Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ивашкович, В. В. Шевчишин, Деформации некомпактных комплексных кривых и оболочки мероморфности сфер, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 9, 23–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:48:16

УДК 517.55+515.17

С. М. Ивашкович, В. В. Шевчишин

Деформации некомпактных комплексных кривых и оболочки мероморфности сфер

В работе изучаются оболочки мероморфности окрестностей двумерных сфер, симплектически иммерсированных в кэлеровы комплексные поверхности. Для исследования оболочек используется метод, основанный на теории Громова псевдоголоморфных кривых. Приводится конструкция полного семейства голоморфных деформаций некомпактной комплексной кривой в комплексном многообразии, параметризуемого аналитическим множеством конечной коразмерности в банаховом шаре. Существование такого семейства используется для доказательства обобщения принципа непрерывности Леви, применяемого для описания оболочек мероморфности.

Библиография: 15 названий.

§ 0. Введение

В этой работе мы изучаем оболочки мероморфности окрестностей двумерных сфер, иммерсированных в комплексные поверхности.

Под комплексной поверхностью в этой работе понимается (хаусдорфово) связное комплексное двумерное многообразие X , счетное в бесконечности. Пусть U — область в X . Ее оболочка мероморфности $(\hat{U}, \pi)$ — это максимальная область над X , для которой выполнено следующее:

- i) существует голоморфное вложение $i: U \rightarrow \hat{U}$ такое, что $\pi \circ i = \text{Id}_U$;
- ii) всякая мероморфная функция f на U продолжается до мероморфной функции $\hat{f}$ на $\hat{U}$, т.е. $\hat{f} \circ i = f$.

Оболочка мероморфности существует у любой области U . Это можно доказать, применив, например, метод Картана–Туллена к пучку мероморфных функций на X , см. [1].

В дальнейшем мы будем рассматривать только кэлеровы комплексные поверхности, т.е. мы предполагаем, что X допускает строго положительную замкнутую $(1, 1)$ -форму ω .

Пусть S обозначает ориентированную вещественную поверхность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C^1 -гладкая иммерсия $u: S \rightarrow (X, \omega)$ называется *симплектической*, если $u^*\omega$ не зануляется нигде на S .

Целью настоящей работы является следующая

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $u: S^2 \rightarrow X$ — симплектическая иммерсия сферы S^2 в диск-выпуклую кэлерову поверхность X такая, что $M := u(S)$ имеет только положительные двойные точки. Предположим, что $c_1(X)[M] > 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке программы “RiP” Математического института в Обервольфахе.

Тогда оболочка мероморфности $(\widehat{U}, \pi)$ произвольной окрестности U образа M содержит рациональную кривую C с условием $\pi^*c_1(X)[C] > 0$.

Определение диск-выпуклости дано в §4. Отметим лишь, что все компактные многообразия диск-выпуклы. $c_1(X)$ обозначает здесь первый класс Дженя поверхности X .

Этот результат существенно улучшает теорему 1 работы [2]. А именно, отбрасывается условие “положительности” на X . Кроме того, ослаблено еще одно условие работы [2], а именно, $c_1(X)[M] \geq \delta$. Для случая $X = \mathbb{CP}^2$ это означает, что $[M]$ может иметь любую степень в $H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$, в то время как условие $c_1(X)[M] \geq \delta$ налагает ограничение $\deg[M] \leq 8$ (см. [2; следствие 1]).

Стоит отметить (см., например, [3]), что если компактная комплексная алгебраическая поверхность X содержит гладкую рациональную кривую C с условием $c_1(X)[C] > 0$, то возможен только один из трех нижеследующих случаев:

- 1) $c_1(X)[C] = 1 \Rightarrow [C]^2 = -1 \Rightarrow C$ — исключительная кривая первого рода;
- 2) $c_1(X)[C] = 2 \Rightarrow [C]^2 = 0 \Rightarrow X$ можно “сдуть” до линейчатой поверхности;
- 3) $c_1(X)[C] \geq 3 \Rightarrow [C]^2 \geq 1 \Rightarrow X$ есть либо $\mathbb{CP}^2$, либо поверхность Хирцебруха Σ_n , либо модификация таковой.

В последнем случае $X \setminus C$ будет псевдоголутым, и, следовательно, по теореме Грауэрта [4] оболочкой $\widehat{U}$ будет все X .

Отметим также, что для *вложенных* поверхностей в $\mathbb{CP}^2$ (не обязательно сфер) результаты работы [2] были недавно улучшены Немировским [5], который использовал другой подход, основанный на теории Зайберга–Виттена.

Метод построения оболочек, используемый в данной работе, был предложен в [2] и основан на теории Громова псевдоголоморфных кривых [6]. Существенное усиление результатов из [2] в настоящей работе удастся достичь благодаря развитию теории трансверсальности в пространстве модулей псевдоголоморфных кривых, см. §2.

Следует отметить, что при доказательстве принципа непрерывности в [2; теорема 5.1.3] существенно используется результат о существовании полного голоморфного семейства деформаций некомпактной комплексной кривой в комплексном многообразии, см. [2; теорема 6.3.1]. В данной работе приводится полное его доказательство, см. теорему 3.4.

§ 1. Пространство модулей псевдоголоморфных кривых и первая вариация $\bar{\partial}$ -уравнения

В этом параграфе мы вкратце излагаем в нужной для настоящей работы форме и дополняем результаты [2], касающиеся некоторых основ теории псевдоголоморфных кривых.

Рассмотрим пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g$ комплексных структур на замкнутой вещественной ориентированной поверхности S рода g . Это комплексное многообразие размерности

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{T}_g = \begin{cases} 0, & \text{если } g = 0; \\ 1, & \text{если } g = 1; \\ 3g - 3, & \text{если } g \geq 2, \end{cases}$$

которое полностью характеризуется следующим свойством: произведение $S \times \mathbb{T}_g$ допускает комплексную структуру $J_{S \times \mathbb{T}}$ такую, что:

- i) естественная проекция $\pi|_{\mathbb{T}}: S \times \mathbb{T}_g \rightarrow \mathbb{T}_g$ голоморфна, и значит, для каждого $\tau \in \mathbb{T}_g$ отождествление $S \cong S \times \{\tau\}$ задает комплексную структуру $J_S(\tau) := J_{S \times \mathbb{T}}|_{S \times \{\tau\}}$ на S ;
- ii) для любой комплексной структуры J_S на S существуют единственное $\tau \in \mathbb{T}_g$ и диффеоморфизм $f: S \rightarrow S$ такие, что $J_S = f^* J_S(\tau)$ (т.е. отображение $f: (S, J_S) \rightarrow (S, J_S(\tau))$ голоморфно), а f изотопно тождественному отображению $\text{Id}_S: S \rightarrow S$.

Пусть $\mathbf{G}$ обозначает группу автоморфизмов $S \times \mathbb{T}_g$. Тогда

$$\mathbf{G} = \begin{cases} \mathbf{PGl}(2, \mathbb{C}) & \text{при } g = 0, \\ \mathbf{Sl}(2, \mathbb{Z}) \ltimes T^2 & \text{при } g = 1, \\ \text{дискретна} & \text{при } g \geq 2. \end{cases}$$

Мы используем следующие сведения о пространстве $\mathbb{T}_g$.

При $g = 0$ поверхность S есть риманова сфера S^2 и все комплексные структуры на S^2 эквивалентны стандартной, для которой $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$. Поэтому $\mathbb{T}_0$ состоит из одной точки, а группа $\mathbf{G} = \mathbf{PGl}(2, \mathbb{C})$ есть группа биголоморфизмов $\mathbb{CP}^1$.

При $g = 1$ поверхность S есть тор T^2 , а $\mathbb{T}_1$ — верхняя полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}$. При этом произведение $S \times \mathbb{T}_1$ можно отождествить с фактор-многообразием $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}_+)/\mathbb{Z}^2$ относительно действия

$$((m, n), (z, \tau)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_+ \mapsto (m, n) \cdot (z, \tau) := (z + m + n\tau, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}_+.$$

В этом случае $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ есть компонента единицы $e \in \mathbf{G}$, в частности, T^2 нормально. Группа $\mathbf{G} = \mathbf{Sl}(2, \mathbb{Z}) \ltimes T^2$ является полупрямым произведением, а действие T^2 на факторе $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}_+)/\mathbb{Z}^2$ задается формулой

$$\begin{aligned} ([t_1, t_2], ([z], \tau)) &\in T^2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}_+)/\mathbb{Z}^2 \\ &\mapsto [t_1, t_2] \cdot ([z], \tau) := ([z + t_1 + t_2\tau], \tau) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}_+)/\mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

При любом $g \geq 0$ действие $\mathbf{G}$ на $S \times \mathbb{T}_g$ эффективно и сохраняет слои проекции $\pi|_{\mathbb{T}}: S \times \mathbb{T}_g \rightarrow \mathbb{T}_g$. Это задает действие $\mathbf{G}$ на $\mathbb{T}_g$. Далее, для каждого $\tau \in \mathbb{T}_g$ и $f \in \mathbf{G}$ существует единственный диффеоморфизм $\hat{f}_\tau: S \rightarrow S$ такой, что

$$f \cdot (x, \tau) = (\hat{f}_\tau(x), f \cdot \tau). \quad (1.1)$$

Для каждого $\tau \in \mathbb{T}_g$ имеются естественные изоморфизмы $T_\tau \mathbb{T}_g \cong \mathbf{H}^1(S, \theta_\tau(TS))$ и $T_e \mathbf{G} \cong \mathbf{H}^0(S, \theta_\tau(TS))$, где $\theta_\tau(TS)$ обозначает пучок сечений TS , голоморфных относительно $J_S(\tau)$.

В последующем мы обозначаем элементы $\mathbb{T}_g$ просто через J_S и рассматриваем их как соответствующие структуры на S .

Рассмотрим симплектическое многообразие (X, ω) с фиксированной почти комплексной структурой J_{st} . Напомним, что J_{st} называется ω -*пучной* (ω -tamed, см. [6]), если для любого ненулевого вектора $v \in T_x X$ выполнено условие $\omega(v, J_{\text{st}} v) > 0$. Это условие равносильно тому, что $(1, 1)$ -компонента формы ω положительна, $\omega^{(1,1)} > 0$. В рассматриваемых нами далее приложениях ω и J_{st} будут задавать на X кэлерову структуру.

Пусть U – относительно компактная область в X , которая может совпадать с X в случае, когда X компактно. Пусть S – (фиксированная) компактная ориентированная вещественная поверхность рода $g \geq 0$ и $u_0: S \rightarrow X$ – непостоянное C^1 -гладкое отображение такое, что $u_0(S) \subset U$.

Зафиксируем p , $2 < p < \infty$, и рассмотрим банахово многообразие $L^{1,p}(S, X)$ всех (непрерывных) соболевски $L^{1,p}$ -гладких отображений $u: S \rightarrow X$. Это гладкое многообразие, его касательное пространство $T_u L^{1,p}(S, X)$ в u есть банахово пространство $L^{1,p}(S, u^*TX)$, состоящее из $L^{1,p}$ -гладких сечений поднятого касательного расслоения TX . Пусть $\mathcal{S}_U$ обозначает множество таких u из $L^{1,p}(S, X)$, которые гомотопны u_0 и для которых $u(S) \cap U \neq \emptyset$. Зафиксируем $k \geq 1$ и обозначим через $\mathcal{J}_U^k$ множество C^k -гладких почти комплексных структур J в X , которые удовлетворяют следующим двум условиям:

- i) $\{x \in X : J(x) \neq J_{\text{st}}(x)\} \in U$;
- ii) J – ω -ручная.

