Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Экстремальные задачи о множествах Помпейю, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 7, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:08:20

УДК 517.5

В. В. Волчков

Экстремальные задачи о множествах Помпейю

Изучается локальная проблема Помпейю и связанные с ней вопросы для функций с нулевыми интегралами по параллелепипедам. Одним из основных результатов работы является решение проблемы о наименьшем радиусе шара, на котором данный параллелепипед имеет свойство Помпейю. В качестве следствий получены некоторые утверждения, представляющие интерес для комплексного анализа и теории аппроксимации.

Библиография: 33 названия.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $ISO(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством Помпейю*, если всякая локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех $\lambda \in ISO(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю об описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A изучалась во многих работах, см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией, а также [3]–[5]. (Автор обзора [1] профессор Л. Зальцман (Bar-Ilan University, Израиль) в настоящее время имеет более полную библиографию по этому вопросу, которая может быть выслана желающим.)

Большой интерес представляют локальные варианты проблемы Помпейю: например, когда функция f задана в шаре $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ и равенство (1) выполнено при всех $\lambda \in ISO(n)$ таких, что $\lambda A \subset B_r$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ в B_r , будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре B_r . Для многих A это имеет место, если размеры B_r достаточно велики по сравнению с A , см. [6], [7]. В связи с этим возникает следующая

ПРОБЛЕМА. Для данного A найти

$$r(A) = \inf \{r > 0 : A \in \mathcal{P}(B_r)\},$$

где $\mathcal{P}(B_r)$ – совокупность множеств Помпейю на шаре B_r .

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $r(A)$, получен К. А. Беренштейном и Р. Гэем, см. [6], [7]. Точные значения $r(A)$ до настоящего времени были известны лишь в следующих случаях:

Работа выполнена при поддержке фонда Правительства Украины (гранты № U9D000, U9D200) и ISF.

- а) $A = [0, 1]^n$ – куб в $\mathbb{R}^n$, $r(A) = \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, см. [8];
 б) $A = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, x_n \geq 0\}$ – полушар в $\mathbb{R}^n$, $r(A) = \sqrt{5}/2$, см. [8];
 в) $n = 2$, A – правильный треугольник со стороной 1, $r(A) = \sqrt{3}/2$ (этот результат неявно содержится в [9]).

Во всех перечисленных примерах значение $r(A)$ достигается, т.е. $A \in \mathcal{P}(B_r)$ при $r = r(A)$. Отметим также работы [10]–[18], где изучен ряд подобных экстремальных задач для шаровых и сферических средних. Некоторые результаты, связанные с примыкающей к этому кругу вопросов задачей “о трех квадратах”, содержатся в [19], [20].

В данной работе найдено точное значение $r(A)$ в случае, когда $A = [-a_1, a_1] \times \dots \times [-a_n, a_n]$ – параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 1 ниже). При этом обнаружены принципиально новые эффекты: величина $r(A)$ зависит от некоторых арифметических свойств чисел $a_1, \dots, a_n$ и при $n \geq 3$ может не достигаться. В качестве следствий получены некоторые утверждения, представляющие интерес для теории аппроксимации и комплексного анализа (см. §1). Метод доказательства теоремы 1 дает возможность получить решение одной экстремальной задачи, связанной с теоремой Мореры (см. теорему 2). Одним из вспомогательных результатов работы является полученное в §3 общее решение одного функционального уравнения, представляющее самостоятельный интерес и при $n = 2$ уточняющее один из результатов Г. Сабо (см. [21]).

§1. Формулировки основных результатов

Всюду в дальнейшем $a_1, \dots, a_n$ – фиксированные числа, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $r > |a|$ и

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : -a_\nu \leq x_\nu \leq a_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим $\Lambda(n, r) = \{\lambda \in ISO(n) : \lambda A \subset B_r\}$. Поскольку множество параллелепипедов вида λA , где $\lambda \in \Lambda(n, r)$, инвариантно относительно вращений, далее, не ограничивая общности, будем считать, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n. \quad (2)$$

Пусть $[t]$ – целая часть числа $t \geq 0$, $\{t\} = t - [t]$, $R(a, t) = (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + |a|^2)^{1/2}$, $r_\nu(t) = 2a_\nu - (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2)^{1/2}$, $\nu = 2, \dots, n$.

Обозначим $\zeta = \zeta(a_1, \dots, a_n) = \inf E$, где

$$E = \left\{ t \geq 1 : 2[t] + [2\{t\}] \geq 1 + r_2(t)/a_1, \right. \\ \left. r_\nu < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \quad \nu = 2, \dots, n \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство*

$$r(A) = R(a, \zeta). \quad (3)$$

Отметим, что результаты К. А. Беренштейна и Р. Гэя (см. [6], [7]) в данном случае дают оценку $r(A) \leq 2|a|$. Равенство (3) показывает, что эта оценка не является

точной ни при каких $a_1, \dots, a_n$ (см. лемму 10 в § 5). Кроме того, из доказательства теоремы 1 следует, что в двумерном случае $A \in \mathcal{P}(B_{R(a, \zeta)})$, а при $n \geq 3$ это, вообще говоря, неверно (см. §§ 8, 9).

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 1. Пусть χ_A – характеристическая функция (индикатор) множества A .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $r > R(a, \zeta)$. Тогда система функций

$$\{\chi_A(\lambda^{-1}x)\}_{\lambda \in \Lambda(n, r)} \quad (4)$$

замкнута в пространстве $L^p(B_r)$ при любом $1 \leq p < \infty$. Система (4) не является замкнутой в $L^\infty(B_r)$ ни при каком $r > |a|$.

Из доказательства видно (см. §§ 8, 9), что подобное утверждение о замкнутости, вообще говоря, неверно, если $r \leq R(a, \zeta)$. Другие результаты об аппроксимации функций линейными комбинациями индикаторов имеются в [3] и [22].

Всюду в дальнейшем точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ отождествляется с комплексным числом $z = x + iy$. Обозначим $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $r \geq R(a, \zeta)$ и f, g – вещественнозначные функции из класса $C^2(\mathbb{D}_r)$. Тогда для того чтобы одна из функций $f + ig$, $f - ig$ была голоморфна в $\mathbb{D}_r$, необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций f, g , $\sqrt{f^2 + g^2}$, расположенных над любым прямоугольником со сторонами a_1, a_2 , лежащим в $\mathbb{D}_r$, были равны.

Отсюда нетрудно получить аналогичное утверждение для функций f, g , заданных в произвольной области $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, в котором размеры рассматриваемых прямоугольников уменьшаются при приближении к границе $\mathcal{U}$. В этом смысле следствие 2 является уточнением теоремы Дзядыка [23].

Далее, как обычно, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\overline{\mathcal{U}}$ – замыкание области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\mathcal{U}$ – граница $\mathcal{U}$, $L_{\text{loc}}(\mathcal{U})$ – класс функций, локально суммируемых в области $\mathcal{U}$. Пусть $H(\mathbb{D}_r)$ – множество функций $f : \mathbb{D}_r \rightarrow \mathbb{C}$ со следующим свойством: $f \in H(\mathbb{D}_r)$ тогда и только тогда, когда существует голоморфная в $\mathbb{D}_r$ функция, совпадающая с f почти всюду.

При фиксированном $w > 0$ рассмотрим функцию

$$\kappa(z, w) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{\sqrt{w^2 - |z|^2}(w + \sqrt{w^2 - |z|^2})} + \frac{1}{z}, & \text{если } 0 < |z| < w, \\ 0, & \text{если } |z| > w \text{ или } z = 0 \end{cases}$$

(черта над z означает комплексное сопряжение).

Следующий результат является решением одной экстремальной задачи о прямоугольнике, связанной с теоремой Мореры (см. [9]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{D}_r)$ и для почти всех (по мере Хаара) $\lambda \in \Lambda(2, r)$

$$\int_{\partial(\lambda A)} f(z) dz = 0. \quad (5)$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Если $r > R(a, \zeta)$, то $f \in H(\mathbb{D}_r)$.
2. Пусть $r = R(a, \zeta)$. Тогда:

- а) если $2\zeta \in \mathbb{N}$ и $\zeta > \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1}r_2(\zeta)$, то $f \in H(\mathbb{D}_r)$;
 б) в противном случае f имеет вид

$$f(z) = h(z) + c\bar{z} - \frac{4c}{\pi z}a_2r_2(\zeta) + \frac{8ca_1a_2}{\pi} \sum_{m=1}^{[\zeta]} \kappa(z, (2m + [2\{\zeta\}] - 1)a_1), \quad (6)$$

где $h \in H(\mathbb{D}_r)$, c – комплексная постоянная. Обратно, всякая функция вида (6) удовлетворяет (5).

