Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 9, 85–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:00:41

УДК 517.518.86

А. И. Козко

Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой

Изучаются неравенства Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа соответственно в пространствах $L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)$ и $L_{p_1, p_2}(\mathbb{R}^d)$ с несимметричной нормой. В работе показано, что при любых $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (0, \infty]$ для тригонометрического полинома $T_{\mathbf{n}}$ степени n_j по переменной x_j выполняется неравенство

$$\|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{q_1, q_2}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{p_1, p_2, q_1, q_2, d} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\psi(p_1, p_2, q_1, q_2, d)} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)},$$

где $C_{p_1, p_2, q_1, q_2, d}$ – константа, не зависящая от $\mathbf{n}$, функция ψ указана в явном виде. Приведены примеры полиномов, показывающие, что данная оценка не улучшаема в смысле порядка. Аналогичный результат доказан для целых функций экспоненциального типа.

Библиография: 12 названий.

1. Введение

Пусть d – натуральное число, $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$ – d -мерный тор. Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, множество тригонометрических полиномов порядков $n_1, \dots, n_d$ соответственно по переменным $x_1, \dots, x_d$, т.е. множество функций $T_{\mathbf{n}}$ вида

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= T_{n_1, \dots, n_d}(x_1, \dots, x_d) \\ &= \sum_{\substack{-n_l \leq k_l \leq n_l \\ l=1, \dots, d}} c_{k_1, \dots, k_d} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_d x_d)} = \sum_{-\mathbf{n} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $n_1, \dots, n_d$ – натуральные числа, $x_1, \dots, x_d$ – действительные переменные и $c_{\mathbf{k}}$ – постоянные коэффициенты, вообще говоря, комплексные, зависящие от целых $k_1, \dots, k_d$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только действительные полиномы, поэтому всегда будем считать, что $c_{-\mathbf{k}} = \bar{c}_{\mathbf{k}}$. Рассмотрим пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$,

$0 < p < \infty$, с квазинормой $\|x\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left\{ \int_{\mathbb{T}^d} |x(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right\}^{1/p}$ (в случае $1 \leq p < \infty$ $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}$ – просто норма) и $L_{\infty}(\mathbb{T}^d)$ с нормой $\|x\|_{L_{\infty}(\mathbb{T}^d)} = \sup \operatorname{vrai}_{\mathbf{t} \in \mathbb{T}^d} |x(\mathbf{t})|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

Для тригонометрических полиномов степени n_j по переменной x_j С. М. Никольский (см. [1]) доказал неравенство

$$\|T_{n_1, \dots, n_d}\|_{L_q(\mathbb{T}^d)} \leq 3^d \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_{n_1, \dots, n_d}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad (1.2)$$

и применил его для получения теорем вложения. В случае $d = 1$, $q = \infty$, $p > 0$ такое неравенство доказал Джексон (см. [2]). Для $0 < p, q \leq \infty$ в случае $d = 1$ неравенство вида (1.2) можно легко получить как следствие результата Джексона, что заметил В. В. Арестов (см. [3]). Неравенство (1.2) точное в смысле порядка, что проверяется на полиноме $F_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d F_{n_j}(x_j)$, где

$$F_{n_j}(x_j) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_j} \left(1 - \frac{k}{n_j + 1} \right) \cos kx_j = \frac{\sin^2 \frac{n_j + 1}{2} x_j}{2(n_j + 1) \sin^2 \frac{x_j}{2}}$$

— ядро Фейера степени n_j по переменной x_j .

Пусть $f^+(\mathbf{t}) = \max\{f(\mathbf{t}), 0\}$, $f^-(\mathbf{t}) = \max\{-f(\mathbf{t}), 0\}$, $\alpha_+ = \max\{\alpha, 0\}$. Будем писать $f \in L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)$, если $f^+ \in L_{p_1}(\mathbb{T}^d)$ и $f^- \in L_{p_2}(\mathbb{T}^d)$. Для таких функций положим

$$\|f\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)} = \|f^+\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^d)} + \|f^-\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}, \quad 0 < p_1, p_2 \leq \infty.$$

Неотрицательный функционал $\|\cdot\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}: L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\|f\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)} = 0 \iff f = 0$ п.в., $0 < p_1, p_2 \leq \infty$;
- 2) $\|\alpha f\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)} = \alpha \|f\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}$, $f \in L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < p_1, p_2 \leq \infty$;
- 3) $\|f + g\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)} \leq \|f\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)} + \|g\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}$, $f, g \in L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$.

Мы будем называть этот функционал *несимметричной нормой*.

Пусть f и g — функции натурального параметра. Будем писать $f \asymp g$, если существуют константы $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от $\mathbf{n}$, такие, что $C_1 |f(\mathbf{n})| \leq |g(\mathbf{n})| \leq C_2 |f(\mathbf{n})|$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ и p_1, p_2, q_1, q_2 — произвольные числа из $(0, \infty]$. Тогда

$$\sup_{\substack{T_{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}} \\ T_{\mathbf{n}} \not\equiv 0}} \frac{\|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{q_1, q_2}(\mathbb{T}^d)}}{\|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\psi(p_1, p_2, q_1, q_2, d)}, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} & \psi(p_1, p_2, q_1, q_2, d) \\ &= \max \left\{ \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)_+ \max \left(1, \frac{2 + \frac{d}{p_2}}{2 + \frac{d}{p_1}} \right), \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right)_+ \max \left(1, \frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Соотношение порядка в (1.3) и везде далее понимается в том смысле, что при фиксированных $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (0, \infty]$, $d \in \mathbb{N}$ найдутся константы, не зависящие от $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, такие, что выполняются соответствующие оценки сверху и снизу.

Для $d = 1$ такие неравенства были получены в [4], [5]. В отличие от симметричного случая в несимметричном случае в (1.3) появляется зависимость показателя ψ от размерности d . Оценки снизу в (1.3) будут получены с помощью полиномов вида

$$\tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{t}) = \left(\sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{t_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right) \prod_{j=1}^d \frac{J_{n_j+k,k}(t_j)}{(\cos t_j - \cos(\frac{2\pi}{[n_j/k]+2}))^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \quad (1.4)$$

где $J_{n,k}(t) = \left(\frac{\sin \frac{[n/k]+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2k}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $\delta_l \in \mathbb{R}_+$, $l = 1, \dots, d$. Легко видеть, что $J_{n,k}(t)$ – тригонометрический полином степени не выше чем n и $\tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{t}) \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}}$.

Из (1.3) и соотношения $\|f\|_{L_{p,p}(\mathbb{T}^d)} \asymp \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}$, $0 < p \leq \infty$, немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $p, q \in (0, \infty]$. Тогда

$$\sup_{\substack{\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{n}} \neq 0}} \frac{\|T_{\mathbf{n}}\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}}{\|T_{\mathbf{n}}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}. \quad (1.5)$$

Экстремальными в этом соотношении будут полиномы $\prod_{j=1}^d J_{n_j,k}(t_j)$.

