Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Абдухаликов, Группы автоморфизмов инвариантных решеток в модуле Стейнберга групп типа Ли нечетной характеристики, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 9, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:23:46

УДК 512.54

К. С. Абдухаликов

Группы автоморфизмов инвариантных решеток в модуле Стейнберга групп типа Ли нечетной характеристики

Целью настоящей работы является вычисление групп автоморфизмов G -инвариантных решеток в модуле Стейнберга V , где G – простая конечная группа типа Ли над полем характеристики $p > 2$.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Пусть W – рациональный модуль над конечной группой G . Будем называть $\mathbb{Z}$ -решетку $\Lambda \subset W$ *инвариантной*, если она инвариантна относительно действия группы G . Напомним, что число классов подобия инвариантных решеток в W конечно тогда и только тогда, когда действие G на W абсолютно неприводимо [1]. В этом случае на пространстве W существует единственная (с точностью до скалярного множителя) G -инвариантная симметрическая положительно определенная билинейная форма. Через $\text{Aut}(\Lambda)$ обозначим группу изометрий Λ относительно этой формы.

Инвариантные решетки были изучены для некоторых классов групп и их естественных модулей (см., например, [2]–[4] и особенно [5] для наиболее полного освещения предмета). В работе [6] были описаны инвариантные решетки в модуле Стейнберга группы $G = \text{PSL}_2(q)$ и вычислены их группы автоморфизмов. В этом случае инвариантные решетки были классифицированы с помощью квадратично-вычетных кодов над полем из двух элементов. Отметим, что по аналогии с этой работой в [3] исследованы инвариантные эрмитовы решетки в комплексном модуле Стейнберга группы $G = \text{PSL}_2(q)$, и в этом случае для классификации решеток задействованы квадратично-вычетные коды над полем из четырех элементов.

Пусть теперь G – простая конечная группа типа Ли, V – модуль Стейнберга над полем $\mathbb{C}$ группы G . В [5] было высказано пожелание изучить инвариантные решетки в модуле V . Известно (см. [7]), что модуль Стейнберга неприводим. Модуль Стейнберга может быть реализован над полем рациональных чисел, но мы будем работать в модуле V , поскольку используем теорию комплексных характеров. Под *решеткой* $\Lambda \subseteq V$ будем понимать $\mathbb{Z}$ -оболочку некоторого базиса. Если Λ является G -инвариантной, то на пространстве $W = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ существует инвариантная симметрическая положительно определенная форма, относительно которой будем рассматривать $\text{Aut}(\Lambda)$. Основной задачей данной работы является доказательство следующей теоремы (с использованием классификации конечных простых групп).

ТЕОРЕМА. Пусть G – простая конечная группа типа Ли над полем характеристики $p > 2$, V – модуль Стейнберга и Λ – G -инвариантная $\mathbb{Z}$ -решетка в модуле V . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $G = \text{PSL}_2(7)$, $\text{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \times \text{AGL}_3(2)$, $\mathbb{Z}_2 \times \text{Sp}_6(2)$ или $\mathbb{Z}_2^7 : S_7$;

Работа частично поддержана грантом фонда INTAS.

- 2) $G = \mathrm{PSL}_2(23)$, $\mathrm{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \times M_{24}$;
- 3) $G = \mathrm{PSU}_3(3)$, $\mathrm{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{Sp}_6(2)$;
- 4) $\mathbb{Z}_2 \times G \leq \mathrm{Aut}(\Lambda) \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{Aut}(G)$;
- 5) $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, $\mathrm{PSU}_3(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, G действует дважды транзитивно на множестве из t точек, $t = \dim V + 1$ и $\mathrm{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \times S_t$.

Мы будем использовать две леммы, представляющие самостоятельный интерес. Оказалось, что характер Стейнберга конечной простой группы типа Ли над полем характеристики p является единственным неприводимым проективным комплексным характером степени $p^r > 1$ (за исключением некоторых групп – см. лемму 2.2). Далее, характер Стейнберга простой группы G является примитивным, за исключением групп $\mathrm{PSL}_2(5)$, $\mathrm{PSL}_2(7)$, $\mathrm{PSL}_3(2)$ и $\mathrm{PSp}_4(3)$.

§ 2. Предварительные результаты

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства модуля Стейнберга. Будем часто использовать следующий факт (см. [8], [9]):

ЛЕММА 2.1. Пусть q и n – целые числа, $q \geq 2$, $n \geq 3$, $(q, n) \neq (2, 6)$. Тогда

- 1) существует простое число d такое, что d делит $q^n - 1$ и не делит $q^i - 1$ при всех $i < n$ (d называется примитивным простым делителем числа $q^n - 1$);
- 2) если примитивный простой делитель числа $q^n - 1$ делит $q^m - 1$, то $n \mid m$.

Следующие две леммы представляют независимый интерес.

ЛЕММА 2.2. Пусть G – конечная простая группа типа Ли над полем характеристики p , $G \neq \mathrm{PSL}_2(4)$, $\mathrm{PSL}_3(2)$, $\mathrm{PSL}_3(4)$, $\mathrm{PSL}_4(2)$, $\mathrm{PSU}_4(2)$, $\mathrm{PSU}_6(2)$, $\mathrm{Sp}_4(2)'$, $\mathrm{Sp}_6(2)$, $\Omega_8^+(2)$, ${}^2B_2(8)$, ${}^2E_6(2)$, $F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $G_2(4)$, $\mathrm{PSL}_2(9)$, $\mathrm{PSU}_4(3)$, $\Omega_7(3)$, $G_2(3)$. Тогда характер Стейнберга группы G является единственным неприводимым проективным комплексным характером степени $p^r > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{G}$ обозначает универсальную накрывающую группу группы G , т.е. $\hat{G}' = \hat{G}$, $\hat{G}/Z(\hat{G}) \cong G$, и $Z(\hat{G})$ равен мультипликатору Шура группы G . Тогда по условиям леммы $\hat{G}$ является конечной группой $\mathcal{G}^F$, соответствующей односвязной алгебраической группе $\mathcal{G}$ и эндоморфизму Фробениуса F (список исключений представляет собой список групп с нестандартным мультипликатором Шура). Любой неприводимый проективный комплексный характер группы G поднимается до неприводимого комплексного характера группы $\hat{G}$. Таким образом, мы должны доказать, что любой неприводимый комплексный характер χ степени $p^r > 1$ группы $\hat{G} = \mathcal{G}^F$ является характером Стейнберга.

Пусть $\mathcal{G}^*$ – дуальная группа для $\mathcal{G}$ и $G^* = \mathcal{G}^{*F^*}$ (см. [7]). $\mathcal{G}$ является связной односвязной алгебраической группой, поэтому $\mathcal{G}^*$ – группа присоединенного типа. Согласно классификации Люстига (см. [10]–[12]) характеру χ соответствуют полупростой элемент $s^* \in G^*$ и унипотентный характер ψ группы $C_{G^*}(s^*)$. Кроме того,

$$\deg \chi = \frac{|\hat{G}|_{p'}}{|C_{G^*}(s^*)|_{p'}} \deg \psi,$$

где $N_{p'}$ обозначает p' -часть целого числа N . Имеем $|G^*|_{p'}/|C_{G^*}(s^*)|_{p'} = 1$, так как $\deg \chi = p^r$. Покажем, что $s^* = 1$. Действительно, если $s^* \neq 1$, то

$C_{G^*}(s^*) \neq G^*$. Рассмотрим унитарный характер θ степени 1 группы $C_{G^*}(s^*)$. Тогда элемент s^* и характер θ доставляют нетривиальный одномерный характер группы $\widehat{G}$, что невозможно.

Таким образом, $\deg \chi = \deg \psi$ для некоторого унитарного характера ψ группы G^* . Далее мы рассмотрим все виды группы G по отдельности.