3. При $r < R(a, \zeta)$ существует неголоморфная функция $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}_r)$, удовлетворяющая (5).

Нетрудно видеть, что ситуации, описанные во втором утверждении теоремы 2, реализуются при подходящих a_1, a_2 . Полагая $a_1 = a_2$, из первого утверждения получаем уточнение теоремы Л. Зальцмана об описании функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ с условием (5) (см. [24]). По поводу других уточнений и аналогов теоремы Мореры см. [16]–[19], [25]–[27] и библиографию к этим работам.

Результаты данной работы докладывались на семинаре Л. Зальцмана во время визита автора в Bar-Ilan University (Израиль, 1996). Автор благодарит Л. Зальцмана за приглашение, теплый прием и полезные обсуждения.

§ 2. Основные обозначения

Как обычно, символами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества целых и неотрицательных целых чисел. Пусть $SO(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$, $M_r = \{x \in \mathbb{R}^n : A + x \subset B_r\}$, $B_{\alpha, \beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < |x| < \beta\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in S^{n-1}$). Положим

$$E_1 = \left\{ t \geq 1 : r_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \quad \nu = 2, \dots, n \right\},$$

$$E_2 = \left\{ t \geq 1 : \{t\} \geq \frac{1}{2}, \quad [t] \geq \frac{1}{2a_1}r_2(t) \right\},$$

$$E_3 = \left\{ t \geq 1 : \{t\} < \frac{1}{2}, \quad [t] \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1}r_2(t) \right\},$$

тогда $E = E_1 \cap (E_2 \cup E_3)$. Для любого $m \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через ε_m отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующее следующим образом: если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_m x = ((\varepsilon_m x)_1, \dots, (\varepsilon_m x)_n)$, где $(\varepsilon_m x)_\nu = x_\nu$ при $\nu \neq m$ и $(\varepsilon_m x)_m = -x_m$. Пусть G_+ (соответственно G_-) – совокупность отображений $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, представимых в виде суперпозиции четного (соответственно нечетного) числа отображений ε_m , $1 \leq m \leq n$. Следуя [28, гл. 4, п. 2], обозначим $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0(B_{\alpha, \beta})$ – множество радиальных (т.е. зависящих только от $|x|$) функций $f: B_{\alpha, \beta} \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \leq l \leq d_k$, – ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k , рассматриваемом как подпространство $L^2(S^{n-1})$ (см., например, [28, гл. 4, п. 2]). Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_{\alpha, \beta})$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (\alpha, \beta),$$

где $f_{kl}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma$. Для функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{D}_r)$ аналогичное разложение имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{ik\varphi},$$

где ρ, φ – соответственно модуль и аргумент числа $z \in \mathbb{D}_r$ и

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi. \quad (7)$$

Обозначим через $\mathcal{H}_r$ множество функций $f \in C^\infty(B_r)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad \text{для любого } \lambda \in \Lambda(n, r). \quad (8)$$

Пусть также $\Delta = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$ – оператор Лапласа, $\text{supp } f$ – носитель функции f , $f * g$ – свертка функций f и g . Символами c, c_m ($m \in \mathbb{Z}$) обозначаются комплексные постоянные, в разных местах, вообще говоря, разные.

§3. Функциональное уравнение

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес и при $n = 2$ уточняющее один из результатов Г. Сабо (см. [21]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\delta > 0$ и функция f локально суммируема в области $U_\delta = B_{|a|-\delta, |a|+\delta}$. Если $n \geq 3$, то для того чтобы при почти всех (по мере Хаара) $\lambda \in \Lambda(n, |a| + \delta)$ было выполнено равенство

$$\sum_{\varepsilon \in G_+} f(\lambda \varepsilon a) = \sum_{\varepsilon \in G_-} f(\lambda \varepsilon a), \quad (9)$$

необходимо и достаточно, чтобы функция f совпадала почти всюду в U_δ с многочленом степени не выше $n - 1$. Если $n = 2$, то для выполнения условия (9) необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = c_0 |x|^2 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 \quad (10)$$

при почти всех $x \in U_\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ. Пусть $n \geq 3$ и f совпадает почти всюду в U_δ с многочленом P степени не выше $n - 1$. Тогда для почти всех $h \in M_{|a|+\delta}$ имеем

$$\sum_{\varepsilon \in G_+} f(\varepsilon a + h) - \sum_{\varepsilon \in G_-} f(\varepsilon a + h) = \int_{A+h} \frac{\partial^n P}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx = 0. \quad (11)$$

Поскольку множество многочленов степени не выше $n - 1$ инвариантно относительно вращений, аналогично получаем

$$\sum_{\varepsilon \in G_+} f(\tau \varepsilon a + h) = \sum_{\varepsilon \in G_-} f(\tau \varepsilon a + h) \quad (12)$$

для всех $\tau \in SO(n)$ и почти всех $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\tau A + h \subset B_{|a|+\delta}$. Отсюда следует (см. [29, гл. 11, § 1, формула (8)]) равенство (9) для почти всех $\lambda \in \Lambda(n, |a|+\delta)$. При $n = 2$ утверждение доказывается аналогично.

Для доказательства необходимости потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество функций $f \in C^\infty(U_\delta)$, удовлетворяющих (9) при всех $\lambda \in \Lambda(n, |a|+\delta)$. Пусть также $b(n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ при $n \geq 3$ и $b(2) = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathfrak{S}$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Все частные производные от f принадлежат $\mathfrak{S}$.
2. $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathfrak{S}$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l, p \leq d_k$.
3. Если $k \in \mathbb{N}$ и $f(x) = g(\rho)Y(\sigma)$ при некотором $Y \in \mathcal{H}_k$, то

$$\left(g'(\rho) + \frac{n+k-2}{\rho}g(\rho)\right)Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in \mathfrak{S}$$

при всех $1 \leq l \leq d_{k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\mathfrak{S}$ следует равенство (12) при всех $\tau \in SO(n)$ и $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\tau A + h \subset B_{|a|+\delta}$. Дифференцируя это равенство по каждой координате вектора h , получим утверждение 1. Для доказательства утверждений 2, 3 достаточно повторить рассуждения из § 3 работы [10].

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}_0$. Тогда существует $\xi \in (0, \delta]$ такое, что $f(x) = \sum_{\nu=0}^{b(n)} c_\nu |x|^{2\nu}$ в области $B_{|a|-\xi, |a|+\delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы докажем индукцией по n . Пусть $n = 2$, тогда $a = (a_1, a_2)$ и $f = f(x, y) = F(x^2 + y^2)$ для некоторой функции $F \in C^\infty$ на интервале $((|a| - \delta)^2, (|a| + \delta)^2)$. Пусть $t \in \mathbb{R}^1$, $|t| < (a_1^2 + 2\delta|a| + \delta^2)^{1/2} - a_1$ и $\varphi_\pm(t) = (a_1 \pm t)^2 + a_2^2$. Полагая $F'' = u$, из первого утверждения леммы 1 имеем

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = u(x^2 + y^2)xy \in \mathfrak{S}.$$

Используя равенство (12) для $h = (t, 0)$ в случае, когда τ — единица группы $SO(2)$, получаем

$$u(\varphi_+(t))(t + a_1) = u(\varphi_-(t))(t - a_1). \quad (13)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{8} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) = u'(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)y + 2u(x^2 + y^2)y \in \mathfrak{S}$$

и

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 3u(x^2 + y^2)y + 2u'(x^2 + y^2)y^3 \in \mathfrak{S}.$$

Как и выше, из этих условий и (12) имеем равенства

$$\begin{aligned} u'(\varphi_+(t))\varphi_+(t) + 2u(\varphi_+(t)) &= u'(\varphi_-(t))\varphi_-(t) + 2u(\varphi_-(t)), \\ 2u'(\varphi_+(t))a_2^2 + 3u(\varphi_+(t)) &= 2u'(\varphi_-(t))a_2^2 + 3u(\varphi_-(t)). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$8a_1a_2^2tu'(\varphi_+(t)) = (4a_2^2 - 3\varphi_-(t))(u(\varphi_+(t)) - u(\varphi_-(t))).$$

Отсюда и из (13) получаем

$$2a_2^2t(a_1 - t)u'(\varphi_+(t))\varphi'_+(t) = u(\varphi_+(t))(3t^3 - 3t^2a_1 - 4ta_2^2 + 2a_1^2a_2).$$

Из этого уравнения находим $u(\varphi_+(t)) = c|ta_1 - t^2|e^{-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{a_2}\right)^2}$ при $t \neq 0$, a_1 . Поскольку $u(\varphi_+(t)) \in C^\infty$ в окрестности точки $t = 0$, отсюда заключаем, что $u(\varphi_+(t)) = 0$. Следовательно, утверждение леммы 2 выполнено при $n = 2$.