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$. Функцию $g = g_{\nu}(\mathbf{z}) = g_{\nu_1, \dots, \nu_d}(z_1, \dots, z_d)$ назовем *целой функцией экспоненциального типа ν* , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) g есть целая функция по всем переменным, т.е. g разлагается в степенной ряд

$$g(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} a_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \sum_{\substack{k_l \geq 0 \\ l=1, \dots, d}} a_{k_1, \dots, k_d} z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}$$

с постоянными коэффициентами $a_{\mathbf{k}}$, абсолютно сходящийся для всех комплексных $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)$;

- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $A_{\varepsilon} > 0$ такая, что для любого $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ выполняется неравенство $|g(\mathbf{z})| \leq A_{\varepsilon} e^{\sum_{j=1}^d (\nu_j + \varepsilon) |z_j|}$.

Здесь, как и в периодическом случае, мы будем рассматривать только действительнозначные функции. Класс целых функций экспоненциального типа ν обозначим через $\mathcal{M}_{\nu}$. В работе также будет доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\nu \in \mathbb{R}_+^d$ и p_1, p_2, q_1, q_2 – произвольные числа из $(0, \infty]$ такие, что $p_1 \leq q_1$, $p_2 \leq q_2$. Функция $g_{\nu} \in \mathcal{M}_{\nu}$ и $g_{\nu} \in L_{p_1, p_2}(\mathbb{R}^d)$. Тогда справедливо неулучшаемое по порядку неравенство

$$\|g_{\nu}\|_{L_{q_1, q_2}(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\prod_{j=1}^d \nu_j \right)^{\psi(p_1, p_2, q_1, q_2, d)} \|g_{\nu}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.6)$$

где функция $\psi(p_1, p_2, q_1, q_2, d)$ та же, что и в (1.3), C – константа, не зависящая от ν .

Здесь, как и в периодическом случае, мы сформулируем следствие для симметричной нормы в виде замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\nu \in \mathbb{R}_+^d$ и p, q – произвольные числа из $(0, \infty]$ такие, что $p \leq q$. Функция $g_\nu \in \mathcal{M}_\nu$ и $g_\nu \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Тогда справедливо неухудшаемое по порядку неравенство

$$\|g_\nu\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\prod_{j=1}^d \nu_j \right)^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|g_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^d)},$$

где C – константа, не зависящая от ν .

Сначала, в п. 2, мы докажем оценку сверху в (1.3) с помощью соответствующей леммы сравнения. Заметим, что с помощью теорем сравнения многие авторы, например А. Н. Колмогоров (см. [6]), С. Б. Стечкин (см. [7]), Н. П. Корнейчук (см. [8]), получали различные неравенства с точными константами. Однако константа, которая получена в данной работе при оценке сверху в (1.3), завышена, и вопрос о точных константах в этом случае остается открытым. Затем, в п. 3, мы исследуем свойства полиномов (1.4). В п. 4 мы завершим доказательство теоремы 1. И в последнем пункте мы обсудим теорему 2.

2. Оценки сверху в периодическом случае

Докажем оценку сверху в (1.3). Для доказательства этого факта нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ и $a \in [0, \pi]$. Тогда

$$\text{mes} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : \sum_{i=1}^d |x_i n_i| \leq a \right\} = \frac{(2a)^d}{d! \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы равенства

$$\int_{\sum |x_i n_i| \leq a} d\mathbf{x} = 2^d \int_{\sum_{x_i \geq 0} |x_i n_i| \leq a} d\mathbf{x} = 2^d \frac{1}{d!} \frac{a^d}{\prod_{j=1}^d n_j};$$

первое из этих равенств очевидно, а второе хорошо известно (см. [9; 4.632(1)]), и на его доказательстве мы не останавливаемся. Лемма доказана.

Положим $M^+ = \|T_{\mathbf{n}}^+\|_\infty$, $M^- = \|T_{\mathbf{n}}^-\|_\infty$, $M = \|T_{\mathbf{n}}\|_\infty$. Следующая лемма (лемма сравнения) является центральной в данном пункте.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $T_{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ и точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0) \in \mathbb{T}^d$ такая, что $T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^0) = \|T_{\mathbf{n}}^+\|_\infty = M^+$. Тогда

(а) если $M^+ = M = \|T_{\mathbf{n}}\|_\infty$, то для точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ имеет место утверждение

$$\left(\sum_{i=1}^d |(x_i - x_i^0) n_i| \leq \frac{1}{2} \right) \implies \left(T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \geq \frac{M}{2} \right); \quad (2.2)$$

(б) если $M^+ < M = M^- = \|T_{\mathbf{n}}^-\|_\infty$, то для точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ имеет место утверждение

$$\left(\sum_{i=1}^d |(x_i - x_i^0) n_i| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M^+}{M^-}} \right) \implies \left(T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \geq \frac{M^+}{2} \right). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.¹ Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0)$. Для полинома $T_{\mathbf{n}}$ напишем формулу Тейлора (см. [10]). Поскольку $\mathbf{x}^0$ есть точка экстремума $T_{\mathbf{n}}$, то $\left(\frac{\partial T_{\mathbf{n}}}{\partial x_j}\right)\Big|_{\mathbf{x}^0} = 0$ (см. [10]). Поэтому

$$\begin{aligned} |T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^0)| &= \left| \sum_{l \geq 2} \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d \frac{\partial_{\mathbf{k}} T_{\mathbf{n}}}{\mathbf{k}!} x_{k_1} \cdots x_{k_l} \right| \\ &\leq M \sum_{l \geq 2} \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d n_{k_1} \cdots n_{k_l} |x_{k_1}| \cdots |x_{k_l}| \\ &= M \left\{ \left(\sum_{i=1}^d |x_i n_i| \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^d |x_i n_i| \right)^3 + \cdots \right\} \\ &\leq M \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \cdots \right\} = \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{k}! = k_1! \cdots k_l!$, $\partial_{\mathbf{k}} = \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_l}$. Первое неравенство есть следствие неравенства С.Н. Бернштейна, согласно которому (см. [1]) $\left| \frac{\partial T_{\mathbf{n}}}{\partial x_k} \right| \leq n_k M$. Последнее неравенство вытекает из предположения леммы (см. (2.2)). Таким образом, утверждение (а) доказано.

Аналогично доказывается утверждение (b). Действительно, в этом случае $M^+/M^- < 1$, поэтому

$$\begin{aligned} |T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^0)| &\leq M \sum_{l \geq 2} \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^d n_{k_1} \cdots n_{k_l} |x_{k_1}| \cdots |x_{k_l}| \\ &\leq M \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{M^+}{M^-} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{M^+}{M^-} \right)^{\frac{3}{2}} + \cdots \right\} \leq \frac{M^+}{2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $T_{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}}$, $p \in (0, \infty]$. Тогда

(а) если $M^+ = M$, то

$$M^+ \leq 2(d!)^{\frac{1}{p}} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{p}} \|T_{\mathbf{n}}^+\|_p; \quad (2.4)$$

(b) если $M^+ < M^- = M$, то

$$M^+ \leq 2^{\frac{2p}{2p+d}} (d!)^{\frac{2}{2p+d}} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2}{2p+d}} (M^-)^{\frac{d}{2p+d}} \|T_{\mathbf{n}}^+\|_p^{\frac{2p}{2p+d}}. \quad (2.5)$$