1) Предположим, что $G = \text{PSL}_n(q)$. Тогда $\widehat{G} = \text{SL}_n(q)$ и $G^* = \text{PGL}_n(q)$. Унитарные характеры $\text{PGL}_n(q)$ параметризуются разбиениями α числа n : $\psi = \psi^\alpha$ (см. [7]). Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$. Положим $\lambda_i = \alpha_i + i - 1$. Тогда

$$\deg \psi^\alpha = \frac{(q-1)(q^2-1) \cdots (q^n-1) \prod_{i' < i} (q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i'}})}{q^{\binom{n-1}{2} + \binom{m-2}{2} + \dots} \prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^k - 1)}. \quad (1)$$

Если $m = 1$, то $\deg \psi^\alpha = 1$. Пусть $m \geq 2$. Случаи $(q, n) = (2, 6)$ и $n = 2$ рассматриваются непосредственно. Если $(q, n) \neq (2, 6)$ и $n > 2$, то рассмотрим примитивный простой делитель d числа $q^n - 1$. Число d делит числитель дроби (1) и $\deg \psi^\alpha = p^r$, поэтому $d \mid \prod_{k=1}^{\lambda_m} (q^k - 1)$ и $\lambda_m \geq n$. Но тогда $\lambda_m = (n - \alpha_1 - \dots - \alpha_{m-1}) + (m-1) \leq n$ влечет $\lambda_m = n$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 1$, $\alpha_m = n - m + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \dots, \lambda_{m-1} = m-1$, $\lambda_m = n$. Отсюда

$$\deg \psi^\alpha = \frac{q^{\binom{m}{2}} (q^{n-m+1} - 1)(q^{n-m+2} - 1) \cdots (q^{n-1} - 1)}{(q-1)(q^2-1) \cdots (q^{m-1} - 1)}.$$

Следовательно, $m = n$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ и χ — характер Стейнберга.

2) Предположим, что $G = \text{PSU}_n(q)$. Тогда $\widehat{G} = \text{SU}_n(q)$ и $G^* = \text{PU}_n(q)$. Унитарные характеры $\text{PU}_n(q)$ параметризуются разбиениями α числа n : $\psi = \psi^\alpha$ (см. [7]). Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$. Положим $\lambda_i = \alpha_i + i - 1$. Тогда

$$\deg \psi^\alpha = \frac{(q+1)(q^2-1) \cdots (q^n - (-1)^n) \prod_{i' < i} (q^{\lambda_i} - (-1)^{\lambda_i + \lambda_{i'}} q^{\lambda_{i'}})}{q^{\binom{m-1}{2} + \binom{m-2}{2} + \dots} \prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^k - (-1)^k)}. \quad (2)$$

Если $m = 1$, то $\deg \psi^\alpha = 1$. Пусть $m \geq 2$.

2а) Предположим вначале, что n — нечетное. Имеем $(n, q) \neq (2, 3)$, так как группа $\text{PSU}_3(2)$ не простая. Тогда существует примитивный простой делитель d числа $q^{2n} - 1$. Число d делит числитель дроби (2) и $\deg \psi^\alpha = p^r$, поэтому $d \mid \prod_{k=1}^{\lambda_m} (q^k - (-1)^k)$ и $\lambda_m \geq n$. Но тогда $\lambda_m = (n - \alpha_1 - \dots - \alpha_{m-1}) + (m-1) \leq n$ влечет $\lambda_m = n$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 1$, $\alpha_m = n - m + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \dots, \lambda_{m-1} = m-1$, $\lambda_m = n$. Отсюда

$$\deg \psi^\alpha = \frac{q^{\binom{m}{2}} (q^{n-m+1} - (-1)^{n-m+1})(q^{n-m+2} - (-1)^{n-m+2}) \cdots (q^{n-1} - (-1)^{n-1})}{(q+1)(q^2-1) \cdots (q^{m-1} - (-1)^{m-1})}.$$

Следовательно, $m = n$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ и χ — характер Стейнберга.

2б) Пусть теперь n — четное, $n \geq 4$. Поскольку $(n, q) \neq (2, 4)$, найдется примитивный простой делитель d числа $q^{2(n-1)} - 1$. Число d делит числитель дроби (2) и $\deg \psi^\alpha = p^r$, поэтому $d \mid \prod_{k=1}^{\lambda_m} (q^k - (-1)^k)$ и $\lambda_m \geq n-1$. Но тогда $\lambda_m = (n - \alpha_1 - \dots - \alpha_{m-1}) + (m-1) \leq n$ влечет $\lambda_m = n$ или $\lambda_m = n-1$. Первый случай рассматривается как в 2а). Пусть $\lambda_m = n-1$. Тогда

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-2} = 1$, $\alpha_{m-1} = 2$, $\alpha_m = n - m$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \dots$, $\lambda_{m-2} = m - 2$, $\lambda_{m-1} = m$, $\lambda_m = n - 1$. Следовательно,

$$(\deg \psi^\alpha)_{p'} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1-m} - (-1)^{n-1-m}) \prod_{k=1}^{m-2} (q^{n-1-k} - (-1)^{n-1-k})}{(q+1)(q^m - (-1)^m) \prod_{k=1}^{m-2} (q^k - (-1)^k)} > 1,$$

что невозможно.

3) Предположим, что $G = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$ или $G = \Omega_{2n+1}(q)$. Тогда $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$ или $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_{2n+1}(q)$, $G^* = \mathrm{SO}_{2n+1}(q)$ или $G^* = \mathrm{PCSp}_{2n}(q)$ соответственно. Унипотентные характеры группы G^* параметризуются символами вида

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_a \\ & \mu_1 & \dots & \mu_b \end{pmatrix},$$

где $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_a$, $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_b$, $a - b$ — нечетное и положительное, $(\lambda_1, \mu_1) \neq (0, 0)$ и

$$\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] = n.$$

Целое число n называется рангом символа $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. Для унипотентного характера $\psi^{\lambda, \mu}$ имеем

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{\prod_{k=1}^n (q^{2k} - 1) \prod_{i' < i} (q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i'}}) \prod_{j' < j} (q^{\mu_j} - q^{\mu_{j'}}) \prod_{i,j} (q^{\lambda_i} + q^{\mu_j})}{2^{\lfloor \frac{a+b-1}{2} \rfloor} q^{\binom{a+b-2}{2} + \binom{a+b-4}{2} + \dots} \prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^{2k} - 1) \prod_j \prod_{k=1}^{\mu_j} (q^{2k} - 1)}. \quad (3)$$

Так как $(q, n) \neq (2, 3)$ и $n > 2$, то рассмотрим примитивный простой делитель d числа q^{2n-1} . Число d делит числитель дроби (3) и $\deg \psi^{\lambda, \mu} = p^r$, поэтому $2\lambda_a \geq 2n$ или $\mu_b \geq 2n$. Рассмотрим возможные случаи.

3а) Пусть $\lambda_a \geq n$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \\ & \geq (1 + 2 + \dots + a - 1 + \lambda_a) + (0 + 1 + \dots + b - 1) - \frac{(a+b-1)^2}{4} \\ & = \frac{(a-b)^2 - 1}{4} + \lambda_a \geq \lambda_a. \end{aligned}$$

Следовательно, $a - b = 1$, $\lambda_a = n$, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & a-1 & n \\ & 0 & 1 & \dots & a-2 \end{pmatrix}$.

Если $b = 0$, то $a = 1$, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ - \end{pmatrix}$, $\deg \psi^{\lambda, \mu} = 1$. Если $b \neq 0$, то $d \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1} = q^n + 1$, $2\lambda_{a-1} \geq 2n$ или $2\mu_b \geq 2n$, что невозможно.

3б) Пусть $\lambda_a \geq n$, $\mu_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \\ & \geq (0 + 1 + \dots + a - 2 + \lambda_a) + (1 + 2 + \dots + b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} \\ & = \frac{(a-b)(a-b-4) + 3}{4} + \lambda_a \geq \lambda_a. \end{aligned}$$

Следовательно, $a - b = 1$ или $a - b = 3$, $\lambda_a = n$. Если $a - b = 1$, то $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & b-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & b & \end{pmatrix}$. Мы можем предполагать, что $n > 2$ и $(q, n) \neq (2, 4)$ (случай $n = 2$ проверяется непосредственно, для $(q, n) = (2, 4)$ см. [13]). Пусть t — примитивный простой делитель числа $q^{2(n-1)} - 1$. Тогда $t \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1} = q^n + q$, $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$. Отсюда $b \geq n-1$. При $b = n-1$ имеем $t \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1}$ и $t \mid q^{\lambda_1} + q^{\mu_b}$, что невозможно. При $b = n$ получаем характер Стейнберга.