Предположим, что утверждение леммы 2 имеет место для размерности $n - 1$ и докажем его для размерности $n \geq 3$. По условию $f(x) = g(\rho)$ для некоторой функции $g \in C^\infty(|a| - \delta, |a| + \delta)$. Из первого утверждения леммы 1 имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{g'(\rho)}{\rho}x_n \in \mathfrak{S}.$$

Используя уравнение (9) для движений λ , сохраняющих координату x_n вектора $x \in \mathbb{R}^n$, по предположению индукции получаем, что существует $\xi \in (0, \delta]$ такое, что

$$\frac{g'(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2})}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2}} = \sum_{\nu=0}^{b(n-1)} c_\nu (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^\nu$$

при $(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \in B_{|a|-\xi, |a|+\delta}$. Учитывая, что при $\nu > b(n)$ функция $|x|^{2\nu} \notin \mathfrak{S}$ (см., например, (11)), отсюда имеем утверждение леммы 2 для размерности n .

ЛЕММА 3. Пусть $f \in \mathfrak{S}$ и $f(x) = g(\rho)(\sigma_1 + i\sigma_2)^k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\xi \in (0, \delta]$ такое, что в области $B_{|a|-\xi, |a|+\delta}$ имеет место равенство

$$f(x) = (x_1 + ix_2)^k \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{n-k-1}{2}} c_\nu |x|^{2\nu},$$

в котором при $k \geq n$ сумма считается равной нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы докажем индукцией по k . Пусть $k = 1$. Из лемм 1, 2 следует, что существует $\xi \in (0, \delta]$ такое, что

$$g'(\rho) + \frac{n-1}{\rho}g(\rho) = \sum_{\nu=0}^{b(n)} c_\nu \rho^{2\nu} \quad \text{при } |a| - \xi < \rho < |a| + \delta.$$

Тогда

$$f(x) = (x_1 + ix_2) \left(\frac{c}{\rho^n} + \sum_{\nu=0}^{b(n)} \frac{c_\nu}{2\nu + n} \rho^{2\nu} \right)$$

при указанных ρ . Учитывая, что $f \in \mathfrak{S}$, из равенства (12) при $|h| < \xi$ заключаем, что $c = 0$ и $c_\nu = 0$ при $2\nu \geq n - 1$. Отсюда следует требуемое утверждение при $k = 1$.

Предположим, что утверждение леммы 3 выполнено при $k - 1$, и докажем его для $k \geq 2$. Из леммы 1 и предположения индукции заключаем, что существует $\xi \in (0, \delta]$ такое, что

$$g'(\rho) + (n + k - 2)g(\rho)/\rho = \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{n-k}{2}} c_\nu \rho^{2\nu+k-1}$$

при $|a| - \xi < \rho < |a| + \delta$. Отсюда, как и выше, получаем утверждение леммы 3 для $k \geq 2$.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in \mathfrak{S}$. Тогда f является многочленом степени не выше $n - 1$ при $n \geq 3$ и представима в виде (10), если $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in B_\delta$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = f(x - y)$ в области $U_{\delta-|y|}$. Из условия следует, что Φ удовлетворяет (9) при всех $\lambda \in \Lambda(n, |a| + \delta - |y|)$. Тогда из второго утверждения леммы 1 и лемм 2, 3 получаем, что в области $B_{|a|, |a|+\delta-|y|}$ функция Φ является многочленом степени не выше $n - 1$ при $n \geq 3$ и представима в виде (10) при $n = 2$. Поскольку это верно для любого $y \in B_\delta$, отсюда следует утверждение леммы 4.

Перейдем к доказательству необходимости в теореме 3. Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi \subset B_\eta$, где $\eta < \delta$. Тогда свертка $f * \varphi \in C^\infty(U_{\delta-\eta})$ и удовлетворяет (9) при всех $\lambda \in \Lambda(n, |a| + \delta - \eta)$. Отсюда получаем, что для функции $f * \varphi$ в области $U_{\delta-\eta}$ имеет место утверждение леммы 4. В силу произвольности φ отсюда следует (см., например, [28, гл. 1, теорема 1.25]) необходимость в теореме 3.

§ 4. Вспомогательные утверждения

Здесь мы докажем некоторые вспомогательные утверждения о свойствах функций с данными интегральными средними.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{D}_r)$, $f_k(\rho)e^{ik\varphi} = c_k z^k$ в $\mathbb{D}_r$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f_k(\rho)e^{ik\varphi} = 0$ в $\mathbb{D}_r$ при $k < 0$. Тогда $f \in H(\mathbb{D}_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in C(\mathbb{D}_r)$, утверждение леммы 5 следует из аналогичного утверждения для полианалитических функций (см. [17]). Общий случай получается отсюда стандартным приемом сглаживания (см., например, [30, предложение 5, § 1]).

ЛЕММА 6. Пусть $0 < \xi < \eta$, $U = \{z \in \mathbb{C} : \xi < |z| < \eta\}$ и $f \in L(U)$. Тогда для того чтобы при почти всех $t \in (\xi, \eta)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ было выполнено равенство

$$\int_{-\sqrt{\eta^2-t^2}}^{\sqrt{\eta^2-t^2}} f(e^{i\alpha}(t+iy))e^{i\alpha} dy = c, \quad (14)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(z) = \frac{c}{\pi} \varkappa(z, \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить непосредственно, что функция $f(z) = \frac{c}{\pi} \varkappa(z, \eta)$ удовлетворяет (14) при всех $t \in (\xi, \eta)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Для доказательства необходимости положим $g(z) = f(z) - c\varkappa(z, \eta)/\pi$ в U и $g(z) = 0$ при $z \notin U$. Тогда из (14) получаем, что при почти всех $t \in (\xi, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(e^{i\alpha}(t+iy)) dy = 0.$$

По теореме о носителе (см. [31, гл. 1, §2, теорема 2.20]) $g(z) = 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\xi$, откуда следует равенство (14).

Аналогично доказывается

ЛЕММА 7. Пусть $0 < \xi < \eta$, $U = \{z \in \mathbb{C} : \xi < |z| < \eta\}$ и $f \in L(U)$. Тогда для того чтобы при почти всех $t \in (\xi, \eta)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ было выполнено равенство

$$\int_{-\sqrt{\eta^2-t^2}}^{\sqrt{\eta^2-t^2}} f(e^{i\alpha}(t+iy)) dy = c,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(z) = \frac{c}{\pi}(\eta^2 - |z|^2)^{-1/2}$.