Отображение $\text{ev}: S \times \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k \rightarrow X$, задаваемое формулой $\text{ev}(x, u, J_S, J) := u(x)$, определяет расслоение $E := \text{ev}^*(TX)$ над $S \times \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k$. Снабдим E естественной комплексной структурой, равной $J(u(x))$ в слое $E_{(x,u,J_S,J)} \cong T_{u(x)}X$. Обозначим через (E_u, J) ограничение E на $S \times \{(u, J_S, J)\}$, которое изоморфно u^*TX .

Расслоение E с комплексной структурой J задает комплексные банаховы расслоения $\widehat{\mathcal{E}}$ и $\widehat{\mathcal{E}}'$ над произведением $\mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k$ со слоями

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{E}}_{(u,J_S,J)} &:= L^{1,p}(S, E_u), \\ \widehat{\mathcal{E}}'_{(u,J_S,J)} &:= L^p(S, E_u \otimes \Lambda^{(0,1)}S).\end{aligned}$$

Тут S наделено комплексной структурой J_S , $\Lambda^{(0,1)}S$ – комплексное линейное расслоение $(0,1)$ -форм на S , а $\otimes$ обозначает комплексное тензорное произведение соответствующих комплексных расслоений. Отметим, что $\widehat{\mathcal{E}}$ есть подъем касательного расслоения $TL^{1,p}(S, X)$ относительно проекции $(u, J_S, J) \in \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k \mapsto u \in L^{1,p}(S, X)$.

В свою очередь, расслоение $\widehat{\mathcal{E}}'$ – множество значений $\bar{\partial}$ -оператора на многообразии $L^{1,p}(S, X) \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k$. А именно, $\bar{\partial}$ -оператор задает сечение $\sigma_{\bar{\partial}}$ расслоения $\widehat{\mathcal{E}}'$ по формуле

$$\sigma_{\bar{\partial}}(u, J_S, J) := \bar{\partial}_{J_S, J} u := \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ J_S). \quad (1.2)$$

Если f – другое сечение $\widehat{\mathcal{E}}'$ (заданное, например, явной геометрической конструкцией), то можно рассмотреть неоднородное $\bar{\partial}$ -уравнение

$$\bar{\partial}_{J_S, J} u = f(u, J_S, J).$$

В данной работе мы рассматриваем лишь однородный случай $f(u, J_S, J) \equiv 0$. Соответствующее множество решений мы обозначаем

$$\mathcal{P} := \{(u, J_S, J) \in \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k : \bar{\partial}_{J_S, J} u = 0\}. \quad (1.3)$$

Если $u \in L^{1,p}(S, X)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{\partial}_{J_S, J} u = 0 \quad (1.4)$$

с подходящими $J_S \in \mathbb{T}_g$ и $J \in \mathcal{J}_U^k$, то мы называем отображение u псевдоголоморфным, или J -голоморфным, или (J_S, J) -голоморфным, а его образ $M := u(S)$ псевдоголоморфной или J -голоморфной кривой.

Оператор $\bar{\partial}$ – эллиптический с символом Коши–Римана. Теория эллиптических уравнений с частными производными (см., например, [7]) обеспечивает замкнутость подмножества $\mathcal{P}$ в

$$\mathcal{X} := \{(u, J_S, J) \in \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k : u \in C^1(S, X)\}.$$

Отметим, что $\mathcal{X}$ – замкнутое банахово многообразие. Положим

$$\mathcal{X}^* := \{(u, J_S, J) \in \mathcal{X} : \exists \text{ непустое открытое } V \subset S \text{ такое, что } u|_V \text{ – вложение и } u(V) \cap u(S \setminus V) = \emptyset\},$$

и пусть $\mathcal{P}^* := \mathcal{P} \cap \mathcal{X}^*$. Тогда $\mathcal{X}^*$ открыто в $\mathcal{X}$, а $\mathcal{P}^*$ открыто в $\mathcal{P}$. Рассмотрим естественное действие группы $\mathbf{G}$ в $\mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k$ посредством композиций:

$$(f, u, J_S, J) \in \mathbf{G} \times \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k \longmapsto f \cdot (u, J_S, J) := (u \circ \hat{f}^{-1}, f \cdot J_S, J),$$

где $\hat{f}: S \rightarrow S$ – диффеоморфизм, индуцированный $f \in \mathbf{G}$ и J_S , см. (1.1). Инверсия $(\hat{f})^{-1}$ введена для обеспечения ассоциативности действия: $(g_1 \cdot g_2) \cdot (u, J_S, J) = g_1 \cdot (g_2 \cdot (u, J_S, J))$.

Множества $\mathcal{X}^*$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ инвариантны относительно действия $\mathbf{G}$. Пусть $\mathcal{M} := \mathcal{P}^*/\mathbf{G}$ – фактор-пространство по отношению к действию $\mathbf{G}$, а $\pi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{M}$ – соответствующая проекция. Поскольку $\mathbf{G}$ не действует на $\mathcal{J}_U^k$, то корректно определена проекция $\pi_{\mathcal{J}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}_U^k$.

ЛЕММА 1.1. *Проекции $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ и $\pi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{M}$ являются главными $\mathbf{G}$ -расслоениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $g \geq 2$. Известно, что в этом случае группа $\mathbf{G}$ дискретна и действует собственнo разрывно на $\mathbb{T}_g$ (см., например, [8]). Поэтому действие $\mathbf{G}$ на $\mathcal{X}$ тоже собственнo. Отсюда и из определения $\mathcal{X}^*$ следует, что $\mathbf{G}$ действует на $\mathcal{X}^*$ свободно. Поэтому $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ – неразветвленное накрытие.

Теперь обратимся к случаю $g = 0$. Тогда $S = S^2$ и $\mathbb{T}_0 = \{J_{\text{st}}\}$. Зафиксируем некоторые $(u^0, J_{\text{st}}, J^0) \in \mathcal{X}^*$. Пусть y_1, y_2 и y_3 – такие три различные точки на S^2 , что u^0 – вложение в окрестности каждой y_i , в частности, du^0 не зануляется в y_i . Возьмем гладкие подмногообразия Z_i в X коразмерности 2, пересекающие $u^0(S^2)$ трансверсально в точках $u^0(x_i)$ соответственно.

Пусть $V \ni (u^0, J_{\text{st}}, J^0)$ – открытое множество в $\mathcal{X}^*$, W – его проекция в $\mathcal{X}^*/\mathbf{G}$, а $\mathbf{G} \cdot V := \{f \cdot (u, J_{\text{st}}, J) : f \in \mathbf{G}, (u, J_{\text{st}}, J) \in V\}$ – его $\mathbf{G}$ -насыщение. Рассмотрим множество

$$\mathcal{Z} := \{(u, J_{\text{st}}, J) \in \mathbf{G} \cdot V : u(y_i) \in Z_i\}.$$

Тогда, если V было выбрано достаточно малым, $\mathcal{Z}$ будет гладким подмногообразием $\mathbf{G} \cdot V$, пересекающим каждую орбиту $\mathbf{G} \cdot (u, J_{\text{st}}, J)$ трансверсально в точности в одной точке. Это задает $\mathbf{G}$ -инвариантный диффеоморфизм $\mathbf{G} \cdot V \cong \mathbf{G} \times \mathcal{Z}$, и значит, $\mathcal{Z}$ – локальный срез $\mathbf{G}$ -действия в $(u^0, J_{\text{st}}, J^0)$.

Проекция таких локальных срезов $\mathcal{Z}$ на $\mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ задает там структуру гладкого банахова многообразия, а на самой проекции $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ – структуру главного $\mathbf{G}$ -расслоения.

Случай $g = 1$ можно рассматривать как комбинацию двух предыдущих случаев, поскольку при $g = 1$ группа $\mathbf{G}$ имеет “непрерывную” и “дискретную” части, T^2 и $\mathbf{Sl}(2, \mathbb{Z})$ соответственно. Фиксируем сначала $(u^0, J_S^0, J^0) \in \mathcal{X}^*$, а затем точку y на S такую, что u^0 – вложение в окрестности y , и в частности, du^0 не зануляется в y . Пусть Z – гладкое подмногообразие в X коразмерности 2, пересекающее $u^0(S)$ трансверсально в $u^0(y)$. Как и в случае $g = 0$, фиксируем окрестность $V \ni (u^0, J_S^0, J^0)$ в X и рассмотрим множество

$$\mathcal{Z} := \{(u, J_S, J) \in \mathbf{G} \cdot V : u(y) \in Z\},$$

где $\mathbf{G} \cdot V := \{f \cdot (u, J_{\text{st}}, J) : f \in \mathbf{G}, (u, J_{\text{st}}, J) \in V\}$ – $\mathbf{G}$ -насыщение V . Если V было выбрано достаточно малым, то $\mathcal{Z}$ будет срезом действия подгруппы $T^2 \subset \mathbf{G}$. Таким образом, $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*/T^2$ – главное T^2 -расслоение.

Теперь рассмотрим действие $\mathbf{Sl}(2, \mathbb{Z}) = \mathbf{G}/T^2$ на $\mathcal{X}^*/T^2$. Так же, как и в случае $g \geq 2$, показывается, что проекция $\mathcal{X}^*/T^2 \rightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ – накрытие. Следовательно, $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ есть главное $\mathbf{G}$ -расслоение.

Рассматривая проекцию $\mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{P}^*/\mathbf{G}$, заметим, что естественное включение $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ непрерывно и замкнуто. Это задает естественный $\mathbf{G}$ -инвариантный гомеоморфизм $\mathcal{P}^* \cong \mathcal{M} \times_{\mathcal{X}^*/\mathbf{G}} \mathcal{X}^*$, а значит, и структуру главного $\mathbf{G}$ -расслоения на $\mathcal{P}^*$ с базой $\mathcal{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что если $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}^*$, то u является вложением в окрестности каждой точки на S , за исключением конечного числа, в частности, J_S однозначно определяется по u и J . Подобным образом, каждый класс $\mathbf{G} \cdot (u, J_S, J) \in \mathcal{M}$ однозначно определяется по $J \in \mathcal{J}_U^k$ и псевдоголоморфной кривой $M := u(S)$. На основании этого мы обозначаем элементы из $\mathcal{M}$ через (M, J) . Мотивация этого обозначения заключается в том, что объекты, которые мы изучаем и используем, суть псевдоголоморфные кривые, а не их конкретные параметризации. Мы надеемся, что эта формальная неточность не приведет к недоразумениям.

Результат и конструкция из доказательства леммы 1.1 дают возможность строить из $\mathbf{G}$ -инвариантных объектов на $\mathcal{P}^*$ соответствующие объекты на $\mathcal{M}$. Например, над $\mathcal{P}$ имеется (тривиальное) расслоение со слоем S , тотальным пространством $\mathcal{P} \times S$, естественной проекцией на $\mathcal{P}$, комплексной структурой J_S в слое над (u, J_S, J) и отображением $\text{ev}: \mathcal{P} \times S \rightarrow X$, заданным формулой $\text{ev}(u, J_S, J; y) := u(y)$. Эти структуры инвариантны относительно действия $\mathbf{G}$ на $\mathcal{P} \times S$, продолжающего исходное действие $\mathbf{G}$ на $S \times \mathbb{T}$. Это задает $\mathbf{G}$ -расслоение $\pi_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ с тотальным пространством $\mathcal{E} := \mathcal{P}^* \times_{\mathbf{G}} S$ и слоем S , а также отображение $\text{ev}: \mathcal{E} \rightarrow X$. Мы будем воспринимать $\mathcal{M}$ как пространство модулей всех псевдоголоморфных кривых в X , обладающих соответствующими топологическими свойствами, $\pi_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ – как соответствующее расслоение “универсальной кривой”, а отображение $\text{ev}: \mathcal{E} \rightarrow X$ – как реализацию “универсальной кривой” в X . В частности, каждый слой $\mathcal{E}_{(M, J)} := \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(M, J)$ над $(M, J) \in \mathcal{M}$ обладает естественной комплексной структурой $J_{\mathcal{E}_{(M, J)}} = J_S$.

