Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, О сферической сходимости интеграла Фурье индикатора N -мерной области, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 7, 145–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:16:46

УДК 517

Д. А. Попов

О сферической сходимости интеграла Фурье индикатора N -мерной области

Сходимость сферических средних $f_\Omega(a)$ (f – характеристическая функция компактной области $\mathcal{D}^N \in \mathbb{R}^N$, Ω – радиус шара в частотной области) в точке $a \in \mathbb{R}^N$, $a \notin \partial\mathcal{D}^N$ ($\partial\mathcal{D}$ – граница $\mathcal{D}^N$) характеризуется показателем сходимости $\sigma(a|\partial\mathcal{D}^N)$. Если $|f_\Omega(a) - f(a)| \leq O(\Omega^{-\gamma+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0$ при $\Omega \rightarrow \infty$ и $\gamma > 0$, то $\sigma(a|\partial\mathcal{D}^N)$ – точная верхняя грань γ . Исследуется вопрос о зависимости величины $\sigma(a|\partial\mathcal{D}^N)$ от положения точки $a \notin \partial\mathcal{D}^N$ и геометрии гиперповерхности $\partial\mathcal{D}^N$. Показано, что если граница $\partial\mathcal{D}^N$ гладкая и $a \notin \mathcal{K}(\partial\mathcal{D}^N)$ ($\mathcal{K}(\partial\mathcal{D}^N)$ – фокальная поверхность границы $\partial\mathcal{D}^N$), то $\sigma(a|\partial\mathcal{D}^N) = 1$ независимо от N . С использованием результатов теории особенностей дано полное описание поведения $\sigma(a|\partial\mathcal{D}^N)$ при $N \leq 10$ для областей $\mathcal{D}^N$ с границей общего положения. Рассмотрен вопрос о размерности области расходимости $\mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N) \in \mathcal{K}(\partial\mathcal{D}^N)$ (сферические средние расходятся при $\Omega \rightarrow \infty$, $a \in \mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N)$). Показано, что при $N \geq 3$ $\dim \mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N) \leq N - 3$ и при $N \geq 21$ существуют гиперповерхности $\partial\mathcal{D}^N$ общего положения такие, что $\dim \mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N) \geq N - 21$.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Рассмотрим компактную область $\mathcal{D}^N$ в N -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Будем предполагать, что $\mathcal{D}^N \in [-\pi, \pi)^N$ и граница $\partial\mathcal{D}^N$ – кусочно-гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^N$. Через f везде ниже обозначается индикатор (характеристическая функция) $\chi_{\mathcal{D}}$ области $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^N$, $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$ и $|x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$ – норма элемента $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Для функции $f = \chi_{\mathcal{D}}$ определено ее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x, \omega \rangle} f(x) dx \quad (\omega \in \mathbb{R}^N). \quad (1)$$

Сферической суммой (суммой по шарам) называется [1] величина $f_\Omega(a)$

$$f_\Omega(a) = (2\pi)^{-N} \int_{|\omega| \leq \Omega} e^{-i\langle \omega, a \rangle} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Возникает естественный вопрос о поточечной сходимости сумм f_Ω к f при $\Omega \rightarrow \infty$ и $a \notin \partial\mathcal{D}^N$. На этот вопрос было вновь обращено внимание в работах [2], [3]. В частности, в работе [2] показано, что сферические суммы расходятся при $N \geq 3$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00767).

если $\mathcal{D}^N$ – шар ($\partial\mathcal{D}^N = \mathbb{S}^{N-1}$) и точка a – его центр. Этот результат был известен и раньше [4]. Другие результаты, относящиеся к размерности $N \geq 3$, автору не известны. Для $N = 2$ в работе [5] рассмотрена более трудная задача о сходимости сферических сумм для рядов Фурье. В этой работе доказана сферическая сходимость ряда Фурье индикатора выпуклой двумерной области. Для интеграла Фурье двумерный случай ($N = 2$) разобран в работах [6], [7]. В работе [7] рассмотрен случай двумерных рядов и интегралов Фурье; в обоих случаях доказана сходимость сферических сумм в точках непрерывности функции f ($a \notin \partial\mathcal{D}^N$) и получены оценки скорости сходимости, точные в случае интегралов Фурье. В настоящей работе рассматривается вопрос о сходимости сферических сумм (2) для $f = \chi_{\mathcal{D}}$ при произвольной размерности N .

Скорость поточечной сходимости сферических сумм $f_{\Omega}(a)$ ($a \notin \partial\mathcal{D}^N$) при $\Omega \rightarrow \infty$ будем характеризовать показателем сходимости $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^N)$, зависящем от точки a и геометрии границы $\partial\mathcal{D}^N$. Чтобы определить величину $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^N)$, рассмотрим ошибку восстановления

$$\Delta_{\Omega} f(a) = f_{\Omega}(a) - f(a). \quad (3)$$

Пусть $|\Delta_{\Omega} f(a)| \leq O(\Omega^{-\gamma+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда по определению $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^N)$ – точная верхняя грань величин γ , для которых выполняется указанная оценка величины $|\Delta_{\Omega} f(a)|$ и $\sigma(\partial\mathcal{D}^N) \equiv \min_{a \notin \partial\mathcal{D}^N} \sigma(a | \partial\mathcal{D}^N)$. Через $\mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N)$ ниже обозначается множество расходимости. По определению $a \in \mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N)$, если существует последовательность $\Omega(n)$, $\Omega(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), такая, что $|\Delta_{\Omega(n)} f(a)| \geq O(1)$. Ниже рассматривается задача вычисления величин $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^N)$ и $\dim \mathcal{R}(\partial\mathcal{D}^N)$.

