Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, О весовых соболевских пространствах, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 8, 27–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:43:41

УДК 517.9

В. В. Жиков

О весовых соболевских пространствах

Изучается ситуация, когда в весовом соболевском пространстве W гладкие функции не плотны. Приводятся новые примеры неравенства $H \neq W$, где через H обозначено замыкание гладких функций. Ставится задача о “вязких” или “достижимых” пространствах V , $H \subseteq V \subseteq W$, т.е. таких, которые являются в определенном смысле пределом весовых соболевских пространств, отвечающих “хорошим” – ограниченным сверху и отделенным от нуля – весам. Точная формулировка свойства достижимости дается в терминах сходимости решений соответствующих эллиптических уравнений. Доказывается, что достижимое пространство всегда существует, но оно вообще не совпадает с крайними пространствами H и W . Приводятся примеры строгого вложения $H \subset V \subset W$.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

1.1. Мы рассматриваем весовые аналоги классического соболевского пространства, обычно обозначаемого в литературе как $W_2^1(\Omega)$, $W^{1,2}(\Omega)$ или $H^1(\Omega)$ (см. [1]–[3]).

В качестве Ω берем произвольную область в $\mathbb{R}^N$, чаще всего само пространство $\mathbb{R}^N$ или шар в $\mathbb{R}^N$.

Пусть задан вес $\rho(x) \geq 0$ – измеримая функция, удовлетворяющая лишь условию локальной суммируемости: $\rho \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Введем множество функций

$$u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega) \text{ с конечной “энергией” } \|u\|_\rho^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) \rho \, dx \quad (1.1)$$

Здесь и далее $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ – обычное пространство локально суммируемых в области Ω функций, $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, для которых градиент ∇u (понимаемый в смысле распределений) также локально суммируем, $\nabla u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)^N$. Преднорму $\|\cdot\|_\rho$ из (1.1) будем для краткости называть *энергетической нормой*.

Весовое соболевское пространство можно определить, вообще говоря, двумя способами:

$W = W(\Omega, \rho \, dx)$ как пополнение класса (1.1) по энергетической норме;

$H = H(\Omega, \rho \, dx)$ как пополнение множества $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_\rho < \infty\}$ по энергетической норме.

Очевидно, что W , H – гильбертовы пространства, $H \subseteq W$. По определению, в пространстве H плотны функции, гладкие внутри области Ω , а пространство W заведомо содержит все функции, для которых “энергия” имеет смысл и конечна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00503).

Отметим, что в случае $\Omega = \mathbb{R}^N$ определение пространства H можно упростить, именно,

$H(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ – пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ по энергетической норме.

Действительно, пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\|u\|_\rho < \infty$. Возьмем срезающую функцию $\theta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\theta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, $\theta(x) = 0$ при $|x| \geq 2$, и положим $u_\varepsilon(x) = u(x)\theta(\varepsilon x)$. Тогда легко проверить, что $\|u - u_\varepsilon\|_\rho \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. То же рассуждение показывает, что финитные функции плотны в $W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$.

В определениях присутствует достаточно сложная операция пополнения. Позже мы обсудим связанные с ней вопросы, а сейчас отметим, что если выполнено дополнительное условие

$$\rho^{-1} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \quad (1.2)$$

то определения упрощаются. В этом случае для любого шара $B \subset \Omega$

$$\int_B |\nabla u| dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \rho dx \right)^{1/2} \left(\int_B \rho^{-1} dx \right)^{1/2} < \infty \quad (1.3)$$

и аналогично для u . Поэтому класс (1.1) автоматически полный по энергетической норме, пространство W совпадает с классом (1.1), а пространство H есть замыкание $C^\infty(\Omega) \cap W$ в W .

Классическое соболевское пространство соответствует весу $\rho(x) \equiv 1$ и определено единственным образом, так как пространства $W(\Omega, dx)$ и $H(\Omega, dx)$ совпадают для любой области Ω (см. [4]). В этом случае мы используем также обозначение $W^{1,2}(\Omega)$.

Конечно, если вес ρ ограничен сверху и отделен от нуля ($0 < c_1 \leq \rho \leq c_2 < \infty$), то пространства W и H также совпадают. Но в общем случае ни условие (1.2), ни более сильные требования типа локальной суммируемости ρ и ρ^{-1} с любой степенью равенства $H = W$ не обеспечивают. Примеры на этот счет построены в [5]–[7].

ПРИМЕР 1. Пусть $N = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$,

$$\rho(x) = \begin{cases} \left(\ln \frac{2}{|x|} \right)^\alpha, & \text{если } x_1 x_2 > 0, \\ \left(\ln \frac{2}{|x|} \right)^{-\alpha}, & \text{если } x_1 x_2 < 0, \alpha > 1. \end{cases}$$

Тогда $H(\Omega, \rho dx) \neq W(\Omega, \rho dx)$ (см. также §5, где обсуждаются другие примеры).

Одномерный случай составляет исключение: здесь всегда справедливо равенство $H(\Omega, \rho dx) = W(\Omega, \rho dx)$ (доказательство см. в §4).

Обычно W называют весовым соболевским пространством, а равенство $W = H$ трактуют как проблему “плотности гладких функций в весовом соболевском пространстве”. Мы будем называть *соболевским пространством* не только W и H , но и любое подпространство, промежуточное между ними. В случае равенства $H = W$ вес ρ называют *регулярным*. Вопросам регулярности посвящен §4 настоящей работы. В целом эта проблема оказывается чрезвычайно тонкой; равенство $H = W$ удается доказать только в специальных случаях, когда вес ρ “вырождается” в точке (как в примере 1) или на множестве нулевой емкости. Так, если $N = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ и

$$0 < c(r) \leq \rho(x) \leq C \ln \frac{2}{r} \quad \text{при } |x| \geq r > 0,$$

то ρ – регулярен (ср. с весом из примера 1).

1.2. Если дополнительное условие (1.2) не выполнено, то соболевские пространства не содержатся в $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ и возникают некоторые нюансы с определением градиента.

Например, элементу пространства $W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ отвечает последовательность $u_n \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, фундаментальная по энергетической норме:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int |u_m - u_n|^2 \rho dx = 0, \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_m - \nabla u_n|^2 \rho dx = 0.$$

(Здесь и далее при интегрировании по всему пространству $\mathbb{R}^N$ пишем $\int \cdot dx$ вместо $\int_{\mathbb{R}^N} \cdot dx$.)

Поскольку весовое лебегово пространство $L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ полно, то найдутся

$$u \in L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx), \quad v \in (L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx))^N,$$

для которых

$$u_n \rightarrow u \text{ в } L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx), \quad \nabla u_n \rightarrow v \text{ в } (L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx))^N.$$

Пара (u, v) сопоставляется рассматриваемому элементу пространства W , при этом v называется *градиентом* u и обозначается ∇u . Таким образом, $W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ отождествляется с подпространством произведения весовых лебеговых пространств $L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx) \times (L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx))^N$; это подпространство получается замыканием по энергетической норме множества $\{u, \nabla u\}$, где u пробегает класс (1.1).

При таком определении соболевского пространства функция u может иметь много градиентов. Очевидно, что градиент будет единственным, если функция $u \equiv 0$ имеет только нулевой градиент. Это означает, что из соотношений

$$u_n \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n^2 \rho dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |z - \nabla u_n|^2 \rho dx = 0, \quad (1.4)$$

следует $z = 0$ в $(L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx))^N$.

В работе [8] замечено, что если

$$\rho^{-1} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N \setminus F), \quad (1.5)$$

где F — замкнутое множество нулевой лебеговой меры, то градиент единственен. Действительно, в этом случае для шара $B \subset \mathbb{R}^N \setminus F$ из (1.3) и (1.4) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |u_n| dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |z - \nabla u_n| dx = 0.$$

Поэтому $z = 0$ п.в. на $\mathbb{R}^N$.

Примеры неединственности градиента даны в [8], [9].

ПРИМЕР 2. Пусть $F \subset \Omega = (0, 1)$ есть канторово множество *положительной* лебеговой меры. Дополнение $\Omega \setminus F$ состоит из счетного числа интервалов (α_i, β_i) . Зададим вес ρ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \text{ на } F, & 0 \leq \rho \leq 1 \text{ на } \Omega, \\ \rho &> 0 \text{ на } (\alpha_i, \beta_i), & \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \rho^{-1} dx = \infty. \end{aligned}$$

Тогда функция $\chi_F = 1$ на F и 0 на $\Omega \setminus F$ является градиентом нуля.

Тем не менее и при выполнении условия (1.5) градиент может обладать не вполне привычными свойствами.

ПРИМЕР 3 (см. [7]). Пусть $\Omega = [-1, 1]$, $\rho(x) = |x|^{1+\beta}$, $\beta > 0$. Условие (1.5) очевидно выполнено, $F = \{0\}$. Рассмотрим функцию $u(x) = x/|x|$ и проверим, что $u \in H$, $\nabla u \equiv 0$. Для этого берем гладкую срезающую функцию

$$\theta(x) = 0 \text{ при } |x| \leq 1, \quad \theta(x) = 1 \text{ при } |x| \geq 2,$$

и положим $u_\varepsilon(x) = u(x)\theta(\varepsilon^{-1}x)$. Легко убедиться, что

$$u_\varepsilon \rightarrow u, \quad \nabla u_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ в } L^2([-1, 1], \rho dx).$$

Видим, что *ненулевая* функция может иметь тождественный нуль в качестве своего *единственного* градиента.

1.3. Неединственность градиента не является препятствием к рассмотрению вырождающихся эллиптических уравнений.

Пусть $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — измеримая симметрическая матрица на $\mathbb{R}^N$,

$$\gamma_0^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma_0|\xi|^2, \quad \gamma_0 > 0.$$

Мы хотим рассмотреть уравнение во всем пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$-\operatorname{div}(\rho A \nabla u) + \rho u = \rho f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (1.6)$$

Выбирая подпространство K , промежуточное между $H = H(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ и $W = W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, скажем что $u \in K$ есть K -решение или *вариационное* решение, если выполнено интегральное тождество

$$\int (A \nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \rho dx = \int f \varphi \rho dx \quad \forall \varphi \in K, \quad (1.7)$$

в котором ∇u — *некоторый* градиент u .

