Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 10, 5–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:18:46

УДК 513.83

А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко

**Двумерные римановы метрики с
интегрируемым геодезическим потоком.
Локальная и глобальная геометрия**

В этой работе дается обзор классических и новых результатов, относящихся к интегрируемым геодезическим потокам на двумерных поверхностях. Основной вопрос, который обсуждается в работе, – это классификация таких потоков с точностью до различных отношений эквивалентности, среди которых нас будут интересовать в первую очередь следующие четыре типа: 1) изометрия; 2) геодезическая эквивалентность; 3) траекторная эквивалентность; 4) лиувиллева эквивалентность.

Библиография: 47 названий.

§ 1. Введение

Мы начнем с напоминания основных определений. Пусть M^n – гладкое риманово многообразие с римановой метрикой $g_{ij}(x)$. В нашей работе мы будем рассматривать C^∞ -гладкие римановы метрики. Напомним, что *геодезическими данной метрики* называются гладкие параметризованные кривые

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

являющиеся решениями системы дифференциальных уравнений

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0,$$

где $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ – вектор скорости кривой γ , а ∇ – оператор ковариантного дифференцирования, отвечающий симметрической связности, согласованной с метрикой g_{ij} .

Уравнения геодезических можно интерпретировать как гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(x) p_i p_j = \frac{1}{2} |p|^2$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00240), гранта государственной поддержки ведущих научных школ (№ 96-15-96142) и гранта Президента РФ (№ 96-15-96868).

на кокасательном расслоении T^*M , а сами геодезические – как проекции траекторий этой гамильтоновой системы на M . Здесь x и p – стандартные координаты на кокасательном расслоении T^*M , где $x = (x^1, \dots, x^n)$ – координаты точки на M , а $p = (p_1, \dots, p_n)$ – координаты ковектора в кокасательном пространстве T_x^*M в базисе $dx^1, \dots, dx^n$.

Возникает естественный и важный вопрос: в каких случаях можно решить уравнения геодезических явно, например, в квадратурах? Достаточное условие дает классическая теорема Лиувилля, которую мы сформулируем здесь для случая геодезического потока на двумерной замкнутой поверхности.

Пусть M^2 – замкнутая двумерная поверхность с римановой метрикой g . Ее геодезический поток называется *вполне интегрируемым по Лиувиллю*, если он обладает гладким первым интегралом f , функционально независимым с гамильтонианом H почти всюду на T^*M^2 . В случае многообразия произвольной размерности n для полной интегрируемости нужно требовать существования n независимых попарно коммутирующих интегралов.

Здесь возникают, по крайней мере, два очень естественных вопроса.

- а) На каких многообразиях существуют римановы метрики, геодезические потоки которых интегрируемы?
- б) Если на данном многообразии такие метрики (назовем их *интегрируемыми*) существуют, то как их описать?

Исследованию этих проблем посвящен большой цикл как современных, так и классических работ (см., например, [1]–[31]).

Вернемся к двумерному случаю. При изучении геодезических потоков естественно фиксировать уровень энергии $\{H = \text{const} > 0\}$, поскольку этот уровень является инвариантным относительно геодезического потока и, кроме того, вся динамика в целом на T^*M^2 полностью определяется динамикой лишь на одной изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = \text{const}\}$. Действительно, переход на другой уровень энергии означает лишь перепараметризацию геодезических. Отметим, что топология изоэнергетической поверхности Q^3 довольно проста: она имеет естественную структуру S^1 -расслоения над поверхностью M^2 (слой над каждой точкой $x \in M^2$ – это эллипс в касательной плоскости $T_x^*M^2$, задаваемый уравнением $\{H = \text{const} > 0\}$). В частности, в случае простейших двумерных поверхностей – сферы S^2 , тора T^2 , проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ и бутылки Клейна K^2 – изоэнергетические поверхности, соответственно, таковы:

- 1) $Q_{S^2}^3 = \mathbb{RP}^3$ (трехмерное проективное пространство);
- 2) $Q_{T^2}^3 = T^3$ (трехмерный тор);
- 3) $Q_{\mathbb{RP}^2}^3 = L_{4,1}$ (линзовое пространство типа $(4, 1)$);
- 4) $Q_{K^2}^3 = T^3$ (трехмерный тор).

В случае полной интегрируемости изоэнергетическая поверхность Q^3 расслаивается на двумерные поверхности уровня дополнительного интеграла $f: Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Согласно теореме Лиувилля связанные неособые уровни f представляют собой двумерные торы Лиувилля. Динамика на каждом из этих торов очень проста: интегральные траектории геодезического потока на торе Лиувилля являются прямолинейными обмотками (рациональными или иррациональными). Более того, вблизи

каждого тора Лиувилля гамильтонова система (1) интегрируема в квадратурах. Таким образом, в случае интегрируемости на изоэнергетической поверхности возникает естественная структура слоения на торы Лиувилля, содержащего, впрочем, и особые слои, отвечающие критическим значениям дополнительного интеграла f . Эта структура называется *слоением Лиувилля*. Его слоями по определению являются связные компоненты интегральных поверхностей $\{f = \text{const}\}$ (как особых, так и неособых).

Введем четыре различных отношения эквивалентности на множестве всех геодезических потоков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) – две двумерные поверхности с римановыми метриками. Рассмотрим отвечающие им геодезические потоки v_1 и v_2 на кокасательных расслоениях.

1) Метрики g_1 и g_2 называются *изометричными*, если существует диффеоморфизм $\xi: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $g_1 = \xi^* g_2$.

2) Метрики g_1 и g_2 называются *геодезически эквивалентными*, если существует диффеоморфизм, который переводит геодезические первой метрики в геодезические второй метрики. При этом геодезические рассматриваются без учета параметризации.

3) Геодезические потоки v_1 и v_2 называются *траекторно эквивалентными* (*топологически* или *гладко*), если существует отображение (соответственно, гомотопии или диффеоморфизм) $\eta: Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который переводит ориентированные траектории потока v_1 в ориентированные траектории потока v_2 (без учета параметризации на траекториях).

4) Интегрируемые геодезические потоки v_1 и v_2 называются *лиувиллево эквивалентными*, если они имеют одинаковые слоения Лиувилля, т.е. существует послойный (в смысле слоений Лиувилля) диффеоморфизм $\eta: Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$. Обычно дополнительно требуют, чтобы отображение η сохраняло ориентации изоэнергетической поверхности и критических окружностей интеграла f .

В этом определении каждое последующее отношение эквивалентности слабее предыдущего. Отметим также, что первые три из них имеют смысл для произвольных геодезических потоков (необязательно интегрируемых).

§ 2. Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на двумерных поверхностях

Прежде чем обсуждать классификацию интегрируемых геодезических потоков, напомним, на каких поверхностях такие потоки существуют.

ТЕОРЕМА 1 (В. В. Козлов [7]). Пусть двумерное компактное аналитическое многообразие с отрицательной эйлеровой характеристикой снабжено аналитической римановой метрикой. Тогда геодезический поток этой метрики неинтегрируем в классе аналитических интегралов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из этой теоремы сразу вытекает, что в аналитическом случае лишь четыре поверхности допускают интегрируемые геодезические потоки: сфера, тор, проективная плоскость и бутылка Клейна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в теореме 1 на самом деле достаточно требовать аналитичности лишь изоэнергетической поверхности и аналитичности интеграла только на ней. Тот же результат остается верным в предположении, что дополнительный интеграл является полиномом по импульсам, коэффициенты которого являются произвольными гладкими функциями от координат (см. ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы приведем доказательство, отличное от первоначального доказательства Козлова и основанное на некоторых общих свойствах лиувиллевых слоений интегрируемых систем. По нашему мнению, такой новый подход существенно проясняет топологическую природу того типа препятствий к интегрируемости, который был открыт Козловым.

Пусть M — двумерное компактное гладкое многообразие с интегрируемым геодезическим потоком. Сначала мы предположим для простоты, что геодезический поток обладает боттовским интегралом f . Напомним, что функция $f: Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *боттовской*, если множество ее критических точек распадается в несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий [32].

Ниже мы поясним, как от ситуации с невырожденными (т.е. боттовскими) особенностями слоения Лиувилля можно перейти к ситуации с аналитическими особенностями.

Рассмотрим неособую изоэнергетическую поверхность Q . Она является расслоением со слоем окружность над M^2 (т.е. пространством единичных (ко)касательных векторов к поверхности M^2). Согласно [32], [33] структура слоения Лиувилля на Q описывается меченой молекулой W^* . В силу боттовости системы молекула W^* состоит из конечного числа атомов и конечного числа ребер. Другими словами, многообразие Q^3 может быть разбито на конечное число однопараметрических семейств торов Лиувилля и конечное число особых слоев.

Рассмотрим естественную проекцию p многообразия Q^3 на базу M^2 и индуцированное отображение $p_*: H_1(Q^3, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M^2, \mathbb{Z})$ одномерных групп гомологий с целочисленными коэффициентами. Как хорошо известно, каждый элемент α из группы $H_1(M^2, \mathbb{Z})$ может быть реализован замкнутой геодезической γ на M^2 . Эта геодезическая γ , в свою очередь, является проекцией замкнутой траектории γ' геодезического потока на Q^3 . Поскольку геодезический поток интегрируем, то γ' лежит на каком-то слое слоения Лиувилля (особом или неособом).