¹Заметим, что лемму 2.2 можно также доказать с помощью теоремы о конечном приращении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ утверждение леммы очевидно. Пусть $0 < p < \infty$. Введем обозначения

$$B_1(T_{\mathbf{n}}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : \sum_{i=1}^d |(x_i - x_i^0)n_i| \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$B_2(T_{\mathbf{n}}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : \sum_{i=1}^d |(x_i - x_i^0)n_i| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M^+}{M^-}} \right\},$$

где $\mathbf{x}^0$ — точка такая, что $T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^0) = M^+$. Теперь, используя утверждения (2.2), (2.3), получаем в случае (а) леммы 2.2

$$\frac{M}{2} \left\{ \int_{B_1(T_{\mathbf{n}})} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \|T_{\mathbf{n}}^+\|_p$$

и в случае (b) леммы 2.2

$$\frac{M^+}{2} \left\{ \int_{B_2(T_{\mathbf{n}})} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \|T_{\mathbf{n}}^+\|_p.$$

Далее, используя (2.1), получаем утверждение леммы.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $T_{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}}$, $p \in (0, \infty]$. Тогда

(а) если $M^- = M$, то

$$M^- \leq 2(d!)^{\frac{1}{p}} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{p}} \|T_{\mathbf{n}}^-\|_p; \quad (2.6)$$

(b) если $M^- < M^+ = M$, то

$$M^- \leq 2^{\frac{2p}{2p+d}} (d!)^{\frac{2}{2p+d}} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2}{2p+d}} (M^+)^{\frac{d}{2p+d}} \|T_{\mathbf{n}}^-\|_p^{\frac{2p}{2p+d}}. \quad (2.7)$$

Теперь с помощью лемм 2.3, 2.4 мы докажем оценку сверху в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ СВЕРХУ В ТЕОРЕМЕ 1. Как и в лемме 2.3, рассмотрим два случая.

(а) Пусть $M^- = M$. Тогда из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{n}}^-\|_{L_{q_2}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\int_{\mathbb{T}^d} |T_{\mathbf{n}}^-(\mathbf{x})|^{q_2} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}^d} |T_{\mathbf{n}}^-(\mathbf{x})|^{q_2-p_2} |T_{\mathbf{n}}^-(\mathbf{x})|^{p_2} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq (M^-)^{1-\frac{p_2}{q_2}} \|T_{\mathbf{n}}^-\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}^{\frac{p_2}{q_2}} \\ &\leq C_1 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|T_{\mathbf{n}}^-\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}, \quad 0 < p_2 \leq q_2 \leq \infty. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Гёльдера (см. [11; теорема 192]) имеем

$$\|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{q_2}(\mathbb{T}^d)} \leq C_2 \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}, \quad 0 < q_2 \leq p_2 \leq \infty. \quad (2.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{q_2}(\mathbb{T}^d)} &\leq C_3 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)} \\ &\leq C_3 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}, \quad p_1, p_2, q_2 \in (0, \infty]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

(b) Рассмотрим второй случай. Пусть $M^{-} < M^{+} = M$. Тогда из (2.7) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned} M^{-} &\leq C_4 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2}{2p_2+d}} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}^{\frac{2p_2}{2p_2+d}} (M^{+})^{\frac{d}{2p_2+d}} \\ &\leq C_5 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2}{2p_2+d}} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{d}{p_1(2p_2+d)}} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}^{\frac{2p_2}{2p_2+d}} \|T_{\mathbf{n}}^{+}\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^d)}^{\frac{d}{2p_2+d}} \\ &\leq C_5 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2+\frac{d}{p_1}}{2p_2+d}} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}, \quad 0 < p_1, p_2 \leq \infty. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались очевидной оценкой $a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq (a+b)$, $a, b \geq 0, \alpha \in [0, 1]$, где $a = \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}$, $b = \|T_{\mathbf{n}}^{+}\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^d)}$, $\alpha = 2p_2/(2p_2+d)$. Итак, при $0 < p_2 \leq q_2 \leq \infty, 0 \leq p_1 \leq \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{q_2}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\int_{\mathbb{T}^d} |T_{\mathbf{n}}^{-}(\mathbf{x})|^{q_2} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}^d} |T_{\mathbf{n}}^{-}(\mathbf{x})|^{q_2-p_2} |T_{\mathbf{n}}^{-}(\mathbf{x})|^{p_2} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq (M^{-})^{(1-\frac{p_2}{q_2})} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^d)}^{\frac{p_2}{q_2}} \\ &\leq C_6 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2+\frac{d}{p_1}}{2+\frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая неравенство (2.8) при $0 < q_2 \leq p_2 \leq \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{n}}^{-}\|_{L_{q_2}(\mathbb{T}^d)} &\leq C_7 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{2+\frac{d}{p_1}}{2+\frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}, \\ &0 < p_1, p_2, q_2 \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С учетом оценок (2.9), (2.10) окончательно получаем, что для любого $T_{\mathbf{n}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ имеет место неравенство

$$\|T_{\mathbf{n}}^-\|_{L_{q_2}(\mathbb{T}^d)} \leq C_8 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) + \left(\max\left(1, \frac{2+\frac{d}{p_1}}{2+\frac{d}{p_2}}\right)\right)} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)},$$

$$p_1, p_2, q_2 \in (0, \infty].$$

Нетрудно видеть, что аналогично можно доказать неравенство

$$\|T_{\mathbf{n}}^+\|_{L_{q_1}(\mathbb{T}^d)} \leq C_9 \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \left(\max\left(1, \frac{2+\frac{d}{p_2}}{2+\frac{d}{p_1}}\right)\right)} \|T_{\mathbf{n}}\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)},$$

$$p_1, p_2, q_1 \in (0, \infty].$$

Из двух последних соотношений немедленно вытекает оценка сверху в (1.3).

3. Некоторые свойства экстремальных полиномов

Для получения оценок снизу в теореме 1 нам придется изучить свойства экстремальных полиномов. Сначала рассмотрим следующие полиномы

$$T_{\mathbf{n}, k}(\delta, \mathbf{t}) = \frac{1}{\sum_{l=1}^d \left(\frac{1}{n_l \delta_l}\right)^2 \prod_{m=1}^d ([n_m/k] + 2)^{4k}} \times \left(\sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{t_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right) \prod_{j=1}^d \frac{J_{n_j+k, k}(t_j)}{(\cos t_j - \cos(\frac{2\pi}{[n_j/k]+2}))^{2k}}. \quad (3.1)$$

Данные полиномы отличаются от полиномов (1.4) только коэффициентом. Введем множества

$$G_{\delta} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : T_{\mathbf{n}, k}(\delta, \mathbf{x}) \leq 0 \},$$

$$O_{(\delta; \frac{2}{\pi})} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : \sum_{j=1}^d \frac{x_j^2}{\delta_j^2} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \right\},$$

$$Q_{\delta} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : |x_j| \leq \delta_j \}.$$

Два последних множества мы ввели с целью понять, что представляет из себя множество G_{δ} , где полином, определенный в (3.1), принимает отрицательные значения.