Как уже указывалось, случай $N = 2$ был рассмотрен в работах [6], [7]. Приведем пример, иллюстрирующий характер полученных в этих работах результатов. Пусть, например, $\partial\mathcal{D}^2$ – эллипс и $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\partial\mathcal{D}^2)$ – его эволюта (астроида). Через $\mathcal{K}_0$ обозначим множество вершин эволюты (множество ее особых точек). Тогда $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^2) = 1$ ($a \notin \mathcal{K}$), $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^2) = 5/6$ ($a \in \mathcal{K}$, $a \notin \mathcal{K}_0$), $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^2) = 3/4$ ($a \in \mathcal{K}_0$) и возникает вопрос о возможности обобщения такого сорта результатов на N -мерный случай. Заметим, что роль эволюты в вопросе о квазиабсолютной сходимости рядов Фурье была обнаружена в работе [8].

Автор благодарен В. А. Юдину за полезные замечания.

2. Точная формула для ошибки восстановления и осциллирующие интегралы. Ниже используются следующие обозначения: x – точка на границе $\partial\mathcal{D}^N$, $(x \in \partial\mathcal{D}^N)$, $l = x - a$, $a \in \mathbb{R}^N$, $a \notin \partial\mathcal{D}^N$, dS – индуцированная вложением мера на $\partial\mathcal{D}^N$, ν – внешняя нормаль к $\partial\mathcal{D}^N$ и $J_p(t)$ – функция Бесселя.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\partial\mathcal{D}^N$ – кусочно-дифференцируемая гиперповерхность, $N \geq 2$, $a \notin \partial\mathcal{D}^N$. Тогда для ошибки восстановления $\Delta_{\Omega} f(a)$ (3) имеет место следующее представление

$$\Delta_{\Omega} f(a) = \frac{\Omega^{\frac{N}{2}-1}}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\partial\mathcal{D}^N} dS \frac{\langle l, \nu \rangle}{|l|^{\frac{N+2}{2}}} \Delta B_N(\Omega|l|), \quad (4)$$

в котором величина $\Delta B_N(t)$ при четном N задается равенством

$$\Delta B_N(t) = - \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} \frac{C_{k,N}}{t^k} J_{\frac{N-2k-2}{2}}(t), \quad (5)$$

а при нечетном N – равенством

$$\Delta B_N(t) = - \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} \frac{C_{k,N}}{t^k} J_{\frac{N-2k-2}{2}}(t) - \frac{C_N}{t^{\frac{N-2}{2}}} \int_t^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (6)$$

и при этом

$$C_{0,N} = 1, \quad C_{k,N} = (N-2)(N-4) \cdots (N-2k) \quad (k \geq 1), \\ C_N = 2^{\frac{N-2}{2}} \Gamma(N/2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем сферические координаты $\omega = \lambda\eta$, где $\lambda = |\omega|$, $|\eta| = 1$ ($\eta \in \mathbb{S}^{N-1}$). Используя формулу Стокса, запишем преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda\eta)$ (1) в виде интеграла по границе $\partial\mathcal{D}^N$

$$\hat{f}(\lambda\eta) = (i\lambda)^{-1} \int_{\partial\mathcal{D}^N} \langle \eta, \nu \rangle e^{i\lambda \langle x, \eta \rangle} dS. \quad (7)$$

Тогда прямо по определению величины $f_\Omega(a)$ (2)

$$f_\Omega(a) = -\frac{i}{(2\pi)^N} \int_0^\Omega \lambda^{N-2} d\lambda \int_{\partial\mathcal{D}^N} dS I_N(\lambda l), \quad (8)$$

где $I_N(b)$ ($b \in \mathbb{R}^N$) – интеграл по единичной сфере

$$I_N(b) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\theta e^{i\langle b, \eta \rangle} \langle \nu, \eta \rangle.$$

В этой формуле $d\theta$ – мера на $\mathbb{S}^{N-1}$ и

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\theta = \text{vol}(\mathbb{S}^{N-1}) = 2 \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

Интеграл $I_N(b)$ легко вычисляется. Действительно (см. [9]),

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\theta e^{i\langle b, \eta \rangle} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{|b|^{\frac{N-2}{2}}} J_{\frac{N-2}{2}}(|b|),$$

и дифференцируя это равенство по b_i ($b = b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}^N$), получим

$$I_N(b) = -i(2\pi)^{N/2} \frac{\langle b, \nu \rangle}{|b|} \left[\frac{d}{dz} \left(z^{-\frac{N-2}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(z) \right) \right] (|b|).$$

Используя эту формулу и полагая $\lambda = \Omega\xi$, запишем выражение (8) в виде

$$f_\Omega(a) = -\frac{\Omega^{\frac{N}{2}-1}}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\partial\mathcal{D}^N} dS \frac{\langle l, \nu \rangle}{|l|^{\frac{N}{2}+1}} B_N(\Omega|l|), \\ B_N(t) = \int_0^1 \xi^{N-2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^{-\frac{N-2}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(t\xi) \right] d\xi. \quad (9)$$

