

Определим теперь правило сравнения двух допустимых строчек. Это правило задает отношение порядка на множестве всех допустимых строчек. Будем обозначать это отношение знаком " $<$ ".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пусть C_1 и C_2 – некоторые допустимые строчки.

- 1) Если сложность строчки C_1 меньше сложности строчки C_2 , то $C_1 < C_2$.
- 2) Если сложности строчек C_1 и C_2 равны, то они сравниваются лексикографически (т.е. $(a_1, a_2, \dots) < (b_1, b_2, \dots)$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \dots, a_{i-1}) = (b_1, \dots, b_{i-1})$ и $a_i < b_i$ для некоторого $i \geq 1$), где символы, из которых состоят допустимые строчки, упорядочены следующим образом:

$$0 < 1 < \bar{1} < 1' < \bar{1}' < 2 < \bar{2} < 2' < \bar{2}' < \dots < K < \bar{K} < K' < \bar{K}' < \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Кодом $C(T)$ трехцветного графа T называется строчка, являющаяся наименьшей среди всех допустимых строчек, которые можно сопоставить графу T , действуя по алгоритму 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Конечно, для того чтобы сформулировать определение 4.6, годится любое отношение порядка на множестве допустимых строчек. Указанное правило сравнения допустимых строчек удобно тем, что коды потоков Морса будут обладать некоторыми "естественными" свойствами. Например, коды, соответствующие потокам Морса на ориентируемых поверхностях, характеризуются тем, что не содержат символов с чертой (см. лемму 4.17).

Каждому потоку Морса v , отличному от простейшего, соответствует трехцветный граф $T(v)$, которому мы сопоставили код $C(T(v))$. Будем считать, что каждой компоненте многообразия, на которой поток v является простейшим, соответствует в допустимой строчке отрезок нулевой длины (в частности, простейшему потоку сопоставлен код (0)). Тогда можно говорить о коде $C(v)$ потока Морса v .

Из леммы 4.4 следует, что все множество допустимых строчек разбивается на классы эквивалентности (строчки C_1 и C_2 эквивалентны, если им соответствуют топологически траекторно эквивалентные потоки Морса). С этой точки зрения код $C(T)$ есть просто минимальный элемент в соответствующем классе эквивалентности относительно введенного выше отношения порядка.

Опишем явно операции над допустимыми строчками, при помощи которых можно любые две эквивалентные строчки перевести друг в друга (в частности, любую допустимую строчку – в эквивалентную ей минимальную).

ЛЕММА 4.8. *Две допустимые строчки эквивалентны тогда и только тогда, когда одну из другой можно получить в результате выполнения следующих операций.*

- (1) Во всей строчке все символы вида $1, 1', \bar{1}, \bar{1}', \dots, N, N', \bar{N}, \bar{N}'$ заменяем символами $\sigma(1), \sigma(1'), \sigma(\bar{1}), \sigma(\bar{1}'), \dots, \sigma(N), \sigma(N'), \sigma(\bar{N}), \sigma(\bar{N})'$, соответственно, где σ – некоторая перестановка.
- (2) Для некоторой цифры $K \in \{1, 2, \dots, N\}$ заменяем
 - а) символы $K, K', \bar{K}, \bar{K}'$ на символы $K', K, \bar{K}', \bar{K}$ или
 - б) символы $K, K', \bar{K}, \bar{K}'$ на символы $\bar{K}, \bar{K}', K, K'$, соответственно.
- (3) Для некоторого отрезка $0 X_1 X_2 \dots X_l$ заменяем его
 - а) на отрезок $0 X_{p+1} X_{p+2} \dots X_l X_1 \dots X_p$, где $1 \leq p \leq l-1$, или
 - б) на отрезок $0 \bar{X}_l \bar{X}_{l-1} \dots \bar{X}_1$, где $X_i \in A_N$, причем (по определению полагаем) $\bar{\bar{K}} = K$ и $\bar{\bar{K}}' = K'$.
- (4) Переставляем отрезки строчки произвольным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные в формулировке леммы операции соответствуют тем действиям алгоритма 4.2, которые определены неоднозначно. Операция (1) соответствует перенумерации *зи*-циклов, операции (2а) и (2б) – изменению выбора отмеченной вершины в *зи*-цикле с номером K на шаге (1) алгоритма 4.2, операции (3а) и (3б) – выбору (ориентированного) начального *s*-ребра на шаге (2) алгоритма 4.2, операция (4) – шагу (3). Лемма доказана.