Случай 1. Пусть γ' лежит на торе Лиувилля T^2 (случай регулярного слоя). Тогда α содержится в образе группы $H_1(T^2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Отметим, что все торы Лиувилля, принадлежащие тому же однопараметрическому семейству, что и тор T^2 , изотопны между собой, и поэтому их одномерные группы гомологий отображаются в ту же самую группу $p_* H_1(T^2, \mathbb{Z})$.

Случай 2. Пусть γ' лежит на каком-то особом слое слоения Лиувилля. Этот слой состоит из конечного числа одномерных орбит пуассонова действия группы R^2 (порожденной коммутирующими функциями H и f) и конечного числа двумерных орбит, гомеоморфных кольцу $S^1 \times D^1$. В каждом из этих случаев одномерная группа гомологий орбиты изоморфна $\mathbb{Z}$. А поскольку γ' лежит в какой-то орбите O_i , то элемент α содержится в образе группы $H_1(O_i, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$.

Таким образом, учитывая, что лиувиллево слоение на Q^3 имеет конечное число однопараметрических семейств торов Лиувилля и конечное число особых орбит

O_i , не являющихся торами, мы видим, что вся группа $H_1(M^2, \mathbb{Z})$ как множество представима в виде объединения конечного числа своих подгрупп, каждая из которых имеет не более двух образующих. Поскольку $H_1(M^2, \mathbb{Z})$ изоморфна либо $\mathbb{Z}^{2g}$ (в ориентируемом случае), либо $\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_2$ (в неориентируемом случае), то отсюда сразу вытекает, что группа одномерных гомологий многообразия M^2 является одной из следующих четырех групп: $\{e\}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Все остальные группы слишком велики.

Следовательно, M^2 диффеоморфно либо сфере, либо проективной плоскости, либо тору, либо бутылке Клейна. Тем самым, теорема 1 доказана для случая, когда геодезический поток допускает боттовский интеграл.

Из нашего доказательства видно, что условие боттовости является здесь слишком сильным. Буквально то же рассуждение проходит и для случая, когда интеграл не является боттовским, но слоение многообразия Q на орбиты пуассонова действия содержит *конечное* число особых орбит и *конечное* число однопараметрических семейств регулярных торов Лиувилля, или же для случая так называемых ручных интегралов, изученных в работе [34].

Для завершения доказательства теоремы 1 остается заметить, что аналитические интегралы являются ручными.

§ 3. Локальные результаты

Напомним два простейших примера интегрируемых геодезических потоков. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ двумерную поверхность вращения M^2 , задающуюся уравнением $r = r(z)$ в стандартных цилиндрических координатах r, φ, z . В качестве локальных координат на M^2 выберем z и φ . Тогда риманова метрика, индуцированная на M^2 объемлющей евклидовой метрикой, имеет вид:

$$ds^2 = (1 + (r')^2) dz^2 + r^2(z) d\varphi^2.$$

Пусть $z = z(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ — параметрическое уравнение геодезической на M^2 , а ψ — это угол между вектором скорости геодезической и параллелью на поверхности вращения.

ТЕОРЕМА 2 (Клеро). *Геодезический поток поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$ вполне интегрируем по Лиувиллю. Функция $r \cos \psi$ постоянна вдоль каждой геодезической, т.е. является его первым интегралом. Геодезические (без учета их параметризации) задаются следующей явной формулой:*

$$\varphi(z) = \int c \frac{\sqrt{1 + r'^2}}{\sqrt{r(r^2 - c^2)}} dz.$$

Вторым примером являются так называемые метрики Лиувилля. Напомним, что риманова метрика на двумерной поверхности M^2 называется *лиувиллевой*, если в подходящих локальных координатах x и y она записывается в виде

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — произвольные гладкие положительные функции.

ТЕОРЕМА 3 (Лиувилль). *Геодезический поток лиувиллевой метрики на двумерной поверхности вполне интегрируем. Сами геодезические задаются соотношением (без учета параметра)*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x) + a}} \pm \int \frac{dy}{\sqrt{g(y) - a}} = c,$$

где a и c — некоторые константы.

Обратим внимание, что в этих двух примерах римановых метрик интегралы их геодезических потоков являются либо линейными, либо квадратичными по импульсам. Оказывается, эти два типа метрик по существу исчерпывают собой все те случаи, когда геодезический поток (на двумерной поверхности) допускает линейный или квадратичный интеграл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Геодезические потоки, которые интегрируемы при помощи интегралов, линейных или квадратичных по импульсам (не сводимых к линейным), мы будем называть *линейно интегрируемыми* и *квадратично интегрируемыми*, соответственно.

Локальные свойства метрик, имеющих такие геодезические потоки, были фактически исследованы в классических работах [2], [21] и [35]. В современных терминах эта теория была затем развита В. Н. Колокольцовым [11] (см. также [8], [22], [36]).

Следующие теоремы дают локальное описание таких метрик в точке общего положения.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть геодезический поток метрики ds^2 обладает линейным по импульсам интегралом F в окрестности точки P , причем этот интеграл не равняется тождественно нулю на (ко)касательной плоскости в точке P . Тогда в некоторой окрестности этой точки существуют регулярные локальные координаты u и v , в которых метрика принимает вид:*

$$ds^2 = \lambda(u)(du^2 + dv^2).$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть геодезический поток метрики ds^2 обладает квадратичным интегралом F в окрестности точки $P \in M$, причем этот интеграл на (ко)касательном пространстве в точке P не пропорционален (как квадратичная форма) гамильтониану H . Тогда в некоторой окрестности этой точки метрика является лиувиллевой, т.е. существуют локальные координаты u и v , в которых метрика принимает вид:*

$$ds^2 = (f(u) + g(v))(du^2 + dv^2),$$

где $f(u)$ и $g(v)$ — гладкие функции. При этом

$$F(u, v, p_u, p_v) = \frac{-f(u)p_v^2 + g(v)p_u^2}{f(u) + g(v)}.$$

Эти теоремы дают вид метрик с линейно и квадратично интегрируемыми геодезическими потоками в окрестности точки P общего положения. Что происходит в сингулярной точке? Другими словами, какие особенности могут иметь координаты (u, v) , в которых метрика приобретает канонический вид, указанный в теоремах 4 и 5. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которая включает в себя оба случая – линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть геодезический поток обладает квадратичным интегралом F в окрестности точки $P \in M^2$, причем в касательной плоскости к этой точке гамильтониан H и интеграл F пропорциональны как квадратичные формы. Тогда возможны следующие два случая.*

1) *В некоторой окрестности точки P существуют локальные координаты u, v , в которых метрика имеет вид:*

$$ds^2 = f(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2),$$

где $f(t)$ – положительная гладкая функция. При этом геодезический поток обладает другим, уже линейным интегралом вида $\tilde{F} = vp_u - up_v$.

2) *В некоторой окрестности точки P существуют локальные координаты u, v , в которых метрика имеет вид:*

$$ds^2 = \frac{h(r+u) - h(u-r)}{2r}(du^2 + dv^2),$$

где $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, а h – гладкая в окрестности нуля функция, удовлетворяющая условию $h'(0) > 0$. При этом квадратичный интеграл F геодезического потока (с точностью до линейной комбинации с гамильтонианом) имеет вид:

$$F(u, v, p_u, p_v) = -\frac{r(h(u+r) + h(u-r))}{h(u+r) - h(u-r)}(p_u^2 + p_v^2) + (up_u^2 + 2vp_up_v - up_v^2).$$

Таким образом, в случае линейной и квадратичной интегрируемости “канонические” координаты могут иметь лишь два типа особенностей. Их можно встретить, например, в полярных и эллиптических координатах.

Основная идея, которая легко приводит к этим результатам, состоит в анализе так называемой формы Биркгофа, которая может быть сопоставлена произвольному геодезическому потоку с полиномиальным интегралом. Напомним вкратце эту конструкцию.

Пусть риманова метрика локально, т.е. в окрестности некоторой точки на поверхности, записывается в виде $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$. Другими словами, x, y – локальные изотермические координаты для данной метрики. Предположим, что ее геодезический поток вполне интегрируем при помощи некоторого полиномиального по импульсам интеграла степени n

$$F = \sum b_i(x, y)p_x^{n-i}p_y^i.$$

Рассмотрим функцию

$$R(z) = (b_0 - b_2 + b_4 - b_6 + \dots) + i(b_1 - b_3 + b_5 - b_7 + \dots),$$

где $z = x + iy$.

Без ограничения общности можно предполагать, что эта функция отлична от тождественного нуля. В противном случае этот интеграл делится нацело на гамильтониан, следовательно, его степень может быть понижена на два. Тогда рассуждение следует повторить для нового полиномиального интеграла $F' = F/H$.