Вычислим интеграл $B_N(t)$:

$$B_N(t) = J_{p+1}(t) - 2(p+1)t^{-p-1}A_p(t),$$

$$A_p(t) = \int_0^t t^p J_{p+1}(t) dt \quad \left(p+1 = \frac{N-1}{2} \right).$$

Используя известную из теории бesselевых функций [10] формулу

$$tJ_{p+1}(t) = pJ_p(t) - tJ_p^{(1)}(t),$$

получим рекуррентное соотношение

$$A_p(t) = 2pA_{p-1}(t) - t^p J_p(t),$$

из которого сразу следует, что при четных N

$$B_N(t) = -\frac{2^{\frac{N}{2}-1}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{t^{\frac{N}{2}-1}} + J_{\frac{N}{2}-1}(t) + \sum_{k=0}^{\frac{N-4}{2}} C_{k-1,N} J_{\frac{N-4}{2}-k}(t) \quad (10)$$

и для нечетных N

$$B_N(t) = -\frac{2^{\frac{N}{2}-1}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{t^{\frac{N}{2}-1}} + J_{\frac{N}{2}-1}(t) + \sum_{k=0}^{\frac{N-5}{2}} C_{k-1,N} J_{\frac{N-4}{2}-k}(t) + \frac{C_N}{t^{\frac{N}{2}-1}} \int_t^\infty \frac{\sin t}{t} dt. \quad (11)$$

При этом считается, что $\sum_{k=0}^m \equiv 0$, если $m < 0$. Для завершения доказательства воспользуемся формулой Гаусса, согласно которой характеристическая функция области $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^N$ может быть представлена в виде

$$\chi_{\mathcal{D}}(a) \equiv f(a) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{N-1})} \int_{\partial\mathcal{D}^N} \frac{\langle l, \nu \rangle}{|l|^N} dS. \quad (12)$$

Для $N = 2, 3$ эта формула доказана в [11]. Доказательство в общем случае проводится точно так же. Теперь после подстановки выражений (10), (11) в (9) получим, что первые члены в правых частях (10), (11) дают согласно (12) точно величину $f(a)$.

Если $\mathcal{D}^N$ – шар радиуса R ($\partial\mathcal{D}^N = \mathbb{S}^{N-1}$) и a – его центр, то $|l| = R$ и из (4) сразу получаем уже упоминавшийся выше результат о расходимости при $\Omega \rightarrow \infty$ сферических сумм в этом случае. Пусть $d = d(a, \partial\mathcal{D}^N)$ – евклидово расстояние от точки a до $\partial\mathcal{D}^N$. Так как по предположению $a \notin \partial\mathcal{D}^N$, то $|l| = |x - a| \geq d > 0$, и используя асимптотическое разложение функций Бесселя, можно получить приближенное представление величины $\Delta_\Omega f(a)$ в виде суммы осциллирующих интегралов (О.И.) с Ω в качестве большого параметра.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для области $\mathcal{D}^N$ с кусочно дифференцируемой границей $\partial\mathcal{D}^N$ при $d > 0$ величина $\Delta_\Omega f(a)$ допускает представление вида

$$\Delta_\Omega f(a) = \Delta_\Omega^N f(a) + \Delta_{N\Omega}, \quad (13)$$

в котором

$$|\Delta_{N\Omega}| \leq \frac{C_N S(\partial\mathcal{D}^N)}{d^{N-1}} \cdot \begin{cases} (\Omega d)^{-3/2} & (N - \text{четное}), \\ (\Omega d)^{-2} & (N - \text{нечетное}) \end{cases} \quad (14)$$

и $\Delta_\Omega^N f(a)$ – сумма О.И. с фазой $\Phi(x, a) = |l| = |x - a|$,

$$\Delta_\Omega^N f(a) = \frac{\Omega^{\frac{N-3}{2}}}{(2\pi)^{N/2}} \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{P(N)} \frac{b_p^N}{\Omega^p} \int_{\partial\mathcal{D}^N} dS \frac{\langle l, \nu \rangle}{|l|^{\frac{N+2p+3}{2}}} e^{i\Omega|l|}. \quad (15)$$

В этих формулах $S(\partial\mathcal{D}^N)$ – площадь гиперповерхности $\partial\mathcal{D}^N$,

$$P(N) = \begin{cases} \frac{1}{2}(N-2) & (N - \text{четное}), \\ \frac{1}{2}(N-3) & (N - \text{нечетное}), \end{cases} \quad b_0^N = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\frac{i\pi(N-1)}{4}}$$

и Re – операция взятия действительной части. Все константы b_p^N , C_N могут быть явно указаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотическое разложение функции Бесселя $J_p(t)$ при $t > 0$, $p \geq 0$ является обертывающим [10] и, следовательно, $\forall M \geq 1$

$$J_p(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{h_{p,m} e^{it}}{t^{m+1/2}} \right] + \Delta_M J_p(t),$$

$$|\Delta_M J_p(t)| \leq |h_{p,M}| |t|^{-M-1/2}. \quad (16)$$

В этой формуле

$$h_{p,m} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\frac{ip\pi}{2} - i\frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}} \cdot \frac{\Gamma(p+m+1/2)}{2^m m! \Gamma(p-m+1/2)}$$

– коэффициенты асимптотического разложения функции Ханкеля $H_p^{(1)}(t)$ ($J_p(t) = \operatorname{Re}(H_p^{(1)}(t))$). Для получения нужного результата при четных N достаточно подставить (16) в (4) и выбрать соответствующим образом $M = M(k, N)$. Для нечетных N надо еще один раз проинтегрировать по частям в последнем члене правой части равенства (6).

Заметим, что, выбирая $P > P(N)$, можно улучшить порядок остаточного члена $\Delta_{N\Omega}$ (14), но для наших целей достаточно следствия 1.