ПРИМЕР 4.9. Строчка $\tilde{C}(T) = (0\ 1\ 0\ \bar{1}'\ 2'\ 2)$, построенная в примере 4.3, не является минимальной в своем классе эквивалентности. Ее можно перевести в минимальную при помощи следующих операций из леммы 4.8:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(T) = (0\ 1\ 0\ \bar{1}'\ 2'\ 2) &\xrightarrow{(3b)} (0\ 1\ 0\ \bar{2}\ \bar{2}'\ 1') \\ &\xrightarrow{(2b)} (0\ 1\ 0\ 2\ 2'\ 1') \xrightarrow{(3a)} (0\ 1\ 0\ 1'\ 2\ 2') = C(T). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.10. *Код $C(v)$ является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков Морса, т.е. потоки Морса v_1 и v_2 топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $C(v_1) = C(v_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение есть следствие теоремы 1.10 и леммы 4.4.

Список кодов для потоков Морса сложности ≤ 2 приведен в приложении (см. таблицу 1).

4.2. Кодирование и перечисление потоков Морса–Смейла. Код для потоков Морса–Смейла общего вида можно построить, добавив к коду, построенному в предыдущем пункте, некоторую дополнительную информацию.

Рассмотрим сначала поток Морса–Смейла v , все предельные циклы которого являются отталкивающими. Если разрезать многообразие M , на котором задан поток v , по предельным циклам, а затем стянуть в точку каждую компоненту разреза, то мы получим поток Морса $\tilde{v}$ на многообразии $\tilde{M}$. Этому потоку соответствует код $C(\tilde{v})$. Отметим, что многообразие $\tilde{M}$ может быть несвязно, даже если многообразие M было связно.

На языке v -молекул эта операция описывается следующим образом: v -атомы $(\dots \leftarrow S \rightarrow \dots)$ заменяются на пары v -атомов $(\dots \leftarrow A \rightarrow \dots)$, а v -атомы $(S \rightarrow \dots)$ – на v -атомы $(A \rightarrow \dots)$. При этом уничтожаются все имевшиеся на ребрах v -молекулы метки (± 1) . Для того чтобы восстановить исходную v -молекулу, нужно указать, каким из v -атомов A в полученной v -молекуле $W(\tilde{v})$ соответствуют v -атомы S в v -молекуле $W(v)$, а также указать, какие метки стояли на ребрах, инцидентных этим v -атомам S .

Из построения кода для потока Морса ясно, что v -атомы $(A \rightarrow \dots)$ в v -молекуле $W(\tilde{v})$ взаимно однозначно соответствуют символам 0 в коде $C(\tilde{v})$. Поэтому необходимую информацию о v -атомах S в v -молекуле $W(v)$ можно приписать каким-либо образом символам 0 в строчке $C(\tilde{v})$ (см. ниже определение 4.18).

Если поток Морса–Смейла v имеет притягивающие предельные циклы, то на языке v -молекул ситуация полностью аналогична той, которая описана выше. Однако соответствие между притягивающими циклами и элементами кода $C(\tilde{v})$ не такое явное, как для отталкивающих циклов. Дело в том, что мы строили код потока Морса, рассматривая s -ребра соответствующего трехцветного графа, т.е., по существу, используя лишь информацию о том, как “взаимодействуют” источники и седла потока. Если же при построении кода потока Морса использовать u -ребра вместо s -ребер, то символам 0 будут соответствовать притягивающие предельные циклы потока, поскольку замена s -ребер на u -ребра соответствует замене потока v на поток $-v$.

Таким образом, при построении кода v -молекулы удобно использовать сразу оба класса допустимых строчек (т.е. построенных с использованием s -ребер и u -ребер). Из теоремы 4.10 следует, что коды, построенные этими двумя способами, выражаются друг через друга. Опишем это соответствие в явном виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11. Пусть допустимая строчка C_1 построена по алгоритму 4.2 для некоторого трехцветного графа T . Допустимую строчку C_2 назовем *двойственной к строчке C_1* , если ее можно построить следующим образом: занумеруем su -циклы и выберем отмеченные вершины точно так же, как и при построении строчки C_1 ; далее будем действовать согласно алгоритму 4.2, но рассматривая везде u -ребра вместо s -ребер. Кроме того, если строчка C_1 имеет отрезки нулевой длины, то по определению полагаем, что двойственная строчка C_2 имеет столько же отрезков нулевой длины.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Ясно, что отношение двойственности симметрично. Поэтому можно говорить о двойственных допустимых строчках. Отметим, что отноше-

ние двойственности не сохраняется при замене допустимых строчек на эквивалентные. В частности, коды, соответствующие двойственным строчкам, не обязаны быть двойственными.