Существование и единственность решения как пары $u, \nabla u$ легко следует из теоремы Рисса о представлении. Таким образом единственность здесь двоякая: *одна функция из K и лишь один из ее градиентов удовлетворяют тождеству (1.7)*. Единственность, относящуюся к градиенту, легко получить непосредственно. Выбрав в тождестве (1.7) $\varphi = 0$, получим

$$\int A \nabla u \cdot \nabla \varphi \rho dx = 0 \text{ для любого градиента нуля, } (0, \nabla \varphi) \in K.$$

Допуская, что это равенство выполнено для двух градиентов функции u , в качестве $\nabla \varphi$ берем их разность и тогда

$$0 = \int A \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \rho dx \implies \nabla \varphi = 0,$$

что и требовалось.

Из определения K -решения видно, что в качестве пробной функции в тождестве (1.7) можно взять само решение u . В результате получим энергетическое равенство и энергетическую оценку

$$\begin{aligned} \int (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2) \rho dx &= \int f u \rho dx \quad (\text{энергетическое равенство}) \\ &\leq \left(\int f^2 \rho dx \right)^{1/2} \left(\int u^2 \rho dx \right)^{1/2} \leq \int f^2 \rho dx. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Возникает вопрос, действительно ли K -решение уравнения (1.6) зависит от выбора промежуточного пространства K ?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $\rho^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и $H \neq W$. Тогда

$$H\text{-решение} \neq W\text{-решению для некоторого } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим следующее. Можно рассмотреть уравнение (1.6) в более общей форме, именно,

$$-\operatorname{div}(\rho A \nabla u) + \rho u = \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ — непрерывный функционал над W . Тогда энергетическая оценка для K -решения принимает вид:

$$\begin{aligned} \int (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2) \rho dx &\leq \|\mathcal{F}\|_{K^*}^2, \\ \|\mathcal{F}\|_{K^*} &= \sup_{\varphi \in K, \|\varphi\|_W=1} \langle \mathcal{F}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $H \neq W$, найдется ненулевой функционал $\mathcal{F}_0$ такой, что $\mathcal{F}_0|_H = 0$. Соответствующее H -решение равно нулю, а W -решение $v \neq 0$. Заметим, что функционалы $\mathcal{F}$ вида

$$\langle \mathcal{F}, \varphi \rangle = \int f \varphi \rho dx, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

образуют плотное в W^* множество (это есть следствие единственности градиента). Поэтому

$$\exists f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \|\mathcal{F}_0 - f_\varepsilon\|_{W^*} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если u_ε и v_ε есть, соответственно, H -решение и W -решения уравнения (1.6) с $f = f_\varepsilon$, то по энергетической оценке

$$\|u_\varepsilon\|_W \rightarrow 0, \quad \|v_\varepsilon - v\|_W \rightarrow 0.$$

Следовательно, $u_\varepsilon \neq v_\varepsilon$ при малых ε , что и требовалось.

Итак, K -решение действительно зависит от выбора пространства K . С вариационной точки зрения это означает, что величина

$$J(K) = \min_{u \in K} \int_{\Omega} (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) \rho dx$$

зависит от K . В частности, $J(H) > J(W)$ (*эффект Лаврентьева*).

Между тем всякое K -решение является так называемым слабым решением уравнения (1.6). Функцию $u \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ называем *слабым решением*, если она удовлетворяет уравнению (1.6) в смысле распределений, т.е. справедливо интегральное равенство из (1.7) для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Это равенство автоматически распространяется на $\varphi \in H$, но взять в нем $\varphi = u$ и получить энергетическое равенство, вообще говоря, нельзя. Действительно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $\rho^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и $H \neq W$. Тогда для некоторого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ уравнение (1.6) имеет слабое решение, которое не является вариационным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем f таким, что H -решение u_1 не совпадает с W -решением u_2 . Для u_1 и u_2 выполняются энергетические равенства. Для полусуммы $u = (u_1 + u_2)/2$ энергетическое равенство не выполняется в силу строгой выпуклости квадратичного функционала

$$\int (\nabla w A \cdot \nabla w + w^2) \rho dx \text{ на } W.$$

Поэтому u не может быть K -решением. Между тем, u является слабым решением. Предложение доказано.

Остается добавить, что слабое решение будет K -решением, если для него энергетическое равенство выполнено. Действительно, в качестве K можно взять наименьшее подпространство, содержащее само решение и множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Тогда интегральное тождество (1.7) выполняется. Другими словами, *энергетическое равенство служит критерием вариационного решения.*

1.4. Пространство H – самое узкое, а W – самое широкое из всех соболевских пространств, отвечающих данному весу. Можно было бы подумать, что H -решения и W -решения наиболее естественны для приложений, а промежуточные K -решения представляют только абстрактный интерес. Это однако не совсем так.

С точки зрения как теории, так и приложений важно, чтобы решение эллиптического уравнения (1.6) обладало свойством “вязкости” или “достижимости”. Это значит, что оно *может быть получено как некоторый предел решений уравнения вида (1.6) с $\rho = \rho_\varepsilon$, где вес ρ_ε при каждом $\varepsilon > 0$ ограничен сверху и отделен от нуля.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Скажем, что пространство $V = V(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, $H \subseteq V \subseteq W$, *достижимо*, если найдется такая последовательность весов ρ_ε , что

- i) $\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho$ слабо в L^1_{loc} , $0 < c_1(\varepsilon) \leq \rho_\varepsilon \leq c_2(\varepsilon) < \infty$;
- ii) для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ решение u_ε уравнения

$$-\operatorname{div}(\rho_\varepsilon A \nabla u_\varepsilon) + \rho_\varepsilon u_\varepsilon = \rho_\varepsilon f \quad (1.9)$$

“слабо” сходится к V -решению u уравнения (1.6):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi u_\varepsilon \rho_\varepsilon dx = \int \varphi u \rho dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Вместо “пространство V достижимо” мы говорим также, что “ V -решения достижимы”.

Достижимые решения наследуют многие свойства допредельных решений, в особенности, свойства, основанные на принципе максимума, например, простейшую оценку

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \rho dx)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \rho dx)}.$$

Без свойства достижимости подобные свойства нужно специально доказывать, причем часто они представляются вообще проблематичными.

Будут ли H -решения и W -решения достижимы в указанном смысле?

Вопрос этот остается открытым, ответ здесь, по-видимому, *отрицателен*.

Тем не менее, мы доказываем, что всегда имеется промежуточное “достижимое” пространство, именно, таким будет пространство

$$V = V(\mathbb{R}^N, \rho dx) - \text{пополнению множества } \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\|_\rho < \infty\} \\ \text{по энергетической норме.} \quad (1.10)$$

При определенных условиях на вес ρ новое пространство V будет совпадать с одним из пространств W или H .

Например, пусть вес ρ отделен от нуля, $\rho \geq \text{const} > 0$. Тогда множество $\{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\|_\rho < \infty\}$ очевидно совпадает с классом (1.1) и, значит, $V = W$. Поэтому достижимыми будут W -решения. В данном случае в качестве аппроксимирующей последовательности ρ_ε можно взять *более или менее произвольную* аппроксимацию снизу, например, $\rho_\varepsilon = (\rho^{-1} + \varepsilon)^{-1}$. При этом достижимость H -решений остается под вопросом, т.е. неизвестно существование *хотя бы одной* аппроксимации, приводящей к H -решениям.

Если же вес ρ ограничен сверху, то множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\|_\rho < \infty\} = W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ по энергетической норме, значит, $V = H$. Поэтому H -решения будут достижимыми. В данном случае в качестве ρ_ε можно взять *более или менее произвольную* аппроксимацию сверху, например, $\rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon$. При этом достижимость W -решений остается под вопросом, т.е. неизвестно существование *хотя бы одной* аппроксимации, приводящей к W -решениям.

В работе будет построен пример, в котором $H \neq V \neq W$.

Приведем точную формулировку свойства достижимости пространства V , в частности, укажем соответствующую аппроксимацию. Для произвольного веса $\rho \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ введем двойную аппроксимацию

$$\rho_{\varepsilon, \delta} = (\rho^{-1} + \delta)^{-1} + \varepsilon.$$

Для ограниченного сверху или отделенного от нуля веса аппроксимация упрощается:

$$\begin{aligned} \text{если } \rho \leq C < \infty, \text{ то } \rho_{\varepsilon, \delta} &= \rho + \varepsilon \text{ и } V = W; \\ \text{если } \rho^{-1} \leq C < \infty, \text{ то } \rho_{\varepsilon, \delta} &= (\rho^{-1} + \varepsilon)^{-1} \text{ и } V = H. \end{aligned}$$

Через $u_{\varepsilon, \delta}$ обозначим решение задачи

$$u_{\varepsilon, \delta} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad -\text{div}(\rho_{\varepsilon, \delta} A \nabla u_{\varepsilon, \delta}) + \rho_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta} = \rho_{\varepsilon, \delta} f. \quad (1.11)$$

ТЕОРЕМА 1.4. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \varphi u_{\varepsilon, \delta} \rho_{\varepsilon, \delta} dx &= \int \varphi u \rho dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \varphi \nabla u_{\varepsilon, \delta} \rho_{\varepsilon, \delta} dx &= \int \varphi \nabla u \rho dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int |u_{\varepsilon, \delta}|^2 \rho_{\varepsilon, \delta} dx &= \int u^2 \rho dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int A \nabla u_{\varepsilon, \delta} \cdot \nabla u_{\varepsilon, \delta} \rho_{\varepsilon, \delta} dx &= \int A \nabla u \cdot \nabla u \rho dx, \end{aligned}$$

в которых u есть V -решение уравнения (1.6).