3. Оценки показателя сходимости и размерности области расходимости. Будем предполагать, что $\partial\mathcal{D}^N$ – гладкая гиперповерхность. Случай кусочно-гладкой гиперповерхности может быть рассмотрен тем же методом (см. краткое замечание в конце работы).

Пусть $\xi^1, \dots, \xi^{N-1}$ – локальные координаты на $\partial\mathcal{D}^N$, в которых эти гиперповерхности задаются уравнениями $x = x(\xi)$. Следствие 1 показывает, что для оценки показателя сходимости достаточно рассмотреть асимптотику при $\Omega \rightarrow \infty$ $(N-1)$ -мерного О.И.

$$F_{N-1}(a) = \int u(\xi) e^{i\Omega\Phi(\xi, a)} d\xi \quad (17)$$

с фазой $\Phi(\xi, a) = |l| = |x(\xi) - a|$. Критические точки $\xi_c \equiv \xi_c(a)$ фазы Φ определяются из уравнений

$$\partial_\alpha \Phi = \frac{1}{|l|} \langle l, \partial_\alpha x \rangle = 0 \quad \left(\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \right).$$

Таким образом,

$$l(\xi_c) \equiv l_c = \varepsilon_c |l_c| \nu_c \quad (\varepsilon_c = \pm 1) \quad (18)$$

и, следовательно, для определения $\xi_c(x(\xi_c))$ достаточно из точки a провести нормали к $\partial\mathcal{D}^N$. Гессиан (матрица вторых производных) в точке ξ_c имеет вид

$$(\Phi_c'')_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha\beta}^2 \Phi(\xi_c) = \frac{1}{|l_c|} (g_{\alpha\beta}^c + \varepsilon_c |l_c| b_{\alpha\beta}^c), \quad (19)$$

где $g_{\alpha\beta}^c \equiv g_{\alpha\beta}(\xi_c)$, $b_{\alpha\beta}^c \equiv b_{\alpha\beta}(\xi_c)$ и $A = (g_{\alpha\beta}(\xi))$, $B = (b_{\alpha\beta}(\xi))$ – матрицы первой и второй основных форм гиперповерхности [12], [13]

$$g_{\alpha\beta}(\xi) = \langle \partial_\alpha x, \partial_\beta x \rangle, \quad b_{\alpha\beta} = \langle \nu, \partial_{\alpha\beta}^2 x \rangle.$$

В касательном пространстве $T_\xi(\partial\mathcal{D}^N)$ к $\partial\mathcal{D}^N$ в точке ξ существует базис главных направлений $e_\alpha(\xi)$, в котором обе матрицы A , B диагональны. Если координатные линии касаются векторов e_α , то такие координаты будем называть *координатами кривизны* в точке ξ и в этих координатах

$$g_{\alpha\beta}(\xi) = A_\alpha^2(\xi) \delta_{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta}(\xi) = k_\alpha(\xi) A_\alpha^2(\xi) \delta_{\alpha\beta}.$$

Величины $k_\alpha(\xi)$ называются *главными кривизнами*. Выбирая в качестве ξ^α длины дуг, можно считать, что в точке ξ – $A_\alpha(\xi) = 1$, $\partial_\alpha |l| \leq 1$. Напомним, что каустикой для фазы Φ , зависящей от параметров a , называется множество $\mathcal{K}$ в пространстве параметров такое, что при $a \in \mathcal{K}$ существуют вырожденные критические точки, в которых $\det \Phi_c'' = 0$. Для фазы $\Phi(\xi, a) = |x(\xi) - a|$ каустикой является фокальная поверхность $\mathcal{K} = \bigcup_\alpha \Gamma_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, N-1$) и $a^\alpha(\xi) \in \Gamma_\alpha \subset \mathbb{R}^N$, если

$$a^\alpha(\xi) = x(\xi) + \frac{\nu(\xi)}{k_\alpha(\xi)} \quad (\alpha = 1, \dots, N-1). \quad (20)$$

При $N = 2$ каустика – эволюта кривой $\partial\mathcal{D}^2$. Чтобы показать, что каустика действительно совпадает с фокальной поверхностью, достаточно заметить, что в координатах кривизны

$$\partial_{\alpha\beta}^2 \Phi(\xi_c) = \frac{(A_\alpha(\xi_c))^2}{|l_c|} (1 + \varepsilon_c |l_c| k_\alpha(\xi_c)) \delta_{\alpha\beta}. \quad (21)$$

При $a \notin \mathcal{K}$ все критические точки фазы $\Phi(\xi, a) = |x(\xi) - a|$ невырождены ($\det \Phi_c'' \neq 0$) и имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{D}^N$ – компактная область с гладкой границей $\partial\mathcal{D}^N$ и $a \notin \partial\mathcal{D}^N \cup \mathcal{K}$. Тогда

$$|\Delta_\Omega f(a)| \leq O(\Omega^{-1}) \quad (\Omega \rightarrow \infty) \quad (22)$$

и, соответственно,

$$\sigma(a | \partial\mathcal{D}^N) = 1 \quad (a \notin \partial\mathcal{D}^N \cup \mathcal{K}). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $a \notin \mathcal{K}$ все критические точки фазы $\Phi(\xi, a)$ невырождены, то с помощью метода стационарной фазы [14], [15], [6] получаем оценку О.И. $F_{N-1}(a)$ (17): $|F_{N-1}(a)| = O(\Omega^{-\frac{N-1}{2}})$. Нужная оценка (22) теперь следует из (13)–(15).