Для каждого ориентированного s -ребра трехцветного графа T определено следующее за ним ориентированное s -ребро в соответствующем st -цикле. Если фиксировать нумерацию su -циклов графа T и выбор отмеченных вершин в них, то это соответствие однозначно определяет отображение $A_N \rightarrow A_N$. Таким образом, для каждой допустимой строчки C определена некоторая биекция $R_C: A_N \rightarrow A_N$. Сформулируем это в виде следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.13. Каждой допустимой строчке C сложности N сопоставим операцию $R_C: A_N \rightarrow A_N$, действующую по следующим правилам:

- 1) если символ $X \in A_N$ содержится в строчке C , то $R_C(X)$ есть символ, следующий за X в строчке C (при этом мы считаем, что за последним символом отрезка следует его первый отличный от нуля символ);
- 2) если символ $X \in A_N$ не содержится в строчке C , то $R_C(X) = \overline{R_C^{-1}(\bar{X})}$, где, как и раньше, мы полагаем по определению $\bar{X} = X$, т.е. в этом случае $\overline{R_C(X)}$ есть символ, предшествующий символу $\bar{X}$ (который в силу определения 4.1 обязан содержаться в строчке C , если X не содержится в ней).

Как легко понять, задание операции R_C определяет саму строчку C с точностью до применения операций (3) и (4) из леммы 4.8. Из определения 4.11 следует, что строчка, двойственная к данной строчке C_1 , тоже определена с точностью до применения операций (3) и (4) из леммы 4.8. Поэтому для того чтобы описать правило построения некоторой допустимой строчки C_2 , двойственной к строчке C_1 , достаточно описать связь между операциями R_{C_1} и R_{C_2} .

ЛЕММА 4.14. Пусть C_2 – допустимая строчка, двойственная к допустимой строчке C_1 сложности N . Тогда $R_{C_2} = \psi \circ R_{C_1} \circ \varphi$, где операции $\varphi, \psi: A_N \rightarrow A_N$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi: K &\mapsto K', K' \mapsto K, \bar{K} \mapsto \bar{K}, \bar{K}' \mapsto \bar{K}', \\ \psi: K &\mapsto K, K' \mapsto K', \bar{K} \mapsto \bar{K}', \bar{K}' \mapsto \bar{K}\end{aligned}$$

для любого $K \in \{1, \dots, N\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Геометрически операции φ и ψ означают следующее: если $X \in A_N$ есть обозначение ориентированного ребра в некотором su -цикле, то $\varphi(X)$ – обозначение другого ребра с тем же концом, а $\psi(X)$ – обозначение другого ребра с тем же началом, что и у ребра X (см. рис. 17(а), (б)).

Отсюда сразу следует утверждение леммы – см. рис. 17(с), где $Y = \varphi(X)$, а $R_{C_2}(X) = \psi(R_{C_1}(Y))$. Лемма доказана.

Используя лемму 4.14, легко описать алгоритм построения некоторой строчки, двойственной к данной строчке. Например, строчку $\tilde{C}$, минимальную среди всех строчек, двойственных к данной строчке C , можно построить следующим образом. Сначала выписываем отрезки нулевой длины (столько, сколько их содержится в строчке C). Затем начинаем выписывать отрезки с символами из A_N : первый

Рис. 17

символ первого отрезка есть 1, следующий за ним символ есть $R_{\tilde{C}}(1)$ и т. д. пока не получим опять символ 1. Начиная выписывать следующий отрезок, среди всех таких символов X , для которых ни X , ни $\bar{X}$ еще не использовались, выбираем наименьший – он будет первым символом отрезка. Если на каком-то шаге уже нельзя выбрать такой символ (это означает, что мы использовали $2N$ символов), то минимальная двойственная строчка построена.