Возникает вопрос, *нельзя ли в теореме 1.4 переставить пределы по ε и δ ?*

Ответ отрицателен, как показывают построенные в §5 примеры. Отметим, что существование и смысл второго повторного предела $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta}$ в общем случае не установлены. Поэтому вопрос о “втором” вязком решении остается открытым. При этом дело не упрощается, если предполагать, что ρ и ρ^{-1} локально суммируемы с любой степенью.

Может также возникнуть вопрос: каков предел решения $u_{\varepsilon, \delta}$, если параметры ε и δ связаны соотношением типа $\delta = \delta(\varepsilon)$? Пример, построенный в §5 показывает, что в качестве предела можно получить невариационные решения уравнения (1.6).

1.5. Вырождающиеся эллиптические уравнения возникают во многих разделах математической физики. Сейчас мы кратко обсудим две ситуации.

i) *Краевые задачи в перфорированном пространстве.* Пусть $A = E$ – единичная матрица,

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q, \\ 0, & \text{если } x \notin Q, \end{cases}$$

где Q – некоторая область в $\mathbb{R}^N$ (обычно Q периодична, скажем, Q есть внешность периодической системы шаров). В этом случае

$$H(\mathbb{R}^N, \rho dx) - \text{замыкание множества } C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \text{по соболевской норме } \left(\int_Q (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2},$$

а интегральное тождество для H -решения принимает вид:

$$\int_Q (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_Q f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Отсюда понятно, что u удовлетворяет эллиптическому уравнению внутри области Q , а на границе – условию Неймана:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{в } Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = 0. \end{cases}$$

ii) *Диффузия в потенциальном поле.* Исходим из уравнения

$$-\operatorname{div}(\nabla v - bv) + v = g \quad \text{в } \mathbb{R}^N,$$

в котором b – потенциальное векторное поле, $b = \nabla \Phi$. Полагая

$$\rho = e^\Phi, \quad v = u\rho, \quad g = \rho f,$$

приходим к уравнению (1.6) для функции u . Физические примеры потенциалов Φ показывают, что условие $\rho^{-1} \in L_{\text{loc}}^1$ не обязательно выполняется.

§ 2. Вспомогательные вопросы

Здесь мы достаточно подробно выясняем, что означает “слабая” и “сильная” сходимость элементов $u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx)$ к элементу $u \in L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx)$.

2.1. Напомним, что борелевская мера μ на $\mathbb{R}^N$ называется *мерой Радона*, если $\mu(S) < \infty$ для любого компакта $S \subset \mathbb{R}^N$.

Пусть μ_ε, μ — неотрицательные меры Радона на $\mathbb{R}^N$ и $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$ слабо, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi d\mu_\varepsilon = \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Примером служат меры

$$\begin{aligned} d\mu_\varepsilon &= \rho_\varepsilon(x) dx, & d\mu &= \rho dx, \\ 0 &\leq \rho_\varepsilon(x) \rightharpoonup \rho(x) \text{ слабо в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Последовательность $u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$ назовем *ограниченной*, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon < \infty,$$

и *слабо сходящейся*, если она ограничена и найдется элемент $u \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ такой, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int \varphi u d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (2.2)$$

Тривиальный пример слабо сходящейся последовательности — это $u_\varepsilon = \psi$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеют место следующие свойства:*

- i) *из ограниченной последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность;*
- ii) *если u_ε слабо сходится к u , $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, то*

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon \geq \int u^2 d\mu. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность мер Радона

$$u_\varepsilon d\mu_\varepsilon. \quad (2.4)$$

Для любого шара B

$$\int_B |u_\varepsilon| d\mu_\varepsilon \leq \left(\int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon \right)^{1/2} \mu_\varepsilon^{1/2}(B) \leq C \mu_\varepsilon^{1/2}(B). \quad (2.5)$$

Из слабой сходимости $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$ следует, что $\mu_\varepsilon(B) \leq C(B) < \infty$. Поэтому семейство мер (2.4) слабо компактно и, без потери общности, ее можно считать слабо сходящейся:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int \varphi dU,$$

где U – некоторая мера Радона. Наша цель будет достигнута, если установить, что мера U абсолютно непрерывна относительно меры μ , $dU = u d\mu$ и $u \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$. Для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\left| \int \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon \right| \leq \left(\int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon \right)^{1/2} \left(\int \varphi^2 d\mu_\varepsilon \right)^{1/2} \leq C \left(\int \varphi^2 d\mu_\varepsilon \right)^{1/2}.$$

Переходя здесь к пределу, получаем неравенство

$$\left| \int \varphi dU \right| \leq C \left(\int \varphi^2 d\mu \right)^{1/2},$$

из которого ясно, что $dU = u d\mu$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$.

Докажем неравенство (2.3). Имеем

$$\begin{aligned} \int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon &\geq 2 \int \varphi u_\varepsilon d\mu_\varepsilon - \int \varphi^2 d\mu_\varepsilon, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon &\geq 2 \int \varphi u d\mu - \int \varphi^2 d\mu. \end{aligned}$$

Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$, то последнее неравенство верно для любого $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$. Выбрав $\varphi = u$, получим (2.3). Предложение доказано.

Далее, скажем, что последовательность $w_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$ *сильно сходится* к $w \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon w_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int u w d\mu \quad \text{для любой } u_\varepsilon \rightarrow u. \quad (2.6)$$

Ограниченности w_ε заранее не требуется – она следует из (2.6). Действительно, пусть $\lambda_\varepsilon = \|w_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)} \rightarrow \infty$, $u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{-1} w_\varepsilon$. Тогда

$$\int u_\varepsilon w_\varepsilon d\mu = \lambda_\varepsilon \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

С другой стороны, u_ε ограничена и ее можно считать слабо сходящейся. Тогда из (2.6) следует, что интеграл (2.7) имеет конечный предел.

Перечислим другие следствия определения (2.6).

- i) Из *сильной сходимости* следует *слабая* (достаточно взять $u_\varepsilon = \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$).
- ii) Если $w_\varepsilon \rightarrow w$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int w_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \int w^2 d\mu \quad (2.8)$$

(достаточно взять $u_\varepsilon = w_\varepsilon$).

- iii) Слабая сходимость $w_\varepsilon \rightarrow w$ и соотношение (2.8) влекут *сильную сходимость* $w_\varepsilon \rightarrow w$.

Действительно, рассмотрим любую подпоследовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$, для которой существует предел $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int u_\varepsilon w_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \alpha$, а также предел $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 d\mu_\varepsilon = \beta$.

Тогда из свойства (2.3) и равенства (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int (w_\varepsilon + tu_\varepsilon)^2 d\mu_\varepsilon &\geq \int (w + tu)^2 d\mu \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \\ 2t\alpha + t^2\beta &\geq 2t \int uw d\mu + t^2 \int u^2 d\mu. \end{aligned}$$

Сокращая сначала на $t > 0$, затем на $t < 0$ и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем равенство

$$\alpha = \int uw,$$

из которого следует (2.6).

2.2. Уточним введенные выше понятия сходимости в случае, когда выполняется условие (2.1). Слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ означает два свойства:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon dx &< \infty \quad (\text{“ограниченность”}), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi u_\varepsilon \rho_\varepsilon dx &= \int \varphi u \rho dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

а для сильной сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u$ к ним добавляется третье:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon dx = \int u^2 \rho dx.$$

Простой пример: если $\rho_\varepsilon \leq \rho$ и $w_\varepsilon = \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, то $w_\varepsilon \rightarrow \varphi$.

Указанную сходимость в “переменном пространстве” мы называли и будем называть просто “слабой” (“сильной”), а иногда ρ_ε -слабой (ρ_ε -сильной). В случае обычной сходимости в фиксированном пространстве, скажем L^2 , мы всегда говорим “сходимость в L^2 ”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Имеют место следующие утверждения:*

- i) *если u_ε ограничена, то слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ эквивалентна слабой сходимости $u_\varepsilon \rho_\varepsilon \rightharpoonup u \rho$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$;*
- ii) *если $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ и u_ε сходится к u слабо (сильно), то au_ε сходится к au слабо (сильно);*
- iii) *если $\rho_\varepsilon \geq \rho$, то слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ влечет слабую сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неравенство (2.5) в котором в качестве B выбрано произвольное ограниченное измеримое множество. Тогда из (2.1) ясно, что семейство $u_\varepsilon \rho_\varepsilon$ равномерно интегрируемо и поэтому слабо компактно в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Отсюда легко получаем i). Из i), в свою очередь, следует ii).

Докажем свойство iii). Из $\rho_\varepsilon \geq \rho$ и (2.1) следует, что $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ сильно в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ и поэтому можно считать, что $\rho_\varepsilon(x) \rightarrow \rho(x)$ п.в. Семейство $w_\varepsilon = u_\varepsilon(\rho_\varepsilon - \rho)$ слабо компактно в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ и $w_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ п.в. По теореме Лебега $u_\varepsilon(\rho_\varepsilon - \rho) \rightarrow 0$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Отсюда следует наше утверждение. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Без условия $\rho_\varepsilon \geq \rho$ свойство iii), конечно, не выполняется. Действительно, пусть $\Omega = (0, \pi)$,

$$\rho_\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin(\varepsilon^{-1}x), \quad u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\rho_\varepsilon(x)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(x) &\rightharpoonup \rho(x) \equiv 1 \quad \text{в } L^1(0, \pi), \\ u_\varepsilon &\rightharpoonup 1 \quad \rho_\varepsilon\text{-слабо}, \\ u_\varepsilon &\rightharpoonup \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \frac{1}{2} \sin x} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad \text{слабо в } L^2(0, \pi, \rho dx) = L^2(0, \pi). \end{aligned}$$

2.3. Наконец, вкратце рассмотрим “переменный” вариант теоремы Троттера–Като.

Пусть в пространствах $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$, $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ заданы операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{A}$ с плотными областями определения и такие, что $\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda E$, $\mathcal{A} + \lambda E$, $\lambda > 0$, обратимы и нормы обратных не превосходят $1/\lambda$. Тогда $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\mathcal{A}$ являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп $T_\varepsilon(t) = \exp(-t\mathcal{A}_\varepsilon)$, $T(t) = \exp(-t\mathcal{A})$.