ЛЕММА 3.1. *Для определенных выше множеств при $\delta_j \in [0, \pi]$ выполняются вложения*

$$O_{(\delta; \frac{2}{\pi})} \subseteq G_{\delta} \subseteq Q_{\delta}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует номер j такой, что $|x_j| > \delta_j$, то $T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}) \geq 0$. Следовательно, имеет место вложение $G_{\boldsymbol{\delta}} \subseteq Q_{\boldsymbol{\delta}}$. Вложение $O_{(\boldsymbol{\delta}; \frac{2}{\pi})} \subseteq G_{\boldsymbol{\delta}}$ есть следствие неравенства

$$\sum_{j=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} - 1 \leq \sum_{j=1}^d \frac{x_j^2}{\delta_j^2} \frac{\pi^2}{4} - 1.$$

Здесь мы существенно воспользовались тем, что полиномы $T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$ принимают отрицательные значения тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} - 1 < 0.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\delta_j \in [0, \pi]$. Тогда

$$\prod_{j=1}^d \delta_j \geq \text{mes}\{G_{\boldsymbol{\delta}}\} \geq \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \prod_{j=1}^d \delta_j. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вложения $G_{\boldsymbol{\delta}} \subseteq Q_{\boldsymbol{\delta}}$ следует неравенство $\text{mes}\{G_{\boldsymbol{\delta}}\} \leq \prod_{j=1}^d \delta_j$.

Из вложения $O_{(\boldsymbol{\delta}; \frac{2}{\pi})} \subseteq G_{\boldsymbol{\delta}}$ следует неравенство

$$\text{mes}\{G_{\boldsymbol{\delta}}\} \geq \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \prod_{j=1}^d \delta_j.$$

Здесь мы воспользуемся известным соотношением об объеме n -мерного шара (см. [9; 4.632(2)])

$$\int_{\sum_{j=1}^d x_j^2 / \delta_j^2 \leq a^2} d\mathbf{x} = \prod_{j=1}^d \delta_j \int_{\sum_{j=1}^d x_j^2 \leq a^2} d\mathbf{x} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} a^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \prod_{j=1}^d \delta_j.$$

Следствие доказано.

Положим

$$c(d) = \frac{(d!)^{-\frac{1}{d}}}{2}; \quad (3.4)$$

заметим, что $c(d) \leq \frac{1}{2}$.

ЛЕММА 3.2. Для полинома $T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$ при любом $\boldsymbol{\delta}$, $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$, справедливо равенство

$$M^+ = \|T_{\mathbf{n},k}^+(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{\infty} = \|T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{\infty} = M, \quad (3.5)$$

где $c(d)$ — константа, определенная формулой (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. А именно, допустим, что $M^+ \neq M$, т.е. $M = M^-$. Пусть $\mathbf{x}^0$ — точка, в которой $T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^0) = M^+$. Тогда из результатов (2.1), (2.2) предыдущего пункта вытекает, что

$$T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}) \leq -\frac{M}{2} \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^d |(x_j - x_j^0)n_j| \leq \frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$\text{mes}\{G_{\boldsymbol{\delta}}\} \geq \frac{1}{d! \prod_{j=1}^d n_j}.$$

Но согласно (3.3)

$$\text{mes}\{G_{\boldsymbol{\delta}}\} \leq \prod_{j=1}^d \delta_j < \frac{1}{d! \prod_{j=1}^d n_j},$$

где использовалось, что $\delta_j < c(d)/n_j$. Таким образом, предположение $M^+ \neq M$ приводит к противоречию. Лемма доказана.

Имеют место следующие, важные сами по себе, неравенства:

$$\text{при всех } t \in (-\infty, +\infty), n \in \mathbb{N} \quad |\sin nt| \leq n |\sin t|, \quad (3.6)$$

$$\text{при всех } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad (3.7)$$

$$\text{при всех } t \geq 0 \quad \sin t \leq t, \quad (3.8)$$

$$\text{при всех } t \in \left[\frac{\pi}{n+2}, \frac{3\pi}{n+2}\right] \quad \sin^2 \frac{n+2}{2} t \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (n+2)^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2}\right)^2. \quad (3.9)$$

Неравенства (3.6), (3.7), (3.8) можно найти, например, в [12], а неравенство (3.9) следует из (3.7) и того факта, что

$$\sin^2 \frac{n+2}{2} t = \sin^2 \left((n+2) \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2} \right) \right).$$

Для того чтобы получить оценку сверху для $T_{\mathbf{n},k}^+(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$, введем следующее разбиение множества $[0, \pi]^d$

$$[0, \pi]^d = \bigcup_{\substack{\alpha_i=0,1 \\ i=0,\dots,d}} A_{\alpha_1}^1 A_{\alpha_2}^2 \cdots A_{\alpha_d}^d = \bigcup_{\substack{\alpha_i=0,1 \\ i=0,\dots,d}} \bigcap_{i=1}^d A_{\alpha_i}^i,$$

где

$$A_0^l = \left\{ \mathbf{x} \in [0, \pi]^d : 0 \leq x_l \leq \frac{3\pi}{[n_l/k] + 2} \right\},$$

$$A_1^l = \left\{ \mathbf{x} \in [0, \pi]^d : \frac{3\pi}{[n_l/k] + 2} \leq x_l \leq \pi \right\}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Тогда при любом δ , $\delta_j < 1$, $j = 1, \dots, d$, и при любом $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in [0, \pi]^d$ верна следующая оценка

$$T_{\mathbf{n},k}^+(\delta, \mathbf{x}) \leq C \prod_{j=1}^d g_j(x_j), \quad (3.10)$$

где

$$g_j(x_j) = \begin{cases} J_{n_j+k,k}(x_j), & \text{если } \mathbf{x} \in A_1^j, \\ n_j^{2k}, & \text{если } \mathbf{x} \in A_0^j, \end{cases}$$

и $C > 0$ – константа, не зависящая от $\mathbf{x}, \delta, \mathbf{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Покажем, что

$$\frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} \leq C n_j^{4k} g_j(x_j), \quad j = 1, \dots, d, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

для $x_j \in [0, \pi]$. Так как оценка (3.11) тривиальна при $n_j < 4k$, то будем считать, что $n_j \geq 4k$. Для доказательства неравенства (3.11) рассмотрим четыре случая.

1) $x_j \in [\pi - \frac{2\pi}{[n_j/k]+2}, \pi]$. Так как в этом случае

$$\sin^2\left(\frac{x_j}{2} \pm \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \geq \frac{1}{2^2},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} &= \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{4^k \sin^{2k}\left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \sin^{2k}\left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right)} \\ &\leq 4^{3k} J_{n_j+k,k}(x_j) \leq 4^{3k} n_j^4 J_{n_j+k,k}(x_j). \end{aligned}$$

2) $x_j \in [\frac{3\pi}{[n_j/k]+2}, \pi - \frac{2\pi}{[n_j/k]+2}]$. Так как в этом случае

$$\sin^2\left(\frac{x_j}{2} \pm \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{x_j}{2} \pm \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right)^2,$$