ЛЕММА 8. Пусть $\alpha > \frac{1}{2}$ и $f \in L_{\text{loc}}(-\alpha, \alpha)$. Предположим, что при некотором $\beta \in (0, \alpha)$ $f = 0$ на $(-\alpha, -\beta) \cup (\beta, \alpha)$ и значение интеграла $\int_t^{t+1} f(\xi) d\xi$ не зависит от $t \in (-\alpha, \alpha - 1)$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Если $[\alpha] \geq \beta + \frac{1}{2}$, то $f = 0$.
2. Если $[\alpha] \geq \beta$ и $\{\alpha\} \geq \frac{1}{2}$, то $f = 0$.
3. В остальных случаях существует ненулевая четная функция $f \in C^\infty(-\alpha, \alpha)$, удовлетворяющая условию леммы, у которой $\int_t^{t+1} f(\xi) d\xi = 0$ при $t \in (-\alpha, \alpha - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия имеем

$$f(t+1) - f(t) = 0 \quad \text{на} \quad (-\alpha, \alpha - 1). \quad (15)$$

Если $[\alpha] \geq \beta + \frac{1}{2}$, то $f = 0$ на $(-\alpha, -\beta) \cup (\beta, [\alpha])$. Отсюда и из (15) получаем первое утверждение леммы 8. Пусть $[\alpha] \geq \beta$ и $\{\alpha\} \geq \frac{1}{2}$, тогда $f = 0$ на $(-\alpha, -[\alpha]) \cup ([\alpha], \alpha)$. Отсюда и из (15) следует утверждение 2. Пусть теперь $[\alpha] < \beta < \alpha$. Обозначим через η наименьшее из чисел $1 - \{\alpha\}$ и $\beta - [\alpha]$. Тогда всякая ненулевая четная 1-периодическая функция $f \in C^\infty(-\alpha, \alpha)$ такая, что $f = 0$ на $(-\frac{1}{2} - \eta) \cup (\eta, \frac{1}{2})$ и $\int_{-1/2}^{1/2} f(\xi) d\xi = 0$, удовлетворяет условиям утверждения 3.

В случае, когда $\{\alpha\} < \frac{1}{2}$ и $[\alpha] - \frac{1}{2} < \beta < \alpha$, обозначим через γ наибольшее из чисел $\{\alpha\}$, $[\alpha] - \beta$. Тогда всякая ненулевая четная 1-периодическая функция $f \in C^\infty(-\alpha, \alpha)$ такая, что $f = 0$ на $(-\gamma, \gamma)$ и $\int_{-1/2}^{1/2} f(\xi) d\xi = 0$, удовлетворяет условиям утверждения 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 8 видно, что утверждения 1, 2 остаются верными, если вместо условия постоянства интегралов $\int_t^{t+1} f(\xi) d\xi$ будет выполнено равенство (15).

ЛЕММА 9. Пусть $\alpha \geq 1$ и $f: (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- а) при некотором $\beta \in (0, \alpha)$ $f = 0$ почти всюду на $(-\alpha, -\beta) \cup (\beta, \alpha)$;
- б) $f(t) - f(t+1) = c_1$ для почти всех $t \in (-1, 0)$;
- в) если $\alpha > 1$, то $f(t) - f(t+1) = c_2$ для почти всех $t \in (-\alpha, -1) \cup (1, \alpha)$.

Тогда выполнены следующие утверждения:

1. если $2\alpha \in \mathbb{N}$ и $\alpha > \beta + \frac{1}{2}$, то $f = 0$ почти всюду на $(-\alpha, \alpha)$;
2. если $[\alpha] = \beta - \frac{1}{2}[2\{\alpha\}] + \frac{1}{2}$, то для почти всех $t \in (0, \alpha)$ $f(t) = -f(-t) = -c_1[t - \beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий б), в) следует, что если $2\alpha \in \mathbb{N}$, то функция f определяется однозначно почти всюду на $(-\alpha, \alpha)$ по своим значениям на $(-\alpha, \frac{1}{2} - \alpha) \cup (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha)$. В частности, если f постоянна на $(-\alpha, \frac{1}{2} - \alpha) \cup (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha)$, то f постоянна на любом интервале вида $(m, m + \frac{1}{2}) \subset (-\alpha, \alpha)$, где $2m \in \mathbb{Z}$. Поэтому из условий первого утверждения и а) получаем $f = 0$ почти всюду на $(-\alpha, \alpha)$. Для доказательства второго утверждения достаточно, используя б), в), восстановить f почти всюду на $(-\alpha, \alpha)$ по ее значениям на множестве $(-\beta - \frac{1}{2}, -\beta) \cup (\beta, \beta + \frac{1}{2})$.

§ 5. Оценки некоторых величин, связанных с ζ

ЛЕММА 10. Имеют место неравенства

$$(|a|^2 + 3a_1^2)^{1/2} \leq R(a, \zeta) \leq (|a|^2 + 2a_1a_n + a_n^2)^{1/2}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое неравенство в (16) следует из очевидной оценки $\zeta \geq 1$. Для доказательства правого неравенства обозначим $\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{a_1} \right)$. Тогда при любом $\nu \in \{2, \dots, n\}$ $r_\nu(\eta) = 2a_\nu - ((a_n + a_1)^2 - a_1^2 + a_\nu^2)^{1/2} < a_\nu < 2a_1\eta$, т.е. $\eta \in E_1$. Далее, $r_2(\eta) = 2a_2 - (a_n^2 + 2a_na_1 + a_2^2)^{1/2} \leq 2a_2 - a_n - a_1 \leq a_n - a_1$. Следовательно, $r_2(\eta) \leq 2a_1[\eta]$ и при $\{\eta\} \geq \frac{1}{2}$ $\eta \in E_2$. Если $\{\eta\} < \frac{1}{2}$, аналогично получаем $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r_2(\eta)/a_1 \leq \frac{a_n}{2a_1} < [\eta]$ и $\eta \in E_3$. Таким образом, $\eta \in E$, откуда $\zeta \leq \eta$. Из этой оценки следует правое неравенство в (16).

ЛЕММА 11. Имеют место следующие утверждения.

1. Для любых чисел $a_1, \dots, a_n$, удовлетворяющих (2), имеет место неравенство

$$r_2(\zeta) < 2a_1\zeta \quad (17)$$

и $\zeta \in E_2 \cup E_3$.

2. Для любых $n \geq 3$, $\nu \in \{3, \dots, n\}$ существуют числа $a_1, \dots, a_n$ с условием (2) такие, что

$$r_\nu(\zeta) = \left(R^2(a, \zeta) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения множеств E_2 и E_3 получаем, что

$$E_2 \cup E_3 = [\xi, +\infty) \quad (18)$$

для некоторого $\xi \geq 1$. Следовательно, $\zeta \in E_2 \cup E_3$.

При $\{\zeta\} \geq \frac{1}{2}$ отсюда имеем $r_2(\zeta) \leq 2a_1[\zeta] < 2a_1\zeta$. Аналогично, если $\{\zeta\} < \frac{1}{2}$, то $r_2(\zeta) + a_1 \leq 2a_1[\zeta]$ и $r_2(\zeta) < 2a_1\zeta$. Таким образом, неравенство (17) доказано.

Для доказательства утверждения 2 рассмотрим числа $0 < a_1 = a_2 = \dots = a_{\nu-1}$. Учитывая (17), при любом $2 \leq m \leq \nu - 1$ имеем

$$r_m(\zeta) < \left(4a_1^2 \zeta^2 + \sum_{k=2}^{m-1} a_k^2 \right)^{1/2},$$

где при $m = 2$ последняя сумма считается равной нулю. Тогда существует $a_\nu > a_{\nu-1}$ такое, что $r_\nu(\zeta) = (4a_1^2 \zeta^2 + \sum_{k=2}^{\nu-1} a_k^2)^{1/2}$. Полагая $a_\nu = a_{\nu+1} = \dots = a_n$, получим набор чисел, удовлетворяющий условиям второго утверждения леммы 11.

ЛЕММА 12. Пусть $n = 2$. Тогда, если $2\zeta \notin \mathbb{N}$ или $\zeta \leq \frac{1}{2} + \frac{r_2(\zeta)}{2a_1}$, то

$$2[\zeta] + [2\{\zeta\}] = 1 + \frac{r_2(\zeta)}{a_1}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2\zeta \notin \mathbb{N}$. Если $\{\zeta\} > \frac{1}{2}$, из определения ζ и неравенства (17) имеем $2[\zeta]a_1 = r_2(\zeta)$. Если $0 < \{\zeta\} < \frac{1}{2}$, аналогично получаем $2a_1[\zeta] = r_2(\zeta) + a_1$. Поскольку $[2\{\zeta\}] = 1$ при $\{\zeta\} > \frac{1}{2}$ и $[2\{\zeta\}] = 0$ при $\{\zeta\} < \frac{1}{2}$, из полученных равенств следует (19).