Мы говорим о *сильной резольвентной сходимости* $\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + E)^{-1} f_\varepsilon \rightarrow (\mathcal{A} + E)^{-1} f \quad \text{как только } f_\varepsilon \rightarrow f.$$

Полезно отметить, что для сильной резольвентной сходимости достаточно сильной сходимости

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + E)^{-1} f \rightarrow (\mathcal{A} + E)^{-1} f \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

ТЕОРЕМА 2.3 (теорема Троттера–Като). *Из сильной резольвентной сходимости следует сильная сходимость полугрупп:*

$$T_\varepsilon(t) f_\varepsilon \longrightarrow T(t) f \quad \text{как только } f_\varepsilon \rightarrow f.$$

Доказательство этой теоремы в настоящей работе не приводится.

Для иллюстрации вышесказанного снова обратимся к эллиптическому уравнению (1.6). Заметим, что, как только промежуточное пространство K выбрано, получается оператор $-\operatorname{div}(\rho A \nabla)$, обладающий перечисленными выше свойствами. Следовательно, соответствующая эволюционная задача

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho A \nabla u) & \text{в } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = f & \in L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx), \end{cases}$$

разрешима в смысле теории полугрупп. При этом, если взять V -решения этой задачи, то по теоремам 1.4 и 2.3 они будут достижимыми.

§3. Достижимость V -решений

3.1. Выше мы занимались переходом к пределу в “переменных” лебеговых пространствах. Аналогичный вопрос для соболевских пространств несравненно сложнее и ставится следующим образом.

Снова берем веса ρ_ε, ρ , причем $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Дана последовательность $u_\varepsilon \in W(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx)$, ограниченная вместе с градиентами, т.е.

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int (|u^\varepsilon|^2 + |\nabla u^\varepsilon|^2) \rho_\varepsilon dx < \infty. \quad (3.1)$$

Без потери общности считаем, что u^ε и ∇u^ε являются ρ_ε -слабо сходящимися:

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup v,$$

в частности,

$$\rho_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup \rho u, \quad \rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \rho v \quad \text{в } (L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))^N \quad (3.2)$$

(см. предложение 2.2). Основной вопрос: *будет ли элемент v градиентом предельной функции u ?* Если да, то $u \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ и мы имеем слабую сходимость в “переменном” соболевском пространстве.

ЛЕММА 3.1. Пусть дополнительно $\rho_\varepsilon(x) \rightarrow \rho(x)$ п.в. и последовательность ρ_ε^{-1} слабо компактна в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Тогда слабый предел градиентов есть градиент предельной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ограниченного измеримого $S \subset \mathbb{R}^N$ получим

$$\int_S |\nabla u_\varepsilon| dx \leq \left(\int |\nabla u_\varepsilon|^2 \rho_\varepsilon dx \right)^{1/2} \int_S \rho_\varepsilon^{-1} dx \leq C \int_S \rho_\varepsilon^{-1} dx$$

и аналогичное неравенство для u_ε . Отсюда ясно, что последовательность u_ε слабо компактна в обычном соболевском пространстве $W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Без потери общности полагаем, что

$$u_\varepsilon \rightarrow z, \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla z \quad \text{в } (L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))^N, \quad z \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N). \quad (3.3)$$

Нам нужно проверить два равенства

$$u = z, \quad v = \nabla z,$$

из которых докажем второе (первое доказывается аналогично).

Для шара B положим

$$B_n = \{x \in B : \rho_\varepsilon(x) \leq n \text{ для любого } \varepsilon > 0\}.$$

Имеем $\rho_\varepsilon(x) \rightarrow \rho(x)$ п.в. и $\rho_\varepsilon \leq n$ на B_n . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla u_\varepsilon(\rho_\varepsilon - \rho) &\rightarrow 0 \quad \text{в } L^1(B_n) \quad (\text{теорема Лебега}), \\ \rho \nabla u_\varepsilon &\rightharpoonup \rho \nabla z \quad \text{в } L^1(B_n) \quad (\text{см. (3.3)}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \rho \nabla z \quad \text{в } (L^1(B_n))^N.$$

Сравнение с (3.2) дает равенство $v = \nabla z$ п.в. на B_n . Но $\text{mes}(B \setminus B_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (в силу $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ в $L^1(B)$), а шар B произволен. Поэтому $v = \nabla z$ п.в. на $\mathbb{R}^N$. Лемма доказана.

Из этой леммы получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть u_ε – слабое решение уравнения (1.9), удовлетворяющее оценке (3.1). Тогда слабый предел u_ε будет слабым решением предельного уравнения (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению уравнение (1.9) выполнено в смысле распределений:

$$\int \rho_\varepsilon (A \nabla u_\varepsilon + A \nabla \varphi + u_\varepsilon \varphi) dx = \int f \rho_\varepsilon \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Благодаря (3.2) и равенству $v = \nabla u$, здесь можно перейти к пределу и получить аналогичное тождество для ρ вместо ρ_ε . Следствие доказано.

В частности, если вес ρ_ε регулярен (например, ограничен сверху и отделен от нуля при каждом ε), то неравенство (3.1) выполняется автоматически в силу энергетической оценки (1.8). Однако и в этом случае предельная функция может не быть вариационным решением предельного уравнения. Соответствующий пример будет указан в § 5.

Для получения вариационных решений требуется специальные аппроксимации данного веса.

3.2. Аппроксимация снизу.

Для данного веса $\rho \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ введем аппроксимацию снизу: $\rho_\varepsilon = (\rho^{-1} + \varepsilon)^{-1}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть вес ρ удовлетворяет дополнительному условию $\rho^{-1} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда W -решения уравнения (1.9) ρ_ε -сильно сходятся вместе с градиентами к W -решению предельного уравнения (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению W -решения

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in W(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx), \\ \int (A \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi + u_\varepsilon \varphi) \rho_\varepsilon dx &= \int f \varphi \rho_\varepsilon dx \quad \forall \varphi \in W(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx). \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом оценка (3.1) имеет место в силу (1.8). Условия леммы 3.1 очевидно выполнены и поэтому можно считать, что имеет место ρ_ε -слабая сходимость

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u, \quad A \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A \nabla u, \quad u \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$$

(см. также предложение 2.2). Возьмем произвольную функцию $\varphi \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ и заметим, что

$$\varphi \in W(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx) \quad (\text{в силу } \rho_\varepsilon \leq \rho),$$

а последовательности $w_\varepsilon = \varphi$, $\nabla \varphi$ будут ρ_ε -сильно сходящимися, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi^2 \rho_\varepsilon dx = \int \varphi^2 \rho dx$$

и аналогично для $\nabla \varphi$. Следовательно, можно перейти к пределу в тождестве (3.4) (см. определение (2.6) сильной сходимости) и получить

$$\int (A v \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \rho dx = \int f \varphi \rho dx, \quad \varphi \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx).$$

Итак, мы доказали слабую сходимость W -решений (вместе с градиентами) к W -решению предельного уравнения. Остается установить сильную сходимость. Для этого в тождестве (3.4) возьмем пробную функцию $\varphi = u_\varepsilon$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int (A \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2) \rho_\varepsilon dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f u_\varepsilon \rho_\varepsilon dx \\ &= \int f u \rho dx = \int (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2) \rho dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon^2 \rho_\varepsilon dx &\geq \int u^2 \rho dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int A \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \rho_\varepsilon dx &\geq \int A \nabla u \cdot \nabla u \rho dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

(Последнее неравенство доказывается аналогично неравенству (2.3).) Поэтому в (3.5) имеют место точные равенства, т.е. $u_\varepsilon \rightarrow u$, $A \nabla u_\varepsilon \rightarrow A \nabla u$ сильно. Отсюда ясно, что $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ сильно и лемма доказана.

ОТКРЫТЫЙ ВОПРОС: как ведут себя при аппроксимации снизу H -решения?

3.3. Аппроксимация сверху. Для произвольного веса $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ введем “аппроксимацию сверху” $\rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon$.

Оказывается, что W -решения всегда сходятся, но пределом будет не W -решение, а V -решение.

ЛЕММА 3.4. Пусть u_ε есть W -решение уравнения (1.9). Тогда имеет место сильная ρ_ε -сходимость $u_\varepsilon \rightarrow u$, $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$, где u есть V -решение предельного уравнения, т.е.

$$\begin{aligned} u &\in V(\mathbb{R}^N, \rho dx), \\ \int (A \nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) \rho dx &= \int f \varphi \rho dx \quad \forall \varphi \in V(\mathbb{R}^N, \rho dx). \end{aligned} \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова из энергетической оценки получаем, что u_ε , ∇u_ε ограничены в $L^2(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx)$ и без потери общности полагаем, что в смысле слабой ρ_ε -сходимости

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup v.$$

Поскольку $\rho_\varepsilon \geq \rho$, то (см. предложение 2.2)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } L^2(\mathbb{R}^N, \rho dx),$$

т.е. $v = \nabla u$. Важно заметить, что $u \in V(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, поскольку $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (см. определение (1.10) пространства V). Итак,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad A \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A \nabla u \quad \rho_\varepsilon\text{-слабо.}$$

Теперь возьмем пробную функцию

$$\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad \|\varphi\|_\rho < \infty, \quad (3.7)$$

и заметим, что автоматически $\varphi \in W(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx)$, а последовательность $w_\varepsilon = \nabla \varphi$ является сильно ρ_ε -сходящейся, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |\nabla \varphi|^2 \rho_\varepsilon dx = \int |\nabla \varphi|^2 \rho dx$$

и аналогично для φ . Поэтому в интегральном тождестве (3.4) можно перейти к пределу и получить тождество (3.6) для любого φ из (3.7). Поскольку пробные функции (3.7) плотны в $V(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, то u будет V -решением. Остальные утверждения доказываются, как и в лемме 3.3. Лемма доказана.

Наиболее просто при аппроксимации сверху обстоит дело с H -решениями.

ЛЕММА 3.5. *H -решения уравнения сильно сходятся (вместе с градиентами) к H -решению предельного уравнения.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.4.