Наблюдение, сделанное Биркгофом для $n = 1, 2$ и обобщенное Колокольцовым на случай произвольного n , состоит в том, что выражение

$$\frac{(dz)^n}{R(z)}$$

определяет на поверхности “дифференциальную форму” (точнее, n -дифференциал), которая инвариантна относительно голоморфных замен. Анализ этой формы в особых и неособых точках легко приводит к сформулированным выше локальным результатам.

Коме того, этот факт имеет очень важное глобальное следствие (Колокольцов): на замкнутой двумерной поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой не существует полиномиально интегрируемых геодезических потоков.

Это сразу следует из следующих фактов. Во-первых, форма Биркгофа не имеет нулей. Во-вторых, n -дифференциалов без нулей на поверхностях с отрицательной эйлеровой характеристикой вообще не существует.

Что известно о геодезических потоках, интегрируемых при помощи полиномиальных интегралов более высоких степеней?

Если ограничиться локальным аспектом задачи, то ситуация сразу проясняется. А именно, имеет место следующий результат Козлова.

ТЕОРЕМА 7. *Имеются интегрируемые системы с гамильтонианом*

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\Lambda(x_1, x_2)},$$

которые допускают в области $D_x \times \mathbb{R}_p^2$ (где D — диск на плоскости x_1, x_2) полиномиальный по импульсам интеграл заданной степени n , независимый от H , и при этом не допускают независимого от H полиномиального интеграла степени меньшей чем n .

Доказательство см. в работе В. Тена [37].

Отметим, что, используя принцип Мопертюи [4], локальные примеры геодезических потоков с интегралами степеней три и четыре можно построить, например, исходя из систем Калоджеро–Мозера [38], [39] и цепочек Тоды [40].

Что касается примеров интегрируемых геодезических потоков с интегралами больших степеней на замкнутых поверхностях, то такие примеры известны лишь на двумерной сфере (см. ниже).

§ 4. Метрическая классификация линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на замкнутых поверхностях

Метрическая классификация линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на поверхностях была получена в работах [1], [11], [13], [14], [22] и [41]. Излагая эти результаты, мы будем придерживаться терминологии, предложенной В. С. Матвеевым.

В каждом из обсуждаемых ниже случаев мы явно укажем полный список метрик с интегрируемыми геодезическими потоками.

4.1. Случай тора. Этот случай характеризуется тем, что на накрывающей плоскости тора всегда существуют глобальные координаты, в которых риманова метрика имеет канонический вид (см. теоремы 4, 5). Поэтому ниже при описании метрики на торе мы указываем формулу для метрики на накрывающей плоскости $\mathbb{R}^2$ и вид решетки Γ , отвечающей данному тору $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$.

Начнем со случая метрики с линейно интегрируемым геодезическим потоком. Рассмотрим на двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (u, v) риманову метрику $ds^2 = q(v)(du^2 + dv^2)$, причем функция $q(v)$ имеет период L . Пусть решетка Γ порождена векторами $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (t, L)$, где $t \in [0, 1)$, $L > 0$. Поскольку $q(v)$ инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки, то она определяет некоторую метрику на торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$. Эта метрика определяется тремя параметрами q, t, L , и мы поэтому назовем ее (q, t, L) -метрикой.

ТЕОРЕМА 8. Пусть геодезический поток метрики ds^2 на торе T допускает линейный интеграл. Тогда метрика либо плоская, либо изометрична некоторой (q, t, L) -метрике.

Рассмотрим теперь случай римановой метрики на торе, геодезический поток которой допускает квадратичный интеграл, не сводящийся к линейному.

Рассмотрим на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y глобально лиувиллеву метрику вида

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где f и g — гладкие положительные функции с периодами 1 и L , соответственно. Затем факторизуем плоскость по решетке Γ , базисом которой являются два вектора $f_1 = (m, 0)$, $f_2 = (k, L)$. Поскольку метрика ds^2 инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки Γ , то мы получим некоторую гладкую метрику на торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, которую будем для краткости называть $(L, f, g, k/m)$ -метрикой.

ТЕОРЕМА 9. Любая метрика на торе, обладающая квадратично интегрируемым геодезическим потоком, изометрична некоторой $(L, f, g, k/m)$ -метрике.

ЗАМЕЧАНИЕ. $(L, f, g, k/m)$ -метрики, для которых $k = 0$, называются *глобально лиувиллевыми*, поскольку в этом случае x и y являются глобальными периодическими координатами на торе. Если же $k \neq 0$, то метрику естественно называть *конечнолистно лиувиллевой*. Это означает, что $(L, f, g, k/m)$ -метрика становится глобально лиувиллевой после перехода к конечнолистному накрытию тора тором.

4.2. Случай бутылки Клейна. Напомним, что бутылка Клейна двулистно накрывается тором. Такое накрытие определено однозначно (с точностью до естественной эквивалентности накрытий). Совершенно ясно, что, поднимая на тор метрику с бутылки Клейна K^2 с интегрируемым геодезическим потоком, мы получаем на торе тоже интегрируемый поток. Однако тип потока при этом может меняться, а именно, степень интеграла может понизиться. Например, из квадратично интегрируемого потока может получиться линейно интегрируемый, а из потока с интегралом четвертой степени может получиться квадратично интегрируемый поток (см. [14], [34], [41]). Поэтому в случае бутылки Клейна можно выделить четыре различных серии интегрируемых потоков, которые мы будем называть

- 1) *линейно интегрируемыми* (существует линейный интеграл);
- 2) *квазилинейно интегрируемыми* (существует квадратичный интеграл, который сводится к линейному при переходе к накрывающему тору);
- 3) *квадратично интегрируемыми* (существует квадратичный интеграл, который не сводится к линейному при переходе к накрывающему тору);
- 4) *квазиквадратично интегрируемыми* (существует интеграл четвертой степени, который сводится к квадратичному при переходе к накрывающему тору).

Опишем классы линейно, квазилинейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна. Все они строятся аналогичным образом. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y ортогональную решетку Γ с базисом $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (0, L)$, где L — произвольное положительное число. Рассмотрим метрику

$$(f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где $f(x)$ — функция с периодом $\frac{1}{2}$, $g(y)$ — четная функция с периодом L и $f + g > 0$.

Эта метрика порождает, очевидно, некоторую гладкую метрику на торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$. Рассмотрим теперь на торе инволюцию ξ , задаваемую в координатах накрывающей плоскости формулой

$$\xi(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right).$$

Легко видеть, что множитель $f(x) + g(y)$ инвариантен относительно инволюции ξ , а потому, факторизуя тор по инволюции, мы получаем бутылку Клейна с некоторой гладкой метрикой, которую мы назовем (L, f, g) -метрикой.

Если функция f тождественно равна нулю, то геодезический поток линейно интегрируем. В самом деле, линейным интегралом потока, поднятого обратно на тор, является p_x . Но так как функция p_x выдерживает инволюцию ξ , то мы можем спустить вниз этот интеграл и в результате получаем линейный интеграл геодезического потока $(L, 0, g)$ -метрики на бутылке Клейна.

Если тождественно равна нулю функция g , то геодезический поток будет квазилинейно интегрируемым. Действительно, на накрывающем торе соответствующий геодезический поток обладает линейным интегралом p_y , который, однако,

не инвариантен относительно инволюции ξ , а меняет знак. Поэтому на бутылке Клейна однозначным интегралом будет квадратичная функция p_y^2 .

Наконец, если обе функции f и g отличны от констант, то геодезический поток квадратично интегрируем.

ТЕОРЕМА 10. 1) Любая метрика на бутылке Клейна, геодезический поток которой линейно интегрируем, является либо плоской, либо изометрична некоторой $(L, 0, g)$ -метрике при подходящем подборе параметров L и g .

2) Любая метрика на бутылке Клейна, геодезический поток которой квазилинейно интегрируем, изометрична некоторой $(L, f, 0)$ -метрике при подходящем подборе параметров L и f .

3) Любая метрика на бутылке Клейна, геодезический поток которой квадратично интегрируем, изометрична некоторой (L, f, g) -метрике при подходящем подборе параметров L , f и g .

Рассмотрим, наконец, еще одно семейство метрик на бутылке Клейна, геодезические потоки которых естественно называть *квазиквадратично интегрируемыми*. Они обладают интегралом F четвертой степени, который локально (но не глобально) может быть представлен в виде $F = \tilde{F}^2$, где $\tilde{F}$ – квадратичный полином. При поднятии на накрывающий тор геодезический поток становится квадратично интегрируемым.

Пусть m и n – натуральные взаимно простые числа и f – положительная периодическая функция одной переменной с периодом 1, отличная от постоянной. Рассмотрим на плоскости стандартные декартовы координаты x, y и зададим метрику по формуле

$$ds^2 = \left(f(x) + f\left(y + \frac{n}{2}\right) \right) (dx^2 + dy^2).$$

Пусть Γ – ортогональная решетка на плоскости, порожденная векторами $f_1 = (m, -m)$, $f_2 = (n, n)$. Она получается из стандартной решетки путем поворота на $\pi/4$. Под стандартной решеткой здесь мы понимаем решетку с базисными векторами, направленными по осям x и y . Легко видеть, что указанная метрика инвариантна по отношению к сдвигам на элементы решетки Γ . Следовательно, эта метрика корректно определяет некоторую метрику на торе.