Если $a - b = 3$, $\lambda_a = n$, то $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & b & b+1 & n \\ 1 & 2 & \dots & b & \end{pmatrix}$. При $b = 0$ имеем $a = 3$, $\lambda = (0 \ 1 \ n)$,

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{q(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{2(q + 1)}.$$

Поэтому $b > 0$, $n > 2$. Пусть t — примитивный простой делитель числа $q^{2(n-1)} - 1$. Тогда $t \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1} = q^n + q$, $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$. Отсюда $b = n-2$, $a = n+1$ и

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{q^{(n-1)^2}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{2(q + 1)}.$$

3в) Пусть $\mu_b \geq n$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \\ & \geq (1 + 2 + \dots + a) + (0 + 1 + \dots + b - 2 + \mu_b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} \\ & = \frac{(a-b)^2 + 3}{4} + (a-b) + \mu_b > n. \end{aligned}$$

3г) Пусть $\mu_b \geq n$, $\mu_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \\ & \geq (0 + 1 + \dots + a - 1) + (1 + 2 + \dots + b - 1 + \mu_b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} \\ & = \frac{(a-b)^2 - 1}{4} + \mu_b \geq \mu_b. \end{aligned}$$

Следовательно, $a - b = 1$, $\mu_b = n$, $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & b-1 & b \\ 1 & 2 & \dots & b-1 & n \end{pmatrix}$.

Так как $d \mid q^{\lambda_1} + q^{\mu_b}$, то $2\lambda_a \geq 2n$ или $2\mu_{b-1} \geq 2n$. Поэтому $b = n$ и χ — характер Стейнберга.

4) Предположим, что $G = \mathrm{P}\Omega_{2n}^-(q)$, $n \geq 4$. Тогда $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_{2n}^-(q)$ и $G^* = \mathrm{P}(\mathrm{CO}_{2n}^-(q)^0)$. Унипотентные характеры группы G^* параметризуются символами вида

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_a \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_b \end{pmatrix},$$

где $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_a$, $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_b$, $(\lambda_1, \mu_1) \neq (0, 0)$, $a - b \equiv 2 \pmod{4}$, $a > b$ и

$$\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] = n.$$

Тогда степень унипотентного характера $\psi^{\lambda, \mu}$ равна

$$\frac{(q^n + 1) \prod_{k=1}^{n-1} (q^{2k} - 1) \prod_{i' < i} (q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i'}}) \prod_{j' < j} (q^{\mu_j} - q^{\mu_{j'}}) \prod_{i,j} (q^{\lambda_i} + q^{\mu_j})}{2^{\frac{a+b-2}{2}} q^{\binom{a+b-2}{2} + \binom{a+b-4}{2} + \dots} \prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^{2k} - 1) \prod_j \prod_{k=1}^{\mu_j} (q^{2k} - 1)}. \quad (4)$$

Заметим, что $\left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] = \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$. Пусть d – примитивный простой делитель числа $q^{2n} - 1$. Число d делит числитель дроби (4) и $\deg \psi^{\lambda, \mu} = p^r$, поэтому $2\lambda_a \geq 2n$ или $2\mu_b \geq 2n$. Рассмотрим возможные случаи.

4а) Пусть $\lambda_a \geq n$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ & \geq (1 + 2 + \dots + a - 1 + \lambda_a) + (0 + 1 + \dots + b - 1) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ & = \frac{(a-b)^2}{4} + \lambda_a > \lambda_a, \end{aligned}$$

что невозможно.

4б) Пусть $\lambda_a \geq n$, $\mu_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ & \geq (0 + 1 + \dots + a - 2 + \lambda_a) + (1 + 2 + \dots + b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ & = \frac{(a-b)(a-b-4) + 4}{4} + \lambda_a \geq \lambda_a \geq n. \end{aligned}$$

Следовательно, $a - b = 2$, $\lambda_a = n$. Тогда $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & b-1 & b & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & b & & \end{pmatrix}$.

Если $b = 0$, то $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ - & \end{pmatrix}$ и $\deg \psi^{\lambda, \mu} = 1$. Пусть $b > 0$. Тогда $a = b + 2$, $a + b - 2 = 2b$.

Мы можем предполагать, что $(q, n) \neq (2, 4)$ (для $(q, n) = (2, 4)$ см. [13]). Пусть t – примитивный простой делитель числа $q^{2(n-1)} - 1$. Тогда $t \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1}$, $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$. Отсюда $b = n - 1$ и χ – характер Стейнберга.

4в) Пусть $\mu_b \geq n$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ & \geq (1 + 2 + \dots + a) + (0 + 1 + \dots + b - 2 + \mu_b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ & = \frac{(a-b)(a-b+4)}{4} + 1 + \mu_b > n. \end{aligned}$$

4г) Пусть $\mu_b \geq n, \mu_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ \geq (0+1+\dots+a-1) + (1+2+\dots+b-1+\mu_b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{(a-b)^2}{4} + \mu_b > \mu_b \geq n. \end{aligned}$$

5) Предположим, что $G = \text{P}\Omega_{2n}^+(q)$, $n \geq 4$. Тогда $\widehat{G} = \text{Spin}_{2n}(q)$ и $G^* = \text{P}(\text{CO}_{2n}^+(q)^0)$. Унипотентные характеры группы G^* параметризуются символами вида

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_a \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_b \end{pmatrix},$$

где $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_a, 0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_b, (\lambda_1, \mu_1) \neq (0, 0), a-b \equiv 0 \pmod{4}$ и

$$\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] = n.$$

Тогда степень унипотентного характера $\psi^{\lambda, \mu}$ равна

$$\frac{(q^n - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (q^{2k} - 1) \prod_{i' < i} (q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i'}}) \prod_{j' < j} (q^{\mu_j} - q^{\mu_{j'}}) \prod_{i,j} (q^{\lambda_i} + q^{\mu_j})}{2^c q^{\binom{a+b-2}{2} + \binom{a+b-4}{2} + \dots} \prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^{2k} - 1) \prod_j \prod_{k=1}^{\mu_j} (q^{2k} - 1)}, \quad (5)$$

где $c = (a+b-2)/2$ при $\lambda \neq \mu$ и $c = a$ при $\lambda = \mu$. Кроме того, если $\lambda = \mu$, то символ $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ определяет два характера, а если $\lambda \neq \mu$, то символы $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ определяют один характер. Будем считать, что $a \geq b$.

Заметим, что $\left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] = \left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$. Так как $(q, n) \neq (2, 4)$,

то найдется примитивный простой делитель d числа $q^{2(n-1)} - 1$. Число d делит числитель дроби (5) и $\deg \psi^{\lambda, \mu} = p^r$, поэтому $2\lambda_a \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$. Рассмотрим возможные случаи.

5а) Пусть $\lambda_a \geq n-1, \lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ \geq (1+2+\dots+a-1+\lambda_a) + (0+1+\dots+b-1) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{(a-b)^2}{4} + \lambda_a \geq \lambda_a. \end{aligned}$$

Следовательно, $a = b$ и $\lambda_a = n-1, n$. Возможны 3 случая.

i) $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & b-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & b-2 & b-1 \end{pmatrix}$. При $b = 1$ имеем $\deg \psi^{\lambda, \mu} = 1$. Пусть $b \geq 2$. Так как $d \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu^2}$, то $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$. Отсюда получаем, что $b = n$ и χ — характер Стейнберга.

ii) $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{1 \ 2 \ \dots \ b-2 \ \ b \ \ n-1}{0 \ 1 \ \dots \ b-3 \ \ b-2 \ \ b-1}$. Так как $d \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1}$, то $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$, что невозможно.

iii) $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{1 \ 2 \ \dots \ b-2 \ \ b-1 \ \ n-1}{0 \ 1 \ \dots \ b-3 \ \ b-2 \ \ b}$. Так как $d \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1}$, то $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-1)$ или $2\mu_b \geq 2(n-1)$. Отсюда получаем, что $b = n-1$ и

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{q^{n^2-3n+3}(q^n-1)(q^{n-2}+1)}{(q-1)(q+1)}.$$