3.4. Из лемм 3.3, 3.4 непосредственно следует теорема 1.4.

Посмотрим, почему нельзя переставить пределы в $u_{\varepsilon, \delta}$ (см. (1.11)).

По лемме 3.5 предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} = u_{0, \delta}$ будет H -решением уравнения с весом $(\rho^{-1} + \delta)^{-1}$. Теперь надо переходить к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Но, как уже отмечалось, нам ничего неизвестно о поведении H -решений при аппроксимации снизу. Поэтому существование и смысл предела $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{0, \delta}$ установить не удастся. В §5 мы рассмотрим пример, в котором вес $(\rho^{-1} + \delta)^{-1}$ регулярен, следовательно, $u_{0, \delta}$ есть также W -решение и можно применить лемму 3.3. В этом примере обнаружится неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} \neq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta}. \quad (3.8)$$

3.5. Сейчас несколько иначе сформулируем понятие достижимого пространства – без привлечения эллиптических уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Скажем, что пространство $V = V(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, $H \subseteq V \subseteq W$, *достижимо*, если для некоторой последовательности весов ρ_ε выполнены свойства:

- i) $\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho$ слабо в L^1_{loc} , $0 < c_1 \leq \rho_\varepsilon \leq c_2(\varepsilon) < \infty$;
- ii) для любого φ из плотного в V множества найдется $\varphi_\varepsilon \in W(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon dx)$,

$$\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi, \quad \nabla \varphi_\varepsilon \longrightarrow \nabla \varphi \quad \rho_\varepsilon\text{-сильно};$$

- iii) как только последовательность $u_{\varepsilon_j} \in W(\mathbb{R}^N, \rho_{\varepsilon_j} dx)$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$, ρ_{ε_j} -слабо сходится вместе с градиентом ∇u_{ε_j} , $u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u$, $\nabla u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup z$, то $u \in V$ и $z = \nabla u$.

Очевидно, что свойства ii), iii) – это как раз то, что требуется для перехода к пределу в интегральном тождестве, соответствующему уравнению (1.9). При этом свойство iii) применяется к решениям, а ii) – к пробным функциям. С другой стороны, из доказательства лемм 3.3 и 3.4 видно, что пространство V , определенное в (1.10), является достижимым в смысле определения 3.6.

§ 4. Достаточные условия равенства $H = W$

Начнем с краткого обзора имеющихся в литературе результатов по данному вопросу.

В классическом случае $\rho \equiv 1$ равенство $H = W$ доказано Мейерсом и Серпином [4]. Много работ посвящено вопросу о “плотности гладких функций” для специального веса вида $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ (см. [10]–[12]).

В общем случае проблема равенства $H = W$ или регулярности веса ρ оказывается чрезвычайно сложной. Известно только одно достаточное условие более или менее общего характера – это принадлежность веса ρ классу A_2 Макенхаупта. Последнее означает, что

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \rho dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \rho^{-1} dx \right) < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^N$. Примером служит вес $\rho(x) = |x|^\alpha$, $|\alpha| < N$.

Для доказательства возьмем $u \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$ и укажем аппроксимацию гладкими функциями. Как уже отмечалось в начале § 1, функцию u можно считать финитной. Определим обычным образом сглаживание

$$u_\varepsilon(x) = \int \omega_\varepsilon(x-y)u(y) dy = u * \omega_\varepsilon,$$

где

$$\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \omega(\varepsilon^{-1}x), \quad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \int \omega dx = 1, \quad 0 \leq \omega \leq 1.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq C_1 M(\nabla u)(x), \quad (4.1)$$

где M – максимальная функция Харди, и аналогичное неравенство для u_ε . По известной теореме Макенхаупта [13] для веса $\rho \in A_2$

$$\int (Mf)^2 \rho dx \leq C(\rho) \int f^2 \rho dx,$$

где f – произвольная измеримая функция (простое доказательство см. в [14]). Поэтому из (4.1) следует оценка

$$\int |\nabla u_\varepsilon|^2 \rho dx \leq C \int |\nabla u|^2 \rho dx \leq C_2 < \infty$$

и аналогичная – для u_ε . Отсюда легко получаем, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, что и требовалось (случай произвольной области Ω см. [15]).

Известно [8], что условие $\rho \in A_2$ влечет справедливость неравенства Пуанкаре

$$\int_B |u - u_B|^2 \rho dx \leq C(\text{diam } B)^2 \int_B |\nabla u|^2 \rho dx, \quad (4.2)$$

в котором $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u \rho dx$.

Кассано [16] доказал интересный факт: если неравенство Пуанкаре (4.2) выполнено для любого $u \in W(\mathbb{R}^N, \rho dx)$, то вес ρ регулярен.

Условие $\rho \in A_2$ трудно для проверки. Тем не менее один случай, где оно выполнено, можно указать. Именно, вес $\rho(x) = e^{\lambda\varphi(x)}$, где $\varphi \in W^{1,N}(\Omega)$, а λ — достаточно мало, принадлежит классу A_2 . Это можно вывести из неравенства Джона–Ниренберга.

Известна гипотеза Де Джорджи: условие

$$\exp(t\rho), \exp(t\rho^{-1}) \in L^1_{\text{loc}} \quad \forall t > 0$$

обеспечивает равенство $H = W$, но она остается недоказанной.

Как уже отмечалось, в одномерном случае всегда $H = W$. Докажем этот простой факт. Сначала проверим, что $V = H$.

Пусть $\Omega = [0, 1]$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $\|u\|_\rho < \infty$. В весовом лебеговом пространстве $L^2(\Omega, (1 + \rho) dx)$ множество $C^\infty(\bar{\Omega})$ плотно (это верно и в многомерном случае), поэтому

$$\exists v_k \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u - v_k|^2 (1 + \rho) dx = 0.$$

Остается положить

$$u_k(x) = u(0) + \int_0^x v_k dx.$$

Теперь докажем собственно равенство $W = H$. Для $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $\|u\|_\rho < \infty$, положим

$$v_n = \begin{cases} u', & \text{если } |u'| \leq n, \\ \pm n, & \text{если } |u'| > n, \end{cases}$$

$$K_n = \{x \in \Omega, |u'| > n\}, \quad u_n(x) = u(0) + \int_0^x v_n dx.$$

Замечаем, что

$$|K_n| \leq n^{-1} \int_0^1 |u'| dx,$$

$$\int_0^1 a |\nabla u - \nabla u_n|^2 dx = \int_{K_n} a |\nabla u|^2 dx \rightarrow 0.$$

Поэтому $\|u - u_n\|_\rho \rightarrow 0$. В свою очередь, элемент $u_n \in W^{1,2}(\Omega)$ и по доказанному выше аппроксимируется (по энергетической норме) гладкими функциями.

4.1. Рассмотрим вес ρ , заданный в ограниченной липшицевой области Ω , например, шаре. Пусть F — замкнутое множество, $F \subset \Omega$ и

$$F_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, F) \leq \varepsilon\}.$$

Предположим, что вес ρ может вырождаться только на F , т.е. на $\Omega \setminus F_\varepsilon$ он ограничен и отделен от нуля,

$$0 < c_1(\varepsilon) \leq \rho(x) \leq c_2(\varepsilon) < \infty \quad \text{на } \Omega \setminus F_\varepsilon.$$

Мы покажем, что при условии

$$\text{cap}(F) = 0, \quad \rho(x) \leq \frac{\text{const}}{\text{cap } F_\varepsilon} \quad \text{на } \Omega \setminus F_\varepsilon, \quad (4.3)$$

вес ρ регулярен, причем само это условие является точным.

Здесь $\text{cap}(A)$ – винерова емкость множества A . Нас будет интересовать только порядок стремления $\text{cap}(F_\varepsilon)$ к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому $\text{cap}(F_\varepsilon)$ можно определить равенством

$$\text{cap}(F_\varepsilon) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in C_0^\infty(\Omega), u = 1 \text{ в окрестности } F_\varepsilon \right\}. \quad (4.4)$$

Особый интерес представляет случай, когда F – точка, $F = \{0\}$. Тогда условие (4.2) принимает вид:

$$\sup_{|x| \geq \varepsilon} \rho(x) \leq \text{const} \begin{cases} \ln \frac{1}{\varepsilon}, & \text{если } N = 2, \\ \frac{1}{\varepsilon^{N-2}}, & \text{если } N > 2. \end{cases} \quad (4.5)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *При выполнении условия (4.3) вес ρ регулярен, т.е. $W(\Omega, \rho dx) = H(\Omega, \rho dx)$.*

Сделаем одно очевидное замечание. Если область Ω ограничена и липшицева, а вес ρ вырождается “вдали” от границы, то пространства W и H можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} W(\Omega, \rho dx) & - \text{пополнение класса } \{u \in W^{1,1}(\Omega) : \|u\|_\rho < \infty\} \\ & \text{по энергетической норме,} \\ H(\Omega, \rho dx) & - \text{пополнение множества } C^\infty(\overline{\Omega}) \\ & \text{по энергетической норме.} \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 4.1 достаточно следующей леммы.

ЛЕММА 4.2. *Функцию $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $\|u\|_\rho < \infty$, можно по энергетической норме аппроксимировать функциями из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равными нулю в окрестности F . При этом если дополнительно $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, то аппроксимирующие функции можно выбрать из $C_0^\infty(\Omega \setminus F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для срезки

$$u^{(k)} = \begin{cases} u, & \text{если } |u| \leq k, \\ \pm k, & \text{если } |u| > k, \end{cases}$$

нетрудно доказать сильную сходимость $u^{(k)} \rightarrow u$ в $W(\Omega, \rho dx)$.

Поэтому с самого начала функцию $u(x)$ можно считать ограниченной, $|u(x)| \leq 1$.

Из определения (4.4) емкости следует, что найдутся

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon & \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \theta_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{в } F_\varepsilon, \quad 0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1, \\ \int_{\Omega} |\nabla \theta_\varepsilon|^2 dx & \leq 2 \text{cap } F_\varepsilon, \quad \theta_\varepsilon(x) \rightarrow 1 \quad \text{п.в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Тогда по теореме Лебега $u_\varepsilon = \theta_\varepsilon u \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, \rho dx)$.