Зададим теперь на торе инволюцию $\xi: (x, y) \rightarrow (y + n/2, x + n/2)$. Факторизуя тор по действию инволюции ξ , получаем бутылку Клейна. Легко видеть, что метрика на торе инвариантна относительно инволюции ξ , а потому определяет некоторую метрику на бутылке Клейна K^2 . Обозначим эту метрику через $ds_{m,n,f}^2$.

ТЕОРЕМА 11. 1) Геодезический поток метрики $ds_{m,n,f}^2$ на бутылке Клейна имеет полиномиальный по импульсам интеграл степени 4. Этот интеграл не сводится к интегралам меньших степеней.

2) Метриками вида $ds_{m,n,f}^2$ исчерпываются (с точностью до изометрий) метрики на бутылке Клейна, не имеющие квадратичного интеграла, но приобретающие такой интеграл после перехода к накрывающему тору.

Тот факт, что описанный геодезический поток метрики $ds_{m,n,f}^2$ на бутылке Клейна не имеет однозначного интеграла второй степени (а обладает лишь интегралом четвертой степени), отражается на его качественных свойствах. Так, например,

эта метрика $ds_{m,n,f}^2$ не допускает никаких нетривиальных геодезических эквивалентностей. В этом состоит одно из качественных отличий метрики $ds_{m,n,f}^2$ от других метрик с линейно и квадратично интегрируемыми геодезическими потоками. Этот результат вытекает из глобальной теоремы Дини, сформулированной ниже.

4.3. Случай сферы. В случае сферы описание метрик с линейно и квадратично интегрируемыми геодезическими потоками было получено Колокольцовым [11]. В дальнейшем Т. З. Нгуен, Е. Н. Селиванова, Л. С. Полякова [42] предложили более удачную, геометрическую формулировку этих результатов. Такой геометрический подход оказался более удобным для изучения глобальной топологии интегрируемых геодезических потоков на сфере (см. ниже).

Мы начнем со случая линейно интегрируемых геодезических потоков. Представим сферу как пополненную двумерную евклидову плоскость, добавив бесконечно удаленную точку.

ТЕОРЕМА 12. *Метрика на сфере обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком тогда и только тогда, когда на сфере существуют глобальные изотермические координаты x, y , в которых метрика принимает вид:*

$$ds^2 = f(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2),$$

где $f(t)$ – положительная гладкая функция на полуоси $[0, +\infty)$ и такая, что $f(1/t)/t^2$ – положительная гладкая функция на всей полуоси $[0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Второе условие на функцию f гарантирует гладкость метрики в бесконечно удаленной точке. Такие метрики мы будем называть f -метриками на сфере.

Теорема 12 может быть переформулирована в следующем виде. Метрика на сфере обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком тогда и только тогда, когда она изометрична метрике вида $ds^2 = h(z) ds_0^2$ для некоторой гладкой положительной функции $h(z)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Здесь ds_0^2 означает метрику на стандартной сфере единичного радиуса, индуцированную объемлющей евклидовой метрикой.

СЛЕДСТВИЕ. *Метрика на сфере обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком тогда и только тогда, когда она допускает гладкое действие окружности $S^1 = \text{SO}(2)$ посредством изометрий, причем это действие сопряжено стандартному (т.е. вращению сферы вокруг оси z).*

Приведем теперь список всех метрик на сфере с квадратично интегрируемыми геодезическими потоками. Конструкцию, излагаемую ниже, можно рассматривать как построение серии модельных примеров таких метрик.

Рассмотрим представление двумерного тора T^2 в виде фактор-пространства плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y по ортогональной решетке Γ , базисом которой являются два ортогональных вектора $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (0, L)$, где L – любое положительное число. Рассмотрим инволюцию σ тора на себя, задаваемую на накрывающей плоскости следующей симметрией:

$$\sigma(x, y) = (-x, -y),$$

т.е. симметрией относительно начала координат.

Ясно, что решетка Γ выдерживает эту симметрию, поэтому σ действительно является инволюцией на торе. Легко видеть, что фактор-пространство T^2/σ является двумерной сферой, причем проекция $\varkappa: T^2 \rightarrow S^2 = T^2/\sigma$ может рассматриваться как гладкое и даже комплексно-аналитическое отображение с ветвлением второго порядка в четырех точках.

Теперь мы опишем класс метрик с квадратично интегрируемыми геодезическими потоками на сфере. Воспользуемся для этого отображением $\varkappa$ и вместо того, чтобы описывать искомую метрику в терминах сферы, мы опишем метрику, являющуюся ее прообразом на торе. Ясно, что метрика на сфере однозначно восстанавливается по ее прообразу на накрывающем торе. Такое описание метрики на сфере через накрывающую ее метрику на торе оказывается существенно более простым, чем задание метрики в терминах изотермических координат на сфере.

Зададим на накрывающей плоскости тора две периодические гладкие функции $f(x)$ и $g(y)$, удовлетворяющие следующим условиям.

- а) Функция $f(x)$ неотрицательная, гладкая, четная, периодическая с периодом 1.
- б) Функция $g(y)$ неотрицательная, гладкая, четная, периодическая с периодом L .
- в) Это условие описывает асимптотическое поведение функций f и g вблизи их нулей. Функция $f(x)$ обращается в нуль в точках вида $x = m/2, m \in \mathbb{Z}$. Функция $g(y)$ обращается в нуль в точках вида $y = Lk/2, k \in \mathbb{Z}$. Для любой точки вида $(m/2, kL/2)$ существует гладкая в окрестности нуля функция $h(t)$ такая, что $h(0) = 0, h'(0) \neq 0$ и

$$f\left(\frac{m}{2} + t\right) = h(t^2), \quad g\left(\frac{kL}{2} + t\right) = -h(-t^2).$$

Если мы хотим рассматривать вещественно-аналитические метрики на сфере, то функции f и g (так же, как и функция h в третьем условии) должны быть аналитическими.

Рассмотрим на торе 2-форму $(f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$ с указанными функциями f и g . Вместо слова “метрика” мы употребили термин 2-форма по той причине, что она имеет на торе нули в точках ветвления отображения $\varkappa$ и потому не является римановой метрикой в строгом смысле. Видно, что эта 2-форма инвариантна на торе относительно инволюции σ в силу ее построения. Следовательно, спуская 2-форму вниз, мы получаем некоторую корректно определенную 2-форму на всей сфере без четырех точек. Оказывается, эту форму можно корректно доопределить и в четырех точках ветвления, в результате чего получится гладкая риманова метрика уже на всей сфере.

В итоге каждой тройке (L, f, g) , удовлетворяющей условиям а)–в), мы сопоставили некоторую гладкую риманову метрику ds^2 на сфере S^2 , которую мы назовем (L, f, g) -метрикой.

ТЕОРЕМА 13. *Риманова метрика на 2-сфере обладает квадратично интегрируемым геодезическим потоком тогда и только тогда, когда она изометрична некоторой (L, f, g) -метрике при подходящих параметрах L, f, g .*

4.4. Случай проективной плоскости. Опишем класс метрик на $\mathbb{RP}^2$, допускающих линейный интеграл. Для этого представим $\mathbb{RP}^2$ в виде фактор-пространства $S^2/\mathbb{Z}_2$, где сфера S^2 представлена как пополненная комплексная прямая $\mathbb{C} + \{\infty\}$, а инволюция τ имеет вид: $\tau(z) = -1/\bar{z}$. Ясно, что эта инволюция не имеет неподвижных точек на сфере. Рассмотрим на сфере $S^2 = \mathbb{C} + \{\infty\}$ метрику вида

$$ds^2 = f(|z|^2) dz d\bar{z},$$

где $f(t)$ — гладкая положительная функция на полуоси $[0, \infty)$, удовлетворяющая дополнительному условию $f(t) = f(1/t)/t^2$. Оно означает, в действительности, что указанная метрика инвариантна относительно инволюции τ и, следовательно, определяет некоторую метрику на проективной плоскости. Метрики такого вида на проективной плоскости назовем *f-метриками*.

ТЕОРЕМА 14. *Метрика на $\mathbb{RP}^2$ обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком тогда и только тогда, когда она изометрична некоторой f-метрике.*

Опишем теперь метрики квадратично интегрируемых геодезических потоков на $\mathbb{RP}^2$. Выше мы представили сферу как фактор-пространство тора по инволюции σ и ввели класс (L, f, g) -метрик вида

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где функции f и g удовлетворяют условиям а)–в) (см. п. 4.3). Представим $\mathbb{RP}^2$ в виде фактора сферы, задав на ней инволюцию τ , а именно,

$$\tau((x, y), (-x, -y)) = \left(\left(\frac{1}{2} - x, \frac{L}{2} + y \right), \left(x - \frac{1}{2}, -\frac{L}{2} - y \right) \right).$$

Здесь точку сферы мы понимаем как пару эквивалентных точек тора. Легко убедиться, что инволюция τ не имеет неподвижных точек на сфере и меняет ориентацию. Эту инволюцию, впрочем, можно поднять до инволюции на накрывающем торе, коммутирующей с σ . Легко видеть, что $S^2/\tau \approx \mathbb{RP}^2$. Отберем теперь из множества всех (L, f, g) -метрик те, которые инвариантны относительно инволюции τ . Легко видеть, что условие инвариантности метрики относительно инволюции τ означает периодичность функций f и g с периодами $\frac{1}{2}$ и $L/2$, соответственно.