Рассмотрим теперь случай, когда $\zeta \leq \frac{1}{2} + \frac{r_2(\zeta)}{2a_1}$. Поскольку $\zeta \in E_2 \cup E_3$ (см. лемму 11), имеем $2a_1[\zeta] \geq r_2(\zeta) + a_1$ при $\{\zeta\} < \frac{1}{2}$ и $2a_1[\zeta] \geq r_2(\zeta)$ при $\{\zeta\} \geq \frac{1}{2}$. Как и выше, из этих неравенств получаем (19).

§ 6. Примеры функций класса $\mathcal{H}_r$

Для построения примеров функций с условием (8) нам потребуются некоторые простые утверждения о свойствах множества M_r .

ЛЕММА 13. Пусть $h \in M_r$, $x \in A$ и $2 \leq \nu \leq n$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\nu-1} (x_m + h_m)^2 < r^2 - \sum_{m=\nu}^n a_m^2. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x' = (x_1, \dots, x_{\nu-1}, a_\nu, \dots, a_n)$, $x'' = (x_1, \dots, x_{\nu-1}, -a_\nu, \dots, -a_n)$, тогда $x', x'' \in A$ и $x' + h, x'' + h \in B_r$. Отсюда следует, что $|x' + h|^2 < r^2$ и $|x'' + h|^2 < r^2$. Складывая эти неравенства, получим (20).

ЛЕММА 14. Пусть $t > \frac{1}{2}$, $r = R(a, t)$ и $h \in M_r$. Тогда

$$r_\nu(t) < a_\nu - |h_\nu| \quad \text{при всех } 2 \leq \nu \leq n. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(-h) \in M_r$, не ограничивая общности, будем считать, что $h_\nu \geq 0$. Пусть $h' = (h'_1, \dots, h'_n)$, где $h'_m = 0$ при $m \neq \nu$ и $h'_\nu = h_\nu$. Рассмотрим $y \in A$ такое, что $y_m = -a_m$ при $m \neq \nu$ и $y_\nu = a_\nu$. Имеем $a + h, y + h \in B_r$, откуда $|a + h|^2 < r^2$ и $|y + h|^2 < r^2$. Складывая эти неравенства, получаем $|a + h'|^2 < r^2$. Поскольку $h_\nu \geq 0$, из последнего неравенства следует (21).

ЛЕММА 15. Пусть $\frac{1}{2} < t < 1$ и $r = R(a, t)$. Тогда $r_2(t) > 0$ и при любом $h \in M_r$

$$B_{r_2(t)} \subset A + h. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и неравенств (2) следует, что $0 < r_2(t) \leq r_\nu(t)$ для любого $2 \leq \nu \leq n$. Пусть $x \in B_{r_2(t)}$, тогда $|x_\nu| \leq r_\nu(t)$. Отсюда и из (21) имеем $|x_\nu| < a_\nu - |h_\nu|$ для любого $h \in M_r$. Из этих неравенств заключаем, что $x \in A + h$. Таким образом, имеет место условие (22).

Перейдем к построению примеров функций класса $\mathcal{K}_r$.

ЛЕММА 16. Пусть $\frac{1}{2} < t < 1$ и $r = R(a, t)$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 15 $r_2(t) > 0$ и выполнено условие (22). Пусть f — ненулевая функция класса $C^\infty \cap \mathfrak{H}_0(B_r)$ такая, что $\int_{B_{r_2(t)}} f(x) dx = 0$ и $f = 0$ при $|x| \geq r_2(t)$. Тогда для любого $h \in M_r$

$$\int_{B_{r_2(t)}} f(x) dx + \int_{(A+h) \setminus B_{r_2(t)}} f(x) dx = \int_{A+h} f(x) dx = 0.$$

Поскольку $f \in \mathfrak{H}_0$, отсюда следует, что $f \in \mathcal{K}_r$.

ЛЕММА 17. Пусть $t > \frac{1}{2}$, $t \notin E_2 \cup E_3$, $r = R(a, t)$ и $r_2(t) > 0$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 8 заключаем, что существует ненулевая четная функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\varphi = 0$ на $[r_2(t), +\infty)$ и

$$\int_{-a_1}^{a_1} \varphi(\xi + \eta) d\eta = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \leq 2a_1t - a_1. \quad (23)$$

Тогда (см. [31, гл. 1, § 2, теорема 2.4]) существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{H}_0$, преобразование Радона $\hat{f}(\omega, p)$ которой совпадает с $\varphi(p)$ при всех $\omega \in S^{n-1}$, $p \in \mathbb{R}^1$. По теореме о носителе (см. [31, гл. 1, § 2, теорема 2.6])

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq r_2(t). \quad (24)$$

Поскольку $r = R(a, t)$ и $r_2(t) \leq r_\nu(t)$ при $2 \leq \nu \leq n$ (см. (2)), условие (24) означает, что для любых $h \in M_r$ и $\omega \in S^{n-1}$

$$\int_{A+h} f(x) dx = \int_{-a_1}^{a_1} \hat{f}(\omega, p + h_1) dp = 0$$

(см. (21) и (23)). Так как $f \in \mathfrak{H}_0$, отсюда и из (24) следует, что сужение f на B_r принадлежит $\mathcal{K}_r$ и не обращается в нуль тождественно.

ЛЕММА 18. Пусть $t > \frac{1}{2}$, $r = R(a, t)$ и при некотором $\nu \in \{2, \dots, n\}$ $r_\nu(t) > (r^2 - \sum_{m=\nu}^n a_m^2)^{1/2}$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – ненулевая четная функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\varphi(\xi) = 0$, если $|\xi| \geq r_\nu(t)$ или $|\xi| \leq (r^2 - \sum_{m=\nu}^n a_m^2)^{1/2}$. Тогда существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{H}_0$, интеграл от которой по любой $(n - \nu + 1)$ -мерной гиперплоскости, находящейся на расстоянии p от точки $x = 0$, равен $\varphi(p)$ (см. [31, гл. 1, §2, следствие 2.28]). Следовательно, $f \neq 0$ и по теореме о носителе (см. [31, гл. 1, §2, следствие 2.25])

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq r_\nu(t). \quad (25)$$

Учитывая, что $r_m(t) \geq r_\nu(t)$ при $m \geq \nu$ (см. (2)), на основании леммы 14 имеем

$$\int_{A+h} f(x) dx = \int_{-a_1}^{a_1} \cdots \int_{-a_{\nu-1}}^{a_{\nu-1}} \varphi \left(\sqrt{\sum_{m=1}^{\nu-1} (x_m + h_m)^2} \right) dx_1 \dots dx_{\nu-1} \quad (26)$$

при любом $h \in M_r$. Из определения φ и (20) получаем, что интеграл в правой части (26) равен нулю. Поскольку $f \in \mathfrak{H}_0$, отсюда и из (25) следует, что сужение f на B_r принадлежит $\mathcal{K}_r$ и не обращается в нуль тождественно.

ЛЕММА 19. Пусть $r < R(a, \zeta)$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathcal{K}_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании лемм 16, 18 заключаем, что достаточно рассмотреть случай, когда $r = R(a, \mu)$, где $1 \leq \mu < \zeta$ и $r_\nu(\mu) \leq (r^2 - \sum_{m=\nu}^n a_m^2)^{1/2}$ при всех $2 \leq \nu \leq n$. Из этих условий следует, что $\zeta - \delta \in E_1$ и $[\zeta - \delta] \geq 1$ при любом $\delta \in (0, \zeta - \mu)$. Отсюда $\zeta - \delta \notin E_2 \cup E_3$ по определению ζ . Кроме того, $r_2(\zeta - \delta) > 0$ (в противном случае $\zeta - \delta \in E_2 \cup E_3$). Тогда по лемме 17 существует ненулевая функция $f \in \mathcal{K}_{R(a, \zeta - \delta)}$. Поскольку $R(a, \zeta - \delta) > R(a, \mu)$, отсюда следует утверждение леммы 19.