Далее, имеем

$$\nabla u_\varepsilon = \theta_\varepsilon \nabla u + u \nabla \theta_\varepsilon$$

и по условию (4.3)

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 \rho dx \leq 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rho dx + \sup_{\Omega \setminus F_\varepsilon} \rho \cdot \text{cap } F_\varepsilon \leq C < \infty.$$

Получили, что последовательность ∇u_ε ограничена в $(L^2(\Omega, \rho dx))^N$. Отсюда следует, что $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ слабо в $(L^2(\Omega, \rho dx))^N$ (в нашем случае градиент единственен).

По построению u_ε сосредоточена в области $\Omega \setminus F_\varepsilon$, где вес ρ ограничен сверху и отделен от нуля. Поэтому с сохранением слабой сходимости $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в W функции u_ε можно заменить функциями из $C^\infty(\bar{\Omega})$, равными нулю вне окрестности F , а в случае $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ — функциями из $C_0^\infty(\Omega \setminus F)$. Тем самым лемма и теорема доказаны.

4.2. Из доказанной теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Вес ρ регулярен, если он ограничен сверху и вырождается на замкнутом множестве нулевой емкости.*

Примеры, построенные в §5, показывают, что ограниченность сверху нельзя заменить отделенностью от нуля. Условие $\text{cap } F = 0$ также является существенным.

Вообще, условия теоремы 4.1 несимметричны относительно ρ и ρ^{-1} . В двумерном случае ($N = 2$) соображения двойственности подсказывают, что вес $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ также должен быть регулярным. Этот результат мы докажем чуть позже (см. теорему 4.5), а сейчас выведем следствие из него.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Пусть $N = 2$, вес ρ отделен от нуля и вырождается на множестве нулевой емкости. Тогда он регулярен.*

В случае $N > 2$ это утверждение уже не верно, как это будет показано в §5.

ТЕОРЕМА 4.5. *Пусть $N = 2$, выполнено условие (4.3) и $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$. Тогда вес ρ^{-1} регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что для функции

$$u \in W^{1,1}(\Omega), \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rho^{-1} dx < \infty,$$

существует

$$u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \nabla u_\varepsilon \longrightarrow \nabla u \quad \text{в} \quad (L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))^2. \quad (4.6)$$

Допуская, что это не так, найдем

$$g \in (L^2(\Omega, \rho dx))^2, \quad \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega} g \cdot \nabla u dx \neq 0. \quad (4.8)$$

Из (4.7) видно, что вектор $g = \{g_1, g_2\}$ соленоиден, причем остается соленоидальным при продолжении нулем на $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Очевидно, что вектор $\{-g_2, g_1\}$ уже потенциален в $\mathbb{R}^2$ и поэтому справедливо представление

$$g = \nabla^* v = \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\}, \quad v \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2), \quad v \equiv \text{const} \text{ в } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega.$$

Можно считать, что $\text{const} = 0$, т.е. $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$, $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho \, dx < \infty$.

По лемме 4.2

$$\exists v_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad \nabla^* v_{\varepsilon} \longrightarrow g \text{ в } (L^2(\Omega, \rho \, dx))^2.$$

Поскольку

$$\int_{\Omega} \nabla^* v_{\varepsilon} \cdot \nabla u \, dx = 0,$$

а $\nabla u \in (L^2(\Omega, \rho^{-1} \, dx))^2$, $\nabla^* v_{\varepsilon} \rightarrow g$ в $(L^2(\Omega, \rho \, dx))^2$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla^* v_{\varepsilon} \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla u \, dx = 0,$$

что противоречит (4.8). Итак, свойство аппроксимации (4.6) доказано.

Теперь уже не трудно доказать равенство $H(\Omega, \rho^{-1} \, dx) = W(\Omega, \rho^{-1} \, dx)$. К доказанной сходимости градиентов (4.5) надо только добавить сходимость потенциалов в $L^2(\Omega, \rho^{-1} \, dx)$. Для этого снова, как и в лемме 4.1, считаем, что $u \in L^{\infty}(\Omega)$, $|u| \leq 1$.

Поскольку $L^2(\Omega, \rho^{-1} \, dx) \subset L^1(\Omega)$, то из (4.5) следует сходимость $\nabla u_{\varepsilon} \rightarrow \nabla u$ в $(L^1(\Omega))^2$. Очевидно, что потенциалы u_{ε} можно выбрать сходящимися в L^1 , $u_{\varepsilon} \rightarrow u$. Теперь остается заменить u_{ε} на срезки

$$\bar{u}_{\varepsilon} = \begin{cases} u_{\varepsilon}, & \text{если } |u_{\varepsilon}| \leq 1, \\ \mp 1, & \text{если } |u_{\varepsilon}| > 1. \end{cases}$$

Тогда $\nabla \bar{u}_{\varepsilon} \rightarrow \nabla u$, $\bar{u}_{\varepsilon} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, \rho^{-1} \, dx)$ и теорема доказана.

4.3. Сделаем одно замечание относительно “теоремы об устранимой особенности”.

Предполагаем что выполнено условие (4.3). Как обычно функция $u \in H(\Omega, \rho \, dx) = W(\Omega, \rho \, dx)$ удовлетворяет уравнению

$$\text{div}(\rho \nabla u) = 0 \tag{4.9}$$

в области Ω , если выполнено тождество

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \rho \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

ТЕОРЕМА 4.6 (об устранимой особенности). *Допустим, что u удовлетворяет уравнению (4.9) только в области $\Omega \setminus F$. Тогда оно есть решение во всей области Ω .*

Это сразу следует из леммы 4.2.

Теорему об устранимой особенности и достаточные условия регулярности можно представить в более ясной форме, если воспользоваться понятием ρ -емкости.

Пусть, по-прежнему, вес ρ может вырождаться только на замкнутом множестве $F \subset \Omega$ (условие (4.3) не предполагается). Определим

$$\text{cap}(F, \rho) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rho \, dx : u \in C_0^\infty(\Omega), \, u = 1 \text{ в окрестности } F \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4.7. *Пусть $\text{mes } F = \text{cap}(F, \rho) = 0$. Тогда вес ρ регулярен и имеет место “теорема об устранимой особенности”.*

Нетрудно видеть, что (4.3) – это только достаточное условие равенства $\text{cap}(F, \rho) = 0$.

Доказательство этой теоремы столь же просто, как и теоремы 4.1, и мы его не приводим.

§ 5. Контрпримеры

5.1. Начнем с обсуждения примеров типа примера 1 из §1. Пусть $N = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ – единичный круг, вес ρ вырождается только в точке $x = 0$ и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \begin{cases} a^{-1}(|x|), & \text{если } x_1 x_2 > 0, \\ a(|x|), & \text{если } x_1 x_2 < 0, \end{cases} \\ \int_0^1 \frac{a(r) \, dr}{r} &< \infty, \\ a(r), a^{-1}(r) &\geq c(\varepsilon) > 0 \quad \text{при } r > \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Нам понадобятся некоторые пробные функции. В полярных координатах $r = |x|$, $\theta = \arccos(x_1/r)$ возьмем

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x_1 > 0, \, x_2 > 0, \\ \sin \theta & \text{для } x_1 < 0, \, x_2 > 0, \\ 0 & \text{для } x_1 < 0, \, x_2 < 0, \\ \cos \theta & \text{для } x_1 > 0, \, x_2 < 0, \end{cases}$$

$\tilde{u}(x) = u(-x_2, x_1)$ (поворот на угол $\pi/2$),

$$g(x) = \left\{ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right\}.$$

По построению (см. рис. 1)

$$|u| \leq 1, \quad |\nabla u| < \frac{c}{r}, \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rho \, dx \implies u \in W(\Omega, \rho \, dx).$$

Вектор g соленоидален, $g \in (L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))^2$,

$$g \cdot \nabla u \equiv 0, \quad g \cdot n|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \cos \theta + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \sin \theta = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}.$$

Проверим, что $u \notin H(\Omega, \rho dx)$. Допустим на минуту, что $u \in H(\Omega, \rho dx)$, и пусть $u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$ есть аппроксимирующая последовательность. Тогда

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot g dx = \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon g \cdot n d\Gamma = - \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} d\theta$$

и по свойству следов $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} \rightarrow u|_{\partial\Omega}$ в $L^2(\partial\Omega)$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u \cdot g dx = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} = - \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 1.$$

С другой стороны, $g \in (L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))^2$, $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ в $(L^2(\Omega, \rho dx))^2$, следовательно, но,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot g dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot g dx = 0$$

в силу тождества $\nabla u \cdot g \equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что вес (5.1) нерегулярен.

Рис. 1

В частности, можно взять $a(r) = r^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, $a(r) = (\ln(2/r))^{-\alpha}$, $\alpha > 1$.

Какой либо из этих весов продолжим единицей на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим двойную аппроксимацию $\rho_{\varepsilon, \delta} = (\rho^{-1} + \delta)^{-1} + \varepsilon$ и пусть $u_{\varepsilon, \delta}$ — решение эллиптического уравнения (1.11). Убедимся, что здесь наблюдается неравенство (3.8) для повторных пределов.

По лемме 3.3 предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} = u_{\varepsilon, 0}$ есть W -решение эллиптического уравнения с весом $\rho + \varepsilon$. Согласно следствию 4.4 вес $\rho + \varepsilon$ регулярен, т.е. $u_{\varepsilon, 0}$ есть также H -решение. Тогда по лемме 3.5 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, 0}$ есть H -решение уравнения (1.6). Мы получили, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} \text{ есть } H\text{-решение уравнения (1.6).} \quad (5.2)$$

(Одновременно доказано, что H -решение есть V -решение, так как по теореме 1.4 предел (5.2) есть V -решение.)