Таким образом, при выполнении этого условия мы получаем корректно определенную метрику на проективной плоскости, которую мы будем называть *(L, f, g)-метрикой*.

ТЕОРЕМА 15. *Риманова метрика на проективной плоскости обладает квадратично интегрируемым геодезическим потоком тогда и только тогда, когда она изометрична некоторой (L, f, g)-метрике на $\mathbb{RP}^2$ при подходящих параметрах L, f, g.*

Мы дали полный список линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков римановых метрик на двумерных поверхностях. Оказалось, что такие метрики задаются некоторым набором параметров. Естественно выяснить, какие наборы параметров отвечают при этом изометричным метрикам? Другими словами,

насколько такое представление римановых метрик однозначно? Ответ был получен В. С. Матвеевым. Выяснилось, что в некотором смысле такое представление “почти однозначно” [14], [36].

§ 5. Метрики Ковалевской и Горячева–Чаплыгина на сфере и гипотеза об интегралах больших степеней

Эти два примера легко строятся при помощи принципа Мопертюи из интегрируемых случаев Ковалевской и Горячева–Чаплыгина в динамике твердого тела. Подробно эта конструкция приведена в [4].

Здесь мы укажем лишь явный вид получающихся в результате римановых метрик на сфере.

Метрика Горячева–Чаплыгина получается ограничением на стандартно вложенную сферу единичного радиуса метрики вида

$$ds^2 = \frac{h - u_1}{4} \cdot \frac{du_1^2 + du_2^2 + 4 du_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2/4}.$$

Ее геодезический поток допускает первый интеграл степени три.

Метрика Ковалевской получается ограничением на стандартно вложенную сферу единичного радиуса метрики вида

$$ds^2 = \frac{h - u_1}{2} \cdot \frac{du_1^2 + du_2^2 + 2 du_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2/2}.$$

Ее геодезический поток допускает первый интеграл степени четыре.

В работах С. А. Чаплыгина [43] и Д. Н. Горячева [44] указано 4-параметрическое семейство потенциалов на сфере, дающих интегрируемые системы с интегралами степени 4. Это семейство включает в себя случай Ковалевской. Из этих систем также можно изготовить римановы метрики на сфере с интегралами степени 4.

Таким образом, на сфере существуют метрики, геодезические потоки которых интегрируемы при помощи интегралов степени 1, 2, 3, 4.

Выше были полностью классифицированы римановы метрики на двумерных поверхностях, геодезические потоки которых интегрируемы при помощи линейных и квадратичных интегралов. Аналогичный вопрос об описании (и классификации) метрик, геодезические потоки которых интегрируемы при помощи полиномов степеней три и выше, остается пока открытым. Здесь, конечно, имеется в виду, что степень таких интегралов непонижаема. Более того, построенные нами выше два примера метрик Горячева–Чаплыгина и Ковалевской на двумерной сфере остаются по существу единственными примерами метрик с полиномиальными интегралами степени, большей двух. На торе такие примеры неизвестны. Более того, многочисленные попытки сконструировать такие метрики на торе пока оканчивались неудачей.

ГИПОТЕЗА А. На двумерном торе не существует римановых метрик, геодезические потоки которых допускают полиномиальные интегралы степени $n > 2$, но не допускают линейных и квадратичных интегралов. Другими словами, приведенный выше список интегрируемых геодезических потоков на торе является полным, т.е. дает полную классификацию потоков, допускающих полиномиальные по импульсам интегралы.

ГИПОТЕЗА Б. *На двумерной сфере не существует римановых метрик, геодезические потоки которых были бы интегрируемы при помощи интегралов степени $n > 4$ и не допускали бы интегралов меньших степеней.*

Гипотезы А и Б сформулированы В. В. Козловым и А. Т. Фоменко.

В пользу гипотезы А имеется довольно много аргументов. Например, см. работы [6], [9], [10]. Подробнее об этой гипотезе см. в обзоре [4] и в книге [8].

§ 6. Лиувиллева классификация линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерных поверхностях

Здесь мы изложим результаты В. В. Калашникова (мл.) [45], Т. З. Нгуен [28], Л. С. Поляковой, Е. Н. Селивановой [42], В. С. Матвеева [14] и А. А. Ошемкова [31], которые описывают топологию лиувиллевых слоений интегрируемых геодезических потоков на двумерных поверхностях. Следуя общей конструкции, предложенной в [32], [33], мы будем формулировать окончательный ответ в терминах так называемых меченых молекул. Эти молекулы могут быть указаны явно для каждого набора параметров (типа f, g, L) (см. [36]). Здесь мы укажем эти молекулы лишь в простейших случаях, когда слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности имеет наименьшее число особенностей. Эти результаты представлены в табл. 1.

КОММЕНТАРИИ К ТАБЛИЦЕ 1.

1) Функции f и g , являющиеся параметрами метрик, имеют наименьшее возможное число критических точек, и эти точки невырождены.

2) В таблице использованы стандартные обозначения для особенностей слоений Лиувилля. Список этих обозначений см., например, в [32], [33].

3) На ребрах молекул на самом деле стоят числовые метки, которые описывают некоторые глобальные свойства слоения (см. определения в [32], [33]). Эти метки полностью указаны в обзоре [36]. Мы не приводим их здесь в полном объеме, чтобы не загромождать таблицу. Однако мы указываем эти метки в тех случаях, когда они необходимы для того, чтобы различить между собой топологически неэквивалентные слоения Лиувилля. Дело в том, что (как видно из таблицы) в некоторых случаях молекулы без меток совпадают, хотя отвечающие им слоения Лиувилля различны. В качестве примера интересно обратить внимание на тот факт, что молекула, отвечающая метрике Ковалевской, и молекула, отвечающая квадратично интегрируемому геодезическому потоку на бутылке Клейна, совпадают, если не учитывать их меток. Это означает, что с локальной точки зрения соответствующие слоения устроены совершенно одинаково. Однако различие меток указывает на то, что их глобальные структуры различны.

4) В случае квазилинейно и квазиквадратично интегрируемых геодезических потоков на бутылке Клейна в молекулах участвует атом K . Соответствующий ему особый слой диффеоморфен бутылке Клейна. Локально в окрестности каждой точки дополнительный интеграл F имеет вид: $F = \tilde{F}^2$, где $\tilde{F}$ — функция без особенностей (в данной точке). Однако глобально квадратный корень не извлекается, поскольку нормальное расслоение к критической бутылке Клейна (в изоэнергетической поверхности Q^3) нетривиально.

Таблица 1

	S^2	$\mathbb{RP}^2$	T^2	K^2
1	f -метрика $A \text{---} A$ $r = \frac{1}{2}$	f -метрика $A \text{---} A$ $r = \frac{1}{4}$	(q, t, L) -метрика $A \text{---} B \text{---} B \text{---} A$	$(L, 0, g)$ -метрика $A \text{---} A^* \text{---} A^* \text{---} A$
2	(L, f, g) -метрика $n = 2$	(L, f, g) -метрика $n = 4$	$(L, f, g, \frac{k}{m})$ -метрика	квазилинейный случай $(L, f, 0)$ -метрика
			глобально лиувиллева метр. $(L, f, g, 0)$ -метрика	(L, f, g) -метрика
3	метрика Горячева– Чаплыгина	?	?	?
4	метрика Ковалевской	?	?	квазиквадратичный случай метрика $ds_{m,n,f}^2$

5) В случае, когда функции f и g имеют произвольное число критических точек, общий вид молекулы остается в принципе тем же самым; только вместо концевых атомов A нужно “вклеить” некоторые графы, характеризующие взаимное расположение критических уровней функций f и g (см. [36], [42], [45]).

6) Знаки вопроса в табл. 1 означают, что примеры соответствующих метрик неизвестны. Более того, согласно сформулированной в предыдущем параграфе гипотезе таких примеров вообще не существует.

§ 7. Траекторная классификация интегрируемых геодезических потоков

Траекторная классификация линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерных поверхностях может быть проведена при помощи классифицирующего инварианта, предложенного Болсиновым и Фоменко [32] и называемого *t-молекулой* интегрируемой системы. Этот инвариант получается из меченой молекулы, возникающей в теории лиувиллевой классификации (см. § 6), добавлением некоторых новых инвариантов, которые описывают поведение траекторий гамильтоновой системы на однопараметрических семействах торов Лиувилля (т.е. на ребрах молекулы) и в окрестностях особых слоев лиувиллева слоения (т.е. на атомах). В случае линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков все необходимые инварианты могут быть выписаны в виде явных формул, зависящих от параметров метрики (см. [36], [46]). Другими словами, для каждой метрики t -молекула соответствующего геодезического потока может быть явно вычислена. Мы не будем здесь приводить формулы для общего случая и ограничимся лишь некоторыми наиболее интересными примерами, демонстрирующими природу траекторных инвариантов.