В частности, если $\partial\mathcal{D}^N = \mathbb{S}^{N-1}$ ($\mathcal{D}^N$ – шар), то каустика $\mathcal{K}$ состоит из одной точки (центра шара) и во всех остальных точках $|\Delta_\Omega f(a)| \leq O(\Omega^{-1})$. При $a \notin \mathcal{K}$ метод стационарной фазы позволяет явно выписать асимптотическое разложение величины $\Delta_\Omega f(a)$. Результаты работы [6] дают возможность заменить асимптотическую оценку (22) неравенством. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем ряд обозначений. Напомним, что $\mathcal{D}^N \in [-\pi, \pi)^N$. Будем предполагать, что $0 < d \leq |l| \leq L$ и $d_1 = d(a, \mathcal{K})$ – расстояние от точки a до каустики $\mathcal{K}$. Будем считать, что координаты ξ выбраны таким образом, что $\partial_\alpha |l| \leq 1$ ($\partial_\alpha \equiv \partial/\partial \xi^\alpha$) и через $\bar{k}, b$ обозначим любые константы такие, что

$$\begin{aligned} |\partial^n x(\xi)| &\equiv |\partial_1^{n_1} \cdots \partial_{N-1}^{n_{N-1}} x(\xi)| \leq C_{|n|} \bar{k} b^{|n|-2} \quad (|n| \geq 2), \\ b &\geq \bar{k}, \quad b \geq 1 \quad (|n| = n_1 + \cdots + n_{N-1}). \end{aligned}$$

При $|n| \leq \bar{n}$ такие константы $\bar{k}, b$ всегда существуют. Кроме того, введем обозначения

$$\lambda_1 = \max(d^{-1}, b), \quad B_0 = \frac{b_1}{L(d_1 + L)}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\partial\mathcal{D}^N$ – гладкая гиперповерхность и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \lambda_1^3 B_0^{-2} &\leq \Omega^{1-\varepsilon}, \quad \lambda_1^4 B_0^{-3} \leq \Omega^{1-\varepsilon}, \quad \lambda_1^7 B_0^{-6} \leq \Omega^{1-\varepsilon}, \\ \Omega &\geq \lambda_1, \quad \lambda_1 L^2 d_1^{-2} \leq \Omega^{1-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда при любых $d > 0$, $d_1 > 0$, $\bar{k}, b$, удовлетворяющих условиям (24), имеет место оценка

$$|\Delta_\Omega f(a)| \leq C_N \left[\frac{\mathcal{N}(a)}{\Omega B_0^{\frac{N-1}{2}} d^{\frac{N+1}{2}}} + \frac{S(\partial\mathcal{D}^N)}{(\Omega d)^{3/2}} \frac{1}{d^{N-1}} \right], \quad (25)$$

где $\mathcal{N}(a)$ – число различных нормалей к $\partial\mathcal{D}^N$, проходящих через точку $a \in \mathbb{R}^N$ и константа C_N может быть указана явно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оценки О.И. $F_{N-1}(a)$ (17) будем использовать следствие 2.1 из работы [6]. Для любых ортогональных координат

$$\xi - dS = A_1 \cdots A_{N-1} d\xi^1 \cdots d\xi^{N-1}$$

и, следовательно, для интересующего нас случая в интеграле (17)

$$u(\xi) = \frac{\langle x(\xi) - a, \nu(\xi) \rangle}{|x(\xi) - a|^q} A_1(\xi) \cdots A_{N-1}(\xi).$$

Используя координаты кривизны, имеем

$$\begin{aligned} |\partial^n \Phi| &\leq C_{|n|} \lambda \lambda_1^{|n|} & (|n| \geq 2), \\ |\partial^n u| &\leq C_{|n|} d^{-q+1} \lambda_1^{(n)}, & \lambda = \lambda_1^{-2}. \end{aligned}$$

Как следует из результатов работы [6], всегда можно считать, что $|n| \leq \bar{n}(\varepsilon)$ ($\bar{n}(\varepsilon) \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)). Далее необходимо оценить снизу минимальное собственное значение $\lambda_{\min}$ матрицы Φ_c'' . Так как в координатах кривизны

$$|1 + \varepsilon_c |l_c| k_\alpha(\xi_c)| = |a^\alpha(\xi_c) - a| |k_\alpha(\xi_c)|,$$

то $\lambda_{\min} \geq B_0$, где величина B_0 была определена выше. В соответствии с [6] необходимо еще найти условия, при которых минимум модуля градиента $\nabla_\xi \Phi \equiv (\partial_\alpha \Phi)$ в области $|\xi - \xi_c| \geq \delta_0$ ($\delta_0 = C_N \Omega^{-\frac{1-\varepsilon}{2}} \lambda^{1/2} \lambda_1 B_0^{-1}$) достигается на одной из сфер $|\xi - \xi_c| = \delta_0$. Это выполняется, если $B_0 \delta_0 \leq C d_1 L^{-1}$. Теперь для доказательства оценки (25) достаточно для каждого из О.И. вида $F_{N-1}(a)$ (17), входящих в правую часть (15), воспользоваться результатами следствия 2.1 из работы [6]. Рассмотрим вопрос о размерности множества расхожимости $\mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N)$. Выше было показано, что $\mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) \subset \mathcal{K}$ и, следовательно, $\dim \mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) \leq N - 1$. Из результатов работ [6], [7] следует, что в двумерном случае $\sigma(\partial \mathcal{D}^2) \geq \frac{1}{2}$ и, таким образом, $\mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^2) = \emptyset$. С другой стороны, $\mathcal{R}(\mathbb{S}^2) \neq \emptyset$ и из (23) следует, что $\dim \mathcal{R}(\mathbb{S}^2) = 0$. Покажем, что оценка $\dim \mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) \leq N - 1$ может быть улучшена.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\partial \mathcal{D}^N$ – гладкая замкнутая гиперповерхность. Тогда