Аналогично можно определить банаховы расслоения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ над $\mathcal{X}^*/\mathbf{G} \supset \mathcal{M}$. Для этого заметим, что включение $\mathcal{X}^* \hookrightarrow \mathcal{S}_U \times \mathcal{J}_U^k$ непрерывно и $\mathbf{G}$ -инвариантно. Для $(u, J_S, J) \in \mathcal{S}_U \times \mathcal{J}_U^k$ и $f \in \mathbf{G}$ зададим диффеоморфизм $\hat{f}: S \rightarrow S$ по формуле (1.1) так, что $f \cdot (u, J_S, J) = (u \circ \hat{f}^{-1}, f \cdot J_S, J)$. Определим оператор f_* , полагая

$$f_*: s \in \hat{\mathcal{E}}_{(u, J_S, J)} \mapsto (\hat{f}^{-1})^* s \in \hat{\mathcal{E}}_{f \cdot (u, J_S, J)}.$$

Это определяет естественный подъем $\mathbf{G}$ -действия на $\mathcal{S}_U \times \mathcal{J}_U^k$ до $\mathbf{G}$ -действия на $\widehat{\mathcal{E}}$. Аналогично определяется подъем $\mathbf{G}$ -действия на $\widehat{\mathcal{E}}'$. Поскольку проекция $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$ допускает локальные $\mathbf{G}$ -срезы, существуют банаховы расслоения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ над $\mathcal{X}^*/\mathbf{G}$, и их подъемы на $\mathcal{X}^*$ $\mathbf{G}$ -эквивариантно изоморфны расслоениям $\widehat{\mathcal{E}}$ и $\widehat{\mathcal{E}}'$ соответственно. В частности, для $(u, J_S, J) \in \mathcal{X}^*$, представляющего $\mathbf{G} \cdot (u, J_S, J) \in \mathcal{X}^*/\mathbf{G}$, имеются естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{G} \cdot (u, J_S, J)} &\cong \widehat{\mathcal{E}}_{(u, J_S, J)} = L^{1,p}(S, E_u), \\ \mathcal{E}'_{\mathbf{G} \cdot (u, J_S, J)} &\cong \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)} = L^p(S, E_u \otimes \Lambda^{(0,1)} S).\end{aligned}$$

Мы хотим решать задачу деформации данной (компактной) J_0 -голоморфной кривой $M_0 = u_0(S)$ в компактную комплексную кривую M_1 , голоморфную относительно заданной (например интегрируемой) почти комплексной J_{st} структуры на X , используя метод продолжения. Его идея заключается в том, чтобы найти подходящую гомотопию $h(t) = J_t$, $t \in [0, 1]$, почти комплексных структур, соединяющую J_0 с $J_{\text{st}} = J_1$, а затем построить непрерывную деформацию $u_t: S \rightarrow X$ отображения u_0 в u_1 так, чтобы u_t было J_t -голоморфно при всех $t \in [0, 1]$. Для этого мы изучим линейаризацию уравнения $\bar{\partial}_{J_t} u = 0$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово многообразие, $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ и $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{X}$ — C^1 -гладкие банаховы расслоения над $\mathcal{X}$, ∇ и ∇' — связности в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ соответственно, σ — (локальное) C^1 -сечение $\mathcal{E}$ и $D: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ — C^1 -гладкий гомоморфизм расслоений.

- i) Если $\sigma(x) = 0$ для некоторого $x \in \mathcal{X}$, то отображение $\nabla \sigma_x: T_x \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}_x$ не зависит от выбора связности ∇ в $\mathcal{E}$;
- ii) Положим $K_x := \text{Ker}(D_x: \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}'_x)$ и $Q_x := \text{Coker}(D_x: \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}'_x)$ с соответствующими включениями $i_x: K_x \rightarrow \mathcal{E}_x$ и проекцией $p_x: \mathcal{E}'_x \rightarrow Q_x$. Пусть ∇^{Hom} — связность в $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, индуцируемая связностями ∇ и ∇' . Тогда отображение

$$p_x \circ (\nabla^{\text{Hom}} D_x) \circ i_x: T_x \mathcal{X} \rightarrow \text{Hom}(K_x, Q_x)$$

не зависит от выбора ∇ и ∇' .

ЗАМЕЧАНИЕ. Исходя из утверждений леммы, мы будем использовать следующие обозначения. Для $\sigma \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$, $D \in \Gamma(\mathcal{X}, \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'))$ и $x \in \mathcal{X}$, как в условиях леммы, мы будем обозначать через $\nabla \sigma_x: T_x \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}_x$ и $\bar{\nabla} D: T_x \mathcal{X} \times \text{Ker } D_x \rightarrow \text{Coker } D_x$ соответствующие операторы без указания на то, какие именно связности использовались для их определения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Пусть $\tilde{\nabla}$ — другая связность в $\mathcal{E}$. Тогда $\tilde{\nabla}$ имеет вид $\tilde{\nabla} = \nabla + A$ для некоторого $A \in \Gamma(\mathcal{X}, \text{Hom}(T\mathcal{X}, \text{End}(\mathcal{E})))$. Поэтому для $\xi \in T_x \mathcal{X}$ мы получим $\tilde{\nabla}_\xi \sigma - \nabla_\xi \sigma = A(\xi, \sigma(x)) = 0$.

ii) Аналогично, пусть $\tilde{\nabla}'$ — другая связность в $\mathcal{E}'$, и пусть $\tilde{\nabla}^{\text{Hom}}$ — связность в $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, индуцируемая $\tilde{\nabla}$ и $\tilde{\nabla}'$. Тогда $\tilde{\nabla}'$ тоже имеет вид $\tilde{\nabla}' = \nabla' + A'$ с некоторым $A' \in \Gamma(\mathcal{X}, \text{Hom}(T\mathcal{X}, \text{End}(\mathcal{E}')))$. Поэтому для $\xi \in T_x \mathcal{X}$ мы получим $\tilde{\nabla}_\xi^{\text{Hom}} D - \nabla_\xi^{\text{Hom}} D = A'(\xi) \circ D_x - D_x \circ A(\xi)$. Теперь утверждение леммы следует из тождеств $p_x \circ D_x = 0$ и $D_x \circ i_x = 0$.

Пространство $\mathcal{P}$ псевдоголоморфных отображений было определено как множество нулей сечения $\sigma_{\bar{\partial}}: \mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}'$. Лемма 1.2 утверждает, что для любого $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}$ имеется корректно определенный оператор

$$\nabla \sigma_{\bar{\partial}}: T_u L^{1,p}(S, X) \oplus T_{J_S} \mathbb{T}_g \oplus T_J \mathcal{J}_U^k \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)}.$$

Этот оператор и является искомой линеаризацией уравнения $\bar{\partial}_{J_S, J} u = 0$. Ковариантное дифференцирование равенства (1.2) показывает, что он имеет вид

$$\nabla \sigma_{\bar{\partial}}: (v, \dot{J}_S, \dot{J}) \longmapsto D_{(u, J)} v + J \circ du \circ \dot{J}_S + \dot{J} \circ du \circ J_S \in \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)}. \quad (1.5)$$

Здесь $D = D_{(u, J)}$ – оператор Громова, определенный на $T_u \mathcal{S}_U \equiv \mathcal{E}_{(u, J)} \equiv L^{1,p}(S, u^* TX)$. Для получения явной формулы для D зафиксируем связности ∇^S в TS и ∇^X в TX . Отметим, что мы можем выбрать связность ∇^S симметрической и J_S -комплексной для данной J_S . Последнее означает, что $\nabla^S J_S = 0$. Однако в общем случае не существует связности ∇^X , которая обладала бы обоими этими свойствами – симметричностью и J -комплексностью, так что приходится выбирать в пользу одного из них. В настоящей работе мы останавливаем свой выбор на симметрических связностях ∇^X , поскольку это дает возможность зафиксировать одну связность для всех $J \in \mathcal{J}_U^k$. В дальнейшем мы используем то же обозначение ∇ для связностей в TS и в TX , а также в других расслоениях, получаемых из TX и TS , например в $E_u = u^* TX$. Отметим, что связности ∇^S и ∇^X индуцируют связности также и в банаховых расслоениях $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$. Это дает следующую формулу для оператора Громова $D_{u, J}: L^{1,p}(S, E_u) \rightarrow L^p(S, E_u \otimes \Lambda^{(0,1)} S)$

$$D_{u, J}(v) = \nabla v + \frac{1}{2} J \circ \nabla v \circ J_S + \frac{1}{2} (\nabla_v J) \circ du \circ J_S. \quad (1.6)$$

Явные выкладки сделаны в [2], см. также [9], для случая J -комплексной связности ∇^X в TX . Оператор $D = D_{u, J}$ эквивариантен относительно действия $\mathbf{G}$ и, значит, индуцирует гомоморфизм расслоений $D: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ над $\mathcal{M}$.

Следующие сведения об операторе D будут нами использованы в дальнейшем. Пусть $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}$.

ЛЕММА 1.3. *Оператор Громова $D_{u, J}: L^{1,p}(S, E_u) \rightarrow L^p(S, E_u \otimes \Lambda^{(0,1)} S)$ – $\mathbb{R}$ -линейный дифференциальный оператор первого порядка с символом Коши–Римана. Он разлагается в сумму $D_{u, J} = \bar{\partial}_{u, J} + R$, где $\mathbb{C}$ -линейный оператор $\bar{\partial}_E := \bar{\partial}_{u, J}$ и $\mathbb{C}$ -антилинейный оператор R обладают следующими свойствами:*

- i) *существует единственная голоморфная структура на E_u такая, что $\bar{\partial}_E = \bar{\partial}_{u, J}$ – соответствующий оператор Коши–Римана;*
- ii) *если J – C^k -гладко, то R – C^{k-1} -гладкий $\mathbb{C}$ -антилинейный гомоморфизм из E_u в $E_u \otimes \Lambda^{(0,1)} S$, т.е. $R \in C^{k-1}(S, \overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(E_u, E_u \otimes \Lambda^{(0,1)} S))$; более того, для $x \in S$, $v \in E_x = T_{u(x)} X$ и $\xi \in T_x S$ выполнено $R(v, \xi) = N_J(v, du(\xi))$, где N_J обозначает тензор кручения Нийенгейса почти комплексной структуры J (см. [10]);*
- iii) *априори непрерывный гомоморфизм $du: TS \rightarrow E_u$ в действительности голоморфен, т.е. удовлетворяет условию $du \circ \bar{\partial}_{TS} = \bar{\partial}_E \circ du$; кроме того, $R \circ du = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Явная формула (1.4) показывает, что оператор Громова D является дифференциальным оператором первого порядка с символом Коши–Римана. Поскольку символ $\mathbb{C}$ -линеен, $\mathbb{C}$ -антилинейная компонента R оператора D имеет порядок 0, т.е. R – гомоморфизм расслоений. Явный вывод формулы $R = N_J \circ du$ имеется в [2; лемма 2.2.1].