Рассмотрим некоторое однопараметрическое семейство торов Лиувилля в трехмерной изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = 1\}$. Хорошо известно, что динамика гамильтоновой системы на фиксированном торе Лиувилля с точностью до траекторной эквивалентности полностью характеризуется числом вращения. В случае однопараметрического семейства торов число вращения ρ , очевидно, зависит от параметра семейства t и, следовательно, вместо числа вращения следует рассматривать так называемую функцию вращения $\rho(t)$. Впрочем, траекторным инвариантом является не сама эта функция, а ее класс сопряженности (две функции $\rho(t)$ и $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ называются *сопряженными*, если существует замена аргумента $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$ такая, что $\tilde{\rho}(\tilde{t}(t)) = \rho(t)$). Это связано с тем, что параметр семейства выбирается неоднозначно.

Можно показать, что в случае простейших бифуркаций торов Лиувилля (т.е. атомов типа A , A^* и B) никаких атомных инвариантов, описывающих поведение траекторий вблизи особых слоев, не возникает. Другими словами, функции вращения полностью определяют систему с точностью до траекторной эквивалентности. В результате мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 16. Пусть ds^2 и ds'^2 – две глобально лиувиллевы метрики на торе. Предположим, что бифуркации торов Лиувилля для соответствующих геодезических потоков v и v' имеют простейший тип (либо A , либо B).

Тогда v и v' топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда эти потоки Лиувиллево эквивалентны и, кроме того, их функции вращения на соответствующих друг другу однопараметрических семействах торов Лиувилля топологически сопряжены.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное утверждение верно и в гладком случае.

Пользуясь этой теоремой, легко построить примеры топологически траекторно эквивалентных геодезических потоков на торе. Рассмотрим, например, две глобально Лиувиллевы метрики на торе вида

$$ds^2 = (f(x) + g(y))^2(dx^2 + dy^2) \quad \text{и} \quad d\tilde{s}^2 = (\tilde{f}(x) + \tilde{g}(y))^2(dx^2 + dy^2),$$

где периодические функции f, g и $\tilde{f}, \tilde{g}$ имеют ровно по одному минимуму и максимуму на своей области определения. Тогда соответствующие молекулы W^* и $\widetilde{W}^*$ имеют простейший вид, показанный в табл. 1.

Предположим для простоты, что функции вращения ρ и $\tilde{\rho}$ монотонны на каждом ребре. Можно проверить, что тогда на каждом из четырех ребер, соединяющих между собой атомы B , функция вращения ρ изменяется от нуля до плюс бесконечности, поэтому никакого вклада в траекторные инварианты они не дают. На ребрах между атомами A и B функция вращения устроена следующим образом. Ее предел на седловом атоме B равен либо нулю, либо бесконечности и поэтому опять-таки никакого вклада в инварианты не дает. Но предел функции вращения при приближении к атому A (т.е. при стремлении тора к устойчивой замкнутой геодезической) уже является конечным числом – нетривиальным инвариантом геодезического потока ds^2 . При этом предел функции вращения на обоих верхних атомах A – один и тот же. Обозначим этот предел через p . Аналогичный предел функции вращения на нижних атомах A мы обозначим через q .

Для потока $d\tilde{s}^2$ аналогичные пределы мы обозначим через $\tilde{p}, \tilde{q}$. Следовательно, у каждого потока появляется пара числовых траекторных инвариантов, а именно, (p, q) и, соответственно, $(\tilde{p}, \tilde{q})$. Таким образом, в рассматриваемом случае потоки v и $\tilde{v}$ топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают либо пары чисел (p, q) и $(\tilde{p}, \tilde{q})$, либо пары чисел (p, q) и $(\tilde{q}^{-1}, \tilde{p}^{-1})$. Вторая возможность связана с тем, что молекулы, отвечающие этим потокам, допускают нетривиальную симметрию, которая эквивалентна перестановке переменных x и y . Это приводит к тому, что меняются местами ребра молекулы, а функция вращения меняется по правилу $\rho \mapsto 1/\rho$.

Этот результат можно переформулировать в виде следующего интересного утверждения. В указанных выше предположениях (монотонность функций вращения и простейший тип молекулы) геодезический поток имеет ровно две устойчивые замкнутые геодезические, отвечающие двум парам атомов A .

Рассмотрим число вращения ρ на торе Лиувилля, близком к замкнутой геодезической γ . Пусть ρ_0 – предел числа вращения, когда тор стягивается на геодезическую. Замкнутая геодезическая γ характеризуется также своим индексом $\text{ind}(\gamma)$ (иногда называемым *индексом Морса*). Это – число точек, сопряженных начальной точке P вдоль данной геодезической, причем каждая точка учитывается ровно один раз. При этом если начальная точка P сопряжена самой себе вдоль данной геодезической, то она тоже учитывается.

Наконец, замкнутая геодезическая характеризуется еще одним числом $\nu = \exp(2\pi i \rho)$, называемым *мультипликатором* (это – собственное число линеаризации отображения Пуанкаре). Оказывается, имеют место следующие формулы:

$$\text{ind}(\gamma) = [2\rho_0]$$

(т.е. целая часть $2\rho_0$),

$$\nu = \exp(2\pi i \rho_0).$$

Это утверждение полезно тем, что позволяет сформулировать простой критерий траекторной эквивалентности для простейших интегрируемых геодезических потоков на торе.

СЛЕДСТВИЕ. *Рассмотрим два квадратично интегрируемых геодезических потока на торе. Предположим, что соответствующие молекулы имеют простейший вид (см. табл. 1), а функции вращения монотонны. Тогда геодезические потоки являются топологически траекторно эквивалентными в том и только том случае, когда соответствующие замкнутые устойчивые геодезические имеют одинаковые индексы Морса и одинаковые мультипликаторы.*

Аналогичный результат можно сформулировать и в случае двумерной сферы.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть ds^2 и $d\tilde{s}^2$ – две (L, f, g) -метрики на сфере (отвечающие различным наборам параметров). Предположим, что молекулы этих метрик являются простыми, т.е. все атомы, входящие в их состав, кроме центрального атома C_2 , являются простыми (т.е. либо A , либо B). Тогда их геодезические потоки v и $\tilde{v}$ топологически траекторно эквивалентны в том и только том случае, когда они лиувиллево эквивалентны и, кроме того, их функции вращения на соответствующих друг другу однопараметрических семействах торов Лиувилля топологически сопряжены.*

Здесь, как и в случае тора, можно доказать следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. *Рассмотрим два квадратично интегрируемых геодезических потока на сфере. Предположим, что соответствующие молекулы W и W' имеют простейший вид (см. табл. 1), а функции вращения монотонны. Тогда эти геодезические потоки топологически траекторно эквивалентны в том и только том случае, когда соответствующие замкнутые устойчивые геодезические имеют одинаковые индексы Морса и одинаковые мультипликаторы.*

Примером геодезических потоков, удовлетворяющих условиям этого утверждения, являются геодезические потоки на эллипсоиде и сфере Пуассона. Используя следствие теоремы 17, легко проверить, что эти потоки при подходящем выборе параметров топологически траекторно эквивалентны. Однако они никогда не эквивалентны гладко.

Рассмотрим теперь все римановы метрики, геодезические потоки которых допускают нетривиальный линейный или квадратичный интеграл, и разобьем это множество на классы, включая в один класс те метрики, геодезические потоки которых гладко траекторно эквивалентны (на изоэнергетических поверхностях).

Следующая теорема Селивановой показывает, что эти классы нетривиальны. Другими словами, для каждой метрики рассматриваемого класса существует довольно много других неизометричных ей метрик с траекторно эквивалентными геодезическими потоками.

ТЕОРЕМА 18 (Е. Н. Селиванова [46]). *Пусть ds^2 – гладкая риманова метрика на сфере или торе, геодезический поток которой допускает нетривиальный линейный или квадратичный боттовский интеграл. Пусть ds^2 , кроме того, отлична от плоской метрики на торе. Тогда на этой поверхности существует семейство римановых метрик, зависящее от функционального параметра, геодезические потоки которых гладко траекторно эквивалентны геодезическому потоку исходной метрики ds^2 . При этом все метрики из семейства попарно неизометричны.*

Идея доказательства состоит в том, чтобы предъявить такие возмущения метрики, при которых функции вращения (и другие траекторные инварианты) не меняются. Именно это будет гарантировать сохранение траекторного типа потока.

Эта теорема имеет интересные следствия, если ее применить к случаю стандартной метрики постоянной кривизны на двумерной сфере. А именно, мы получаем богатое семейство метрик, геодезические потоки которых траекторно эквивалентны геодезическому потоку метрики постоянной кривизны. В частности, все геодезические замкнуты и, как несложно показать, имеют одинаковую длину. Такие метрики называются обычно *метриками Колля*.

Для случая метрик вращения (т.е. допускающих изометричное действие окружности) этот факт хорошо известен (см., например, [47]). Тем не менее, нам представляется полезным посмотреть на него в контексте теории интегрируемых геодезических потоков.