то

$$\begin{aligned} &\frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{4^k \sin^{2k}\left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \sin^{2k}\left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right)} \\ &\leq \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{4^k \left(\frac{2}{\pi}\right)^{4k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right)^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right)^{2k}} \\ &\leq \frac{C J_{n_j+k,k}(x_j)}{\left(\frac{5\pi}{2([n_j/k]+2)}\right)^{2k} \left(\frac{\pi}{2([n_j/k]+2)}\right)^{2k}} \leq C_1 n_j^{4k} J_{n_j+k,k}(x_j). \end{aligned}$$

$$3) x_j \in \left[\frac{\pi}{[n_j/k]+2}, \frac{3\pi}{[n_j/k]+2} \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} &= \frac{\sin^{2k} \left(\frac{[n_j/k]+2}{2} x_j \right)}{4^k \sin^{2k} \frac{x_j}{2} \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right) \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)} \\ &\leq \frac{C n_j^{2k} \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)}{\sin^{2k} \frac{x_j}{2} \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right) \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)} \\ &\leq \frac{C n_j^{2k}}{\left(\frac{2}{\pi} \right)^{2k} \left(\frac{x_j}{2} \right)^{2k} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k}} \leq C_1 n_j^{6k}. \end{aligned}$$

4) В случае $x_j \in \left[0, \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right]$ воспользуемся известной оценкой, согласно которой

$$J_{n_j+k,k}(x_j) \leq J_{n_j+k,k}(0) = ([n_j/k] + 2)^{2k}. \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{4^k \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right) \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)} \\ \leq \frac{C n_j^{2k}}{\left(\frac{2}{\pi} \right)^{4k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k}} \leq C_1 n_j^{6k}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение А) доказано.

Б) Теперь из утверждения А) легко вывести следующую оценку

$$\frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \leq C \frac{n_j^{4k}}{(n_j \delta_j)^2} g_j(x_j), \quad n_j \in \mathbb{N},$$

для $x_j \in [0, \pi]$. Здесь, как и ранее, будем считать, что $n_j \geq 4k$; случай $n_j < 4k$ тривиален. Рассмотрим три случая.

$$1) x_j \in \left[0, \frac{3\pi}{[n_j/k]+2} \right].$$

$$\frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \leq C n_j^{6k} \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \leq C_1 n_j^{6k} \frac{1}{(n_j \delta_j)^2},$$

в первом неравенстве мы воспользовались утверждением А).

$$2) x_j \in \left[\frac{3\pi}{[n_j/k]+2}, \pi - \frac{2\pi}{[n_j/k]+2} \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \\ = \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{4^k \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right) \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)} \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \\ \leq \frac{J_{n_j+k,k}(x_j) \left(\frac{x_j}{2} \right)^2}{4^k \left(\frac{2}{\pi} \right)^{4k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{\delta_j^2}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{4^{1-k} \left(\frac{x_j}{2}\right)^2 J_{n_j+k,k}(x_j)}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{4k+2} \left(\frac{x_j}{2}\right)^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right)^{2k} \delta_j^2} \\
&\leq C \frac{n_j^{4k-2}}{\delta_j^2} J_{n_j+k,k}(x_j) = C \frac{n_j^{4k} J_{n_j+k,k}(x_j)}{(n_j \delta_j)^2}.
\end{aligned}$$

$$3) x_j \in \left[\pi - \frac{2\pi}{[n_j/k]+2}, \pi\right].$$

Используя неравенство

$$\sin^2\left(\frac{x_j}{2} \pm \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \geq \frac{1}{2^2},$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{J_{n_j+k,k}(x_j) \sin^2 \frac{x_j}{2}}{4^k \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \sin^{2k} \left(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2}\right) \sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \\
&\leq \frac{4^{3k} J_{n_j+k,k}(x_j) \sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} \leq C \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{\delta_j^2} \leq C \frac{n_j^{4k} J_{n_j+k,k}(x_j)}{(n_j \delta_j)^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение Б) тоже доказано.

Рассмотрим следующие полиномы

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x}) &= \left(\sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right) \prod_{j=1}^d \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos(\frac{2\pi}{[n_j/k]+2}))^{2k}} \\
&\leq \sum_{l=1}^d \left(\prod_{j=1}^d \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos(\frac{2\pi}{[n_j/k]+2}))^{2k}} \right) \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}}.
\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь уже доказанными утверждениями А), Б), получаем

$$\tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x}) \leq C \sum_{l=1}^d \frac{\prod_{j=1}^d n_j^{4k} g_j(x_j)}{(n_l \delta_l)^2} = C \prod_{j=1}^d n_j^{4k} g_j(x_j) \sum_{l=1}^d \frac{1}{(n_l \delta_l)^2}.$$

Для окончания доказательства леммы остается вспомнить, что

$$T_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{l=1}^d \left(\frac{1}{n_l \delta_l}\right)^2 \prod_{m=1}^d ([n_m/k] + 2)^{4k}} \tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x}).$$

Лемма доказана.

Для получения оценок снизу для $T_{\mathbf{n},k}^+(\delta, \mathbf{x})$ введем множество

$$S_{\mathbf{n},k} = \left\{ \mathbf{x} \in [0, \pi]^d : \frac{3\pi}{2([n_j/k] + 2)} \leq x_j \leq \frac{5\pi}{2([n_j/k] + 2)}, j = 1, \dots, d \right\}.$$

ЛЕММА 3.4. При $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$, верна следующая оценка

$$|T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})| \geq C \prod_{j=1}^d n_j^{2k}, \quad \mathbf{x} \in S_{\mathbf{n},k}, \quad (3.13)$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3.8), (3.9), для любого $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{n},k}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} &= \frac{\sin^{2k}(\frac{[n_j/k]+2}{2}x_j)}{4^k \sin^{2k} \frac{x_j}{2} \sin^{2k}(\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2}) \sin^{2k}(\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2})} \\ &\geq \frac{(\frac{2}{\pi})^{2k} ([n_j/k] + 2)^{2k} (\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}}{4^k (\frac{x_j}{2})^{2k} (\frac{x_j}{2} + \frac{\pi}{[n_j/k]+2})^{2k} (\frac{x_j}{2} - \frac{\pi}{[n_j/k]+2})^{2k}} \\ &\geq C n_j^{6k}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Так как $c(d) = \frac{1}{2}(d!)^{-\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{2}$ и, следовательно, $c(d)^2/d \leq \frac{1}{4}$, то имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_j}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_j}{2}} - 1 \right) &\geq \sum_{j=1}^d \frac{(\frac{2}{\pi})^2 (\frac{3\pi}{4(n_j+2)})^2}{(\frac{\delta_j}{2})^2} - 1 = \sum_{j=1}^d \frac{9}{\delta_j^2 (n_j + 2)^2} - 1 \\ &\geq \sum_{j=1}^d \frac{1}{(n_j \delta_j)^2} - 1 \geq \sum_{j=1}^d \frac{1}{(n_j \delta_j)^2} \left(1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^d \frac{1}{(n_j \delta_j)^2}} \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^d \frac{1}{(n_j \delta_j)^2} \left(1 - \frac{c(d)^2}{d} \right) \geq \frac{3}{4} \sum_{j=1}^d \frac{1}{(n_j \delta_j)^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В предпоследнем неравенстве мы воспользовались условием леммы, а именно, тем фактом, что $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$. Таким образом, из явного вида $T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$ и (3.14), (3.15) немедленно получаем нужную оценку. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. При $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$, справедливо следующее утверждение

$$\|T_{\mathbf{n},k}^+(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_p \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{2k - \frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{2k} < p \leq \infty. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ нужная оценка сразу следует из (3.10), (3.12), (3.13). Рассмотрим теперь случай, когда $1/(2k) < p < \infty$.