§ 7. Свойства функций класса $\mathcal{K}_r$

Прежде всего отметим, что все свойства класса $\mathfrak{S}$, перечисленные в формулировке леммы 1, имеют место и для $\mathcal{K}_r$. Для доказательства достаточно повторить рассуждения из § 3 работы [10].

ЛЕММА 20. Пусть $f \in \mathcal{K}_r$, $h = (0, \dots, 0, h_n) \in M_r$. Тогда

$$\int_{A_{n-1}} (f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n + a_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n - a_n)) dx_1 \dots dx_{n-1} = 0,$$

где

$$A_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in A\}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, вместе с f функция $f_n = \partial f / \partial x_n$ принадлежит $\mathcal{K}_r$. Поэтому $\int_A f_n(x + h) dx = 0$, откуда следует утверждение леммы 20.

ЛЕММА 21. Пусть $f \in \mathcal{K}_r$. Тогда f является многочленом в области $B_{2|a|-r, r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $F = f * \chi_A$ на множестве M_r . Из условия следует, что $F = 0$ и тогда $\frac{\partial^n F}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = 0$ на M_r . Из этого равенства имеем

$$\sum_{\varepsilon \in G_+} f(\varepsilon a + x) = \sum_{\varepsilon \in G_-} f(\varepsilon a + x)$$

при $x \in M_r$. Поскольку множество функций, принадлежащих $\mathcal{K}_r$, инвариантно относительно вращений, отсюда получаем равенство (12) при всех $\tau \in SO(n)$ и $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\tau A + h \subset B_r$. Таким образом, f удовлетворяет условию теоремы 3 при $\delta = r - |a|$. Следовательно, f является многочленом в $B_{2|a|-r, r}$.

ЛЕММА 22. Пусть $t > \frac{1}{2}$, $r = R(a, t)$ и $f \in \mathcal{K}_r$. Тогда если $f(x) = c$ при $|x| \geq a_n$, то $f(x) = c$ при $|x| \geq r_n(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что при любом $\nu \in \{1, \dots, n\}$ функция $f_\nu = \partial f / \partial x_\nu \in \mathcal{K}_r$ и $f_\nu(x) = 0$ при $|x| \geq a_n$. Тогда по лемме 20

$$\int_{A_{n-1}} f_\nu(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi) dx_1 \dots dx_{n-1} = 0$$

при любом $\xi \in (r_n(t), a_n]$. Продолжим f_ν на $\mathbb{R}^n$, полагая $f_\nu(x) = 0$ при $|x| \geq r$. Тогда существует $\delta > 0$, зависящее только от A и $r_n(t)$, такое, что интеграл от f_ν по любой $(n-1)$ -мерной гиперплоскости вида $x_n = p \geq a_n - \delta$ равен нулю. Этим же свойством обладает функция $f_\nu(\tau x)$ при любом $\tau \in SO(n)$. Из теоремы о носителе (см. [31, гл. 1, § 2, теорема 2.6]) следует, что $f_\nu(x) = 0$ при $|x| \geq a_n - \delta$. Повторяя подобное рассуждение нужное число раз, получаем $f_\nu(x) = 0$ при $|x| \geq r_n(t)$. Следовательно, $f(x) = c$ при $|x| \geq r_n(t)$, что и требовалось.

ЛЕММА 23. Пусть $t > \frac{1}{2}$ и $r = R(a, t)$. Предположим, что существует $f \in \mathcal{K}_r$, которая не является тождественной константой в области $r_n(t) < |x| < r$. Тогда существует функция $g \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ с этим свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – наименьшее из целых неотрицательных чисел, для которого существует $l \in \{1, \dots, d_k\}$ такое, что функция $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ не является тождественной константой при $|x| > r_n(t)$ (существование такого k следует из условия леммы 23). Предположим, что $k \geq 2$. Тогда (см. начало § 7 и утверждения 2, 3 леммы 1)

$$f'_{kl}(\rho) + \frac{n+k-2}{\rho} f_{kl}(\rho) = 0 \quad (28)$$

при $\rho \geq r_n(t)$. Далее, из леммы 21 следует, что f является многочленом в $B_{2|a|-r, r}$. Поскольку $k \geq 2$, отсюда и из (28) заключаем, что $f_{kl}(\rho) = 0$ при $\rho \geq r_n(t)$, что противоречит определению k . Предположим теперь, что $k = 1$. В этом случае, как и выше, $f'_{1l}(\rho) + (n-1)f_{1l}(\rho)\rho^{-1} = c$ при $\rho \geq r_n(t)$. Учитывая, что f – многочлен в $B_{2|a|-r, r}$, отсюда находим $f_{1l}(\rho)\sigma_n = c x_n / n$ при $|x| \geq r_n(t)$. Поскольку $f_{1l}(\rho)\sigma_n \in \mathcal{K}_r$, из леммы 20 имеем $c = 0$, что также противоречит определению k . Таким образом, $k = 0$, откуда следует утверждение леммы 23.

ЛЕММА 24. Пусть $n = 2$, $t > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $r = R(a, t)$ и $f \in \mathcal{K}_r$. Тогда $f(x) = c$ при $|x| \geq r_2(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 21 следует, что f удовлетворяет (10) и тогда $\Delta f = 4c_0$ при $|x| \geq 2|a| - r$. Нетрудно видеть, что при $n = 2$ и $t > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ выполнено неравенство $2|a| - r \leq a_2$, поэтому $\Delta f = 4c_0$ при $|x| \geq a_2$. Учитывая, что $\Delta f \in \mathcal{K}_r$, из леммы 22 получаем $\Delta f = 4c_0$ при $|x| \geq r_2(t)$. В частности, f вещественно-аналитична в области $r_2(t) < |x| < r$ (см., например, [32, гл. 7, теорема 7.5.1]). Тогда равенство (10) имеет место при $|x| \geq r_2(t)$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2c_0 x_2$ при таких x . Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x_2} \in \mathcal{K}_r$, отсюда и из леммы 20 имеем $c_0 = 0$. Применяя теперь лемму 20 к функции f , получаем $c_2 = 0$. Это означает, что при $|x| \geq r_2(t)$ значение $f(x)$ не зависит от x_2 . Поскольку это верно и для функции $f(\tau x)$ при любом $\tau \in SO(2)$, отсюда следует требуемое утверждение.

ЛЕММА 25. Пусть $n \geq 3$, $t > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $r = R(a, t)$ и $f \in \mathcal{K}_r$. Тогда если при всех $2 \leq \nu \leq n$

$$r_\nu(t) \leq \left(r^2 - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \quad (29)$$

то $f(x) = c$ при $|x| \geq r_n(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 24 следует, что при $n = 2$ аналогичное утверждение верно без дополнительного условия (29). Предположим, что утверждение леммы 25 имеет место для размерности $n - 1$ и докажем его для размерности $n \geq 3$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f \in \mathcal{K}_r \cap \mathfrak{H}_0$ (см. лемму 23). Полагая $f(x) = F(|x|^2)$, получаем

$$F'(|x|^2)x_n = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_n} \in \mathcal{K}_r. \quad (30)$$

Следовательно (см. лемму 20), функция $F'(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + a_n^2)$ имеет нулевые интегралы по всем $(n - 1)$ -мерным параллелепипедам, конгруэнтным A_{n-1} (см. (27)) и лежащим в шаре $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x|^2 < r^2 - a_n^2\}$. По предположению индукции имеем

$$F' = c_1 \text{ на промежутке } [r_{n-1}^2(t) + a_n^2, r^2]. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь функцию $\Phi(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) = x_n \int_{-a_{n-1}}^{a_{n-1}} F'(|x|^2) dx_{n-1}$, заданную в шаре $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x|^2 < r^2 - a_{n-1}^2\}$. Из условия (30) и предположения индукции следует, что $\Phi = c_2$ при $x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 + x_n^2 \geq r_n^2(t)$. Учитывая, что $a_n \geq r_n(t)$ и полагая $x_n = a_n$, получаем

$$\int_{-a_{n-1}}^{a_{n-1}} F'(y^2 + x_{n-1}^2) dx_{n-1} = \frac{c_2}{a_n} \quad (32)$$

при всех $a_n \leq y < (r^2 - a_{n-1}^2)^{1/2}$. Далее, неравенство (29) при $\nu = n - 1$ означает, что $a_n^2 + r_{n-1}^2(t) \leq r^2 - a_{n-1}^2$. Тогда из (31), (32) и леммы 7 следует, что $F' = c_1$ на $[a_n^2, r^2]$. Применяя лемму 20 к функции $F'(|x|^2)x_n$ (см. (30)), отсюда имеем $c_1 = 0$. Таким образом, $f(x) = c$ при $|x| \geq a_n$. Отсюда и из леммы 22 следует утверждение леммы 25.