Рассмотрим сферу постоянной кривизны как поверхность вращения. Тогда ее метрика запишется в стандартном виде

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Геодезический поток допускает линейный интеграл $F = p_\varphi$. Молекула имеет простейший вид $A-A$, т.е. имеется только одно однопараметрическое семейство торов Лиувилля, а функция вращения на этом семействе имеет вид:

$$\rho_0(F) = \frac{1}{\pi} \int_x^{\pi-x} \frac{F d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - F^2}}.$$

Здесь $\sin x = F$.

Легко проверяется, что $\rho_0(F) \equiv 1$, что и является условием замкнутости всех геодезических. Следующее утверждение показывает, как следует возмутить метрику (в классе метрик вращения), чтобы это условие сохранилось.

ТЕОРЕМА 19 [47]. *Метрика вращения ds^2 на двумерной сфере является метрикой Колля тогда и только тогда, когда она может быть записана в виде*

$$ds_h^2 = (1 + h(\cos \theta))^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

где h – нечетная функция.

Более интересную серию метрик Цолля можно получить, если рассмотреть метрику постоянной кривизны на сфере как (L, f, g) -метрику. В этом случае возмущение стандартной метрики нужно проводить другим способом.

ТЕОРЕМА 20. *Существует семейство попарно неизометричных C^∞ -гладких метрик $ds_{\alpha, \beta}^2$ на двумерной сфере, зависящее от двух функциональных параметров α и β , и таких, что*

- 1) *геодезические потоки этих метрик квадратично интегрируемы;*
- 2) *все геодезические этих метрик замкнуты и имеют одинаковую длину;*
- 3) *метрики $ds_{\alpha, \beta}^2$ задаются явными формулами.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Начнем с того, что представим метрику ds_0^2 постоянной кривизны на двумерной сфере в лиувиллевой форме. Это легко можно сделать, используя сферо-конические координаты ν_2, ν_3 :

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(\nu_2 - \nu_3) \left(-\frac{d\nu_2^2}{P(\nu_2)} + \frac{d\nu_3^2}{P(\nu_3)} \right),$$

где $P(\nu) = (a + \nu)(b + \nu)(c + \nu)$.

Прокомментируем эту формулу. В действительности ее можно рассматривать как четыре отдельные формулы на четырех областях вида

$$\begin{aligned} U_{++} &= \{x > 0, z > 0\}, & U_{-+} &= \{x < 0, z > 0\}, \\ U_{+-} &= \{x > 0, z < 0\}, & U_{--} &= \{x < 0, z < 0\}. \end{aligned}$$

Важно, что на каждой из четырех областей функции $P(\nu_2)$ и $P(\nu_3)$ можно задать независимо друг от друга (своей формулой), лишь бы они хорошо (т.е. гладко) стыковались на границах указанных областей. В исходной записи метрики сферы все эти четыре функции задаются одной и той же формулой. Однако для интегрируемости геодезического потока это совершенно необязательно. Кроме того, две функции $P(\nu_2)$ и $P(\nu_3)$ задаются одной и той же функцией P (только от разных аргументов). Это тоже необязательно. Можно взять две разные функции, например, Q и R . Перечисленные наблюдения открывают путь для построения подходящих возмущений стандартной метрики сферы так, чтобы функция вращения при этом не менялась. Для этого на каждой из четырех областей зададим метрику следующим образом:

$$ds^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}(\nu_2 - \nu_3) \left(-\frac{d\nu_2^2}{Q_+(\nu_2)} + \frac{d\nu_3^2}{R_+(\nu_3)} \right) & \text{на области } U_{++}, \\ \frac{1}{4}(\nu_2 - \nu_3) \left(-\frac{d\nu_2^2}{Q_+(\nu_2)} + \frac{d\nu_3^2}{R_-(\nu_3)} \right) & \text{на области } U_{+-}, \\ \frac{1}{4}(\nu_2 - \nu_3) \left(-\frac{d\nu_2^2}{Q_-(\nu_2)} + \frac{d\nu_3^2}{R_+(\nu_3)} \right) & \text{на области } U_{-+}, \\ \frac{1}{4}(\nu_2 - \nu_3) \left(-\frac{d\nu_2^2}{Q_-(\nu_2)} + \frac{d\nu_3^2}{R_-(\nu_3)} \right) & \text{на области } U_{--}. \end{cases}$$

Теперь можно явно выписать формулу для функции вращения геодезического потока такой метрики и посмотреть, при каких функциях $R_{\pm}$ и $Q_{\pm}$ она совпадает с функцией вращения для стандартной метрики ds_0^2 , т.е. тождественно равна единице. Оказывается, достаточно положить

$$\begin{aligned} Q_+(\nu_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{-P(\nu_2)}} + \alpha(\nu_2) \right)^{-2}, \\ Q_-(\nu_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{-P(\nu_2)}} - \alpha(\nu_2) \right)^{-2}, \\ R_+(\nu_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{P(\nu_3)}} + \beta(\nu_3) \right)^{-2}, \\ R_-(\nu_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{P(\nu_3)}} - \beta(\nu_3) \right)^{-2}. \end{aligned}$$

В этом представлении α и β – почти произвольные гладкие функции. Нужно лишь потребовать, чтобы их добавление не меняло асимптотики функции $P(\nu)$ в точках $\nu = -a, -b, -c$ и чтобы выражение в скобках оставалось всегда положительным. В остальном функции α и β произвольны. При этом описанные нами возмущения даже не обязаны быть малыми.

Стоит подчеркнуть, что построенные нами возмущения $ds_{\alpha,\beta}^2$ являются гладкими, но не аналитическими. Причем описанным методом сделать возмущения аналитическими нельзя принципиально.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несколько в другой форме такие метрики были описаны в работе К. Киохары [22]. Более того, в [23] он обобщил эту конструкцию на случай произвольной размерности. С общей точки зрения метрики Цолля с квадратично интегрируемыми геодезическими потоками были охарактеризованы в работе Колокольцова [12]. В нашем изложении мы придерживались конструкции, предложенной Селивановой.

Отметим, что геодезические потоки метрик с замкнутыми геодезическими, конечно, интегрируемы. Было бы очень интересно понять характер возникающих здесь интегралов. Например, являются ли они полиномами по импульсам? Если – да, то какую они могут иметь степень? Если же – нет, то как вообще выглядят такие интегралы? На самом деле сегодня неизвестно ни одного явного примера интегралов геодезических потоков римановых метрик, которые не были бы полиномами.

§ 8. Геодезическая эквивалентность

Простейшим примером геодезически эквивалентных метрик являются метрики, отличающиеся друг от друга умножением на константу. Будем далее говорить, что две метрики G и $\hat{G}$ *нетривиально геодезически эквивалентны*, если они геодезически эквивалентны, но не пропорциональны, т.е. не получаются друг из друга умножением на постоянную.

Пусть G и $\hat{G}$ – геодезически эквивалентные метрики. Здесь для простоты мы будем предполагать, что они заданы на одном и том же многообразии M^2 и их

геодезические как кривые на M^2 совпадают. Легко видеть, что тогда их геодезические потоки гладко траекторно эквивалентны. Траекторный диффеоморфизм между изоэнергетическими поверхностями $Q \rightarrow \hat{Q}$ задается при этом формулой

$$(x, p) \mapsto \left(x, \frac{|p|_G}{|\hat{G}G^{-1}p|_{\hat{G}}} \hat{G}G^{-1}p \right).$$

Здесь (x, p) – координаты в кокасательном расслоении, $x \in M^2$, $p \in T_x^*M^2$, а $|p|_{\hat{G}}$ и $|p|_G$ – нормы ковектора p в смысле метрик $\hat{G}$ и G .

Отметим, однако, что не любой траекторный изоморфизм двух геодезических потоков индуцируется геодезической эквивалентностью. Необходимым условием является его коммутирование с естественной проекцией $T^*M \rightarrow M$, задаваемой формулой $(x, p) \mapsto x$.

Оказывается, классическая теорема Дини является отражением следующего более общего факта, замеченного В. С. Матвеевым и П. И. Топаловым.

Рассмотрим две гамильтоновы системы v и $\hat{v}$ с двумя степенями свободы. Ограничим их на изоэнергетические поверхности Q^3 и $\hat{Q}^3$, соответственно. Предположим, что ограничения систем v и $\hat{v}$ на Q^3 и $\hat{Q}^3$ гладко траекторно эквивалентны. Напомним, что под гладкой траекторной эквивалентностью понимается существование диффеоморфизма $\xi: Q^3 \rightarrow \hat{Q}^3$, переводящего траектории первой системы в траектории второй системы, причем с сохранением их ориентации. Тогда по такому диффеоморфизму ξ канонически строятся дополнительные интегралы обеих гамильтоновых систем. Идея этого построения состоит в следующем. Рассмотрим ограничения соответствующих симплектических 2-форм ω и $\hat{\omega}$ на изоэнергетические 3-поверхности Q и $\hat{Q}$. С помощью диффеоморфизма ξ перенесем ограничение формы $\hat{\omega}$ с многообразия $\hat{Q}$ на Q . Очевидно, что получившаяся таким образом 2-форма $\xi^*\hat{\omega}$ на Q обладает следующими свойствами:

- 1) она замкнута;
- 2) ядро формы совпадает с гамильтоновым векторным полем v на Q .