$$\dim \mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) \leq N - 3 \quad (N \geq 3). \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точки $x(\xi) \in \partial \mathcal{D}^N$ будем называть *омбилическими*, если в них совпадают по крайней мере две главные кривизны ($k_\alpha(\xi) = k_\beta(\xi)$ ($\alpha \neq \beta$)). Остальные точки называются *неомбилическими*. Такое разбиение точек $x(\xi) \in \partial \mathcal{D}^N$ на два класса индуцирует соответствующее разбиение каустики $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где множество $\mathcal{K}_1$ отвечает неомбилическим точкам $x(\xi) \in \partial \mathcal{D}^N$. Из (21) следует, что при $a \in \mathcal{K}_1$ $\text{rank } \Phi_c'' = N - 2$. Таким образом, $|F_{N-1}(a)| = O(\Omega^{\frac{N-2}{2}})$ и, следовательно, $\sigma(a | \partial \mathcal{D}^N) \geq \frac{1}{2}$ ($a \in \mathcal{K}_1$). Для доказательства оценки (26) достаточно показать, что $\dim \mathcal{K}_2 \leq N - 3$. Это естественное предположение, так как в пространстве всех симметричных матриц матрицы с кратными собственными значениями образуют подпространство коразмерности

два. Рассмотрим связную область M_2 в координатном пространстве такую, что соответствующие точки $x(\xi)$ омбилические. Пусть для определенности в этой области $k_1(\xi) = k_2(\xi)$. Построение каустики задает отображение $j: M_2 \rightarrow \mathcal{K}_2$. Покажем, что $\dim j(M_2) \leq N - 3$. Так как в координатах кривизны $\partial_\alpha \nu = -k_\alpha \tau_\alpha$ ($\tau_\alpha \equiv \partial_\alpha x$), то

$$\partial_\alpha a^\beta = A_\alpha \tau_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha}{k_\beta}\right) - \frac{\partial_\alpha k_\beta}{k_\beta^2} \nu. \quad (27)$$

Уравнения Кодацци в координатах кривизны имеют вид

$$\partial_\beta (k_\alpha A_\alpha) = (\partial_\beta A_\alpha) k_\beta \quad (\alpha \neq \beta) \quad (28)$$

и доказываются точно так же, как и в двумерном случае [13]. Из (28) следует, что при $\xi \in M_2$ главные кривизны k_1, k_2 не зависят от ξ_1, ξ_2 и из (27) получаем, что при $\xi \in M_2$ a^1, a^2 (20) также не зависят от ξ_1, ξ_2 . Таким образом, $\dim j(M_2) \leq N - 3$ и, следовательно, $\dim \mathcal{K}_2 \leq \dim j(M_2) \leq N - 3$.

При $N = 3$ для аналитической поверхности $\partial \mathcal{D}^3$ имеет место и более сильное утверждение: сферические суммы расходятся, только если $\partial \mathcal{D}^3 = \mathbb{S}^2$ ($\mathcal{D}^3$ – шар) и a – его центр. Это вытекает из того, что для двумерных О.И. показатель особости строго меньше единицы [16]. Следствие 1 сводит задачу вычисления показателя сходимости $\sigma(a | \partial \mathcal{D}^N)$ к анализу критических точек фазы $\Phi(\xi, a) = |x(\xi) - a|$. В соответствии с [16], [17] показатель особости $\beta_N^c(a)$ изолированной критической точки ξ_c определяется из соотношения

$$F_{N-1}(a) = O(\Omega^{-\frac{N-1}{2} + \beta_N^c(a) + \varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

в предположении, что амплитуда u имеет носитель в достаточно малой окрестности точки ξ_c . Из (15) следует, что

$$\sigma(a | \partial \mathcal{D}^N) = 1 - \max_{\xi_c} \beta_N^c(a), \quad (29)$$

и для определения $\sigma(a | \partial \mathcal{D}^N)$ в случае гиперповерхностей $\partial \mathcal{D}^N$ общего положения достаточно воспользоваться результатами [16], [17] (см. ниже). Для гиперповерхности $\partial \mathcal{D}^N$ необщего положения критические точки могут быть неизолированными. Примером такой поверхности является стандартно вложенный в $\mathbb{R}^3$ тор $\mathbb{T}^2$ ($\mathbb{T}^2 = \partial \mathcal{D}^3$). При стандартном вложении поверхность тора $\mathbb{T}^2$ образована вращением окружности радиуса b вокруг оси z и при этом центр этой окружности движется по окружности $x^2 + y^2 = c^2$ ($c > b$) в плоскости $z = 0$. В этом случае каустика $\mathcal{K}$ состоит из оси z и окружности $x^2 + y^2 = c^2$ и при $a \in \mathcal{K}$ критические точки неизолированы. Асимптотические оценки О.И. $F_{N-1}(a)$ (17) можно провести и в этом случае и в результате получим

$$\begin{aligned} |\Delta_\Omega f(a)| &= O(\Omega^{-1}) \quad (a \notin \mathcal{K}), & |\Delta_\Omega f(a)| &= O(\Omega^{-1/2}) \quad (a \in \mathcal{K}), \\ \sigma(a | \mathbb{T}^2) &= 1/2 \quad (a \in \mathcal{K}). \end{aligned}$$