5б) Пусть $\lambda_a \geq n-1$, $\mu_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ & \geq (0+1+\dots+a-2+\lambda_a) + (1+2+\dots+b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ & = \frac{(a-b)(a-b-4)+4}{4} + \lambda_a \geq n. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_a = n-1$, $a = b$ или $a = b+4$,

$$\deg \psi^{\alpha, \mu} = \frac{(q^n-1) \prod_{i' < i} (q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i'}}) \prod_{j' < j} (q^{\mu_j} - q^{\mu_{j'}}) \prod_{i,j} (q^{\lambda_i} + q^{\mu_j})}{2^c q^{\binom{a+b-2}{2} + \binom{a+b-4}{2} + \dots} \prod_{i=1}^{a-1} \prod_{k=1}^{\lambda_i} (q^{2k}-1) \prod_j \prod_{k=1}^{\mu_j} (q^{2k}-1)}. \quad (6)$$

Пусть $a = b$. Тогда $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{0 \ 1 \ 2 \ \dots \ b-2 \ \ n-1}{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ b-1 \ \ b}$. Случай $(q, n) = (2, 5)$ рассматривается непосредственно, поэтому предположим, что $(q, n) \neq (2, 5)$. Тогда найдется примитивный простой делитель t числа $q^{2(n-2)} - 1$, поэтому из (6) имеем $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-2)$ или $2\mu_b \geq 2(n-2)$. Отсюда $b = n-2, n-1, n$. Если $b = n$, то получаем характер Стейнберга. Если $b = n-2$, то $t \mid q^{\lambda_a} + q^{\mu_1}$ и $t \mid q^{\lambda_1} + q^{\mu_b}$, но знаменатель дроби (6) не делится на t^2 . Если $b = n-1$, то $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-3 \ \ n-1}{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-2 \ \ n-1}$. Тогда $\binom{\lambda'}{\mu'} = \binom{0 \ 1 \ \dots \ n-3 \ \ n-2}{1 \ 2 \ \dots \ n-2 \ \ n-1}$ — символ ранга $n-1$ и

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{(q^n-1)(q^{n-2}+1)}{2(q-1)} \deg \psi^{\lambda', \mu'}$$

не может быть степенью p .

Пусть $a = b+4$, $\lambda_a = n-1$. Тогда

$$\binom{\lambda}{\mu} = \binom{0 \ 1 \ \dots \ b-1 \ \ b \ \ b+1 \ \ b+2 \ \ n-1}{1 \ 2 \ \dots \ \ b}.$$

Если $b = 0$, то $a = 4$ и

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{q^3(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)(q^{n-3}-1)}{2(q+1)^2(q^2+1)}.$$

Случай $(q, n) = (2, 5)$ рассматривается непосредственно, поэтому предположим, что $(q, n) \neq (2, 5)$. Тогда найдется примитивный простой делитель t числа

$q^{2(n-2)} - 1$. Число t делит $q^{\lambda_a} + q^{\mu_1}$, поэтому из (6) имеем $2\lambda_{a-1} \geq 2(n-2)$ или $2\mu_b \geq 2(n-2)$. Отсюда $b = n-4$ и

$$\deg \psi^{\lambda, \mu} = \frac{q^{n^2-5n+7}(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)(q^{n-3}-1)}{2(q+1)^2(q^2+1)}.$$

5в) Пусть $\mu_b \geq n-1$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ \geq (1+2+\dots+a) + (0+1+\dots+b-2+\mu_b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{(a-b)(a-b+4)}{4} + 1 + \mu_b \geq n. \end{aligned}$$

Следовательно, $a = b$. Заменяя символ $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ символом $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$, получаем случай 5б).

5г) Пусть $\mu_b \geq n-1$, $\mu_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2} \right)^2 \right] \\ \geq (0+1+\dots+a-1) + (1+2+\dots+b-1+\mu_b) - \frac{(a+b-1)^2}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{(a-b)^2}{4} + \mu_b \geq \mu_b. \end{aligned}$$

Следовательно, $a = b$. Заменяя символ $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ символом $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$, получаем случай 5а).

6) Предположим, что G — исключительная группа. Тогда утверждение леммы следует из проверки списка степеней унитарных характеров (см. [7]). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть G — конечная простая группа типа Ли, $G \neq \mathrm{Sp}_4(2)'$, ${}^2F_4(2)'$. Характер Стейнберга группы G является импримитивным характером тогда и только тогда, когда $G = \mathrm{PSL}_2(5)$, $\mathrm{PSL}_2(7)$, $\mathrm{PSL}_3(2)$ или $\mathrm{PSp}_4(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что характер Стейнберга χ является импримитивным характером: $\chi = \mathrm{ind}_K^G \psi = \psi^G$, где ψ — неприводимый характер группы K и $[G : K] = p^r$. Согласно [14] возможны следующие случаи.

1) $G = \mathrm{PSL}_4(2)$, $K \cong A_7$, $[G : K] = 8$, но группа A_7 не имеет неприводимых характеров степени 8.

2) $G = \mathrm{PSL}_2(11)$, $K \cong A_5$, $[G : K] = 11$, но единственным одномерным характером ψ группы A_5 является тривиальный характер, поэтому ψ^G приводим.

3) $G = \mathrm{PSL}_3(2)$, $K \cong 7 : 3$, $[G : K] = 8$. Пусть ψ — нетривиальный одномерный характер группы K . Тогда по теореме Фробениуса о взаимности и согласно [13] имеем:

$$[\psi^G, \chi]_G = [\psi, \chi|_K]_K = \frac{1}{|K|} \sum_{x \in K} \psi(x) \overline{\chi}(x) = 1.$$

Следовательно, $\chi = \psi^G$.

4) $G = \text{PSL}_2(5)$, $K \cong A_4 \cong V_4 : 3$, $[G : K] = 5$. Пусть ψ – нетривиальный одномерный характер группы K . Тогда по теореме Фробениуса и согласно [13] имеем: $[\psi^G, \chi]_G = [\psi, \chi|_K]_K = 1$, поэтому $\chi = \psi^G$.

5) $G = \text{PSL}_2(7)$, $K \cong S_4$, $[G : K] = 7$. Пусть $\psi(x) = \text{sgn}(x)$ – нетривиальный одномерный характер группы K . Тогда $[\psi^G, \chi]_G = [\psi, \chi|_K]_K = 1$ и $\chi = \psi^G$.

6) $G = \text{PSp}_4(3)$, $K \cong 2^4 : A_5$, $[G : K] = 27$. Пусть ψ – трехмерный характер группы K . Тогда $[\psi^G, \chi]_G = [\psi, \chi|_K]_K = 1$ и $\chi = \psi^G$.

§ 3. Группы автоморфизмов инвариантных решеток

В этом параграфе мы будем придерживаться следующих обозначений. G является конечной простой группой типа Ли над полем $\mathbb{F}_q$, $q = p^f$, $p > 2$, Λ является G -инвариантной $\mathbb{Z}$ -решеткой в модуле Стейнберга V , $H = \text{Aut}(\Lambda)$, χ – характер группы H , порожденный модулем V . Далее, $\text{sol}(L)$, $\text{abel}(L)$, $\text{soc}(L)$ обозначают максимальную разрешимую нормальную подгруппу, максимальную абелеву нормальную подгруппу и произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы L соответственно. Если M – подгруппа группы L и ψ – характер L , то $\psi|_M$ обозначает ограничение ψ на подгруппу M . Ясно, что отображение $\eta(x) = -x$ является автоморфизмом решетки Λ . Обозначим $Z = \langle \eta \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

ЛЕММА 3.1. Если $G \neq \text{PSL}_2(7)$, то $Z(H) = \text{abel}(H) = C_H(G) = Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $G = \text{PSL}_2(q)$ разобран в [6], поэтому можем предполагать, что $G \neq \text{PSL}_2(q)$. По лемме Шура имеем $C_H(G) = Z$. Предположим, что A является нетривиальной абелевой нормальной подгруппой группы H . Рассмотрим χ как рациональный характер группы H . Тогда χ примитивен (см. лемму 2.3). Для любого простого делителя r числа $|A|$ рассмотрим элементарную абелеву r -подгруппу R такую, что $1 \neq R \subseteq A$, $R \triangleleft H$. Покажем, что $R = Z$. Действительно, по теореме Клиффорда [15] имеем $\chi|_R = e \sum_{i=1}^s \rho_i$, где e – целое положительное число и ρ_i – различные неприводимые рациональные характеры группы R . Так как $\deg \chi$ нечетна, то $r = 2$. Примитивность χ влечет $s = 1$ и $\chi|_R = e\rho_1$. Следовательно, ρ_1 является точным неприводимым рациональным характером элементарной абелевой 2-группы R . Поэтому $R = Z$. Это означает, что A циклическая и $A = Z$.