ПРИМЕР 4.15. Рассмотрим описанный выше алгоритм на примере кода $C = (0\ 1\ 0\ 1'2\ 2')$ из примера 4.9: выписывая первый отрезок

$$1 \xrightarrow{\varphi} 1' \xrightarrow{R_C} 2 \xrightarrow{\psi} 2 \quad 2 \xrightarrow{\varphi} 2' \xrightarrow{R_C} 1' \xrightarrow{\psi} 1' \quad 1' \xrightarrow{\varphi} 1 \xrightarrow{R_C} 1 \xrightarrow{\psi} 1,$$

получаем $0\ 1\ 2\ 1'$; выписывая второй отрезок

$$2' \xrightarrow{\varphi} 2 \xrightarrow{R_C} 2' \xrightarrow{\psi} 2',$$

получаем $\tilde{C} = (0\ 1\ 2\ 1'0\ 2')$. Отметим, что $\tilde{C}$ является минимальной двойственной к C строчкой, но не является минимальной строчкой в своем классе эквивалентности (которой в данном случае является исходная строчка C).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.16. Для каждого трехцветного графа T однозначно определен код $C(T)$, для которого также однозначно строится минимальная двойственная строчка $\tilde{C}$. Используя эти строчки C и $\tilde{C}$, можно задавать ориентации st -циклов и tu -циклов графа T . Действительно, каждый отрезок допустимой строчки есть последовательность ориентированных ребер графа T (s -ребер для строчки C и u -ребер для строчки $\tilde{C}$), принадлежащих одному циклу и задающих на нем одну и ту же ориентацию. В дальнейшем мы будем предполагать, что для трехцветного графа T из списка отрезки соответствующего ему кода C задают ориентацию st -циклов, а отрезки минимальной двойственной к коду C строчки $\tilde{C}$ задают ориентацию, противоположную ориентации tu -циклов.

Докажем, что в ориентируемом случае описанное правило определяет согласованные ориентации циклов графа T в смысле определения 1.14.

ЛЕММА 4.17. Пусть трехцветный граф T – есть инвариант потока Морса v на связной поверхности M . Код $C(T)$ не содержит символов с чертой тогда и только тогда, когда поверхность M ориентируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону верно даже более общее утверждение. А именно: если некоторая строчка $\tilde{C}(T)$ не содержит символов с чертой, то поверхность ориентируема. Действительно, используя ориентацию s -ребер графа T , соответствующую строчке $\tilde{C}(T)$, легко указать правильную (см. лемму 1.13) расстановку меток в вершинах графа T : $(+1)$ в началах всех s -ребер и (-1) в концах.

Докажем теперь утверждение в другую сторону: если код $C(T)$ содержит символы с чертой, то поверхность M не ориентируема.

Пусть s -ребра графа T ориентированы в соответствии с кодом $C(T)$. Для каждого st -цикла графа T имеется пересекающийся с ним su -цикл с минимальным номером. В этом su -цикле есть отмеченная вершина (назовем ее *минимальной отмеченной вершиной для данного st -цикла*). Как легко понять, если номер этой вершины отличен от 1, то она не принадлежит данному st -циклу (иначе поверхность M была бы несвязной). Из определения кода также легко следует, что первый символ с чертой в строчке $C(T)$ не может иметь вид $\bar{K}$. Пусть $\bar{K}'$ – первый символ с чертой в строчке $C(T)$. Для любого s -ребра в st -цикле, содержащем $\bar{K}'$, или в более раннем st -цикле рассмотрим путь вида $s-t-s-t-\dots-s-t-s-u$ от начала этого ребра до минимальной отмеченной вершины V для рассматриваемого st -цикла. Он, очевидно, четной длины. Вершина V также является началом некоторого s -ребра, поскольку $\bar{K}'$ – первый символ с чертой в строчке $C(T)$. Будем повторять процедуру пока не придем к началу ребра 1. Таким образом можно построить путь четной длины от начала ребра $\bar{K}'$ до начала ребра 1. Аналогично строится путь четной длины от начала ребра K до начала ребра 1. Объединение этих путей и u -ребра, соединяющего начало ребра $\bar{K}'$ и начало ребра K , есть цикл нечетной длины. Лемма доказана.

Из доказанной леммы и леммы 4.14 следует, что для ориентируемой поверхности правило, описанное в замечании 4.16, определяет согласованные ориентации циклов графа T (см. также замечания 3.15, 3.18).

Опишем теперь построение кода для данной v -молекулы W .