В свою очередь, $\mathbb{C}$ -линейная компонента $\bar{\partial}_{u,J}$ оператора D имеет порядок 1 и символ Коши–Римана. Существование голоморфной структуры на E_u , для которой $\bar{\partial}_{u,J}$ – соответствующий оператор Коши–Римана, является стандартным фактом.

Пусть $\xi \in L^{1,p}(S, TS)$, и пусть $\Phi_t: S \rightarrow S$ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождаемая ξ . Положим $u_t := u \circ \Phi_{-t}$ и $J_S(t) := \Phi_{-t}^* J_S$. Дифференцируя равенство $\bar{\partial}_{J_S(t),J} u_t = 0$ при $t = 0$ и используя тождества $\left. \frac{dJ_S(t)}{dt} \right|_{t=0} = L_\xi J = 2J\bar{\partial}\xi$ и $\left. \frac{du_t}{dt} \right|_{t=0} = du(\xi)$, мы получим соотношение

$$du \circ \bar{\partial}_{TS} = D_{u,J} \circ du. \quad (1.7)$$

Часть iii) утверждения леммы получается рассмотрением $\mathbb{C}$ -линейной и $\mathbb{C}$ -антилинейной частей равенства (1.7).

За детальным доказательством этой леммы мы отсылаем к [2; §2].

СЛЕДСТВИЕ 1.4. i) *Множество критических точек J -голоморфного отображения $u: (S, J_S) \rightarrow (X, J)$ с условием $J \in C^1(X)$ является дискретным в S ;*

ii) *для любой точки $a \in S$ порядок нуля du в a корректно определен.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Часть i) следствия 1.4 доказана Д. МакДафф в случае $J \in C^\infty$ и Ж.-К. Сикоравом в случае $J \in C^1$.

Другим следствием леммы 1.3 является следующая точная последовательность когерентных пучков:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(TS) \xrightarrow{du} \mathcal{O}(E_u) \longrightarrow \mathcal{N}_u \longrightarrow 0. \quad (1.8)$$

Здесь $\mathcal{N}$ обозначает фактор-пучок $\mathcal{O}(E)/du(\mathcal{O}(TS))$. Он разлагается в сумму $\mathcal{N}_u = \mathcal{O}(N_u) \oplus \mathcal{N}_u^{\text{sing}}$, где N_u – голоморфное векторное расслоение, а $\mathcal{N}_u^{\text{sing}} = \bigoplus_{i=1}^P \mathbb{C}_{a_i}^{n_i}$. Здесь $\mathbb{C}_{a_i}^{n_i}$ обозначает пучок, сосредоточенный в критической точке $a_i \in S$ отображения du и имеющий росток $\mathbb{C}^{n_i}$ с $n_i = \text{ord}_{a_i} du$, т.е. n_i – порядок нуля du в a_i . Мы называем $\mathcal{N}_u$ *нормальным пучком* к $M = u(S)$, N_u – *нормальным расслоением* к M , а $\mathcal{N}_u^{\text{sing}}$ – *пучком ветвления* M .

Пусть Z_{du} обозначает дивизор $\sum_{i=1}^P n_i[a_i]$, а $\mathcal{L}(Z_{du})$ – пучок мероморфных функций на S , имеющих в a_i полюс порядка не больше чем n_i . Соответствующее голоморфное линейное расслоение будет обозначаться также через $\mathcal{L}(Z_{du})$. Тогда (1.8) порождает точную последовательность голоморфных векторных расслоений

$$0 \longrightarrow TS \otimes \mathcal{L}(Z_{du}) \xrightarrow{du} E \longrightarrow N_u \longrightarrow 0. \quad (1.9)$$

Пусть $L_{(0,1)}^p(S, E)$ обозначает пространство L^p -интегрируемых $(0, 1)$ -форм на S с коэффициентами в E . Тогда из леммы 1.3 и соотношения (1.7) следует коммутативность диаграммы пучков с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow L^{1,p}(S, TS \otimes \mathcal{L}(Z_{du})) & \xrightarrow{du} & L^{1,p}(S, E) & \xrightarrow{\text{pr}} & L^{1,p}(S, N_u) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \bar{\partial}_S & & \downarrow D_{u,J} & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow L_{(0,1)}^p(S, TS \otimes \mathcal{L}(Z_{du})) & \xrightarrow{du} & L_{(0,1)}^p(S, E) & \longrightarrow & L_{(0,1)}^p(S, N_u) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (1.10)$$

Это определяет оператор

$$D_{u,J}^N: L^{1,p}(S, N_u) \rightarrow L_{(0,1)}^p(S, N_u)$$

вида $D_{u,J}^N = \bar{\partial}_N + R_N$. Как обычно, $\bar{\partial}_N$ обозначает $\bar{\partial}$ -оператор в N_u , а $R_N \in C^0(S, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(N_u, \Lambda^{0,1} \otimes N_u))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть E – голоморфное векторное расслоение над компактной римановой поверхностью (S, J_S) , и $D: L^{1,p}(S, E) \rightarrow L_{(0,1)}^p(S, E)$ – оператор вида $D = \bar{\partial}_E + R$, где $R \in L^p(S, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \Lambda^{0,1}S \otimes E))$, $2 < p < \infty$. Определим $H_D^0(S, E) := \text{Ker } D$ и $H_D^1(S, E) := \text{Coker } D$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что для $E, R \in L^p$, $2 < p < \infty$, и $D = \bar{\partial} + R$ пространства $H_D^i(S, E)$ можно определить как ядро и коядро оператора

$$\bar{\partial} + R: L^{1,q}(S, E) \rightarrow L_{(0,1)}^q(S, E)$$

с любым $1 < q \leq p$. Таким образом, $H_D^i(S, E)$ не зависят от выбора функциональных пространств. Кроме того, оператор D – фредгольмов с индексом

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\mathbb{R}}(D) &:= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}(D)) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Coker}(D)) \\ &= \text{ind}_{\mathbb{R}}(\bar{\partial}) = 2(c_1(E)[S] + (1 - g) \cdot \text{rk}_{\mathbb{C}}(E)). \end{aligned}$$

Доказательство этих фактов дано в [2].

По “лемме о змее” из гомологической алгебры диаграмма (1.10) определяет следующую длинную точную последовательность D -когомологий.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S, TS \otimes \mathcal{L}(Z_{du})) & \longrightarrow & H_D^0(S, E) & \longrightarrow & H_D^0(S, N_u) \\ & & \xrightarrow{\delta} & & H_D^1(S, E) & \longrightarrow & H_D^1(S, N_u) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (1.11)$$

Доказательство следующего утверждения имеется в [2; лемма 2.3.2].

ЛЕММА 1.5 (двойственность Серра для D -когомологий). Пусть E – голоморфное векторное расслоение над компактной римановой поверхностью (S, J_S) , и пусть $D: L^{1,p}(S, E) \rightarrow L_{(0,1)}^p(S, E)$ – оператор вида $D = \bar{\partial} + R$, где $R \in L^p(S, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \Lambda^{0,1}S \otimes E))$, $2 < p < \infty$. Пусть $K_S := \Lambda^{1,0}S$ обозначает каноническое расслоение (S, J_S) . Тогда существует естественно определенный оператор

$$D^* = \bar{\partial} - R^*: L^{1,p}(S, E^* \otimes K_S) \rightarrow L_{(0,1)}^p(S, E^* \otimes K_S)$$

с $R^* \in L^p(S, \text{Hom}(E^* \otimes K_S, \Lambda^{0,1}S \otimes E^* \otimes K_S))$ и естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_D^0(S, E)^* &\cong H_{D^*}^1(S, E^* \otimes K_S), \\ H_D^1(S, E)^* &\cong H_{D^*}^0(S, E^* \otimes K_S). \end{aligned}$$

Если вдобавок R – $\mathbb{C}$ -антилинеен, то R^* тоже $\mathbb{C}$ -антилинеен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство леммы 1.5 основано на следующем тождестве, которое можно принять за определение D^* . Для $\xi \in L^{1,p}(S, E)$ и $\eta \in L^{1,q}(S, E^* \otimes K_S)$ выполнено

$$\operatorname{Re} \int_S \langle \bar{\partial}\xi + R\xi, \eta \rangle = \operatorname{Re} \int_S \bar{\partial}\langle \xi, \eta \rangle + \operatorname{Re} \int_S \langle \xi, -(\bar{\partial} - R^*)\eta \rangle = \operatorname{Re} \int_S \langle \xi, -D^*\eta \rangle. \quad (1.12)$$

Поэтому естественное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle: L^p_{(0,1)}(S, E) \times H^0_{D^*}(S, E^* \otimes K_S) \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \varphi, \eta \rangle := \operatorname{Re} \int_S \langle \varphi, \eta \rangle$ зануляется на образе D и индуцирует спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H^1_D(S, E) \times H^0_{D^*}(S, E^* \otimes K_S) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Последнее спаривание и является двойственностью.

СЛЕДСТВИЕ 1.6 [6], [11] (теоремы исчезновения для D -когомологий). Пусть S – риманова поверхность рода g с комплексной структурой J_S . Пусть L – голоморфное линейное расслоение над S и $D: L^{1,p}(S, L) \rightarrow L^p_{(0,1)}(S, L)$ – оператор вида $D = \bar{\partial} + R$ с $R \in L^p(S, \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(L, \Lambda^{0,1}S \otimes L))$, $p > 2$.

Тогда если $c_1(L) < 0$, то $H^0_D(S, L) = 0$, а если $c_1(L) > 2g - 2$, то $H^1_D(S, L) = 0$.

В частности, при $g = 0$ либо $\dim_{\mathbb{R}}(H^1_D(S, L)) = 0$, либо $\dim_{\mathbb{R}}(H^1_D(S, L))$ положительна и четна, а $\dim_{\mathbb{R}}(H^0_D(S, L)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ – нетривиальное $L^{1,p}$ -сечение L , удовлетворяющее уравнению $D\xi = 0$. Тогда по лемме 3.1.1 из работы [2] ξ имеет только конечное число нулей $a_i \in S$ с положительными кратностями μ_i , так что $c_1(L) = \sum \mu_i \geq 0$. Следовательно, $H^0_D(S, L)$ тривиально, если $c_1(L) < 0$. Тривиальность H^1_D получается аналогично с применением двойственности Серра из леммы 1.5.

В частности, при $g = 0$ либо $c_1(L) < 0$, либо $c_1(L) > -2$. Значит, либо $H^0_D(S, L)$, либо $H^1_D(S, L)$ тривиально. Четность $\dim_{\mathbb{R}}(H^1_D(S, L))$ следует из четности $\operatorname{ind}_{\mathbb{R}}(D) = \operatorname{ind}_{\mathbb{R}}(\bar{\partial}) = 2 \operatorname{ind}_{\mathbb{C}}(\bar{\partial})$ по теореме об индексе.

Заметим, что из леммы 1.3 следует коммутативность следующей диаграммы с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow L^{1,p}(S, TS) & \xrightarrow{du} & L^{1,p}(S, E) & \xrightarrow{\overline{\operatorname{pr}}} & L^{1,p}(S, E)/du(L^{1,p}(S, TS)) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \bar{\partial}_S & \downarrow D & & \downarrow \bar{D} & \\ 0 \rightarrow L^p_{(0,1)}(S, TS) & \xrightarrow{du} & L^p_{(0,1)}(S, E) & \xrightarrow{\overline{\operatorname{pr}}} & L^p_{(0,1)}(S, E)/du(L^p_{(0,1)}(S, TS)) & \rightarrow 0, \end{array} \quad (1.13)$$

где $\bar{D}$ индуцируется $D \equiv D_{u,J}$.