Теперь попробуем переставить пределы по ε и δ . По лемме 3.5

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} = u_{0, \delta} \text{ есть } H\text{-решение для веса } (\rho^{-1} + \delta)^{-1} \text{ и } W\text{-решение,}$$

так как вес $(\rho^{-1} + \delta)^{-1}$ регулярен по следствию 4.3. Вес ρ удовлетворяет дополнительному условию $\rho^{-1} \in L^1_{\text{loc}}$ и по лемме 3.3

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{0, \delta} \text{ есть } W\text{-решение уравнения (1.6),}$$

другими словами,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} \text{ есть } W\text{-решение уравнения (1.6).} \quad (5.3)$$

Согласно предложению 1.1 повторные пределы (5.2) и (5.3) не совпадают при подходящем выборе правой части уравнения (1.6). Тем самым проверено неравенство (3.8) для повторных пределов.

Выведем из этого неравенства одно любопытное следствие. По доказанному

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int f u_{\varepsilon, \delta} \rho_{\varepsilon, \delta} dx &= \int f u_1 \rho dx, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f u_{\varepsilon, \delta} \rho_{\varepsilon, \delta} dx &= \int f u_2 \rho dx, \end{aligned}$$

где u_1 есть H -решение, а u_2 есть W -решение уравнения (1.6). По соображениям непрерывности найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f u_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)} \rho_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)} dx = \frac{1}{2} \int f (u_1 + u_2) \rho dx.$$

Без потери общности считаем, что $u_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}$ является $\rho_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}$ -слабо сходящейся, $u_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)} \rightharpoonup u$. Согласно следствию 3.2 функция $u(x)$ есть слабое решение уравнения (1.6). Наша цель – показать, что это решение не является вариационным. Заметим, что

$$\begin{aligned} \min_{u \in H} \int (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) \rho dx &> \min_{u \in W} \int (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) \rho dx, \\ \int (A \nabla u_i \cdot \nabla u_i + u_i^2) \rho dx &= \int f u_i \rho dx, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int f u_1 \rho dx &< \int f u_2 \rho dx, \\ \int f u \rho dx &= \frac{1}{2} \int f (u_1 + u_2) \rho dx \neq \int f u_i \rho dx, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Видим, что $u \neq u_1, u_2$. Остается использовать следующий результат: пространство H имеет коразмерность 1 в W (на доказательстве этого факта мы в настоящей работе не останавливаемся). Поэтому других вариационных решений, кроме u_1 и u_2 , уравнение не имеет.

Рис. 2

5.2. Построим нерегулярный вес в $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, который отделен от нуля и вырождается в точке. Пусть $\Omega = \{|x| < 1\}$ – шар, C – круговой конус,

$$\rho(x) = \begin{cases} a(|x|) = \frac{1}{|x|^{N-2+\delta}}, \delta > 0, & \text{в } C_1 = \Omega \cap C, \\ 1 & \text{вне } C_1 \end{cases}$$

(см. рис. 2).

Пусть $f(\varphi)$ – гладкая *нечетная* функция на единичной сфере (φ – угловые координаты), равная 1 на верхней крышке множества C_1 . Рассмотрим функцию $u(x)$, заданную в сферических координатах r, φ равенством

$$u(x) = u(r, \varphi) = f(\varphi).$$

Очевидно $|\nabla u| = |\nabla_\varphi f|/r$ и

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rho(x) dx < \infty.$$

Проверим, что $u \notin H(\Omega, \rho dx)$. Для этого обозначим C_R пересечение конуса C с шаром $|x| \leq R$, $0 < R < 1$ (C_R заштриховано на рис. 2), K_R верхнюю крышку множества C_R .

Для функции $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ имеем

$$\begin{aligned} v(x) - v(-x) &= \int_{-|x|}^{|x|} \frac{\partial v}{\partial r} dr, \quad |x| = R, \\ \lambda_R &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{K_R} (v(x) - v(-x)) d\varphi = \int_{C_R} \frac{\partial v}{\partial r} dr d\varphi = \int_{C_R} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dx}{r^{N-1}}, \\ |\lambda_R| &\leq \int_{C_R} \frac{|\nabla v| dx}{r^{N-1}} \leq \left(\int_{\Omega} \rho |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{C_R} \frac{dx}{\rho(x) r^{2(N-1)}} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \rho |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^R \frac{dr}{r^{1-\delta}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Предельным переходом последнее неравенство распространяется на функции $v \in H(\Omega, \rho dx)$. Другими словами, для функции v из $H(\Omega, \rho dx)$ величина λ_R

стремится к нулю при $R \rightarrow 0$. Но для пробной функции u величина $\lambda_R \equiv \text{const} > 0$. Поэтому $u \notin H(\Omega, \rho dx)$.

5.3. Построим на квадрате Ω вес ρ , удовлетворяющий следующим условиям:

- i) $\rho \leq 1$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ (и даже $\rho^{-1} \in L^p(\Omega)$ для $p < \ln \frac{9}{2} / \ln 3$);
- ii) ρ и ρ^{-1} – нерегулярны.

С использованием этой весовой функции далее будет указан пример, в котором вложения $H \subset V \subset W$ – строгие.

Рис. 3

Пусть Ω – квадрат. Внутри его возьмем меньший квадрат и на сторонах последнего построим “канторово ожерелье” (см. рис. 3). Для этого на каждой стороне внутреннего квадрата строим классическое канторово множество – делим отрезок на три равных и внутренность среднего выбрасываем, два оставшихся делим на три части и средние выбрасываем и т. д. На каждом из выброшенных интервалов, как на диагонали строим квадратик. Совокупность этих замкнутых квадратиков вместе со сторонами квадрата образует *замкнутое* множество Π , разделяющее нашу область Ω на две области Ω_0 и Ω_1 , при этом $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$, $\overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_1}$ – канторовы множества на внутреннем квадрате. На рис. 3 множество Π заштриховано.

Искомый вес ρ и пробная функция u будут иметь следующую структуру:

$$\rho(x) = \begin{cases} a(x) & \text{на } \Pi, \\ 1 & \text{на } \Omega \setminus \Pi, \end{cases} \quad 0 \leq a(x) \leq 1, \quad a^{-1} \in L^1(\Pi); \quad (5.4)$$

$$u \in W(\Omega, \rho dx), \quad u(x) = \begin{cases} 0 & \text{в } \Omega_0, \\ 1 & \text{в } \Omega_1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Отдельный квадратик из ожерелья обозначим $\square_j$. Из (5.5) и рис. 3 видно, что функция $u|_{\square_j}$ принимает значения 1 на граничащих с Ω_1 сторонах квадратика $\square_j$, и значение 0 – на граничащих с Ω_0 . В качестве $u|_{\square_j}$ можно взять решение задачи Дирихле с указанными краевыми условиями.

Удобно сначала определить пробную функцию и вес на единичном квадрате $\square_1$ и затем с помощью подобия и движений перенести на каждый квадратик $\square_j$. Итак, на $\square_1$ построим функцию u_1 , гладкую в замкнутом квадрате с выколотыми вершинами A_1 и A_2 (см. рис. 4), в окрестности которых выполнена оценка

$$|u_1| \leq 1, \quad |\nabla u_1| \leq \frac{\text{const}}{\text{dist}(x, A_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Выберем любую функцию $a_1(x)$ такую, что

$$0 \leq a_1 \leq 1, \quad \int_{\square_1} a_1 |\nabla u_1|^2 dx < \infty, \quad \int_{\square_1} a_1^{-1} dx < \infty.$$

Рис. 4

После этого рассмотрим отдельный квадратик $\square_j$ из ожерелья, обозначим s_j длину его стороны и определим $a|_{\square_j}$ и $u|_{\square_j}$ с помощью подходящего движения и подобия. Движения несущественны для вычислений, поэтому укажем только коэффициенты подобия:

$$a(x)|_{\square_j} = s_j a_1(s_j^{-1}x), \quad u|_{\square_j} = u_1(s_j^{-1}x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\square_j} a |\nabla u|^2 dx &= s_j \int_{\square_1} a_1 |\nabla u|^2 dx = s_j C, \\ \int_{\Pi} a |\nabla u|^2 &= C \sum s_j < \infty, \\ \int_{\square_j} \frac{dx}{a(x)} &= s_j \int_{\square_1} \frac{dx}{a_1} \implies \int_{\Pi} \frac{dx}{a} < \infty. \end{aligned}$$

Докажем, что $u \notin H(\Omega, \rho dx)$. Допустим, что

$$\exists u_\varepsilon \in C(\overline{\Omega}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|u - u_\varepsilon|^2 + |\nabla u - \nabla u_\varepsilon|^2) \rho dx = 0.$$

Тогда из (5.5) следует, что

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega_0)} \rightarrow 0, \quad \|u_\varepsilon - 1\|_{W^{1,2}(\Omega_1)} \rightarrow 0.$$

Последнее означает, что области Ω_0 и Ω_1 не являются 2-связными через их общую границу. Между тем 2-связность доказана в [9, § 2]. Итак, вес ρ нерегулярен.

Проверим теперь нерегулярность веса ρ^{-1} . Поскольку $u \notin H(\Omega, \rho)$, то

$$\begin{aligned} \exists g \in L^2(\Omega, \rho^{-1}), \quad \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \\ \int_{\Omega} g \cdot \nabla u \, dx \neq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из (5.5), (5.6) видно, что g не допускает соленоидальной аппроксимации в $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$. Но тогда не допускает “потенциальной” аппроксимации вектор ∇v , участвующий в представлении $g = \{-\partial v / \partial x_2, \partial v / \partial x_1\}$. Тем самым доказано, что ρ^{-1} нерегулярен.

5.4. Рассмотрим на плоскости два непересекающихся ожерелья и зададим вес

$$\rho = \begin{cases} a & \text{на первом ожерелье,} \\ a^{-1} & \text{на втором,} \\ 1 & \text{вне ожерелий,} \end{cases}$$

где a – ранее построенная функция (см. (5.4)).

Пусть Q_1, Q_2 – ограниченные липшицевы области, разделяющие наши ожерелья. Другими словами, $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \emptyset$, Q_1 (Q_2) содержит первое (второе) ожерелье вместе с его внутренностью.