ЛЕММА 3.2. Если $G \neq \text{PSL}_2(7)$, то $\text{sol}(H) = Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G \neq \text{PSL}_2(7)$ и $R = \text{sol}(H) \neq Z$. Рассмотрим производный ряд

$$R = R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \dots \supset R^{(s)} \supset R^{(s+1)} = 1,$$

где $R^{(i+1)} = [R^{(i)}, R^{(i)}]$. Положим $N = R^{(s-1)}$. Тогда N – нормальная подгруппа в H , $N' = [N, N] \neq 1$ и $[N', N'] = 1$. Так как N' является абелевой нормальной подгруппой группы H , то по лемме 3.1 имеем $N' = Z$. Следовательно, N – неабелева нильпотентная подгруппа. Поэтому N равна прямому произведению силовских подгрупп. Тогда N является 2-группой, поскольку $\text{abel}(H) = Z$. По теореме Клиффорда имеем $\chi|_N = e \sum_{i=1}^s \rho_i$. Так как $\deg \chi$ нечетна, $\deg \rho_i$ одинаковы и $\deg \rho_i \mid |N|$, то $\deg \rho_i = 1$. Следовательно, $Z = N'$ лежит в ядре всех ρ_i ; получили противоречие.

Теперь мы переходим к вычислению групп автоморфизмов инвариантных решеток. Сначала рассмотрим случай, когда H импримитивна, т.е. $G = \text{PSL}_2(5)$, $\text{PSL}_2(7)$, $\text{PSp}_4(3)$. Случай $G = \text{PSL}_2(q)$ разобран в [6].

ЛЕММА 3.3. Если $G = \mathrm{PSp}_4(3)$ и $H = \mathrm{Aut}(\Lambda)$ – импримитивная группа, то $H = \mathbb{Z}_2 \times G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega = \{V_i, i = 1, \dots, t\}$ – система импримитивности для H , т.е. $V = V_1 + \dots + V_t$ и H действует на Ω . Пусть $\varphi: H \rightarrow S_\Omega$ – естественный гомоморфизм. Тогда по лемме 3.2 имеем $\ker \varphi = Z$. Так как $G \hookrightarrow H$ и группа G не имеет подгрупп индексов 81, 9, 3, то $t = 27$. Согласно [16] имеем, что $\mathrm{soc}(H/Z)$ изоморфен $\mathrm{PSp}_4(3)$ или A_{27} . Изоморфизм $\mathrm{soc}(H/Z) \cong A_{27}$ невозможен, поскольку нерасщепляемое расширение $2A_{27}$ имеет точные представления только четной размерности (см. [17]) и группа A_{27} не имеет неприводимых представлений размерности 27 (см. [18]). Поэтому $\mathrm{soc}(H/Z) \cong \mathrm{PSp}_4(3)$ и $H = \mathbb{Z}_2 \times G$. Лемма доказана.

Таким образом, нам осталось рассмотреть примитивный случай.

ЛЕММА 3.4. Если $G \neq \mathrm{PSL}_2(7)$ и H – примитивная группа, то цоколь $L = \mathrm{soc}(H/Z)$ группы H/Z является неабелевой простой группой, содержащей группу G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{H} = H/Z$ и $\overline{M}$ – минимальная нормальная подгруппа группы $\overline{H}$. Так как $\mathrm{sol}(H) = Z$, то $\overline{M}$ неразрешима и $\overline{M} = \overline{L}_1 \times \dots \times \overline{L}_k$, $\overline{L}_1 \cong \dots \cong \overline{L}_k \cong L$, L – неабелева простая группа. Обозначим через $M, L_1, \dots, L_k$ полные прообразы $\overline{M}, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_k$ в H . Тогда $M = L_1 \circ \dots \circ L_k$ (центральное произведение). Пусть $d = d(L)$ – наименьшая степень точного проективного комплексного представления группы L . Так как H – примитивная группа, то $\chi|_M = e\sigma$ для некоторого характера группы M . Существуют неприводимые характеры ρ_i групп L_i такие, что $\sigma(x_1 \dots x_k) = \rho_1(x_1) \dots \rho_k(x_k)$ для всех $x_i \in L_i$. Поэтому $\chi|_{L_i} = \frac{\deg \chi}{\deg \rho_i} \rho_i$. Следовательно, ρ_i – точные и $\deg \chi \geq d^k$.

Группа G вложена в $\overline{H}$. Покажем, что G нормализует каждую подгруппу $\overline{L}_i$. Действительно, если G переставляет $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_k$, то $k \geq P(G)$, где $P(G)$ обозначает минимальную степень перестановочного представления группы G . Следовательно,

$$\deg \chi \geq d^{P(G)},$$

что невозможно согласно [9], [19]–[21].

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\pi: G \rightarrow \mathrm{Aut}(\overline{L}_i) = \mathrm{Aut}(L) = L \rtimes \mathrm{Out}(L)$. Если $\ker \pi = G$, то $G \subseteq C_H(L_i)$, $L_i \subseteq C_H(G)$ и $L_i \subseteq Z$, что невозможно. Следовательно, $\ker \pi = 1$ и $G \hookrightarrow L \times \mathrm{Out}(L)$. Так как G совершенная группа и $\mathrm{Out}(L)$ разрешима согласно “гипотезе Шрейера”, то $G \hookrightarrow L$. Покажем, что $k = 1$. Действительно, пусть $G_i \leq L_i$, $G_i/Z \cong G$. Положим $S = G_i G$ и $\psi = \chi|_S$. Имеем $\psi|_{G_i} = m\tau$, где τ – неприводимый характер группы G_i . Но тогда по лемме 2.2 и [13] имеем $\deg \tau = \deg \chi$, что влечет $\deg \rho_i = \deg \chi$ и $k = 1$.

Следовательно, всякая минимальная нормальная подгруппа $\overline{M}$ группы $\overline{H}$ является неабелевой простой группой, содержащей группу G . Ясно, что такая подгруппа единственна. Лемма доказана.

Используя классификацию конечных простых групп, изучим все возможности для $\mathrm{soc}(H/Z)$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $G \neq \mathrm{PSL}_2(q)$, $p > 2$. Тогда цоколь $L = \mathrm{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть спорадической простой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $G \neq \text{PSL}_2(q)$, то $\deg \chi = p^i \geq p^3$. Но спорадические группы не имеют неприводимых проективных рациональных характеров степени $p^i \geq p^3$ (см. [13]).

ЛЕММА 3.6. Пусть $G \neq \text{PSL}_2(7)$ и цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z является знакопеременной группой A_m . Тогда $G = \text{PSL}_2(q)$, $\text{PSU}_3(q)$, ${}^2B_2(q)$ или ${}^2G_2(q)$, G действует дважды транзитивно на множестве из m точек, $m = \deg \chi + 1$ и $\text{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \times S_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = A_m$. Тогда для полного прообраза $\bar{L}$ группы L в H имеем $\bar{L} = Z \times A_m$, поскольку все точные представления группы $2A_m$ имеют четную размерность [17] ($2A_m$ обозначает нерасщепляемое расширение группы A_m). Так как $G \hookrightarrow A_m$, то согласно [22] имеем следующие две возможности:

1) $G \geq A_{m-2}$, но это влечет $|G| \geq \frac{1}{2}(m-2)! \geq \frac{1}{2}(P(G)-2)!$, что невозможно согласно [9], [19]–[21];

2) G – дважды транзитивная группа, действующая на множестве из m элементов, и $\chi|_{A_m}$ – характер, соответствующий разбиению $(m-1, 1)$ (о параметризации неприводимых характеров групп A_m и S_m разбиениями см. [23]). Из списка [24] дважды транзитивных групп с неабелевым цоклем получаем $G = \text{PSL}_2(q)$, $\text{PSU}_3(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$. Классификация A_m -инвариантных решеток в $(m-1)$ -мерном модуле приведена в [25], откуда следует, что $\text{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}_2 \times S_m$.

ЛЕММА 3.7. Пусть цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z является группой типа Ли характеристики p . Тогда $L = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $L \neq G$. Группа L имеет неприводимый рациональный проективный характер степени $|G|_p$. Следовательно, по лемме 2.2 и [13] имеем $|L|_p = |G|_p$. По теореме Бореля–Титса [26] группа G содержится в некоторой параболической подгруппе P группы L . Но это невозможно, поскольку G простая. Лемма доказана.