ЛЕММА 1.7. Для оператора $\bar{D}$ имеются естественные изоморфизмы $\operatorname{Ker} \bar{D} = H^0_{D_N}(S, N_u) \oplus H^0(S, \mathcal{N}_u^{\operatorname{sing}})$ и $\operatorname{Coker} \bar{D} = H^1_{D_N}(S, N_u)$.

Доказательство приведено в работе [2; лемма 2.4.1].

СЛЕДСТВИЕ 1.8. Короткая точная последовательность пучков (1.8) индуцирует длинную точную последовательность D -когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^0(S, TS) & \xrightarrow{du} & H^0_D(S, E) & \rightarrow & H^0_D(S, N_u) \oplus H^0(S, \mathcal{N}_u^{\operatorname{sing}}) & & \\ & \searrow \delta & \xrightarrow{du} & H^1_D(S, E) & \rightarrow & H^1_D(S, N_u) & \rightarrow 0. \end{array} \quad (1.14)$$

§ 2. Свойство трансверсальности пространства модулей

Чтобы продеформировать псевдоголоморфную кривую M_t над заданным путем почти комплексных структур J_t , полезно знать, в каких точках (u, J_S, J) множество псевдоголоморфных отображений $\mathcal{P}$ является банаховым многообразием. Отметим, что по определению $\mathcal{P}$ является пересечением нулевого сечения и сечения $\sigma_{\overline{\partial}}$ тотального пространства $\widehat{\mathcal{E}}'$ над $\mathcal{S} \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k$. Таким образом, задача сводится к вопросу о трансверсальности этих сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — банаховы многообразия, а $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ и $g: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ — C^k -гладкие отображения, $k \geq 1$. Определим *расслоенное произведение* $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$, полагая $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} := \{(y, z) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} : f(y) = g(z)\}$. Отображение f называется *трансверсальным* к g в точке $(y, z) \in \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ с $x := f(y) = g(z)$, а (y, z) называется *трансверсальной точкой*, если отображение $df_y \oplus -dg_z: T_y \mathcal{Y} \oplus T_z \mathcal{Z} \rightarrow T_x \mathcal{X}$ сюръективно, а его ядро допускает замкнутое дополнение — пространство. Множество трансверсальных точек в $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ мы обозначаем $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}}^{\text{tr}} \mathcal{Z}$, где tr символизирует условие трансверсальности.

В частности, если отображение $g: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ — вложение, то расслоенное произведение $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ есть просто прообраз $f^{-1}\mathcal{Z}$ множества $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$, и значит, каждая точка $(y, z) \in \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ полностью определяется точкой $y \in \mathcal{Y}$. В этом случае мы говорим, что $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ *трансверсально* к $\mathcal{Z}$ в $y \in \mathcal{Y}$, если $(y, f(y))$ — трансверсальная точка $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} \cong f^{-1}\mathcal{Z}$.

ЛЕММА 2.1. *Множество $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}}^{\text{tr}} \mathcal{Z}$ открыто в $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ и является C^k -гладким банаховым многообразием с касательным пространством*

$$T_{(y,z)} \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}}^{\text{tr}} \mathcal{Z} = \text{Ker}(df_y \oplus -dg_z: T_y \mathcal{Y} \oplus T_z \mathcal{Z} \rightarrow T_x \mathcal{X}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $w_0 := (y_0, z_0) \in \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}}^{\text{tr}} \mathcal{Z}$ и положим $K_0 := \text{Ker}(df_{y_0} \oplus -dg_{z_0}: T_{y_0} \mathcal{Y} \oplus T_{z_0} \mathcal{Z} \rightarrow T_x \mathcal{X})$. Пусть Q_0 — замкнутое дополнение к K_0 . Тогда отображение $df_{y_0} \oplus -dg_{z_0}: Q_0 \rightarrow T_x \mathcal{X}$ — изоморфизм.

Выбор Q_0 обеспечивает существование такой окрестности $V \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ точки (y_0, z_0) и таких C^k -отображений $w': V \rightarrow K_0$ и $w'': V \rightarrow Q_0$, что dw'_{w_0} (соответственно dw''_{w_0}) — проекция из $T_{y_0} \mathcal{Y} \oplus T_{z_0} \mathcal{Z}$ на K_0 (соответственно на Q_0). Поэтому (w', w'') — координаты в некоторой (меньшей) окрестности $V_1 \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ точки $w_0 = (y_0, z_0)$. Утверждение леммы следует из рассмотрения уравнения $f(y) = g(z)$ в новых координатах (w', w'') и применения теоремы о неявной функции.

Легко видеть, что множество $\mathcal{P}$ фактически является расслоенным произведением банахова многообразия $\mathcal{S}_U \times \mathbb{T} \times \mathcal{J}_U^k$ на себя относительно отображений σ_0 и $\sigma_{\overline{\partial}}$ в $\mathcal{E}'$. По лемме 2.1 $\mathcal{P}$ будет банаховым многообразием в тех точках $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}$, где $\sigma_{\overline{\partial}}$ трансверсально к σ_0 . Однако для любой точки $(u, J_S, J; 0)$ на нулевом сечении σ_0 расслоения $\widehat{\mathcal{E}}'$ имеется естественное разложение

$$T_{(u, J_S, J; 0)} \widehat{\mathcal{E}}' = d\sigma_0(T_{(u, J_S, J)}(\mathcal{S}_U \times \mathcal{J}_S \times \mathcal{J}_U^k)) \oplus \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)},$$

где первая компонента — касательное пространство к нулевому сечению $\widehat{\mathcal{E}}'$, а вторая — касательное пространство к слою $\widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)}$. Пусть p_2 обозначает проекцию на вторую компоненту. Тогда трансверсальность $\sigma_{\overline{\partial}}$ и σ_0 в $(u, J_S, J; 0)$ эквивалентна сюръективности отображения $p_2 \circ d\sigma_{\overline{\partial}}: T_{(u, J_S, J)}(\mathcal{S}_U \times \mathcal{J}_U^k) \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)}$. Но по лемме 1.2 это отображение — линеаризация $\sigma_{\overline{\partial}}$ в (u, J_S, J) и имеет вид (1.3).

Таким образом, трансверсальность $\sigma_{\bar{\partial}}$ и σ_0 в $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}$ эквивалентна сюръективности оператора

$$\nabla \sigma_{\bar{\partial}}: T_u L^{1,p}(S, X) \oplus T_{J_S} \mathbb{T}_g \oplus T_J \mathcal{J}_U^k \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)},$$

$$\nabla \sigma_{\bar{\partial}}: (v, \dot{J}_S, \dot{J}) \longmapsto D_{(u, J)} v + J \circ du \circ \dot{J}_S + \dot{J} \circ du \circ J_S.$$

По определению 1.1 фактор $\widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)} = L^p_{(0,1)}(S, E_u)$ по образу $D_{u, J}$ есть $H_D^1(S, E_u)$. Индуцированное отображение $\dot{J}_S \in T_{J_S} \mathbb{T}_g \mapsto [J \circ du \circ \dot{J}_S] \in H_D^1(S, E_u)$ тоже легко описать. Из равенства (1.5) и следствия 1.8 следует, что образ этого отображения равен образу гомоморфизма $du \circ J_S: H^1(S, TS) \cong T_{J_S} \mathbb{T}_g \rightarrow H_D^1(S, E_u)$, а его коядро есть $H_D^1(S, N_u)$.

Таким образом, остается понять образ $T_J \mathcal{J}_U^k$ в $H_D^1(S, N_u)$. Для $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}$ определим $\Psi = \Psi_{(u, J)}: T_J \mathcal{J}_U^k \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}'_{(u, J_S, J)}$, полагая $\Psi_{(u, J)}(\dot{J}) := \dot{J} \circ du \circ J_S$. Пусть $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{(u, J)}: T_J \mathcal{J}_U^k \rightarrow H_D^1(S, N_u)$ индуцируется Ψ . Напомним, что если $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}$, то J_S однозначно определяется по u и J .

ЛЕММА 2.2 (инфинитезимальная трансверсальность). *Для $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}^*$ оператор $\bar{\Psi}: T_J \mathcal{J}_U^k \rightarrow H_D^1(S, N_u)$ сюръективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [2] (см. также [9]) доказано, что для $(u, J_S, J) \in \mathcal{P}^*$ отображение u является вложением в окрестности всех точек $x \in S$, за исключением конечного числа. Поэтому существует такое непустое открытое подмножество $V \subset S$, что $u(V) \subset U$ и $u|_V$ – вложение.

По лемме 1.5 мы имеем изоморфизм $H_D^0(S, N_u^* \otimes K_S) \cong H_D^1(S, N_u)^*$. Фредгольмовость оператора вида $D = \bar{\partial} + R: L^{1,p}(S, E) \rightarrow L^p_{(0,1)}(S, E)$ на компактной римановой поверхности (S, J_S) обеспечивает существование конечного базиса $\xi_1, \dots, \xi_l$ пространства $H_D^0(S, N_u^* \otimes K_S)$. По лемме 3.1.1 из [2] любое $\xi \in H_D^0(S, N_u^* \otimes K_S)$ обращается в нуль не более чем в $c_1(N_u^* \otimes K_S)[S]$ точках на S (ср. с доказательством следствия 1.6). Отсюда следует, что существуют $\psi_i \in C_c^k(V, N \otimes \Lambda^{0,1})$, $i = 1, \dots, l$, порождающие $\mathbb{R}$ -базис пространства $H_D^1(S, N)$.

Возьмем какое-нибудь $\psi_i \in C_c^k(V, N \otimes \Lambda^{0,1})$. Это $\mathbb{C}$ -антилинейный C^k -гладкий гомоморфизм из $TS|_V$ в $N|_V$, зануляющийся вне некоторого компакта в V . Поскольку $u|_V$ есть C^k -гладкое вложение и $u(V) \subset U$, ψ_i можно представить в виде $\psi_i = \text{pr}_N \circ \dot{J} \circ du \circ J_S$ с некоторым J -антилинейным C^k -гладким эндоморфизмом $\dot{J}$ расслоения TX , зануляющимся вне некоторого компакта в U . Поэтому $\dot{J} \in T_J \mathcal{J}_U^k$ и $\bar{\Psi} \dot{J} = \psi_i$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *$\mathcal{M}$ и $\mathcal{P}^*$ – C^k -гладкие банаховы многообразия, а $\pi_{\mathcal{J}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}_U^k$ – фредгольмово отображение. Для $(M, J) \in \mathcal{M}$ с $M = u(S)$ существуют естественные изоморфизмы*

$$\text{Ker}(d\pi_{\mathcal{J}}: T_{(M, J)} \mathcal{M} \rightarrow T_J \mathcal{J}_U^k) \cong H_D^0(S, \mathcal{N}_M),$$

$$\text{Coker}(d\pi_{\mathcal{J}}: T_{(M, J)} \mathcal{M} \rightarrow T_J \mathcal{J}_U^k) \cong H_D^1(S, \mathcal{N}_M),$$

где $\mathcal{N}_M = \mathcal{O}(N_u) \oplus \mathcal{N}_u^{\text{sing}}$ – нормальный пучок к M , $H_D^0(S, \mathcal{N}_M)$ обозначает $H_D^0(S, N_u) \oplus H^0(S, \mathcal{N}_u^{\text{sing}})$, а $H_D^1(S, \mathcal{N}_M)$ обозначает $H_D^1(S, N_u)$. Индекс проекции $\pi_{\mathcal{J}}$

$$\text{ind}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathcal{J}}) = \text{ind}_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}_M) := \dim_{\mathbb{R}} H_D^0(S, \mathcal{N}_M) - \dim_{\mathbb{R}} H_D^1(S, \mathcal{N}_M)$$

равен $2(c_1(X)[M] + (n-3)(1-g))$, где $n := \dim_{\mathbb{C}} X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что сечение $\sigma_{\bar{\partial}}$ C^k -гладко, если $J \in \mathcal{J}_U^k$. Поэтому утверждение о $\mathcal{P}^*$ следует из лемм 2.1 и 2.2. Более того, $\mathcal{P}^*$ — C^k -гладкое подмногообразие $\mathcal{X}^*$. Нетрудно показать, что срезы действия $\mathbf{G}$ на $\mathcal{X}^*$, построенные в доказательстве леммы 1.1, являются C^∞ -гладкими. Поэтому проекция $\pi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{M}$ индуцирует на $\mathcal{M}$ структуру C^k -гладкого многообразия.