Рассматривая множество всех трехцветных графов, соответствующих седловым вершинам v -молекулы W , как один (возможно, несвязный) трехцветный граф T , занумеруем его su -циклы и выберем отмеченные вершины. Действуя по алгоритму 4.2, построим допустимую строчку C_1 (используя s -ребра графа T) и двойственную ей строчку C_2 (используя u -ребра графа T). Далее, занумеруем (произвольно) все ребра v -молекулы W , соединяющие не седловые вершины: $e_1, \dots, e_p$, $p \geq 0$. Припишем в начале каждой из строчек C_1 и C_2 по p отрезков нулевой длины и будем считать, что отрезку, стоящему на i -м месте, $1 \leq i \leq p$, соответствует ребро e_i .

В результате мы получим пару двойственных строчек C_1, C_2 , причем каждому символу 0 в строчке C_1 соответствует некоторое ребро v -молекулы W , начало которого есть A -вершина или S -вершина, а каждому символу 0 в строчке C_2 соответствует ребро v -молекулы W , конец которого есть A -вершина или S -вершина. Чтобы построенная пара строчек C_1, C_2 однозначно определяла исходную v -молекулу W , осталось лишь указать тип вершины и метку (± 1) для каждого символа 0. Сделаем это следующим образом:

- 1) если метка на ребре равна (-1) , то вместо соответствующего символа 0 напомним $\tilde{0}$;
- 2) занумеровав все S -вершины, поставим индексы у символов 0 и $\tilde{0}$, равные номеру соответствующей S -вершины (символы 0 , соответствующие A -вершинам, остаются без индексов).

Упорядочим новые символы вида 0_m и $\tilde{0}_m$ следующим образом:

$$0 < 0_1 < \tilde{0}_1 < 0_2 < \tilde{0}_2 < \dots < 1 < \bar{1} < 1' < \bar{1}' < \dots$$

Каждую полученную пару строчек C_1, C_2 будем рассматривать как одну “длинную” строчку $D = (C_1)(C_2)$. Тогда такие строчки можно сравнивать в соответствии с определением 4.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.18. Кодом $D(W)$ v -молекулы W называется строчка, являющаяся наименьшей среди всех строчек, которые можно сопоставить v -молекуле W , действуя по описанному выше алгоритму.

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте для потоков Морса, можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.19. Код $D(v)$ является полным топологическим траекторным инвариантом для потоков Морса-Смейла, т.е. потоки Морса-Смейла v_1 и v_2 топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $D(v_1) = D(v_2)$.

Список кодов для потоков Морса-Смейла с ≤ 3 критическими элементами приведен в приложении (см. таблицу 2).

Приложение: список потоков малой сложности

В таблице 1 приведен список всех потоков Морса с количеством седловых точек ≤ 2 на связных двумерных многообразиях.

Рис. 18

ТАБЛИЦА 1. Список потоков Морса с числом седел ≤ 2

№	Код $C(v)$	Код $D(v)$	$-v$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	M^2
1	(0)	(0) (0)	1	[1, 0, 1]	S^2
2	(0 1 0 1)	(0 1 0 1') (0 1 1')	3	[2, 1, 1]	S^2
3	(0 1 1)	(0 1 1') (0 1 0 1')	2	[1, 1, 2]	S^2
4	(0 1 $\bar{1}$)	(0 1 $\bar{1}'$) (0 1 $\bar{1}'$)	4	[1, 1, 1]	$\mathbb{RP}^2$
5	(0 1 0 1 2 0 2)	(0 1 0 1' 2 0 2') (0 1 2 2' 1')	8	[3, 2, 1]	S^2
6	(0 1 0 1 2 2)	(0 1 0 1' 2 2') (0 1 2 1' 0 2')	6	[2, 2, 2]	S^2
7	(0 1 0 1 2 $\bar{2}$)	(0 1 0 1' 2 $\bar{2}'$) (0 1 2 $\bar{2}'$ 1')	9	[2, 2, 1]	$\mathbb{RP}^2$
8	(0 1 1 2 2)	(0 1 1' 2 2') (0 1 2 0 1' 0 2')	5	[1, 2, 3]	S^2
9	(0 1 1 2 $\bar{2}$)	(0 1 1' 2 $\bar{2}'$) (0 1 2 $\bar{2}'$ 0 1')	7	[1, 2, 2]	$\mathbb{RP}^2$
10	(0 1 $\bar{1}$ 2 $\bar{2}$)	(0 1 $\bar{1}'$ 2 $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{1}'$ 2 $\bar{2}'$)	10	[1, 2, 1]	K^2
11	(0 1 2 0 1 2)	(0 1 2 0 1' 2') (0 1 2' 0 1' 2)	11	[2, 2, 2]	S^2
12	(0 1 2 0 1 $\bar{2}$)	(0 1 2 0 1' $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{2}$ $\bar{1}'$ 2')	15	[2, 2, 1]	$\mathbb{RP}^2$
13	(0 1 2 1 2)	(0 1 2 1' 2') (0 1 2' 1' 2)	13	[1, 2, 1]	T^2
14	(0 1 2 1 $\bar{2}$)	(0 1 2 1' $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{2}$ $\bar{1}'$ $\bar{2}'$)	14	[1, 2, 1]	K^2
15	(0 1 2 $\bar{1}$ $\bar{2}$)	(0 1 2 $\bar{1}'$ $\bar{2}'$) (0 1 $\bar{2}'$ 0 1' 2)	12	[1, 2, 2]	$\mathbb{RP}^2$