Напомним некоторые обозначения. Для простой группы L типа Ли над полем $\mathbb{F}_q$ число $R_p(L)$ обозначает наименьшую степень нетривиальных проективных характеров над полем характеристики p и $R_{p'}(L)$ обозначает наименьшую степень нетривиальных проективных характеров над полем характеристики, отличной от p . В дальнейшем будем использовать значения $R_p(L)$ из [9] и нижние границы для $R_{p'}(L)$ из [27] и [28] без дополнительных ссылок. Следующий результат является следствием из [28].

ЛЕММА 3.8. Пусть L – классическая простая группа размерности n над полем $\mathbb{F}_q$, $q = p^f$.

1) Если $n \geq 6$, то $R_{p'}(L) \geq \frac{1}{2}(q^{n/2} - 1)$.

2) Если $n \geq 8$ и $p = 2$, то $R_{p'}(L) \geq \frac{1}{2}q^{n-3}$, за исключением $R_{p'}(\Omega_8^+(2)) = 8$.

ЛЕММА 3.9. Пусть $G = L_n(q)$, $n \geq 3$, $p > 2$. Тогда цокль $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^n - 1}{q - 1} - n \geq q^{n-1} + 1 \geq 10.$$

Далее, если $r \neq 2$, то $s \geq 3$ и

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(s^{(q^{n-1}+1)/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(3^{(q^{n-1}+1)/2} - 1) \\ > q^{n(n-1)/2} = \deg \chi.$$

Пусть $r = 2$. Тогда $G \neq \Omega_8^+(2)$, поскольку $\Omega_8^+(2)$ не имеет неприводимых проективных представлений степени p^i , $p > 2$. Поэтому

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}s^{k-3} \geq \frac{1}{2}s^{q^{n-1}-3} \geq 2^{q^{n-1}-4} > q^{n(n-1)/2} = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L — исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^n - 1}{q - 1} - n.$$

Если $n = 3$, $q = 3$, то $R_r(L) \geq 10$ и $L = E_6(s)$, $E_7(s)$, $E_8(s)$, ${}^2E_6(s)$, $F_4(s)$, ${}^2F_4(s)$ или ${}^2F_4(2)'$. Но группа Титса ${}^2F_4(2)'$ не имеет проективных рациональных представлений размерности $q^{n(n-1)/2} = \deg \chi = 27$, и для остальных групп имеем

$$R_{r'}(L) \geq 44 > 27 = q^{n(n-1)/2} = \deg \chi,$$

что невозможно. Если $n = 3$, $5 \leq q \leq 13$, то $R_r(L) \geq 28$ и $L = E_7(s)$, $E_8(s)$, но тогда

$$R_{r'}(L) \geq s^{15}(s^2 - 1) \geq 2^{16} > q^3 = \deg \chi.$$

Если $n = 4$, $3 \leq q \leq 5$, то $R_r(L) \geq 36$, $L = E_7(s)$, $E_8(s)$ и

$$R_{r'}(L) \geq s^{15}(s^2 - 1) \geq 2^{16} > q^6 = \deg \chi.$$

Если $n = 5$, $q = 3$, то $R_r(L) \geq 116$, $L = E_8(s)$ и

$$R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) \geq 2^{28} > q^{10} = \deg \chi.$$

В оставшихся случаях (т.е. при $n = 3$, $q \geq 17$; или $n = 4$, $q \geq 7$; или $n = 5$, $q \geq 5$; или $n > 5$) имеем

$$R_r(L) > 248,$$

что невозможно.

ЛЕММА 3.10. Пусть $G = \text{PSU}_n(q)$, $n \geq 3$, $p > 2$, цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z является группой типа Ли характеристики, отличной от p . Тогда $G = \text{PSU}_3(3)$ и $L = \text{Sp}_6(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L — классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^n - q}{q + 1} \geq 6.$$

Пусть $(q, n) \neq (3, 3)$. Если $r \neq 2$, то $s \geq 3$ и

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(3^{(q^n - q)/(2(q+1))} - 1) > q^{n(n-1)/2} = \deg \chi.$$

Если $r = 2$, то $G \neq \Omega_8^+(2)$, поскольку $\Omega_8^+(2)$ не имеет неприводимых проективных представлений степени p^i , $p > 2$. Поэтому

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}s^{k-3} \geq 2^{(q^n-q)/(q+1)-4} > q^{n(n-1)/2} = \deg \chi.$$

Осталось рассмотреть случай $q = n = 3$.

1. $L = L_k(s)$. Тогда $R_{r'}(L) \geq s^{k-1} - 1 \geq 2^5 - 1 > q^3 = \deg \chi$.

2. $L = \text{PSU}_k(s)$. Тогда $(k, s) \neq (6, 2)$, поскольку $\text{PSU}_6(2)$ не имеет неприводимых проективных характеров степени 27, и поэтому

$$R_{r'}(L) \geq \frac{s^k - s}{s + 1} > 3^3 = \deg \chi.$$

3. $L = \text{PSp}_{2m}(s)$. Если s нечетно, то $(2m, s) \neq (6, 3)$ (так как $\text{PSp}_6(3)$ не имеет неприводимых проективных характеров степени 27) и

$$R_{r'}(L) \geq \frac{s^m - 1}{2} > 3^3 = \deg \chi.$$

Если s четно и $(2m, s) \neq (6, 2)$, то

$$R_{r'}(L) \geq \frac{(s^m - 1)(s^m - s)}{2(s + 1)} > 3^3 = \deg \chi.$$

Случай $L = \text{Sp}_6(2)$ возможен, поскольку $\text{PSU}_3(3) \hookrightarrow \text{Sp}_6(2)$ и группы $\text{PSU}_3(3)$, $\text{Sp}_6(2)$ действуют дважды транзитивно на множестве из 28 элементов.

4. $L = \text{P}\Omega_{2m+1}(s)$, $m \geq 3$. Тогда

$$R_{r'}(L) \geq s^{m-1}(s^{m-1} - 1) \geq 3^2(3^2 - 1) > 3^3 = \deg \chi.$$

5. $L = \text{P}\Omega_{2m}^+(s)$, $m \geq 4$. Тогда $(m, s) \neq (4, 2)$ (так как $\text{P}\Omega_8^+(2)$ не имеет неприводимых проективных характеров степени 27) и

$$R_{r'}(L) \geq s^{m-2}(s^{m-1} - 1) > 3^3 = \deg \chi.$$

6. $L = \text{P}\Omega_{2m}^-(s)$, $m \geq 4$. Тогда

$$R_{r'}(L) \geq \frac{(s^m + 1)(s^{m-1} - s)}{s^2 - 1} - m + 2 > 3^3 = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L — исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^n - q}{q + 1}.$$

Если $n = 3$, $q = 3$, то $R_r(L) \geq 6$, поэтому или $R_{r'}(L) > 3^3$, или $L = G_2(4)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2B_2(8)$, но последние группы не имеют неприводимых проективных рациональных характеров степени 27.

Если $n = 3$, $q = 5$, то $R_r(L) \geq 20$, поэтому или $R_{r'}(L) > 5^3$, или $L = F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, но последние группы не имеют неприводимых проективных характеров степени 5^3 .

Если $n = 3$, $7 \leq q \leq 13$, то $R_r(L) \geq 42$, поэтому $L = E_7(s)$, $E_8(s)$ и $R_{r'}(L) \geq s^{15}(s^2 - 1) \geq 2^{16} > q^3 = \deg \chi$.

Если $n = 4$, $q = 3$, то $R_r(L) \geq 20$, поэтому или $R_{r'}(L) > q^6 = \deg \chi$, или $L = F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, но эти группы не имеют неприводимых проективных характеров степени 3^6 .

Если $n = 4$, $q = 5$, то $R_r(L) \geq 104$, $L = E_8(s)$, $R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) > 5^6 = \deg \chi$.

Если $n = 5$, $q = 3$, то $R_r(L) \geq 60$, $L = E_8(s)$, $R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) > 3^{10} = \deg \chi$.

В оставшихся случаях (т.е. при $n = 3$, $q \geq 17$; или $n = 4$, $q \geq 7$; или $n = 5$, $q \geq 5$; или $n > 5$) имеем $R_r(L) > 248$, что невозможно.