Рассмотрим проекцию $\pi: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{J}_U^k$. Касательное пространство $T_{(u, J_S, J)} \mathcal{P}^*$ состоит из троек вида $(v, \dot{J}_S, \dot{J})$, удовлетворяющих условию

$$D_{u, J} v + \frac{1}{2} J \circ du \circ \dot{J}_S + \frac{1}{2} \dot{J} \circ du \circ J_S = 0,$$

а дифференциал $d\pi: T_{(u, J_S, J)} \mathcal{P}^* \rightarrow T_J \mathcal{J}_U^k$ имеет вид $(v, \dot{J}_S, \dot{J}) \in T_{(u, J_S, J)} \mathcal{P}^* \mapsto \dot{J} \in T_J \mathcal{J}_U^k$.

Поэтому ядро $\text{Ker}(d\pi) \subset T_{(u, J_S, J)} \mathcal{P}^*$ параметризуется решениями уравнения

$$D_{u, J} v + \frac{1}{2} J \circ du \circ \dot{J}_S = 0$$

с $v \in \mathcal{E}_{(u, J_S, J)}$ и $\dot{J}_S \in T_{J_S} \mathbb{T}_g$. Поскольку отображение $\pi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{M}$ — главное $\mathbf{G}$ -расслоение, ядро $\text{Ker}(d\pi_{\mathcal{P}}: T_{(M, J)} \mathcal{M} \rightarrow T_J \mathcal{J}_U^k)$ получается из $\text{Ker}(d\pi)$ факторизацией по касательному пространству к слою $\mathbf{G} \cdot (u, J_S, J)$. Поскольку $T_e \mathbf{G} \equiv \mathbf{H}^0(S, TS)$ и $\mathbf{G}_0$ действует тривиально на $\mathbb{T}_g$ и на $\mathcal{J}_U^k$, касательное пространство к слою $\mathbf{G} \cdot (u, J_S, J)$ в точке (u, J_S, J) состоит из векторов вида $(v, 0, 0)$ с $v \in du(\mathbf{H}^0(S, TS))$. Из соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^0(S, TS) &= \text{Ker}(\bar{\partial}_{TS}: L^{1,p}(S, TS) \rightarrow L^p(S, TS \otimes \Lambda^{(0,1)} S)), \\ T_{J_S} \mathbb{T}_g &\cong \mathbf{H}^1(S, TS) = \text{Coker}(\bar{\partial}_{TS}), \\ du \circ \bar{\partial}_{TS} &= D_{(u, J)} \circ du \end{aligned}$$

следует, что $\text{Ker}(d\pi_{\mathcal{P}})$ изоморфно фактору

$$\begin{aligned} \{v \in L^{1,p}(S, E_u) : Dv = du(\varphi) \text{ для некоторого} \\ \varphi \in L^p(S, TS \otimes \Lambda^{(0,1)} S)\} / du(L^{1,p}(S, TS)). \end{aligned}$$

Значит, $\text{Ker}(d\pi_{\mathcal{P}}: T_{(M, J)} \mathcal{M} \rightarrow T_J \mathcal{J}_U^k) \cong \mathbf{H}_D^0(M, \mathcal{N}_M)$ по лемме 1.7. В частности, $\text{Ker}(d\pi_{\mathcal{P}})$ конечномерно.

Аналогично, образ $d\pi_{\mathcal{P}}$ состоит из таких $\dot{J}$, для которых уравнение

$$D_{u, J} v + \frac{1}{2} J \circ du \circ \dot{J}_S + \frac{1}{2} \dot{J} \circ du \circ J_S = 0$$

имеет решение $(v, \dot{J}_S)$. Следовательно,

$$\text{Im}(d\pi_{\mathcal{P}}) = \text{Ker } \bar{\Psi} \text{ и } \text{Coker}(d\pi_{\mathcal{P}}) \cong \mathbf{H}_D^1(S, N_u).$$

Поэтому $d\pi_{\mathcal{P}}$ фредгольмово. Отсюда следует фредгольмовость $\pi: \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{J}_U^k$.

Следствие 1.8 влечет равенство $\text{ind}_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}_M) = \text{ind}_{\mathbb{R}}(E_u) - \text{ind}_{\mathbb{R}}(TS)$. Используя теорему Римана–Роха и соотношения $c_1(E) = c_1(X)[M]$ и $c_1(TS) = 2 - 2g$, мы получим искомую формулу

$$\text{ind}_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}) = 2(c_1(X)[M] + n(1 - g) - (3 - 3g)) = 2(c_1(X)[M] + (n - 3)(1 - g)).$$

Прежде чем формулировать дальнейшие результаты, введем несколько новых обозначений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть Y — C^k -гладкое конечномерное многообразие, возможно с непустой C^k -гладкой границей ∂Y , и пусть $h: Y \rightarrow \mathcal{J}_U^k - C^k$ -гладкое отображение. Определим *относительное пространство модулей*

$$\mathcal{M}_h := Y \times_{\mathcal{J}_U^k} \mathcal{M} \cong \{(u, J_S, y) \in \mathcal{S}_U \times \mathbb{T}_g \times Y : (u, J_S, h(y)) \in \mathcal{P}^*\} / \mathbf{G},$$

наделив его естественной проекцией $\pi_h: \mathcal{M}_h \rightarrow Y$. В частном случае $Y = \{J\} \hookrightarrow \mathcal{J}_U^k$ мы получим пространство модулей J -голоморфных кривых $\mathcal{M}_J := \pi_J^{-1}(J)$. В общем случае слои проекции $\pi_h^{-1}(y)$ суть $\mathcal{M}_{h(y)}$. Элементы $\mathcal{M}_h$ мы будем обозначать (M, y) , где $M = u(S)$ с $h(y)$ -голоморфным отображением $u: S \rightarrow X$.

ЛЕММА 2.4. Пусть Y — C^k -гладкое конечномерное многообразие и $h: Y \rightarrow \mathcal{J}_U^k - C^k$ -гладкое отображение. Предположим, что для $y_0 \in Y$ и $M_0 = u_0(S) \in \mathcal{M}_{h(y_0)}$ отображение $\bar{\Psi} \circ dh: T_{y_0}Y \rightarrow H_D^1(S, N_{u_0})$ сюръективно. Тогда в некоторой окрестности $(M_0, y_0) \in \mathcal{M}_h$ пространство $\mathcal{M}_h$ — C^k -гладкое многообразие с касательным пространством

$$T_{(M,y)}\mathcal{M}_h = \text{Ker}(D \oplus \Psi \circ dh: \mathcal{E}_{u,h(y)} \oplus T_y Y \longrightarrow \mathcal{E}'_{u,h(y)}) / du(H^0(S, TS)). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in Y$, $(u, J_S, h(y)) \in \mathcal{P}^*$ и $M = u(S)$. Тогда $(M, y) \in \mathcal{M}_h$. Из доказательства следствия 2.3 вытекает, что образ гомоморфизма $d\pi_{\mathcal{J}}: T_{(M,h(y))}\mathcal{M} \rightarrow T_{h(y)}\mathcal{J}_U^k$ равен $\text{Ker}(\bar{\Psi}_{(u,h(y))})$ и что $\bar{\Psi}$ отображает коядро $\text{Coker}(d\pi_{\mathcal{J}})$ изоморфно на $H_D^1(S, N_u)$. Поэтому утверждение леммы следует из леммы 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть Y — компактное многообразие, $h: Y \rightarrow \mathcal{J}_U^k - C^k$ -гладкое отображение, $\mathcal{M}_h \subset \mathcal{M} \times Y$ — соответствующее пространство модулей и $(M_0, y_0) \in \mathcal{M}_h$ — точка в нем. Компонента $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ пространства $\mathcal{M}_h$ через (M_0, y_0) — это множество таких $(M, y) \in \mathcal{M}_h$, что для любой окрестности W образа $h(Y) \subset \mathcal{J}_U^k$ существует непрерывный путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, обладающий следующими свойствами:

- а) $\gamma(0) = (M_0, h(y_0))$ и $\gamma(1) = (M, h(y))$, т.е. γ соединяет (M_0, y_0) и (M, y) в $\mathcal{M}$;
- б) $J_t := \pi_{\mathcal{J}}(\gamma(t)) \in W \subset \mathcal{J}_U^k$ для всех $t \in [0, 1]$, т.е. соответствующий путь почти комплексных структур J_t лежит в данной окрестности W образа $h(Y)$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $h: Y \rightarrow \mathcal{J}_U^k$, $(M_0, y_0) \in \mathcal{M}_h$ и $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ — такие же, как в определении 2.3. Тогда

- i) $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ — замкнутое подмножество $\mathcal{M}_h$;
- ii) если компонента $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ компактна, то существует подмножество $\mathcal{M}_h^0$, содержащее $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$, которое компактно и открыто в $\mathcal{M}_h$;
- iii) если компонента $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ не компактна, то существует непрерывный путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_h$ со следующими свойствами:
 - а) $\gamma(0) = (M_0, h(y_0))$, т.е. γ начинается в (M_0, y_0) ;
 - б) существует последовательность $t_n \nearrow 1$ такая, что последовательность $(M_n, J_n) := \gamma(t_n)$ лежит в $\mathcal{M}_h$ и дискретна там, но последовательность $\{J_n\}$ C^k -сходится к некоторому $J^* \in \mathcal{J}_U^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Пусть $(M', y') \in \overline{\mathcal{M}_h(M_0, y_0)} \subset \mathcal{M}_h$ и $J' = h(y')$. Пусть W – окрестность $h(Y) \subset \mathcal{J}_U^k$ и $\{(M_n, y_n)\}$ – последовательность в $\mathcal{M}_h$, сходящаяся к (M', y') . Тогда существует шар $B \ni (M', J')$ в $\mathcal{M}$, проекция которого на $\mathcal{J}_U^k$ лежит в W . Поскольку $(M_n, h(y_n))$ лежит в B при достаточно большом n , существует путь (M_t, J_t) в $\mathcal{M}$, соединяющий $(M_0, h(y_0))$ с (M', J') , такой, что $J_t \in W$ при всех $t \in [0, 1]$. Поэтому $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ – замкнуто.

ii) Пусть $(M', y') \in \mathcal{M}_h$ и $J' = h(y')$. Выберем конечномерное подпространство $F \subset T_{J'} \mathcal{J}_U^k$ такое, что $D_{u', J'} \oplus \Psi: \mathcal{E}_{u', J'} \oplus F \rightarrow \mathcal{E}'_{u', J'}$ – сюръекция. Пусть $B \ni 0$ – шар в F . Существует C^k -гладкое отображение $H: Y \times B$ такое, что $H(y, 0) \equiv h(y)$, и такое, что $dH_{(y', 0)}: T_{(y', 0)}(Y \times B) \rightarrow T_{J'} \mathcal{J}_U^k$ индуцирует изоморфизм $T_0 B \xrightarrow{\cong} F \subset T_{J'} \mathcal{J}_U^k$. Тогда $\mathcal{M}_H$ содержит окрестность $V \ni (M', y', 0)$, которая является многообразием и для которой $V \cap \mathcal{M}_h$ замкнуто в V . Отсюда следует, что $\mathcal{M}_h$ – локально компактное топологическое пространство.