Тогда для определенных обычным путем пространств $W = W(\mathbb{R}^2, \rho dx)$, $H(\mathbb{R}^2, \rho dx)$ справедливо следующее свойство *локальности*: сужение W или H на области Q_i , $i = 1, 2$, совпадает с пространством W или H , построенным для этой области, т.е. $H(\mathbb{R}^2, \rho dx)|_{Q_i} = H(Q_i, \rho dx)$ и аналогично для W .

Определим третье пространство S как замыкание в $W(\mathbb{R}^2, \rho dx)$ множества всех функций, *гладких* в Q_1 .

Очевидно, что

$$S|_{Q_1} = H(Q_1, \rho dx), \quad S|_{Q_2} = W(Q_2, \rho dx).$$

Отсюда немедленно следует, что вложения $H \subset S \subset W$ – строгие.

Далее, из определения (1.10) пространства V ясно, что $V = S$. Таким образом, в нашем примере V не совпадает ни с H , ни с W .

§ 6. Замечания об усреднении вырождающихся эллиптических уравнений

6.1. Пусть вес $\rho(x)$ периодичен по каждой переменной $x_1, x_2, \dots, x_N$, с периодом 1, $\square = (0, 1)^N$ – ячейка периодичности, $\int_{\square} \rho dx = 1$.

Положим $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\varepsilon^{-1}x)$ и рассмотрим уравнение (1.9), т.е.

$$-\operatorname{div}(\rho_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) + \rho_\varepsilon u^\varepsilon = \rho_\varepsilon f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (6.1)$$

Смысл усреднения состоит в том, что решение u^ε должно ρ_ε -сильно сходиться к решению некоторого уравнения с *постоянными* коэффициентами:

$$-\operatorname{div}(A^{\text{hom}} \nabla u^0) + u^0 = f, \quad A^{\text{hom}} - \text{усредненная матрица.}$$

Но для исходного уравнения мы можем взять H -решения, W -решения или какие-то другие. Может показаться, что в процессе усреднения различие между этими решениями стирается и они имеют общий предел. Это, однако, не так. Оказывается, что для H -решений получается одно усредненное уравнение, для W -решений – другое, для V -решений – третье и т. д.

Таким образом, сама усредненная матрица не определена единственным образом и ее следует обозначать как A_K^{hom} , где $K = H, V$ или W .

Для того чтобы усреднение вообще было возможно, требуется одно условие на периодическую меру $d\mu = \rho dx$. Для формулировки этого условия определим пространства периодических функций $W(\square, \mu)$, $V(\square, d\mu)$, $H(\square, d\mu)$ по аналогии со случаем всего пространства, например, $H(\square, d\mu)$ как пополнение множества $C_{\text{per}}^\infty(\square)$ всех гладких периодических функций по энергетической норме $\left(\int_{\square} (|u|^2 + |\nabla u|^2) \rho dx \right)^{1/2}$.

Пусть K – одно из введенных пространств периодических функций. Скажем, что выполнено условие K -эргодичности, если $u = \text{const}$ μ -п.в. как только $u \in K$ и $\nabla u = 0$ μ -п.в.

Очевидно, из W -эргодичности следует V и H -эргодичность. Отметим, что W -эргодичность заведомо имеет место, если $\rho^{-1} \in L^1(\square)$ (см. [9]).

ТЕОРЕМА (об усреднении). *Если выполнено условие K -эргодичности, то K -решения u^ε уравнения (6.1) ρ_ε -сильно сходятся к решению u^0 усредненного уравнения*

$$-\text{div}(A_K^{\text{hom}} \nabla u^0) + u^0 = f.$$

При этом усредненная матрица определяется по формуле

$$\xi A_K^{\text{hom}} \xi = \inf_{u \in K} \int_{\square} (\xi + \nabla u)^2 \rho dx. \quad (6.2)$$

Доказывать эту теорему мы здесь не будем. Отметим, что для H -решений она доказана даже в более общей форме в работе [9, § 8]. Для решений других типов усреднение может быть доказано аналогичным путем. Нашей целью будет построение примера, в котором

$$A_H^{\text{hom}} > A_W^{\text{hom}}. \quad (6.3)$$

Из общей формулы (6.2) и определения пространств периодических функций получаем

$$\xi A_H^{\text{hom}} \xi = \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square} (\xi + \nabla u)^2 \rho dx, \quad (6.4)$$

$$\xi A_W^{\text{hom}} \xi = \inf_{u \in W_{\text{per}}^{1,1}(\square)} \int_{\square} (\xi + \nabla u)^2 \rho dx. \quad (6.5)$$

6.2. Будем считать, что канторово ожерелье Π “нанизано” на единичный квадрат. Продолжим его по периодичности и рассмотрим периодический вес

$$\rho(x) = \begin{cases} ta(x) & \text{на } \Pi, \ t > 0, \\ 1 & \text{вне } \Pi, \end{cases} \quad (6.6)$$

где $a(x)$ – ранее построенная функция (см. (5.4)), продолженная по периодичности.

Периодическое множество Π состоит из вертикальных и горизонтальных “полос”. Вертикальные полосы, идущие вдоль прямых $x_2 = j$, обозначим через α_j . Рассмотрим плоскость с одной вертикальной полосой α_0 . Тогда методом из п. 5.3 строится функция такая, что

$$\begin{aligned} v &\in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2), \quad \nabla v = 0 \text{ вне } \alpha_0, \\ v &= 0 \text{ слева от } \alpha_0, \quad v = 1 \text{ справа от } \alpha_0, \\ 0 &\leq v \leq 1, \quad \nabla v - \text{периодичен}, \quad \int_{\square} |\nabla v|^2 \rho \, dx < \infty \end{aligned}$$

(см. рис. 5). С помощью этой функции строим функцию

$$\begin{aligned} z &\in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2), \quad \nabla z - \text{периодичен}, \\ \nabla z &= 0 \text{ вне вертикальных полос}, \quad \int_{\square} |\nabla z|^2 \rho \, dx < \infty, \\ z &\equiv j \text{ между полосками } \alpha_j \text{ и } \alpha_{j+1} \end{aligned}$$

(см. рис. 6). Наконец, пробная функция

$$u_0(x) = x_1 - z(x)$$

будет обладать свойствами

$$\begin{aligned} u_0 &\in W_{\text{per}}^{1,1}(\square), \quad \nabla u_0 = 0 \text{ вне } \Pi, \\ \nabla u_0 &= (1, 0) \text{ на } \Pi \end{aligned}$$

(см. рис. 7). Возьмем в (6.5) $\xi = (-1, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi A_W^{\text{hom}} \xi &= \inf_{u \in W_{\text{per}}^{1,1}(\square)} \int_{\square} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right) \rho \, dx \\ &\leq t \int_{\Pi} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right)^2 \rho \, dx \leq ct. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Теперь заметим, что вес ρ симметричен относительно поворота на $\pi/2$. Поэтому матрица A_W^{hom} изотропна (т.е. $A_W^{\text{hom}} = a_W^{\text{hom}} E$) и из (6.7) следует

$$\lim_{t \rightarrow 0} A_W^{\text{hom}} = 0. \quad (6.8)$$

Теперь оценим матрицу A_H^{hom} снизу. Для этого заметим, что матрица A_H^{hom} убывает при $t \rightarrow 0$ и, очевидно,

$$\xi A_H^{\text{hom}} \xi \geq \inf_{u \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)} \int_{\square \setminus \Pi} |\xi + \nabla u|^2 \, dx.$$

Здесь справа мы имеем усредненную матрицу для периодического веса (6.6) при $t = 0$, т.е. для веса

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{на } \Pi, \\ 1 & \text{вне } \Pi. \end{cases} \quad (6.9)$$

В работе [9, § 4] доказано, что для этого веса усредненная матрица является положительно определенной. Отсюда

$$\xi A_H^{\text{hom}} \xi \geq c_0 |\xi|^2, \quad c_0 > 0,$$

где константа c_0 не зависит от параметра t .

Сравнивая полученный результат с (6.8), замечаем, что имеет место неравенство (6.3), если параметр $t > 0$ взять достаточно малым. Кроме того, для веса (6.9) усредненная матрица $A_W^{\text{hom}} = 0$ (это следует из (6.8)), а матрица $A_H^{\text{hom}} > 0$.

Рис. 5. Функция $v(x)$ Рис. 6. Функция $z(x)$ Рис. 7. Пробная функция $u_0(x)$

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
3. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
4. *Meyers N., Serrin J.* $H = W$ // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1964. V. 51. P. 362–379.
5. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 3. №2. P. 249–269.
6. *Жиков В. В.* Об эффекте Лаврентьева // Докл. АН. 1995. Т. 345. №1. С. 10–14.
7. *Piat V., Chiado, Cassano F., Serra.* Some remarks about the Density of Smooth Functions in Weighted Sobolev Spaces // J. Convex Anal. 1994. V. 1. №2. P. 135–142.
8. *Fabes E. B., Kenig C. E., Serapioni R. P.* The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1982. V. 7. P. 77–116.
9. *Жиков В. В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. №8. С. 3–40.
10. *Кудрявцев Л. Д.* О построении последовательности финитных функций, аппроксимирующих функции весовых классов // Труды МИАН. 1980. Т. 156. С. 121–129.
11. *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева // Труды МИАН. 1983. Т. 161. С. 29–47.
12. *Kufner A.* Weighted Sobolev Spaces. Band 31, Leipzig: Teubner-Texte Math., 1980.
13. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.
14. *Coifman R. R., Fefferman C.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integral // Studia Math. 1974. V. 51. P. 241–250.
15. *Piat V., Chiado, Cassano F., Serra.* Relaxation of degenerate variational integrals // Nonlinear Anal. 1994. V. 22. P. 409–424.
16. *Cassano F., Serra.* On the Local Boundedness of Certain Solutions for a Class of Degenerate Elliptic Equations // Boll. Un. Mat. Ital. B (7). 1996. V. 10. P. 651–680.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
05.11.1997