ЛЕММА 3.11. Пусть $G = \mathrm{PSp}_{2m}(q)$, $m \geq 2$, $p > 2$. Тогда цоколь $L = \mathrm{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L — классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Пусть $(m, q) \neq (2, 3), (2, 5), (3, 3)$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^m - 1}{2} > 10.$$

Если $r \neq 2$, то $s \geq 3$ и

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(3^{(q^m - 1)/4} - 1) > q^{m^2} = \deg \chi.$$

Если $r = 2$, то $G \neq \Omega_8^+(2)$, поскольку $\Omega_8^+(2)$ не имеет неприводимых проективных представлений степени p^i , $p > 2$. Поэтому

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}s^{k-3} \geq 2^{(q^m - 1)/2 - 4} > q^{m^2} = \deg \chi.$$

Следовательно, нам надо рассмотреть случаи $(m, q) = (2, 3), (2, 5), (3, 3)$.

1. $L = L_k(s)$. Тогда

$$R_{r'}(L) \geq \frac{s^k - 1}{s - 1} - k > q^{m^2} = \deg \chi,$$

кроме случаев $m = 2, q = 3, s = 2, k = 4, 5, 6$; $m = 2, q = 3, s = 4, k = 4$; $m = 3, q = 3, s = 2, k = 13, 14$ (мы использовали то, что q и s взаимно просты и $k \geq (q^m - 1)/2$). Но группы $L_4(2), L_5(2)$ не обладают неприводимыми характерами степени 3^4 ; невозможность остальных случаев следует из значений первых двух степеней характеров групп $\mathrm{PSL}_k(s)$ (см. [29]).

2. $L = \mathrm{PSU}_k(s)$. Тогда

$$R_{r'}(L) \geq \frac{s^k - s}{s + 1} > q^{m^2} = \deg \chi,$$

кроме случаев $m = 2, q = 3, s = 2, k = 4, 5, 6, 7$; $m = 2, q = 3, s = 4, k = 4$; $m = 3, q = 3, s = 2, k = 13, 14, 15$. Но $\mathrm{PSU}_4(2) \cong \mathrm{PSp}_4(3)$, группы $\mathrm{PSU}_5(2)$ и $\mathrm{PSU}_6(2)$ не имеют неприводимых комплексных характеров степени 81. Невозможность остальных случаев следует из значений первых трех степеней характеров группы $\mathrm{PSU}_k(s)$ (см. [29]).

3. $L = \mathrm{PSp}_{2d}(s)$. Тогда $2d = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq (q^m - 1)/2$.

Если s нечетно, то $R_{r'}(L) \geq (s^d - 1)/2 > q^{m^2} = \deg \chi$, кроме случаев $m = 2, q = 3, s = 5, d = 2, 3$; $m = 2, q = 3, s = 7, d = 2$; $m = 2, q = 3, s = 11, d = 2$; $m = 2, q = 5, s = 3, d = 6$. Первые три степени нетривиальных комплексных характеров группы $\mathrm{PSp}_{2d}(s)$ равны $\frac{s^d \pm 1}{2}$ и $\frac{(s^d - 1)(s^d - s)}{2(s + 1)}$ (см. [29]), поэтому $\mathrm{PSp}_6(5)$ не имеет характеров степени 81. Далее, группы $\mathrm{PSp}_4(5), \mathrm{PSp}_4(7), \mathrm{PSp}_4(11)$ не имеют характеров степени 81, поскольку 81 не делит порядки этих групп. Аналогично, $\mathrm{PSp}_{12}(3)$ не имеет характеров степени 5^4 .

Если s четно, то

$$R_{r'}(L) \geq \frac{(s^d - 1)(s^d - s)}{2(s + 1)},$$

за исключением $R_{r'}(\mathrm{Sp}_4(2)') = 2$. Следовательно, $R_{r'}(L) > q^{m^2}$, кроме случаев $m = 2, q = 3, s = 2, d = 2, 3, 4$; $m = 2, q = 3, s = 4, d = 2$; $m = 3, q = 3, s = 2, d = 7, 8$. Группы $\mathrm{Sp}_4(2)'$, $\mathrm{Sp}_6(2)$, $\mathrm{Sp}_8(2)$, $\mathrm{Sp}_4(4)$ не имеют характеров степени 81 (см. [13]), и группы $\mathrm{Sp}_{14}(2)$, $\mathrm{Sp}_{16}(2)$ не имеют неприводимых характеров степени 3^9 (если такой характер ψ существует, то, используя сведения об индексе централизатора полупростого элемента в $\mathrm{Sp}_{2d}(2)$ из [29], можно показать, что ψ — унитарный характер; далее, методом доказательства леммы 2.2 легко убедиться в том, что группы $\mathrm{Sp}_{14}(2)$, $\mathrm{Sp}_{16}(2)$ не имеют унитарных неприводимых характеров степени 3^9).

4. $L = \mathrm{P}\Omega_{2d+1}(s)$, $d \geq 3, s = r^t$. Тогда

$$2d + 1 = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^m - 1}{2}$$

и для наших значений m и q имеем

$$R_{r'}(L) \geq s^{d-1}(s^{d-1} - 1) > q^{m^2}.$$

5. $L = \mathrm{P}\Omega_{2d}^\pm(s)$, $d \geq 4, s = r^t$. Тогда

$$2d = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^m - 1}{2}, \quad R_{r'}(L) \geq (s^{d-1} + 1)(s^{d-2} - 1) > q^{m^2}.$$

2) Предположим, что L — исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq \frac{q^m - 1}{2}.$$

Если $m = 2, q = 3$, то или $R_{r'}(L) > 3^4$, или $L = G_2(4)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2B_2(8)$, но последние группы не имеют неприводимых проективных характеров степени 3^4 .

Если $m = 2, q = 5$, то $R_r(L) \geq 12$, $L = F_4(s)$, ${}^2F_4(s)'$, $E_6(s)$, ${}^2E_6(s)$, $E_7(s)$, $E_8(s)$, поэтому или $R_{r'}(L) > 5^4$, или $L = F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, но последние группы не имеют неприводимых проективных характеров степени 5^4 .

Если $m = 2, q = 7$, то $R_r(L) \geq 24$, $L = F_4(s)$, ${}^2F_4(s)'$, $E_6(s)$, ${}^2E_6(s)$, $E_7(s)$, $E_8(s)$, поэтому или $R_{r'}(L) > 7^4$, или $L = F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$, но последние группы не имеют неприводимых проективных характеров степени 7^4 .

Если $m = 2, 9 \leq q \leq 19$, то $R_r(L) \geq 40$, $L = E_7(s)$, $E_8(s)$, поэтому $R_{r'}(L) > 19^4$.

Если $m = 3, q = 3$, то $R_r(L) \geq 13$, $L = F_4(s)$, ${}^2F_4(s)'$, $E_6(s)$, ${}^2E_6(s)$, $E_7(s)$, $E_8(s)$, поэтому или $R_{r'}(L) > 3^9$, или $L = F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$, но последние группы не имеют неприводимых проективных характеров степени 7^4 .

Если $m = 3, q = 5, 7$, то $R_r(L) \geq 62$, $L = E_8(s)$, поэтому $R_{r'}(L) > 7^9$.

Если $m = 4, q = 3$, то $R_r(L) \geq 40$, $L = E_7(s)$, $E_8(s)$, поэтому или $R_{r'}(L) > 3^{16}$, или $L = E_7(2)$, но эта группа не имеет неприводимых проективных характеров степени 3^{16} .

Если $m = 5, q = 3$, то $R_r(L) \geq 121$, $L = E_8(s)$, поэтому или $R_{r'}(L) > 3^{25}$, или $L = E_8(2)$, но эта группа не имеет неприводимых проективных характеров степени 3^{25} .

В оставшихся случаях (т.е. при $m = 2, q > 19$; или $m = 3, q > 7$; или $m = 4, q > 3$; или $m = 5, q > 3$; или $m > 5$) имеем $R_r(L) > 248$, что невозможно.