Поскольку $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ – компактное подмножество в $\mathcal{M}_h$, оно имеет окрестность V , замыкание которой $\overline{V} \subset \mathcal{M}_h$ тоже компактно. Пусть $W_i \subset \mathcal{J}_U^k$ образуют фундаментальную систему окрестностей $h(Y)$ и, в частности, $\bigcap_i W_i = h(Y)$. Обозначим через V_i множество таких $(M, y) \in \mathcal{M}_h$, что $(M, h(y))$ и $(M_0, h(y_0))$ можно соединить путем (M_t, J_t) в $\mathcal{M}$ с J_t , лежащим в W_i . Тогда $\bigcap_i V_i = \mathcal{M}_h(M_0, y_0)$. Та же аргументация, что и в п. i) доказательства, показывает, что V_i открыты и замкнуты в $\mathcal{M}_h$.

Мы утверждаем, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $(\bigcap_{i=1}^N V_i) \cap \overline{V} \subset V$. Если бы это было не так, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существовало бы $(M_n, y_n) \in (\bigcap_{i=1}^n V_i) \cap \overline{V} \setminus V$. Но тогда некоторая подпоследовательность из $\{(M_n, y_n)\}$ сходилась бы к некоторому $(M^*, y^*) \in (\bigcap_{i=1}^\infty V_i) \cap \overline{V} \setminus V$, что невозможно, ибо $\bigcap_{i=1}^\infty V_i \subset V$.

Для соответствующего $N \in \mathbb{N}$ множество

$$\mathcal{M}_h^0 := \left(\bigcap_{i=1}^N V_i \right) \cap \overline{V} = \left(\bigcap_{i=1}^N V_i \right) \cap V \quad (2.2)$$

удовлетворяет утверждению ii) леммы.

iii) Пусть $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$ не компактно. Тогда существует дискретная последовательность $\{(M_n, y_n)\}$ в $\mathcal{M}_h(M_0, y_0)$. Поскольку Y компактно, мы можем считать, что y_n сходятся к некоторому y^* . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ фиксируем путь $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_h$, соединяющий $(M_{n-1}, h(y_{n-1}))$ с $(M_n, h(y_n))$. Положим $t_n := 1 - 2^{-n}$. Для $t \in [t_{n-1}, t_n]$ определим $\gamma(t) := \gamma_n(2^n(t - t_{n-1}))$. Тогда $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_h$ и $t_n \nearrow 1$ – искомые.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $(M_0, J_0) \in \mathcal{M}$ и $h: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_U^k$ – C^k -гладко с $h(0) = J_0$. Предположим, что существует подмножество $\mathcal{M}_h^0$ в $\mathcal{M}_h$, которое компактно, открыто и содержит (M_0, J_0) . Предположим также, что $\text{ind}(\pi_{\mathcal{J}}) = 2(c_1(X)[M_0] + (n-3)(1-g))$ неотрицательно. Тогда h можно C^k -аппроксимировать гладкими отображениями $h_n: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_U^k$ со следующими свойствами:

- i) каждое $\mathcal{M}_{h_n}$ содержит компоненту $\mathcal{M}_{h_n}^0$, которая является C^k -гладким многообразием ожидаемой размерности $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{h_n}^0) = \text{ind}(\pi_{\mathcal{J}}) + 1$;
- ii) множества $\mathcal{M}_{h_n(0)}^0 := \pi_{h_n}^{-1}(0) \cap \mathcal{M}_{h_n}^0$ и $\mathcal{M}_{h_n(1)}^0 := \pi_{h_n}^{-1}(1) \cap \mathcal{M}_{h_n}^0$ – также C^k -гладкие многообразия ожидаемой размерности $\text{ind}(\pi_{\mathcal{J}})$

- ($\mathcal{M}_{h_n(1)}^0$ может быть пусто!) и $\mathcal{M}_{h_n}$ — C^k -гладкий бордизм между $\mathcal{M}_{h_n(0)}^0$ и $\mathcal{M}_{h_n(1)}^0$;
- iii) каждое $\mathcal{M}_{h_n(0)}^0$ соединяемо с (M_0, J_0) путем в $\mathcal{M}$, т.е. существуют C^k -гладкие пути $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ с $\gamma_n(0) = (M_0, J_0)$ и $\gamma_n(1) \in \mathcal{M}_{h_n(0)}^0$; в частности, все $\mathcal{M}_{h_n(0)}^0$ непусты;
- iv) для каждого $(M, J) \in \mathcal{M}_{h_n}$ выполнено $\dim_{\mathbb{R}} H_D^1(S, N_M) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathcal{M}_h^0$ через K . Пусть $\mathcal{E}_K$ и $\mathcal{E}'_K$ обозначают базисы расслоения на K , индуцированные расслоениями соответственно $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ и $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{M}$. Пусть также $\mathcal{T} := h^*T\mathcal{J}_U^k$ обозначает подъем $T\mathcal{J}_U^k$ на $[0, 1]$.

По лемме 2.2 для каждого $(M, J) \in K$ с $M = u(S)$ существуют $m_{(M, J)} \in \mathbb{N}$ и C^k -гладкий гомоморфизм $P_{(M, J)}: F_{(M, J)} \rightarrow \mathcal{T}$ из тривиального векторного расслоения $F_{(M, J)}$ над $[0, 1]$ ранга $\text{rk } F_{(M, J)} = m_{(M, J)}$ такой, что оператор

$$D_{(u, J)} \oplus \Psi_{(u, J)} \circ P_{(M, J)}: \mathcal{E}_{(M, J)} \oplus F_{(M, J)} \rightarrow \mathcal{E}'_{(M, J)} \quad (2.3)$$

сюрьективен.

Заметим, что оператор (2.3) останется сюрьективным для всех (M', J') из некоторой окрестности (M, J) . Поскольку K компактно, можно выбрать конечное число таких $(F_{(M, J)}, P_{(M, J)})$ и, взяв их сумму, получить гомоморфизм $P: F \rightarrow \mathcal{T}$ из тривиального векторного расслоения $F \cong [0, 1] \times \mathbb{R}^m$, $m \gg 0$, такой, что гомоморфизм $D_{(u, J)} \oplus \Psi_{(u, J)} \circ P: \mathcal{E}_{(M, J)} \oplus F \rightarrow \mathcal{E}'_{(M, J)}$ сюрьективен для всех $(M, J) \in K$.

Для $\dot{J}$ из малого шара в $T_J\mathcal{J}_U^k$ положим $\text{exr}_J(\dot{J}) := J \frac{(1 - J\dot{J}/2)}{(1 + J\dot{J}/2)}$. Дифференцируя тождество $J^2 = -1$, мы получим соотношение $J\dot{J} = -\dot{J}J$, которое выполнено для всех $\dot{J} \in T_J\mathcal{J}_U^k$. Отсюда следует соотношение

$$\left(J \frac{(1 - J\dot{J}/2)}{(1 + J\dot{J}/2)} \right)^2 = -1.$$

Таким образом, exr_J принимает значения в $\mathcal{J}_U^k$. Прямые вычисления показывают, что производная exr_J в $0 \in T_J\mathcal{J}_U^k$ есть тождественное отображение $T_J\mathcal{J}_U^k$. Таким образом, exr_J — естественное экспоненциальное отображение для $\mathcal{J}_U^k$.

Возьмем достаточно малый шар $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ и определим отображение $H^*: [0, 1] \times B \rightarrow \mathcal{J}_U^k$, полагая $H^*(t, y) := \text{exr}_{h(t)}(P(t, y))$. По конструкции H^* для всех $(M, J) \in K$ с $J = h(t)$ отображение

$$D_{(u, J)} \oplus \Psi_{(u, J)} \circ dH^*(t, 0): \mathcal{E}_{(M, J)} \oplus T_{(t, 0)}([0, 1] \times B) \rightarrow \mathcal{E}'_{(M, J)}$$

сюрьективно. Делая малое возмущение H^* , мы получим C^k -гладкую функцию $H: [0, 1] \times B \rightarrow \mathcal{J}_U^k$ со следующими свойствами:

- i) $H(t, 0) = h(t)$, т.е. H — деформация h с пространством параметров $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$;
- ii) $D_{(u, J)} \oplus \Psi_{(u, J)} \circ dH(t, 0): \mathcal{E}_{(M, J)} \oplus T_0B \rightarrow \mathcal{E}'_{(M, J)}$ сюрьективно для $(M, t) \in K$ с $J = h(t)$ и $M = u(S)$;
- iii) в окрестности каждого $(t, y) \in [0, 1] \times B$ с $y \neq 0$ отображение H — $\mathcal{J}_U^\infty$ -значно и C^∞ -гладко.

Отождествим K и $\mathcal{M}_h$ с подмножествами $\mathcal{M}_H$, используя естественное вложение $(M, t) \in \mathcal{M}_h \mapsto (M, t, 0) \in \mathcal{M}_H$. По лемме 2.2 существует окрестность V множества K в $\mathcal{M}_H$, которая является C^k -гладким многообразием. Выбирая при необходимости меньшую окрестность K , мы можем считать, что замыкание $\overline{V}$ компактно и не пересекает другие компоненты $\mathcal{M}_h$, отличные от $\mathcal{M}_h^0 = K$, т.е. $\overline{V} \cap \mathcal{M}_h = V \cap \mathcal{M}_h = K$. Пусть $p: V \rightarrow B$ – естественная проекция, задаваемая соотношением $(u, t, y) \mapsto y$.

Утверждается, что существует меньший шар $B_1 = B(0, r_1) \subset B$ такой, что для всех $y \in B_1$ множество $p^{-1}(y) \subset V$ компактно. Предположим, что это неверно. Тогда существует последовательность точек $y_n \in B$, сходящаяся к $0 \in B$, и такая, что $p^{-1}(y_n)$ не компактны. Поскольку $\overline{V}$ компактно, то существуют такие M_n и t_n , что (M_n, t_n, y_n) лежит в замыкании $\overline{p^{-1}(y_n)} \subset \overline{V}$, но не в V . Взяв подходящую подпоследовательность (M_n, t_n, y_n) , можно считать, что она сходится к некоторому $(M^*, t^*, 0)$. Но в этом случае $(M^*, t^*, 0) \in \mathcal{M}_h \cap \overline{V} = K$ и, значит, $(M^*, t^*, 0) \in V$. С другой стороны, $\overline{V} \setminus V$ компактно, и поэтому $(u^*, t^*, 0)$ лежит в $\overline{V} \setminus V$. Полученное противоречие показывает, что искомый шар B_1 существует.