В первой колонке указан номер потока Морса. Все коды $C(v)$ можно упорядочить в соответствии с определением 4.5. Поэтому этот номер можно рассматривать как порядковый номер потока в списке “всех” потоков Морса.

Во второй колонке указан код $C(v)$ потока v . Как легко понять, символ вида K' или $\bar{K}'$ в допустимой строчке, являющейся кодом некоторого потока Морса, всегда встречается после соответствующего символа K . Поэтому (для простоты) штрихи во второй колонке не проставлены.

В третьей колонке указан код $D(v)$ для данного потока Морса (рассматриваемого как поток Морса–Смейла общего вида). Отметим, что эта колонка приведена лишь для удобства вычисления различных характеристик потока, поскольку для потоков Морса код $D(v)$ однозначно вычисляется по своей “левой части” $C(v)$ (т.е. по коду, приведенному во второй колонке).

В остальных колонках таблицы приведены некоторые характеристики потока v , которые, конечно, вычисляются по коду $C(v)$. Так, в четвертой колонке указан номер кода (из этой же таблицы) для потока $-v$. Этот код $C(-v)$ есть минимальная допустимая строчка, эквивалентная “правой части” кода $D(v)$. В пятой колонке указано количество критических элементов потока v в виде $[m_0, m_1, m_2]$, где m_0, m_1, m_2 – число источников, седловых точек и стоков потока v , соответствен-