На торе $\mathbb{T}^2$ нет омбилических точек и при его малой деформации получим поверхность $\partial \mathcal{D}^3$ без омбилических точек, для которой равномерный показатель

сходимости $\sigma(\partial\mathcal{D}^3) = 3/4$. По-видимому для любой гладкой поверхности $\partial\mathcal{D}^3$ $\sigma(\partial\mathcal{D}^3) \leq 3/4$. Случай поверхности трехосного эллипсоида отвечает ситуации общего положения, когда показатель сходимости (равномерный) не меняется при малой деформации. Каустика $\mathcal{K}$ для трехосного эллипсоида нарисована в [18]. Там же приведены типы встречающихся вырожденных критических точек – это A_2 , A_3 , D_4^+ в обозначениях [16], [19]. Используя таблицы показателей особенности [16], [17], получим, что для трехосного эллипсоида при $a \in \mathcal{K}$ $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^3) = 2/3$ в некоторых точках, $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^3) = 3/4$ на линиях и $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^3) = 5/6$ в общей точке $a \in \mathcal{K}$. Точки, где $\sigma(a | \partial\mathcal{D}^3) = 2/3$, в этом случае отвечают четырем омбилическим точкам на поверхности эллипсоида. Для гиперповерхности $\partial\mathcal{D}^N$ общего положения аналогичные результаты можно получить для $N \leq 10$. Это ограничение связано с тем, что в настоящее время классификация критических точек имеется для семейств функций, зависящих общим образом от $N \leq 10$ параметров [16], [19].

Сформулируем соответствующий результат. Пусть P_{N-1} – гладкое компактное $N - 1$ -мерное многообразие и i – его вложение в $\mathbb{R}^N$, $P_{N-1} \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^N$, такое, что $i(P_{N-1}) = \partial\mathcal{D}^N$. Пространство вложений снабжается стандартной компактно-открытой топологией, окрестности нулевого отображения в которой задаются неравенствами $|\partial^\alpha x_i| \leq \varepsilon$, $|\alpha| \leq n$ [20]. Будем говорить, что некоторое свойство (оценка) является свойством (оценкой) общего положения, если оно имеет место (выполняется) при $i \in I$ и I – открытое и всюду плотное множество в пространстве вложения. Для сокращения в этом случае мы говорим о свойствах гиперповерхностей общего положения. Ясно, что свойства общего положения устойчивы относительно малых деформаций гиперповерхности.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\partial\mathcal{D}^N$ – гладкая гиперповерхность общего положения и $N \leq 10$. Тогда существует стратификация каустики $\mathcal{K} = \bigcup_{p=1}^N M_{p,N}$ ($\dim M_{p,N} = N - p$) такая, что оценки величин $\sigma_{p,N} = \min_{a \in M_{p,N}} \sigma(a | \partial\mathcal{D}^N)$ задаются таблицей

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{p,N} \geq$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{3}$

и эти оценки точны, т.е. существуют гиперповерхности $\partial\mathcal{D}^N$ общего положения такие, что для величин $\sigma_{p,N}$ ($1 \leq p \leq N$) в этих оценках реализуется знак равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом следствия 1 утверждение следствия 2 является просто переформулировкой содержащихся в [16] результатов о максимальном показателе особенности для общих семейств функций, зависящих от N параметров, и вычисление $\sigma_{p,N}$ ведется по формуле (29). Для конкретного семейства $\Phi(\xi, a) = |x(\xi) - a|$ эти результаты применимы вследствие того, что это семейство является производящим для лагранжева отображения [19]

$$\mathcal{N}(\partial\mathcal{D}^N) \xhookrightarrow{j} T^*(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^N,$$

где $\mathcal{N}(\partial\mathcal{D}^N)$ – нормальное, а $T^*(\mathbb{R}^N)$ – кокасательное расслоение.

Старший член асимптотического разложения О.И. $F_{N-1}(a)$ имеет вид [17], [21]

$$F_{N-1}(a) = A[u, \Phi] \Omega^{-\frac{N-1}{2} + \beta_N^c} (\ln \Omega)^{n_c}, \quad \Omega \rightarrow \infty.$$

Именно с наличием в правой части этого равенства множителя $(\ln \Omega)^{n_c}$ связано присутствие числа $\varepsilon > 0$ в определении показателя сходимости. В случае общего положения $n_c = 0$ при $N \leq 6$ и $n_c = 1$ ($N = 7$) [17], [21]. Таким образом, в случае общего положения при $N \leq 6$ показатель сходимости определяет оценку величины $\Delta_\Omega f(a)$, в которой можно положить $\varepsilon = 0$ ($|\Delta_\Omega f(a)| \leq O(\Omega^{-\sigma(a)} |\partial \mathcal{D}^N|)$).

Из приведенных выше результатов следует, что в случае гиперповерхностей общего положения множество расходимости пусто при $N \leq 10$ ($\mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) = \emptyset$) и возникает вопрос: при каких коразмерностях N возможна расходимость $\mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) \neq \emptyset$ в случае общего положения.