§ 8. Свойства локально суммируемых функций с условием (8)

ЛЕММА 26. Пусть $t > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $r = R(a, t)$ и

$$r_\nu(t) < \left(r^2 - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2} \quad (33)$$

при всех $2 \leq \nu \leq n$. Пусть также $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и выполнено условие (8). Тогда $f = c$ в области $r_n(t) < |x| < r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует $\xi = \xi(\delta) > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ такое, что $r - \delta = R(a, \xi)$ и неравенства (33) выполнены при $t = \xi$. Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi \subset B_\delta$. Тогда свертка $f * \varphi \in \mathcal{K}_{r-\delta}$ и является константой, зависящей от φ , в области $r_n(\xi) < |x| < r - \delta$ (см. леммы 24, 25). Учитывая, что $\xi(\delta) \rightarrow t$ при $\delta \rightarrow 0$, в силу произвольности φ имеем (см. [28, гл. 1, теорема 1.18]) утверждение леммы 26.

ЛЕММА 27. Пусть $t \in E$, $r = R(a, t)$, $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и выполнено условие (8). Тогда $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 27 докажем индукцией по n . Пусть $n = 2$. Поскольку $t \in E_1$, из условия (8) и леммы 26 следует, что для некоторой константы c функция $g = f - c$ равна нулю в области $r_2(t) < |x| < r$ и $\int_{\lambda A} g(x) dx = -4ca_1a_2$ для любого $\lambda \in \Lambda(2, r)$. Продолжим g на $\mathbb{R}^2$, полагая $g(x) = 0$ при $|x| \geq r$. Рассмотрим функцию $F(x_1) = \int_{-a_2}^{a_2} g(x_1, x_2) dx_2$, суммируемую на интервале $(-2a_1t, 2a_1t)$. Эта функция равна нулю на множестве $(-2a_1t, -r_2(t)) \cup (r_2(t), 2a_1t)$ и $\int_{-a_1}^{a_1} F(x_1 + \xi) dx_1 = -4ca_1a_2$ при всех $|\xi| < 2a_1t - a_1$. Поскольку $t \in E_2 \cup E_3$, из утверждений 1, 2 леммы 8 получаем $F = 0$ на $(-2a_1t, 2a_1t)$. Это означает, что для почти всех $p \in \mathbb{R}^1$ интеграл от g по прямой $x_1 = p$ равен нулю. Аналогичное утверждение верно и для функции $g(\tau x)$ при любом $\tau \in SO(2)$. Следовательно, $g = 0$ в $\mathbb{R}^2$ (см. [31, гл. 1, § 2, теорема 2.20]). Учитывая (8), отсюда получаем $f = 0$.

Предположим, что утверждение леммы 27 имеет место для размерности $n - 1$ и докажем его для размерности $n \geq 3$. На основании леммы 26 заключаем, что для некоторой константы c функция $g = f - c$ равна нулю в области

$$r_n(t) < |x| < r \quad \text{и} \quad \int_{\lambda A} g(x) dx = -2^n c \prod_{\nu=1}^n a_\nu$$

для любого $\lambda \in \Lambda(n, r)$. Рассмотрим функцию

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-a_n}^{a_n} g(x_1, \dots, x_n) dx_n,$$

суммируемую в шаре $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x|^2 < r^2 - a_n^2\}$. Из свойств g и условия (8) получаем, что для некоторой константы c_1 функция $F - c_1$ имеет нулевые интегралы по любому $(n - 1)$ -мерному параллелепипеду, конгруэнтному A_{n-1} (см. (27)) и лежащему в шаре $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x|^2 < r^2 - a_n^2\}$. По предположению индукции получаем $F = c_1$. Тогда из определения F и неравенства $r_n(t) < (r^2 - a_n^2)^{1/2}$ имеем $F = 0$. Аналогичное утверждение имеет место, если функцию $g(x)$ заменить функцией $g(\tau x)$ при любом $\tau \in SO(n)$. Как и выше, отсюда следует (см. [31, гл. 1, § 2, теорема 2.20]), что $f = 0$. Таким образом, лемма 27 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $n = 2$. Тогда $A \in \mathcal{P}(B_{R(a,\zeta)})$.

Доказательство следует из леммы 27 и неравенства (17).

ЛЕММА 28. Пусть $n \geq 3$, $r = R(a, \zeta)$ и $r_n(\zeta) = (r^2 - a_n^2)^{1/2}$. Тогда существует ненулевая функция $f \in L(B_r)$ с условием (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} (r_n^2(\zeta) - |x|^2)^{-1/2}, & \text{если } |x| < r_n(\zeta), \\ 0, & \text{если } |x| \geq r_n(\zeta). \end{cases}$$

На основании леммы 7 заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) dx_n = \pi \quad \text{при} \quad x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < r_n^2(\zeta).$$

Следовательно, для любого $h \in M_r$

$$\int_{A+h} g(x) dx = 2^{n-1} \pi \prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu$$

(см. формулу (26) при $\nu = n$). Полагая $f = g - \frac{\pi}{2a_n}$, из последнего равенства и радиальности g получаем (8). Осталось заметить, что $f \in L(B_r)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $n \geq 3$. Тогда существует параллелепипед A такой, что $A \notin \mathcal{P}(B_{R(a,\zeta)})$.

Доказательство следует из лемм 28 и 11. Отметим также, что существование параллелепипеда $A \in \mathcal{P}(B_{R(a,\zeta)})$ при любом $n \geq 2$ ранее было доказано в [8].

§9. Доказательство теоремы 1 и ее следствий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из леммы 19 и определения $r(A)$ имеем $r(A) \geq R(a, \zeta)$. Докажем противоположное неравенство. Пусть $r > R(a, \zeta)$, тогда $r = R(a, t)$, где $t > \zeta$. Из определения ζ следует, что выполнены неравенства (33) и $t \in E_2 \cup E_3$ (см. (18)). Пусть теперь $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и выполнено условие (8). Тогда на основании леммы 27 заключаем, что $f = 0$. Следовательно, $r(A) \leq R(a, \zeta)$ и теорема 1 полностью доказана.

Перейдем к доказательству следствий из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r > R(a, \zeta)$ и φ — линейный непрерывный функционал на пространстве $L^p(B_r)$ такой, что $\varphi(\chi_A(\lambda^{-1}x)) = 0$ при всех $\lambda \in \Lambda(n, r)$. По теореме Рисса существует функция $f \in L^q(B_r)$, $q = p/(p-1)$ такая, что $\varphi(g) = \int_{B_r} f(x)g(x) dx$ для любой $g \in L^p(B_r)$. Тогда f удовлетворяет (8) и по теореме 1 $\varphi = 0$. Отсюда следует (см., например, [33, гл. 1, §30]) замкнутость системы (4) в $L^p(B_r)$.

Далее, при любом $r > |a|$ всякая конечная линейная комбинация функций вида (4) равна нулю в бесконечном числе точек шара B_r . Поэтому функция, тождественно равная константе $c \neq 0$ в B_r , не может быть приближена с любой точностью такими линейными комбинациями в $L^\infty(B_r)$. Таким образом, при любом $r > |a|$ система (4) не является замкнутой в $L^\infty(B_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Необходимость следует из теоремы Дзядыка (см. [23]). Для доказательства достаточности рассмотрим функции

$$f_m(x, y) = \left(1 + \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad m = 1, 2, 3,$$

где $\Phi_1 = f$, $\Phi_2 = g$, $\Phi_3 = \sqrt{f^2 + g^2}$. При любом $\lambda \in \Lambda(2, r)$ из условия имеем

$$\int_{\lambda A} f_1(x, y) dx dy = \int_{\lambda A} f_2(x, y) dx dy = \int_{\lambda A} f_3(x, y) dx dy,$$

где в данном случае $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a_1, |y| \leq a_2\}$. Используя следствие к лемме 27, заключаем, что $f_1 = f_2 = f_3$ в $\mathbb{D}_r$. Отсюда имеем равенство указанных в следствии 2 площадей, расположенных над любым измеримым подмножеством $\mathbb{D}_r$. Тогда из теоремы Дзядыка [23] следует голоморфность одной из функций $f + ig$, $f - ig$ в $\mathbb{D}_r$.