а) При $1/(2k) < p < \infty$ из леммы 3.3 вытекает неравенство

$$\|T_{\mathbf{n},k}^+(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_p^p \leq \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_d \\ \alpha_l \in \{0,1\}, l=1, \dots, d}} \left\{ \int_{A_{\alpha_1}^1 \dots A_{\alpha_d}^d} C_1 \prod_{j=1}^d g_j^p(x_j) d\mathbf{x} \right\}.$$

Известно (см. [4]), что для полиномов $J_{n,k}(t) = \left(\frac{\sin \frac{[n/k]+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2k}$, $n \in \mathbb{N}$, верны следующие порядковые соотношения

$$\|J_{n,k}\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp n^{2k-\frac{1}{p}} \left\{ \int_1^n \frac{dt}{t^{2kp}} \right\}^{1/p} \asymp \begin{cases} n^{2k-\frac{1}{p}}, & \frac{1}{2k} < p \leq \infty, \\ \ln^{2k} n, & p = \frac{1}{2k}, \\ 1, & 0 < p < \frac{1}{2k}. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{[n/k]+2}} n^{2kp} dx \asymp n^{2kp-1}.$$

Поэтому

$$\int_{A_{\alpha_l}^l} g_l^p(x_l) dx_l \asymp n_l^{2kp-1}.$$

Таким образом, получаем

$$\|T_{\mathbf{n},k}^+(\delta, \cdot)\|_p^p \leq \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_d \\ \alpha_l \in \{0,1\}, l=1, \dots, d}} C_2 \prod_{j=1}^d n_j^{2kp-1} = 2^d C_2 \prod_{j=1}^d n_j^{2kp-1}.$$

Оценка сверху доказана.

б) Оценка снизу немедленно следует из леммы 3.4. Действительно,

$$\|T_{\mathbf{n},k}^+(\delta, \cdot)\|_p^p \geq \int_{S_{\mathbf{n}}} \left(C \prod_{j=1}^d n_j^{2k} \right)^p d\mathbf{x} \geq C_3 \prod_{j=1}^d n_j^{2kp-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. При $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$, для полинома $T_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x})$, определенной формулой (3.1), выполняется соотношение

$$M^- = \|T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \cdot)\|_{\infty} \geq C \frac{\prod_{j=1}^d n_j^{2k}}{\sum_{l=1}^d \left(\frac{1}{n_l \delta_l} \right)^2}, \quad (3.17)$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от $\mathbf{n}$ и δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $J_{n_j+k,k}(0) = ([n_j/k] + 2)^{2k}$, то из оценки

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{\left(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k}} = \frac{([n_j/k] + 2)^{2k}}{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2} \right)^{2k}} = \frac{([n_j/k] + 2)^{2k}}{4^k \sin^{4k} \frac{\pi}{[n_j/k]+2}} \geq C n_j^{6k}$$

сразу следует наше утверждение. Действительно, достаточно только вспомнить определение полинома $T_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x})$ (формула (3.1)) и тот факт, что $T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \mathbf{x}) \geq -T_{\mathbf{n},k}(\delta, 0)$. Лемма доказана.

Покажем, что оценка, полученная в (3.17), точна в смысле порядка. Действительно, из (3.11) следует, что

$$\frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{\left(\cos x_j - \cos \frac{2\pi}{[n_j/k]+2}\right)^{2k}} \leq C n_j^{6k}.$$

Так как для любого $\mathbf{x} \in G_\delta$ (т.е. для таких $\mathbf{x}$, что $T_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x}) < 0$) верно неравенство

$$\left| \sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right| \leq 1,$$

то

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sum_{l=1}^d \left(\frac{1}{n_l \delta_l}\right)^2 \prod_{m=1}^d ([n_m/k] + 2)^{4k}} \\ &\quad \times \left| \sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right| \prod_{j=1}^d \frac{J_{n_j+k,k}(x_j)}{\left(\cos x_j - \cos \left(\frac{2\pi}{[n_j/k]+2}\right)\right)^{2k}} \\ &\leq \frac{C \prod_{j=1}^d n_j^{2k}}{\sum_{l=1}^d \left(\frac{1}{n_l \delta_l}\right)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом леммы 3.6 мы доказали следующее утверждение.

ЛЕММА 3.7. *Для полинома $T_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x})$ при $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$, справедливы соотношения*

$$M^- = \|T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \cdot)\|_\infty \asymp \frac{\prod_{j=1}^d n_j^{2k}}{\sum_{l=1}^d \left(\frac{1}{n_l \delta_l}\right)^2}. \quad (3.18)$$

ЛЕММА 3.8. *Для полинома $T_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x})$ при $\delta_j = \delta^0/n_j$, $j = 1, \dots, d$, $\delta^0 < c(d)$, $p \in (0, \infty]$ справедливы соотношения*

$$\|T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \cdot)\|_p \asymp M^- \text{mes}^{\frac{1}{p}}\{G_\delta\} \asymp M^- \prod_{j=1}^d \delta_j^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{2k - \frac{1}{p}} (\delta^0)^{2 + \frac{d}{p}}. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу заметим, что определенные выше δ_j удовлетворяют условиям $\delta_j < c(d)/n_j$, $j = 1, \dots, d$, поэтому мы можем использовать предыдущие результаты. При $p = \infty$ наше утверждение уже доказано (лемма 3.7, где $\delta_j = \delta^0/n_j$). Рассмотрим теперь случай $0 < p < \infty$. Имеем

$$\|T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \cdot)\|_p = \left\{ \int_{G_\delta} |T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M^- \text{mes}^{\frac{1}{p}}\{G_\delta\}.$$

В силу леммы 3.2 нам известно, что $M^- \leq M = M^+$, поэтому из (2.7) получаем

$$\|T_{\mathbf{n},k}^-(\delta, \cdot)\|_p \geq \frac{(M^-)^{1 + \frac{d}{2p}}}{2(d!)^{\frac{1}{p}} (M^+)^{\frac{d}{2p}} \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{M^-}{2(d!)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{M^-}{M^+}\right)^{\frac{d}{2p}}} \frac{1}{\prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p}}}.$$

Далее, пользуясь формулами (3.16) и (3.18) для M^- и M^+ и полагая $\delta_j = \delta^0/n_j$, $j = 1, \dots, d$, имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{n},k}^-(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_p &\geq \frac{M^-}{2(d!)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{M^-}{M^+}\right)^{\frac{d}{2p}} \frac{1}{\prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p}}} \\ &\asymp \frac{M^-}{2(d!)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\left(\sum_{l=1}^d \frac{1}{(\delta^0)^2}\right)^{\frac{d}{2p}} \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{M^-}{2(d!)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\left(\frac{d}{\delta^0}\right)^{\frac{d}{p}} \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p}}} = \frac{M^-(\delta^0)^{\frac{d}{p}}}{2(d!)^{\frac{1}{p}} d^{\frac{d}{2p}} \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{p}}} \\ &\asymp M^- \prod_{j=1}^d \left(\frac{\delta^0}{n_j}\right)^{\frac{1}{p}} = M^- \prod_{j=1}^d \delta_j^{\frac{1}{p}} \asymp M^- \text{mes}^{\frac{1}{p}}\{G_{\boldsymbol{\delta}}\}. \end{aligned}$$

Итак, одно из соотношений в (3.19) доказано, другие следуют из (3.3) и (3.18). Лемма доказана.