ТАБЛИЦА 2. Список потоков Морса-Смейла с числом критических элементов ≤ 3

№	Код $D(v)$	$-v$	$[(\cdot, \cdot, \cdot), \cdot, (\cdot, \cdot, \cdot)]$	M^2
1	$(0)(0)$	1	$[(1, 0, 0), 0, (1, 0, 0)]$	S^2
2	$(0)(0_1)$	3	$[(1, 0, 0), 0, (0, 0, 1)]$	$\mathbb{RP}^2$
3	$(0_1)(0)$	2	$[(0, 0, 1), 0, (1, 0, 0)]$	$\mathbb{RP}^2$
4	$(0_1)(0_1)$	4	$[(0, 0, 1), 0, (0, 0, 1)]$	K^2
5	$(0_1 0_1)(0_2 0_2)$	5	$[(0, 1, 0), 0, (0, 1, 0)]$	T^2
6	$(0_1 \widetilde{0}_1)(0_2 \widetilde{0}_2)$	6	$[(0, 1, 0), 0, (0, 1, 0)]$	K^2
7	$(\widetilde{0}_1)(\widetilde{0}_2)$	7	$[(0, 0, 1), 0, (0, 0, 1)]$	K^2
8	$(\widetilde{0}_1 \widetilde{0}_1)(\widetilde{0}_2 \widetilde{0}_2)$	8	$[(0, 1, 0), 0, (0, 1, 0)]$	T^2
9	$(00)(0_1 0_1)$	16	$[(2, 0, 0), 0, (0, 1, 0)]$	S^2
10	$(00_1)(0_2 0_2)$	17	$[(1, 0, 1), 0, (0, 1, 0)]$	$\mathbb{RP}^2$
11	$(0\widetilde{0}_1)(0_2 \widetilde{0}_2)$	20	$[(1, 0, 1), 0, (0, 1, 0)]$	$\mathbb{RP}^2$
12	$(011)(0_1 10_1 1)$	24	$[(1, 0, 0), 1, (0, 1, 0)]$	K^2
13	$(011)(0_1 1\widetilde{0}_1 1)$	26	$[(1, 0, 0), 1, (0, 1, 0)]$	T^2
14	$(01\bar{1})(01\bar{1})$	14	$[(1, 0, 0), 1, (1, 0, 0)]$	$\mathbb{RP}^2$
15	$(01\bar{1})(0_1 1\bar{1})$	31	$[(1, 0, 0), 1, (0, 0, 1)]$	K^2
16	$(0_1 0_1)(00)$	9	$[(0, 1, 0), 0, (2, 0, 0)]$	S^2
17	$(0_1 0_1)(00_2)$	10	$[(0, 1, 0), 0, (1, 0, 1)]$	$\mathbb{RP}^2$
18	$(0_1 0_1)(0_2 0_3)$	22	$[(0, 1, 0), 0, (0, 0, 2)]$	K^2
19	$(0_1 0_1 1\bar{1})(0_2 0_2 1\bar{1})$	19	$[(0, 1, 0), 1, (0, 1, 0)]$	N^2
20	$(0_1 \widetilde{0}_1)(0\widetilde{0}_2)$	11	$[(0, 1, 0), 0, (1, 0, 1)]$	$\mathbb{RP}^2$
21	$(0_1 \widetilde{0}_1)(0_2 \widetilde{0}_3)$	23	$[(0, 1, 0), 0, (0, 0, 2)]$	K^2
22	$(0_1 0_2)(0_3 0_3)$	18	$[(0, 0, 2), 0, (0, 1, 0)]$	K^2
23	$(0_1 \widetilde{0}_2)(0_3 \widetilde{0}_3)$	21	$[(0, 0, 2), 0, (0, 1, 0)]$	K^2
24	$(0_1 10_1 1)(0111)$	12	$[(0, 1, 0), 1, (1, 0, 0)]$	K^2
25	$(0_1 10_1 1)(0_2 11)$	28	$[(0, 1, 0), 1, (0, 0, 1)]$	N^2
26	$(0_1 1\widetilde{0}_1 1)(0111)$	13	$[(0, 1, 0), 1, (1, 0, 0)]$	T^2
27	$(0_1 1\widetilde{0}_1 1)(0_2 11)$	29	$[(0, 1, 0), 1, (0, 0, 1)]$	N^2

ТАБЛИЦА 2 (продолжение)

№	Код $D(v)$	$-v$	$[(\cdot, \cdot, \cdot), \cdot, (\cdot, \cdot, \cdot)]$	M^2
28	$(0_1 1 \ 1) \ (0_2 1 \ 0_2 1)$	25	$[[(0, 0, 1), 1, (0, 1, 0)]]$	N^2
29	$(0_1 1 \ 1) \ (0_2 1 \ \tilde{0}_2 1)$	27	$[[(0, 0, 1), 1, (0, 1, 0)]]$	N^2
30	$(0_1 1 \ 1) \ (\tilde{0}_2 1 \ \tilde{0}_2 1)$	36	$[[(0, 0, 1), 1, (0, 1, 0)]]$	N^2
31	$(0_1 1 \ \bar{1}) \ (0 \ 1 \ \bar{1})$	15	$[[(0, 0, 1), 1, (1, 0, 0)]]$	K^2
32	$(0_1 1 \ \bar{1}) \ (0_2 1 \ \bar{1})$	32	$[[(0, 0, 1), 1, (0, 0, 1)]]$	N^2
33	$(\tilde{0}_1 0_1 1 \ \bar{1}) \ (\tilde{0}_2 0_2 1 \ \bar{1})$	33	$[[(0, 1, 0), 1, (0, 1, 0)]]$	N^2
34	$(\tilde{0}_1 \tilde{0}_1) \ (\tilde{0}_2 \tilde{0}_3)$	35	$[[(0, 1, 0), 0, (0, 0, 2)]]$	K^2
35	$(\tilde{0}_1 \tilde{0}_2) \ (\tilde{0}_3 \tilde{0}_3)$	34	$[[(0, 0, 2), 0, (0, 1, 0)]]$	K^2
36	$(0_1 1 \ 0_1 1) \ (\tilde{0}_2 1 \ 1)$	30	$[[(0, 1, 0), 1, (0, 0, 1)]]$	N^2

Рис. 19

но. В последней колонке указан топологический тип двумерного многообразия M , на котором задан поток v (сфера S^2 , тор T^2 , проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$, бутылка Клейна K^2).