ЛЕММА 3.12. Пусть $G = \text{P}\Omega_{2m}^{\pm}(q)$, $m \geq 4$, $p > 2$. Тогда цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq (q^{m-1} + 1)(q^{m-2} - 1),$$

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(2^{q^{m-1}} - 1) > q^{m(m-1)} = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L – исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq (q^{m-1} + 1)(q^{m-2} - 1) > 248,$$

кроме случая $m = 4$, $q = 3$. Но тогда $R_r(L) \geq (3^3 + 1)(3^2 - 1) = 224$ и $L = E_8(s)$. Поэтому

$$R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) > q^{m(m-1)} = \deg \chi.$$

ЛЕММА 3.13. Пусть $G = \text{P}\Omega_{2m+1}(q)$, $m \geq 3$, $p > 2$. Тогда цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q^{m-1}(q^{m-1} - 1),$$

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(s^{q^{m-1}(q^{m-1}-1)/2} - 1) > q^{m^2} = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L – исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q^{m-1}(q^{m-1} - 1) > 248,$$

кроме случая $m = q = 3$. Но тогда $R_r(L) \geq 3^2(3^2 - 1) = 72$ и $L = E_8(s)$. Поэтому

$$R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) > 3^9 = q^{m^2} = \deg \chi.$$

ЛЕММА 3.14. Пусть G – группа типа $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $E_4(q)$. Тогда цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q^6(q^2 - 1),$$

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(s^{q^6(q^2-1)/2} - 1) > q^{120} \geq \deg \chi.$$

2) Предположим, что L – исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q^6(q^2 - 1) > 248,$$

получили противоречие.

ЛЕММА 3.15. Пусть $G = {}^2G_2(q)$, $q = p^f \geq p^3$, $p = 3$. Тогда цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q(q-1),$$

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(s^{q(q-1)/2} - 1) > q^3 = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L – исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q(q-1) > 248,$$

получили противоречие.

ЛЕММА 3.16. Пусть $G = {}^3D_4(q)$, $p > 2$. Тогда цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Тогда

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q^3(q^2 - 1),$$

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(s^{q^3(q^2-1)/2} - 1) > q^{12} = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L – исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q^3(q^2 - 1) > 248,$$

кроме $q = 3$. Но в этом случае имеем $R_r(L) > 56$, $L = E_8(s)$, $R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) > 3^3 = \deg \chi$.

ЛЕММА 3.17. Пусть $G = G_2(q)$, $p > 2$. Тогда цоколь $L = \text{soc}(H/Z)$ группы H/Z не может быть группой типа Ли характеристики, отличной от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что L – классическая простая группа размерности k над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, r простое, $r \neq p$. Если $q \neq 3$, то

$$k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q(q^2 - 1),$$

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(s^{q(q^2-1)/2} - 1) > q^6 = \deg \chi.$$

Если $q = 3$, то $k = R_r(L) \geq R_{p'}(G) = 14$. При нечетных s имеем

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}(s^{k/2} - 1) \geq \frac{1}{2}(5^7 - 1) > q^6 = \deg \chi.$$

При четных s имеем

$$R_{r'}(L) \geq \frac{1}{2}s^{k-3} \geq 2^{10} > q^6 = \deg \chi.$$

2) Предположим, что L – исключительная простая группа типа Ли над $\mathbb{F}_s$, $s = r^t$, $r \neq p$. Пусть $q > 3$. Тогда

$$R_r(L) \geq R_{p'}(G) \geq q(q^2 - 1) > 248,$$

кроме случая $q = 5$. Но в этом случае имеем $R_r(L) > 120$, $L = E_8(s)$, $R_{r'}(L) \geq s^{27}(s^2 - 1) > 5^6 = \deg \chi$.

Осталось рассмотреть случай $q = 3$. Так как $R_r(L) \geq R_{p'}(G) = 14$, то $L = F_4(s)$, $E_6(s)$, ${}^2E_6(s)$, $E_7(s)$, $E_8(s)$, ${}^2F_4(s)$, ${}^2F_4(2)'$. Если $L = E_6(s)$, ${}^2E_6(s)$, $E_7(s)$, $E_8(s)$, то $R_{r'}(L) \geq s^9(s^2 - 1) > 3^6 = \deg \chi$. Пусть $L = F_4(s)$. Группа $F_4(2)$ не имеет неприводимых характеров степени 3^6 . При $s > 2$ имеем $R_{r'}(L) > s^6 \geq 3^6 = \deg \chi$. Пусть $L = {}^2F_4(s)$, $s \geq 8$. Тогда $R_{r'}(L) \geq s^4(s - 1)\sqrt{s/2} > 3^6 = \deg \chi$. Наконец, группа $L = {}^2F_4(2)'$ не имеет неприводимых характеров степени 3^6 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. При $G = \text{PSL}_2(q)$ утверждение теоремы следует из [6]. Случай импримитивного H рассмотрен в лемме 3.3. Наконец, леммы 3.4–3.17 доказывают теорему для примитивного H .

Список литературы

1. Иванов Д. Н. Ортогональные разложения алгебр Ли типа A_{p^n-1} и D_n с конечным числом классов подобных инвариантных подрешеток // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1989. №2. С. 40–43.
2. Абдухаликов К. С. Целочисленные инвариантные решетки в алгебрах Ли типа A_{p^m-1} // Матем. сб. 1993. Т. 184. №4. С. 61–104.
3. Абдухаликов К. С. Целочисленные решетки, ассоциированные с конечной аффинной группой // Матем. сб. 1994. Т. 185. №12. С. 3–18.
4. Бондал А. И., Кострикин А. И., Фам Хью Тьеп. Инвариантные решетки, решетка Лича и ее четные унимодулярные аналоги в алгебрах A_{p-1} // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). №4 (8). С. 435–464.
5. Kostrikin A. I., Pham Huu Tiep. Orthogonal decompositions and integral lattices. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
6. Буриченко В. П. Инвариантные решетки в модуле Стейнберга и их группы изометрий // Матем. сб. 1993. Т. 184. №12. С. 145–156.
7. Carter R. W. Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. New York: Wiley and Sons, 1985.
8. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.
9. Kleidman P. B., Liebeck M. W. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1990.
10. Lusztig G. Characters of reductive groups over a finite field. Princeton: Princeton Univ. Press, 1984.
11. Lusztig G. On the representations of reductive groups with disconnected center // Astérisque. 1988. V. 168. P. 157–166.
12. Digne F., Michel J. Representations of finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
13. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
14. Guralnick R. M. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81. P. 304–311.
15. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
16. Dixon J., Mortimer B. The primitive permutation groups of degree less than 1000 // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1988. V. 103. P. 213–238.
17. Wagner A. An observation on the degrees of projective representations of the symmetric and alternating groups over an arbitrary field // Arch. Math. 1977. V. 29. P. 583–589.
18. Rasala R. On the minimal degrees of characteres of S_n // J. Algebra. 1977. V. 45. P. 132–181.
19. Cooperstein B. N. Minimal degree for a permutation representation of a classical group // Israel J. Math. 1978. V. 30. P. 213–235.
20. Liebeck M. W., Saxl J. On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3) 1987. V. 55. P. 299–330.

21. *Liebeck M. W., Saxl J.* Maximal subgroups of finite simple groups and their automorphism groups // *Contemp. Math.* 1992. V. 131. P. 243–259.
22. *Saxl J.* The complex characters of the symmetric groups that remains irreducible in subgroups // *J. Algebra.* 1987. V. 111. P. 210–219.
23. *James G. D.* The representation theory of the symmetric groups. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
24. *Cameron P. J.* Finite permutation groups and finite simple groups // *Bull. London Math. Soc.* 1981. V. 13. P. 1–22.
25. *Plesken W.* On absolutely irreducible representations of orders // *Number Theory and Algebra; Collect. Rap. dedic. H. B. Mann, A. E. Ross, O. Taussky-Todd*, 1977. P. 241–262.
26. *Seitz G. M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // *Ann. of Math.* 1973. V. 97. P. 27–56.
27. *Landazuri V., Seitz G. M.* On the minimal degrees of projective representations of the finite Chevalley groups // *J. Algebra.* 1974. V. 32. P. 418–443.
28. *Seitz G. M., Zalesskii A. E.* On the minimal degrees of projective representations of the finite Chevalley groups. II // *J. Algebra.* 1993. V. 158. P. 233–243.
29. *Tiep P. H., Zalesskii A. E.* Minimal characters of the finite classical groups // *Comm. Algebra.* 1996. V. 24. P. 2093–2167.

Институт теоретической и прикладной математики, Алматы

Поступила в редакцию
01.11.1997