Так как полиномы $\tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$ отличаются от полиномов $T_{\mathbf{n},k}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})$ только коэффициентом (ср. (1.4) и (3.1)), то из (3.16) и (3.19) немедленно вытекает

ЛЕММА 3.9. Пусть $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $k \in \mathbb{N}$ и $\delta_j = \delta^0/n_j$, $j = 1, \dots, d$, $\delta^0 < c(d)$. Тогда справедливо

$$\|\tilde{T}_{\mathbf{n},k}^+(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{6k-\frac{1}{p}} (\delta^0)^{-2}, \quad p \in \left(\frac{1}{2k}, \infty\right], \quad (3.20)$$

$$\|\tilde{T}_{\mathbf{n},k}^-(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{6k-\frac{1}{p}} (\delta^0)^{\frac{d}{p}}, \quad p \in (0, \infty]. \quad (3.21)$$

4. Доказательство теоремы 1

Покажем в этом пункте, что оценка (1.3) действительно является точной в смысле порядка. Так как оценки сверху уже доказаны, то достаточно дать оценку снизу. Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)_+, \quad a_2 = \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)_+ \left(\frac{2 + \frac{d}{p_2}}{2 + \frac{d}{p_1}}\right), \\ b_1 &= \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+, \quad b_2 = \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+ \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right). \end{aligned}$$

Пусть $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (0, \infty]$, $p_1 \leq q_1$, $p_2 \leq q_2$, $p_2 \geq p_1$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Положим $k_0 = \left\lceil \frac{1}{2 \min\{p_1, p_2\}} \right\rceil + 1$, тогда $1/(2k_0) < \min\{p_1, p_2\}$. Покажем, что

$$\frac{\|\tilde{T}_{\mathbf{n},k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^d)}}{\|\tilde{T}_{\mathbf{n},k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{p_1,p_2}(\mathbb{T}^d)}} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{\max\{b_2, a_1\}} \quad (4.1)$$

при $\delta_l = \delta^0/n_l$, $l = 1, \dots, d$, $\delta^0 = c(d)(\prod_{j=1}^d n_j)^{\frac{1}{2+\frac{d}{p_2}}(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}$. Для того чтобы доказать (4.1), нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (0, \infty]$. Тогда следующие неравенства эквивалентны:

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) \leq \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right) \leq \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right), \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) \geq \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right) \geq \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (4.2), а утверждение (4.3) доказывается аналогично. Покажем цепочку тривиальных неравенств, ведущих от одного неравенства к другому

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) \leq \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{d}{p_1} - \frac{d}{q_1}\right) \leq \left(\frac{d}{p_2} - \frac{d}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow \left(2 + \frac{d}{p_1}\right) - \left(2 + \frac{d}{q_1}\right) \leq \left(2 + \frac{d}{p_2} - \left(2 + \frac{d}{q_2}\right)\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow \left(2 + \frac{d}{p_1}\right) - \left(2 + \frac{d}{q_1}\right) \leq \left(2 + \frac{d}{p_1}\right) - \left(2 + \frac{d}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow -\left(2 + \frac{d}{q_1}\right) \leq -\left(2 + \frac{d}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow \left(2 + \frac{d}{q_2}\right) - \left(2 + \frac{d}{q_1}\right) \leq \left(2 + \frac{d}{q_2}\right) - \left(2 + \frac{d}{q_2}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{d}{q_2} - \frac{d}{q_1}\right) \leq \left(\frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right) \leq \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) \left(\frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть для определенности $b_2 \geq a_1$. Напомним, что точка δ определена в (4.1) и $p_2 \geq p_1$. Теперь, используя результат последней леммы и учитывая (3.20), (3.21), получаем

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\delta, \cdot)\|_{L_{q_1, q_2}(\mathbb{T}^d)} \\ & \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{6k - \frac{1}{q_1} - \frac{2}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)} + \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{6k - \frac{1}{q_2} + \frac{\frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)} \\ & \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j\right)^{6k - \frac{1}{q_2} - \frac{2}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) + \max\left\{\left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right), \frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\right\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{6k - \frac{1}{q_2} + \frac{\frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right)}, \\
& \|\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)} \\
& \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{6k - \frac{1}{p_1} - \frac{2}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right)} + \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{6k - \frac{1}{p_2} + \frac{\frac{d}{p_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right)} \\
& \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{6k - \frac{2}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right) + \max \left\{ -\frac{1}{p_1}, -\frac{1}{p_2} + \frac{2 + \frac{d}{p_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right) \right\}} \\
& = \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{6k - \frac{1}{p_1} - \frac{2}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right)},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{q_1, q_2}(\mathbb{T}^d)}}{\|\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}} & \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right)} \\
& \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}} \right)}.
\end{aligned}$$

Равенство

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{2 + \frac{d}{q_2}}{2 + \frac{d}{p_2}} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right) = \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right) \left(\frac{2 + \frac{d}{p_1}}{2 + \frac{d}{p_2}} \right)$$

проверяется непосредственно.

Пусть $p_1, p_2, q_1, q_2 \in (0, \infty]$, $p_1 \leq q_1$, $p_2 \leq q_2$, $p_2 \leq p_1$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Аналогично можно показать, что при $\delta_l = \delta^0 / n_l$, $l = 1, \dots, d$, $\delta^0 = c(d) \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{2 + \frac{d}{p_1}} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)}$ имеет место порядковое соотношение

$$\frac{\|\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{q_1, q_2}(\mathbb{T}^d)}}{\|\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\boldsymbol{\delta}, \cdot)\|_{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}} \asymp \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\max\{a_2, b_1\}}.$$

Экстремальные полиномы приведены в виде таблицы.

5. Неравенство Джексона–Никольского для целых функций экспоненциального типа

Обсудим в этом пункте теорему 2. Оценки сверху переносятся с периодического случая на непериодический. Дело в том, что при получении оценок сверху (см. лемму 2.2) мы использовали два факта:

- 1) неравенство С. Н. Бернштейна,
- 2) возможность разложения полинома в ряд Тейлора.

экстремальный полином	$\frac{\ \cdot\ _{L_{q_1, q_2}(\mathbb{T}^d)}}{\ \cdot\ _{L_{p_1, p_2}(\mathbb{T}^d)}} \asymp$		$\psi(p_1, p_2, q_1, q_2)$	
$\text{const} \neq 0$	1	$a_1 = b_2 = 0$	$\max\{a_1, b_2\}$	$p_2 \geq p_1$
$\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\mathbf{x})$ $\delta_l = \delta^0 / n_l, l = 1, \dots, d,$ $\delta^0 = c(d) \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{(1/p_2 - 1/p_1)}{2 + d/p_2}}$	$\left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\max\{a_1, b_2\}}$	$a_1^2 + b_2^2 \neq 0$		
$\text{const} \neq 0$	1	$a_2 = b_1 = 0$	$\max\{a_2, b_1\}$	$p_1 \geq p_2$
$-\tilde{T}_{\mathbf{n}, k_0}(\mathbf{x})$ $\delta_l = \delta^0 / n_l, l = 1, \dots, d,$ $\delta^0 = c(d) \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{(1/p_1 - 1/p_2)}{2 + d/p_1}}$	$\left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\max\{a_2, b_1\}}$	$a_2^2 + b_1^2 \neq 0$		

Но неравенство С. Н. Бернштейна (см. [1]) имеет место и для целых функций экспоненциального типа, а именно,

$$\left\| \frac{\partial g_{\nu}}{\partial x_i} \right\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^d)} \leq \nu_i \|g_{\nu}\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^d)}.$$

А выполнение второго факта имеет место по самому определению целых функций экспоненциального типа.