На рис. 18 изображены соответствующие трехцветные графы. Жирными,

тонкими и пунктирными линиями отмечены, соответственно, s -ребра, u -ребра и t -ребра. Рядом с каждым графом указан его номер из таблицы 1.

В таблице 2 приведен список всех потоков Морса-Смейла с числом критических элементов ≤ 3 на связных двумерных многообразиях. Эта таблица устроена аналогично таблице 1. В четвертой колонке указано количество критических элементов потока v в виде $[(m_0, k_0, l_0), m_1, (m_2, k_2, l_2)]$, где m_0, m_1, m_2 – число источников, седловых точек и стоков потока v , через k_0 и l_0 обозначены, соответственно, число отталкивающих предельных циклов с ориентируемой и с неориентируемой окрестностью, через k_2, l_2 – аналогичные числа для притягивающих предельных циклов. Через N^2 в пятой колонке обозначено двумерное многообразие с эйлеровой характеристикой -1 (связная сумма трех проективных плоскостей). Отметим, что пересечение таблицы 1 и таблицы 2 состоит лишь из простейшего потока (номер 1 в обеих таблицах) и еще одного потока (4 в таблице 1 и 14 в таблице 2).

Для всех кодов, перечисленных в таблице 2, на рис. 19 изображены v -молекулы. На рис. 19(a),(b),(c),(d),(e) нарисованы v -молекулы для многообразий S^2 , T^2 , $\mathbb{RP}^2$, K^2 , N^2 , соответственно. В этих v -молекулах встречаются только три седловых v -атома, имеющие номера 2, 3, 4 в таблице 1. При изображении v -молекул v -атомы с номерами 2 и 3 (они отличаются лишь направлением потока) обозначены буквой B , а v -атом с номером 4 обозначен через $\bar{B}$. Для потоков v и $-v$ нарисована одна v -молекула (соответствующая потоку v). Если изменить ориентацию всех ребер этой v -молекулы, то получится v -молекула, соответствующая потоку $-v$ (на рис. 19 ее номер из таблицы 2 указан в скобках).

Список литературы

1. Андронов А. А., Поптягин Л. С., Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
2. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 251–257.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. № 4. С. 557–560.
4. Майер А. Г. О траекториях на ориентируемых поверхностях // Матем. сб. 1943. Т. 12 (54). № 1. С. 71–84.
5. Аносов Д. В. Грубые системы // Труды МИАН. 1985. Т. 169.
6. Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. 1986. Т. 41. № 1 (247). С. 149–169.
7. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986.
8. Смейл С. Неравенства Морса для динамических систем // Математика. Сб. пер. 1967. Т. 11. № 4. С. 79–87.
9. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185.
10. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Dynamical systems. New York: Academic Press, 1973. P. 389–419.
11. Peixoto M. C., Peixoto M. M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions // An. Acad. Brasil Ciênc. 1959. V. 31. № 2. P. 135–160.
12. Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil Mat. 1975. V. 6. P. 155–183.
13. Wang X. The C^* -algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1990. V. 10. P. 565–597.

14. *Фоменко А. Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1276–1307.
15. *Фоменко А. Т.* Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1071–1075.
16. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. № 2 (272). С. 49–77.
17. *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Труды МИРАН. 1994. Т. 205. С. 131–140.
18. *Bolsinov A. V., Oshemkov A. A., Sharko V. V.* On classification of flows on manifolds. I // Methods Funct. Anal. Topology. 1996. V. 2. № 2. P. 190–204.
19. *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1. № 2. P. 101–120; Structural stability on two-dimensional manifolds – a further remark // Topology. 1963. V. 2. № 2. P. 179–180.
20. *Smale S.* On gradient dynamical systems // Ann. of Math. (2). 1961. V. 74. P. 199–206.
21. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
22. *Meyer K. R.* Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. V. 90. № 4. P. 1031–1040.
23. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev knot invariants // Topology. 1995. V. 34. № 2. P. 423–472.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Институт математики НАН Украины, Киев

Поступила в редакцию
13.11.1997