ТЕОРЕМА 5. *При $N \geq 21$ существуют гладкие гиперповерхности общего положения, для которых*

$$\dim \mathcal{R}(\partial \mathcal{D}^N) \geq N - 21.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Локально гиперповерхности $\partial \mathcal{D}^N$ можно задать уравнением $x_N = f(x_1, \dots, x_{N-1})$. Пусть теперь

$$f(x_1, \dots, x_{N-1}) = [(g(x_1, \dots, x_{N-1}) + C)^2 - x_1^2 - \dots - x_{N-1}^2]^{1/2},$$

где $|x_i| < \varepsilon$ и C — достаточно большая константа. Тогда $|x| = g(x_1, \dots, x_{N-1}) + C$. Возьмем

$$g(x_1, \dots, x_{N-1}) = x_1^3 + \dots + x_6^3 + Q, \\ Q = \pm x_{N-7}^2 \pm \dots \pm x_{N-1}^2.$$

Особенность $x_1^3 \pm \dots \pm x_k^3$ появляется устойчивым образом при числе параметров $\frac{1}{2}k(k+1)$ и для нее показатель особости равен $\beta_N = k/6$ [16]. Таким образом, при $k = 6$ на построенной гиперповерхности функция $|x - a|$ при $a = 0$ имеет критическую точку $x_c = 0$, для которой $\beta_N^c = 1$.

Имеется гипотеза [16], согласно которой особенность $x_1^3 \pm \dots \pm x_k^3$ имеет максимальный показатель особости в своей коразмерности $\frac{1}{2}k(k+1)$. Если принять эту гипотезу и, кроме того, предположить, что максимальный показатель особости растет при переходе от $N = 20$ к $N = 21$, то тогда $\sigma(\partial \mathcal{D}^N) > 0$ ($N \leq 20$) и $N = 21$ — наименьшая размерность, в которой сферические суммы расходятся в некоторых точках для областей $\mathcal{D}^N$ с границами общего положения.

В работе [7] предложен подход, позволяющий в принципе (с некоторой потерей точности) перенести полученные результаты на ряды Фурье. В отличие от интеграла Фурье для рядов нужны не асимптотические, а равномерные оценки О.И. (7), (17) с указанием констант в них. Основным препятствием для переноса результатов на ряды Фурье является отсутствие в настоящее время таких оценок О.И. для более общих особенностей, чем рассмотренные в [6] особенности типа A_k [19].

В заключение кратко остановимся на случае кусочно-гладких гиперповерхностей. В этом случае в асимптотику интеграла $F_{N-1}(a)$ (17) дают вклад ребра-гиперповерхности меньшей размерности, на которых нарушается гладкость $\partial\mathcal{D}^N$. Асимптотическое разложение О.И. $F_{N-1}(a)$ для кусочно-гладкой гиперповерхности $\partial\mathcal{D}^N$ имеет вид

$$F_{N-1}(a) = \tilde{F}_{N-1}(a) + \Omega^{-1}\tilde{F}_{N-2}(a) + \dots + \Omega^{-k}\tilde{F}_{N-k-1}(a) + \dots + \Omega^{-N-1}\tilde{F}_0(a),$$

где $\tilde{F}_{N-k-1}$ — асимптотическое разложение О.И. $F_{N-k-1}(a)$ вида (17) с той же фазой $|x-a|$. Интегрирование в $F_{N-k-1}(a)$ ведется по ребрам размерности $N-k-1$ ($\tilde{F}_0 = \text{const}$). Асимптотические оценки О.И. $F_{N-k-1}(a)$ в принципе проводятся точно так же, как и интеграла $F_{N-1}(a)$. В качестве примера рассмотрим случай, когда $\partial\mathcal{D}^N$ — поверхность многогранника. Тогда все критические точки, если они есть, в интегралах $F_{N-k-1}(a)$ невырождены и

$$|\Delta_{\Omega}f(a)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{N}_{N-k-1}(a) O(\Omega^{-\frac{k+2}{2}}),$$

где $\mathcal{N}_{N-k-1}(a)$ — число нормалей из точки a на ребра размерности $N-k-1$. Таким образом, для многогранника

$$\sigma(a|\partial\mathcal{D}^N) = \frac{k_m + 2}{2},$$

где k_m — минимальное k такое, что из точки a можно опустить нормаль на $N-k-1$ -мерное ребро.

Список литературы

1. Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К. Кратные ряды и интегралы Фурье // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 42. М.: ВИНТИ, 1989.
2. Pinsky M. A., Stanton N. K., Trapa P. F. Forier Series of Radial Function in Several Variables // J. Funct. Anal. 1993. V. 116. №1. P. 111–132.
3. Pinsky M. A. Pointwise Fourier Inversion in Several Variables // Notices Amer. Math. Soc. 1995. V. 42. №3. P. 330–334.
4. Голубов Б. И. О суммируемости интеграла Фурье сферическими средними Рисса // Матем. сб. 1977. Т. 104. №4. С. 577–596.
5. Дьяченко М. И. Сферические частичные суммы двойных рядов Фурье функций с ограниченной обобщенной вариацией // Матем. сб. 1997. Т. 188. №1. С. 29–58.
6. Попов Д. А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // УМН. 1997. Т. 52. №1. С. 77–148.
7. Попов Д. А. Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области // Труды МИАН. 1998. Т. 218. С. 354–373.
8. Маслов В. П. Свойства абсолютной сходимости многомерных рядов Фурье с точки зрения геометрии слабых разрывов разлагаемых функций // ДАН СССР. 1970. Т. 191. №2. С. 275–278.
9. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ в евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
10. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
11. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз, 1960.

12. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1980.
13. Векун И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978.
14. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
15. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
16. Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера // УМН. 1973. Т. 28. № 5. С. 17–44.
17. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Монодромия и асимптотика интегралов. М.: Наука, 1984.
18. Арнольд В. И. Теория катастроф // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986.
19. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
20. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
21. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой // Труды семинара им. И. Г. Петровского. № 19, 1983. С. 3–39.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Поступила в редакцию
Институт физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского 23.05.1997