Легко проверяется, что гамильтоново поле v сохраняет форму $\xi^*\hat{\omega}$ на Q , т.е. $L_v \xi^*\hat{\omega} = 0$, где L_v – производная Ли. С другой стороны, $L_v \omega = 0$ в силу гамильтоновости поля v на Q . Заметим теперь, что формы ω и $\xi^*\hat{\omega}$ имеют одинаковое ядро на трехмерном изоэнергетическом многообразии Q и поэтому пропорциональны, т.е. $\xi^*\hat{\omega} = f\omega$, где f – некоторая гладкая скалярная функция на Q . Поле v сохраняет как форму $f\omega = \xi^*\hat{\omega}$, так и форму ω , а потому сохраняет и функцию f . Это означает, что функция f является первым интегралом потока v на изоэнергетической 3-поверхности Q .

Конечно, этот интеграл может оказаться равным константе. Так и бывает, если, например, траекторная эквивалентность двух потоков была получена в результате применения принципа Мопертюи. Но в некоторых случаях (в частности, в теореме Дини) из существования траекторной эквивалентности описанным способом можно извлечь нетривиальный интеграл гамильтоновой системы v , который оказывается квадратичным.

ТЕОРЕМА 21 (Дини). а) Пусть римановы метрики G и $\hat{G}$ на двумерной поверхности M нетривиально геодезически эквивалентны. Тогда геодезические

потоки обеих метрик квадратично интегрируемы. Причем нетривиальный квадратичный интеграл F геодезического потока в метрике G записывается (как функция на кокасательном расслоении) в виде

$$F(x, p) = \frac{(\det G)^{2/3}}{(\det \hat{G})^{2/3}} \langle G^{-1} \hat{G} G^{-1} p, p \rangle.$$

б) Обратно, пусть геодезический поток метрики G на двумерной поверхности M интегрируем при помощи некоторого квадратичного интеграла $F(x, p) = \langle Fp, p \rangle$. Пусть этот интеграл положительно определенный (этого всегда можно добиться путем добавления к F гамильтониана H с некоторым коэффициентом). Утверждается, что исходная метрика G геодезически эквивалентна новой метрике $\hat{G}$, задаваемой на касательном расслоении к M следующей матрицей (тензором):

$$\hat{G} = (\det G)^{-2} (\det F)^{-2} G F G.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Квадратично интегрируемые метрики, и только они, допускают в двумерном случае нетривиальные геодезические эквивалентности.*

Отметим, что классическая теорема Дини обычно рассматривается как локальное утверждение. Мы же ее сформулировали как глобальный результат, относящийся, в том числе, и к замкнутым двумерным поверхностям. Глобальность этого варианта теоремы Дини заключается в том, что формула для квадратичного интеграла F однозначно и канонически выписывается в целом, т.е. сразу на всей двумерной поверхности M . Это позволяет сформулировать несколько интересных следствий из глобальной теоремы Дини.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Не существует нетривиально геодезически эквивалентных римановых метрик на двумерных замкнутых поверхностях рода, большего единицы (т.е. отличных от сферы, проективной плоскости, тора, бутылки Клейна).*

Доказательство следует из теоремы Дини и того факта, что на поверхностях рода, большего чем единица, не существует квадратично интегрируемых геодезических потоков римановых метрик.

Отметим, что на двумерных поверхностях (в том числе рода, большего единицы) существуют локально лиувиллевы метрики с неинтегрируемыми геодезическими потоками. Под локальной лиувиллевозостью мы понимаем существование локальных лиувиллевых координат в окрестности каждой точки поверхности. Из локальной лиувиллевозости следует, что в окрестности каждой точки геодезический поток обладает квадратичным интегралом. Однако эти интегралы могут не сшиваться в глобальный квадратичный интеграл. Примером могут служить метрики постоянной отрицательной кривизны на сферах с ручками, являющиеся локально лиувиллевыми, но неинтегрируемыми по Лиувиллю. Таким образом, сформулированное выше следствие вытекает лишь из глобального варианта теоремы Дини.

Вторая часть глобальной теоремы Дини позволяет построить примеры нетривиально геодезически эквивалентных метрик на сфере и на торе. Более того, все такие метрики можно классифицировать, используя единственность квадратичного интеграла F . Единственным исключением будет метрика постоянной кривизны на сфере, для которой существуют два независимых квадратичных интеграла. В этом случае справедлив следующий классический результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любая риманова метрика, нетривиально геодезически эквивалентная метрике постоянной кривизны, сама является метрикой постоянной кривизны.*

Список литературы

1. Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н. О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики с нетривиальным квадратичным интегралом // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 643–652.
2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
3. Богоявленский О. И. Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 899–915.
4. Болсинов А. В., Козлов В. В., Фоменко А. Т. Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 3–32.
5. Браилов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 5. С. 1043–1046.
6. Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 4. С. 64–65.
7. Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
8. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
9. Козлов В. В., Денисова Н. В. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на торе // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 12. С. 49–64.
10. Козлов В. В., Трещев Д. В. Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 1. С. 119–138.
11. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
12. Колокольцов В. Н. Новые примеры многообразий с замкнутыми геодезическими // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 4. С. 80–82.
13. Матвеев В. С. Пример геодезического потока на бутылке Клейна, интегрируемого полиномом по импульсам четвертой степени // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 4. С. 47–48.
14. Матвеев В. С. Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе и бутылке Клейна // Рег. и хаотич. динамика. 1997. Т. 2. № 1. С. 96–102.
15. Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 2. С. 257–262.
16. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.
17. Стёпин А. М. Динамические системы на однородных пространствах полупростых групп Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 5. С. 1091–1107.
18. Тайманов И. А. Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 429–435.

19. *Тайманов И. А.* О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №2. С. 283–284.
20. *Adler M., van Moerbeke P.* The Kowalewski and Henon–Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$. A two-dimensional family of Lax pairs // Comm. Meth. Phys. 1988. V. 113. №4. P. 659–700.
21. *Darboux G.* Lecons sur la théorie generale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal. Paris: Gautier, Villar, 1891.
22. *Kiyohara K.* Two classes of Riemannian manifolds whose geodesic flows are integrable // Mem. Amer. Math. Soc. 1997. V. 130. №619. P. 1–143.
23. *Kiyohara K.* Compact Liouville surfaces // J. Math. Soc. Japan. 1991. V. 43. P. 555–591.
24. *Paternain G. P.* On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992. V. 12. P. 109–121.
25. *Paternain G. P., Spatzier R. J.* New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows // Adv. Math. 1994. V. 108. №2. P. 346–366.
26. *Spatzier R. J.* Riemannian Manifolds with Completely Integrable Geodesic Flows // Proc. Sympos. Pure Math. 1993. V. 54. №3. P. 599–608.
27. *Thimm A.* Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. №4. P. 495–517.
28. *Нгуен Т. З.* Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере // Труды МИРАН. 1994. Т. 205. С. 73–91.
29. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
30. *Knörrer H.* Geodesics of the ellipsoid // Invent. Math. 1980. V. 39. P. 119–143.
31. *Oshemkov A. A.* Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations // Adv. Soviet Math. 1991. V. 6. P. 67–146.
32. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
33. *Fomenko A. T.* Topological Classification of All Integrable Hamiltonian Differential Equations of General Type with Two Degrees of Freedom // The Geometry of Hamiltonian Systems. Proc. of a Workshop Held June 5–16, 1989. Berkeley, USA: Springer-Verlag, 1991. P. 131–339.
34. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Матем. заметки. 1988. Т. 43. №5. С. 663–671.
35. *Dini U.* Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresetazioni geografice di una superficie su di un'altra // Ann. di Math. Ser. 2. 1869. V. 3. P. 269–293.
36. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях. М.: Изд-во УРСС (в печати).
37. *Тен В. В.* Локальные интегралы геодезических потоков // Рег. и хаотич. динамика. 1997. Т. 2. №2. С. 87–89.
38. *Calogero F.* Solution of the one-dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419–436.
39. *Moser J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Adv. Math. 1975. V. 16. P. 197–220.
40. *Toda M.* Theory of nonlinear lattices. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
41. *Babenko I. K.* Les flots géodésiques quadratiquement intégrables sur les surfaces fermées et les structures complexes correspondantes // Preprint, Inst. de Recherche Math. Avancée.
42. *Нгуен Т. З., Полякова Л. С., Селиванова Е. Н.* Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых римановых многообразиях // Функц. анализ 1993. Т. 27. №3. С. 42–56.
43. *Чаплыгин С. А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Собрание сочинений. Т. 1. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 337–346.
44. *Горячев Д. Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. Унив. Изв. 1916. Т. 3. С. 1–15.

- 45. *Калашиников В. В. (мл.)*. Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе // УМН. 1995. Т. 50. № 2. С. 201–202.
- 46. *Селиванова Е. Н.* Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 141–160.
- 47. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.06.1998