То, что неравенство неумлучшаемо в смысле порядка, можно проверить на целых функциях экспоненциального типа

$$g_{\nu, k}(\delta, \mathbf{x}) = \left(\sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right) \prod_{s=1}^d \frac{\sin^{2k} \frac{[\nu_s/k] + 2}{2} x_s}{x_s^{2k} \left(\cos x_s - \cos \left(\frac{2\pi}{[\nu_s/k] + 2} \right) \right)^{2k}},$$

где $k \in \mathbb{N}$. Делается это по аналогии с симметричным случаем, поэтому приведем здесь лишь схему доказательства.

1) Из неравенств $\frac{x_s^2}{\pi^2} \leq \sin^2 \frac{x_s}{2} \leq \frac{x_s^2}{2}$ при $x_s \in [-\pi, \pi]$ следует соотношение

$$\|g_{\nu, k}^{\pm}(\delta, \cdot)\|_{L_p([-\pi, \pi]^d)} \asymp \|\tilde{T}_{[\nu], k}^{\pm}(\delta, \cdot)\|_{L_p([-\pi, \pi]^d)}.$$

2) Так как $\nu_k^\alpha = O([\nu_k]^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, то отсюда сразу получаем оценки снизу для $g_{\nu,k}(\delta, \mathbf{x})$.

3) Положим

$$h_{\nu_s}(x_s) = \begin{cases} \nu_s^{2k}, & x_s \in \left[-\frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1}, \frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1}\right], \\ \frac{1}{x_s^{2k}}, & x_s \in \left[-\frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1} + 2\pi l, \frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1} + 2\pi l\right], \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \frac{\sin^{2k} \frac{[\nu_s/k]+1}{2} x_s}{x_s^{2k}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $\delta_s \in (0, 1)$, рассуждая, как и при доказательстве утверждений А), Б) леммы 3.3, можно показать, что для $x_s \in (-\infty, +\infty)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\sin^{2k} \frac{[\nu_s/k]+1}{2} x_s}{x_s^{2k} \sin^{2k} \left(\frac{x_s}{2} - \frac{\pi}{[\nu_s/k]+1}\right) \sin^{2k} \left(\frac{x_s}{2} + \frac{\pi}{[\nu_s/k]+1}\right)} &\leq C_1 \nu_s^{4k} h_{\nu_s}(x_s), \\ \frac{\sin^{2k} \frac{[\nu_s/k]+1}{2} x_s}{x_s^{2k} \sin^{2k} \left(\frac{x_s}{2} - \frac{\pi}{[\nu_s/k]+1}\right) \sin^{2k} \left(\frac{x_s}{2} + \frac{\pi}{[\nu_s/k]+1}\right)} \frac{\sin^2 \frac{x_s}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_s}{2}} &\leq C_2 \frac{\nu_s^{4k}}{(\nu_s \delta_s)^2} h_{\nu_s}(x_s). \end{aligned}$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} g_{\nu,k}(\delta, \mathbf{x}) &= \left(\sum_{l=1}^d \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} - 1 \right) \prod_{s=1}^d \frac{\sin^{2k} \frac{[\nu_s/k]+2}{2} x_s}{x_s^{2k} (\cos x_s - \cos(\frac{2\pi}{[\nu_s/k]+2}))^{2k}} \\ &\leq \sum_{l=1}^d \left(\prod_{s=1}^d \frac{\sin^{2k} \frac{[\nu_s/k]+2}{2} x_s}{x_s^{2k} (\cos x_s - \cos(\frac{2\pi}{[\nu_s/k]+2}))^{2k}} \right) \frac{\sin^2 \frac{x_l}{2}}{\sin^2 \frac{\delta_l}{2}} \\ &\leq C \sum_{l=1}^d \frac{\prod_{s=1}^d \nu_s^{4k} h_{\nu_s}(x_s)}{(\nu_l \delta_l)^2} = C \prod_{s=1}^d \nu_s^{4k} h_{\nu_s}(x_s) \sum_{l=1}^d \frac{1}{(\nu_l \delta_l)^2}. \end{aligned}$$

4) Легко убедиться, например, с помощью замены переменных, что для любого $\alpha > 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin^{2k} \alpha x_s}{x_s^{2k}} \right)^p dx_s \right)^{\frac{1}{p}} &\asymp \alpha^{2k - \frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{2k} < p \leq \infty, \\ \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1}, \frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1}]} \left(\frac{1}{x_s^{2k}} \right)^p dx_s \right)^{\frac{1}{p}} &\asymp \nu_s^{2k - \frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{2k} < p \leq \infty, \\ \left(\int_{[-\frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1}, \frac{3\pi}{[\nu_s/k]+1}]} (\nu_s^{2k})^p dx_s \right)^{\frac{1}{p}} &\asymp \nu_s^{2k - \frac{1}{p}}, \quad p > 0. \end{aligned}$$

5) Из 3), 4) следует нужная оценка сверху для $g_{\nu,k}^+(\delta, \mathbf{x})$.

6) Получение оценок сверху для $g_{\nu,k}^-(\delta, \mathbf{x})$ не представляет труда.

Итак, доказана

ЛЕММА 5.1. Пусть $\nu \in \mathbb{R}_+^d$, $k \in \mathbb{N}$ и $\delta_j = \delta^0/n_j$, $j = 1, \dots, d$, $\delta^0 < c(d)$. Тогда справедливы порядковые соотношения

$$\|g_{\nu,k}^+(\delta, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\prod_{j=1}^d \nu_j\right)^{6k - \frac{1}{p}} (\delta^0)^{-2}, \quad p \in \left(\frac{1}{2k}, \infty\right],$$

$$\|g_{\nu,k}^-(\delta, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\prod_{j=1}^d \nu_j\right)^{6k - \frac{1}{p}} (\delta^0)^{\frac{d}{p}}, \quad p \in (0, \infty].$$

Таким образом, оценку снизу дают функции $g_{\nu,k}(\delta, \mathbf{x})$, так же как и полиномы $\tilde{T}_{\mathbf{n},k}(\delta, \mathbf{x})$ в периодическом случае, см. таблицу.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность И. Г. Царькову за полезные замечания и советы, а также В. В. Арестову и Е. Бердышевой за исправление некоторых неточностей.

Список литературы

1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
2. Jackson D. Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. P. 889–906.
3. Арестов В. В. Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 4. С. 539–547.
4. Kozko A. I. On Jackson–Nikolskii inequalities for trigonometric polynomials of degree n in spaces with asymmetrical norms // East J. Approx. 1996. V. 2. № 2. P. 177–186.
5. Козко А. И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 687–699.
6. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Ученые зап. МГУ. 1939. Т. 30. № 3. С. 3–16.
7. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 9. С. 1511–1514.
8. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962.
10. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1990.
11. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
12. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
03.06.1996 и 02.06.1998