§ 10. Доказательство теоремы 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Сначала предположим, что $f \in C^1(\mathbb{D}_r)$. В этом случае равенство (5) имеет место при всех $\lambda \in \Lambda(2, r)$. Для таких λ по формуле Грина имеем

$$\int_{\lambda A} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = 0.$$

Тогда по теореме 1 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ в $\mathbb{D}_r$, откуда следует голоморфность f . Поскольку $r > R(a, \zeta)$, общий случай сводится к рассмотренному стандартным приемом сглаживания (см. [30, приложение 5, § 1], а также доказательство леммы 26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Не ограничивая общности, будем считать, что $a_1 = 1/2$ (общий случай получается отсюда применением преобразования подобия). Нетрудно видеть, что функции $f_k(\rho)e^{ik\varphi}$ удовлетворяют условию теоремы 2 при $r = R(a, \zeta)$ (см. доказательство леммы 1 в работе [16], а также [29, гл. 11, § 1, формула (8)]). Используя (17) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 26, из (5) и формулы Грина получаем, что функция $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f_k(\rho)e^{ik\varphi})$, где дифференцирование понимается в смысле распределений, является константой (равной нулю при $k \neq -1$) в области $r_2(\zeta) < |z| < r$. Это означает (см. [32, гл. 7, теорема 7.5.1]), что в этой области

$$f_k(\rho)e^{ik\varphi} = \begin{cases} c_k z^k & \text{при } k \neq -1, \\ c_{-1} z^{-1} + c\bar{z} & \text{при } k = -1. \end{cases}$$

Положим $g_k(z) = f_k(\rho)e^{ik\varphi} - c_k z^k$ в $\mathbb{D}_r$ при $k \neq -1$ и $g_{-1}(z) = f_{-1}(\rho)e^{-i\varphi} - c_{-1} z^{-1} - c\bar{z}$ в $\mathbb{D}_r$. Пусть также $g_k(z) = 0$ при $|z| \geq r$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Для любого $\alpha \in [-\pi, \pi]$ рассмотрим функцию

$$F_{k,\alpha}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(e^{i\alpha}(t + iy)) dy,$$

определенную почти всюду на $\mathbb{R}^1$. Учитывая, что $g_k(z) = 0$ в области $|z| > r_2(\zeta)$, имеем $F_{k,\alpha} = 0$ на $(-\infty, -r_2(\zeta)) \cup (r_2(\zeta), +\infty)$. При $k \neq -1$ из условия (5) получаем $F_{k,\alpha}(t+1) = F_{k,\alpha}(t)$ при почти всех $t \in (-\zeta, \zeta-1)$. Поскольку $\zeta \in E_2 \cup E_3$ (см. лемму 11), отсюда следует, что $g_k(z) = 0$ в $\mathbb{C}$ (см. доказательство леммы 27 и замечание к лемме 8). Таким образом, $f_k(\rho)e^{ik\varphi} = c_k z^k$ в $\mathbb{D}_r$ при $k \neq -1$. Учитывая, что $f_k(\rho)e^{ik\varphi} \in L_{\text{loc}}(\mathbb{D}_r)$ (см. (7)), имеем $c_k = 0$ при $k \leq -2$. Тогда по лемме 5 функция

$$h(z) = f(z) - f_{-1}(\rho)e^{-i\varphi} \quad (34)$$

принадлежит $H(\mathbb{D}_r)$. Далее, из определения $g_{-1}(z)$ и условия (5) следует, что $F_{-1,\alpha}(t) - F_{-1,\alpha}(t+1) = 4ica_2 + 2\pi ic_{-1}$ при почти всех $t \in (-1, 0)$. Кроме того, если $\zeta > 1$, аналогично получаем $F_{-1,\alpha}(t) - F_{-1,\alpha}(t+1) = 4ica_2$ при почти всех $t \in (-\zeta, -1) \cup (1, \zeta)$.

Пусть $2\zeta \in \mathbb{N}$ и $\zeta > \frac{1}{2} + r_2(\zeta)$. Из первого утверждения леммы 9 заключаем, что $F_{-1,\alpha} = 0$ и тогда $f_{-1}(\rho)e^{-i\varphi} = 0$ в $\mathbb{D}_r$ (см. [31, гл. 1, §2, теорема 2.20]). Следовательно, в этом случае $f = h \in H(\mathbb{D}_r)$. Далее, если $2\zeta \notin \mathbb{N}$ или $\zeta \leq \frac{1}{2} + r_2(\zeta)$, из леммы 12 имеем равенство (19). Используя второе утверждение леммы 9, из определения $F_{-1,\alpha}$ и леммы 6 получаем

$$g_{-1}(z) = \frac{4a_2c}{\pi} \sum_{k=1}^{[\zeta]} \kappa\left(z, k + \frac{1}{2}[2\{\zeta\}] - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда и из (34) имеем равенство (6) при $a_1 = \frac{1}{2}$. Утверждение о том, что при указанных условиях всякая функция вида (6) удовлетворяет (5), следует из леммы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Пусть f — ненулевая функция класса $\mathcal{H}_r$, построенная при доказательстве леммы 19 в случае $n = 2$. Тогда $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}_r})$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in \mathcal{H}_r$ (см. начало §7). Используя формулу Грина, отсюда получаем равенство (5) при всех $\lambda \in \Lambda(2, r)$. Предположим, что f голоморфна в $\mathbb{D}_r$. Тогда $f(z) = c_1 z + c_2$ в $\mathbb{D}_r$ (см. доказательство леммы 21 и равенство (10)). Отсюда и из условия (8) имеем $f = 0$, что противоречит ее определению. Таким образом, функция f удовлетворяет всем требованиям третьего утверждения теоремы 2.

Список литературы

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al, 1992. P. 185–194.
2. *Беренштейн К. А., Струнна Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 54: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
3. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
4. *Garofalo N., Segala F.* Univalent functions and the Pompeiu problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 346. P. 137–146.
5. *Ulrich D. C.* More on the Pompeiu problem // Amer. Math. Monthly. 1994. V. 101. P. 165–168.
6. *Berenstein C. A., Gay R.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133–166.
7. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.

8. Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 671–680.
9. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 804–809.
10. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
11. Волчков В. В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 351–358.
12. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Серия матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
13. Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. матем. жур. 1994. Т. 35. № 4. С. 737–745.
14. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на ограниченных областях евклидовых пространств // Диф. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1719–1724.
15. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 300–302.
16. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 30–36.
17. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для полианалитических функций // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 20–28.
18. Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.
19. Волчков В. В. Теоремы типа Мореры на областях со слабым условием конуса // Изв. вузов. Математика. 1993. № 10. С. 15–20.
20. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. The three squares theorem, a local version // Analysis and Partial Differential Equations / ed. C. Sadosky. New York: Marcel Dekker, 1990. P. 35–50.
21. Szabo G. On functions having the same integral on congruent semidisks // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 1982. V. 3. P. 3–9.
22. Волчков В. В. Аппроксимация функций на ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$ линейными комбинациями сдвигов // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 560–561.
23. Дзядык В. К. Геометрическое определение аналитических функций // УМН. 1960. Т. 15. № 1. С. 191–194.
24. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 47. P. 237–254.
25. Айзенберг Л. А. Вариации на тему теоремы Морера и проблемы Помпейю // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 6. С. 709–712.
26. Berenstein C. A., Chang D. C., Pascuas D., Zalcman L. Variations on the theorem of Morera // Contemp. Math. 1992. V. 137. P. 63–78.
27. Agranovsky M., Berenstein C. A., Chang D. C. Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 443. P. 49–89.
28. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
29. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
30. Ленг С. $SL_2(\mathbb{R})$. М.: Мир, 1977.
31. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
32. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
33. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.