Положим $V_1 := p^{-1}(B_1) \subset V$. По построению H ограничение проекции $p: V_1 \setminus K \rightarrow \dot{B}_1 := B_1 \setminus \{0\}$ – C^∞ -гладко. По лемме Сарда (см., например, [12; §3.4]) существует плотное подмножество $B_1^* \subset B_1$ такое, что для всех $y \in B_1^*$ множество $p^{-1}(y)$ является C^∞ -гладким компактным многообразием. Зафиксируем последовательность $y_n \in B_1^*$, сходящуюся к $0 \in B$, и положим $h_n(t) := H(t, y_n)$. Определим $\mathcal{M}_{h_n}^0 := \mathcal{M}_{h_n} \cap V$ так, что $\mathcal{M}_{h_n}^0 = p^{-1}(y_n)$. Тогда каждое $\mathcal{M}_{h_n}^0$ есть C^∞ -гладкое непустое многообразие, соединяемое с (M_0, J_0) путем в $\mathcal{M}$.

По лемме 2.4 касательное пространство к $V_1 \subset \mathcal{M}_H$ в точке (u, t, y) канонически изоморфно

$$\text{Ker}(D_{u, H(t, y)} \oplus \Psi \circ dH: \mathcal{E}_{u, H(t, y)} \oplus T_{(t, y)}([0, 1] \times B_1) \rightarrow \mathcal{E}'_{u, H(t, y)}) / du(H^0(S, TS)).$$

Поскольку $p: V_1 \rightarrow B_1$ – проекция вида $(u, t, y) \in V_1 \mapsto y \in B_1$, дифференциал $dp_{(u, t, y)}$ отображает касательный вектор вида $(\dot{u}, \dot{t}, \dot{y}) \in T_{(u, t, y)}V_1$ в $\dot{y} \in T_y B_1$. Это означает, что $dp_{(u, t, y)}$ есть ограничение $\text{Ker}(D_{u, H(t, y)} \oplus \Psi \circ dH)$ линейной проекции $p_B: \mathcal{E}_{u, H(t, y)} \oplus T_{(t, y)}([0, 1] \times B_1) \rightarrow T_y B_1$, задаваемой формулой $p_B(\dot{u}, \dot{t}, \dot{y}) = \dot{y}$. В частности, для $y = y_n$ отображение $dp_{(u, t, y)}$ сюръективно, что означает сюръективность отображения

$$p_B: \text{Ker}(D_{u, H(t, y)} \oplus \Psi \circ dH) \rightarrow T_{y_n} B_1.$$

Последнее эквивалентно сюръективности отображения

$$D_{u, H(t, y_n)} \oplus \Psi \circ dH \oplus p_B: \mathcal{E}_{u, H(t, y_n)} \oplus T_{(t, y_n)}([0, 1] \times B_1) \rightarrow \mathcal{E}'_{u, H(t, y_n)} \oplus T_{y_n} B_1,$$

а значит, сюръективности

$$D_{u, h_n(t)} \oplus \Psi \circ dh_n: \mathcal{E}_{u, h_n(t)} \oplus T_t[0, 1] \rightarrow \mathcal{E}'_{u, h_n(t)}. \quad (2.4)$$

Следовательно, $\dim_{\mathbb{R}} H_D^1(S, N_M) \leq 1$ для любого $(M, t) \in \mathcal{M}_{h_n} \cap V_1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. В условиях теоремы 2.6 предположим дополнительно, что S есть сфера S^2 . Тогда для всех $(M, t) \in \mathcal{M}_{h_n}^0$ ассоциированный D_N -оператор сюръективен, т.е. $H_{D_N}^1(S^2, N_M) = 0$.

Более того, $\mathcal{M}_{h_n}$ – тривиальный бордизм: $\mathcal{M}_{h_n} \cong \mathcal{M}_{h_n(0)} \times [0, 1]$. В частности, для любой $h_n(0)$ -голоморфной сферы $M_0 \in \mathcal{M}_{h_n(0)}$ существует непрерывное семейство $h_n(t)$ -голоморфных сфер $M_{n,t} = u_{n,t}(S^2)$ с $M_{n,0} = M_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $H_{D_N}^1(M, N_M) \neq 0$ для некоторого $(M, t) \in \mathcal{M}_{h_n}^0$. Тогда $H_{D_N}^1(M, N_M) = 1$ по теореме 2.6. Но это противоречит утверждению следствия 1.6 для случая $S = S^2$ и $L := N_M$.

Пусть для $(M, t) \in \mathcal{M}_{h_n}^0$ выполнено $M = u(S)$ и $J = h_n(t)$. Пусть также $\dot{J} \neq 0 \in dh_n(T_t[0, 1])$. Тогда по лемме 2.1 и следствию 2.3 касательное пространство $T_{(M, t)}\mathcal{M}_{h_n}^0$ канонически изоморфно

$$\text{Ker}(D_{u, J} \oplus \Psi: \mathcal{E}_{u, J} \oplus \mathbb{R}\dot{J} \rightarrow \mathcal{E}'_{u, J})/du(H^0(S, TS)),$$

а дифференциал проекции $d\pi_{h_n}: T_{(M, t)}\mathcal{M}_{h_n}^0 \rightarrow T_t[0, 1] \cong \mathbb{R}$ имеет вид $d\pi_{h_n}[v, a\dot{J}] = a$. Поскольку в случае $S = S^2$ пространство $H^1(S, TS)$ тривиально, следствие 1.8 обеспечивает сюръективность оператора $D_{u, J}: \mathcal{E}_{u, J} \rightarrow \mathcal{E}'_{u, J}$. Поэтому для $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ существует такое $v \in \mathcal{E}_{u, J}$, что $[v, a\dot{J}] \in T_{(M, t)}\mathcal{M}_{h_n}^0$. Это означает, что для любого $(M, t) \in \mathcal{M}_{h_n}^0$ проекция $d\pi_{h_n}: T_{(M, t)}\mathcal{M}_{h_n}^0 \rightarrow T_t[0, 1]$ сюръективна. Поскольку многообразие $\mathcal{M}_{h_n}^0$ компактно, имеется диффеоморфизм $\mathcal{M}_{h_n} \cong \mathcal{M}_{h_n(0)} \times [0, 1]$.

§3. Топология Громова и деформация некомпактных голоморфных кривых

В предыдущем параграфе была развита техника, позволяющая строить локальные деформации J_t -голоморфных сфер $M_t = u_t(S^2)$ с подходящими семействами почти комплексных структур J_t . Препятствием к существованию “глобального семейства” является тот факт, что в процессе деформации сфера M_t может “распасться” на несколько компонент. Для целей данной работы необходимо знать, как именно может происходить такой распад, а также уметь деформировать приводимые (т.е. состоящие из нескольких компонент) кривые, получающиеся в результате “распада”. Мы начнем с выделения подходящей категории приводимых кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Стандартным *нодом* мы будем называть аналитическое множество $A_0 := \{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = 0\}$. *Нодальной кривой* мы будем называть связное приведенное комплексное пространство C размерности 1 с конечным числом неприводимых компонент, единственными особенностями которого является конечное число *нодальных точек*, окрестности которых изоморфны стандартному ноду. Кроме того, мы предполагаем, что граница ∂C кривой C состоит из конечного числа гладких окружностей и что $\overline{C} := C \cup \partial C$ компактно. Случай $\partial C = \emptyset$ не исключается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Гладкая ориентированная вещественная поверхность Σ с границей $\partial\Sigma$ *параметризует* комплексную нодальную кривую C , если существует непрерывное отображение $\sigma: \Sigma \rightarrow C$ со следующими свойствами:

- 1) если $a \in C$ — нодальная точка, то $\gamma_a := \sigma^{-1}(a)$ — гладко вложенная окружность в Σ ;
- 2) $\sigma: \overline{\Sigma} \setminus \bigcup_{i=1}^N \gamma_{a_i} \rightarrow \overline{C} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ — диффеоморфизм, где $\{a_1, \dots, a_N\}$ — множество всех нодальных точек в C .

Отображение σ называется *параметризацией* C .

Отметим, что параметризация σ не единственна: если $g: \Sigma \rightarrow \Sigma$ — диффеоморфизм, то $\sigma \circ g: \Sigma \rightarrow C$ — тоже параметризация.

РИС. 1. Отображение σ “стягивает” окружности $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ в нодальные точки $a_1, \dots, a_5$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Стабильная кривая над почти комплексным многообразием (X, J) — это пара (C, u) , где C — нодальная кривая с границей ∂C , а $u: C \rightarrow X$ — J -голоморфное отображение со следующим свойством: если C_j — компактная неприводимая компонента C , на которой u постоянно, то группа биголоморфных автоморфизмов C_j , сохраняющих нодальные точки C_j , конечна.*

Легко видеть, что данное условие налагает ограничение лишь в двух следующих случаях:

- 1) неприводимая компонента C_j рациональна, т.е. биголоморфна $\mathbb{P}^1$, и значит, на C_j лежат как минимум три нодальные точки C ;
- 2) неприводимая компонента C_j — тор, значит, на C_j имеется как минимум одна нодальная точка C .

Данное определение для случая абстрактных компактных алгебраических кривых было дано Делинем и Мамфордом и обобщено Концевичем на случай отображений.

Стабильные кривые естественным образом возникают при попытке пополнить пространство вложенных или иммерсированных комплексных кривых в X . А именно, на множестве стабильных кривых над X вводится топология Громова, которую мы опишем, указав сходящиеся последовательности.

Пусть $\{J_n\}$ — последовательность C^k -гладких почти комплексных структур на X , C^k -сходящаяся к J . Пусть $\{(C_n, u_n)\}$ — последовательность J_n -голоморфных кривых, стабильных над X , параметризованных одной и той же вещественной поверхностью Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Последовательность $\{(C_n, u_n)\}$ сходится к J -голоморфной стабильной над X кривой (C_∞, u_∞) , если выполнено следующее:

- 1) C_∞ также параметризуется поверхностью Σ ; более того, существуют параметризации $\sigma_n: \Sigma \rightarrow C_n$ и $\sigma_\infty: \Sigma \rightarrow C_\infty$ такие, что $u_n \circ \sigma_n$ сходится к $u_\infty \circ \sigma_\infty$ в C^0 -топологии на $\bar{\Sigma}$ вплоть до границы;
- 2) пусть $\{a_1, \dots, a_N\}$ — нодальные точки C_∞ и $\gamma_i := \sigma_\infty^{-1}(a_i)$, и пусть $K \Subset \bar{\Sigma} \setminus \bigcup_i \gamma_i$ — компакт; тогда для $n \geq n^*(K)$ множество $\sigma_n(K)$ не содержит

нодальных точек C_n , $u_n \circ \sigma_n$ сходится к $u_\infty \circ \sigma_\infty$ в $L^{1,p}$ -топологии на K , а прообразы $\sigma_n^* J_{C_n}$ комплексных структур J_{C_n} на кривых C_n сходятся к прообразу $\sigma_\infty^* J_{C_\infty}$ комплексной структуры J_{C_∞} на C_∞ в C^∞ -топологии на K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. *Кольцом A на вещественной поверхности или на комплексной кривой называется область, которая диффеоморфна (соответственно биголоморфна) стандартному кольцу $A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Пантом на вещественной поверхности или на комплексной кривой называется область, диффеоморфная диску с двумя дырками. В обоих случаях мы предполагаем, что граница соответствующей области состоит из гладко вложенных окружностей. Кольцо A примыкает к окружности γ , если γ является одной из компонент границы ∂A .*

РИС. 2. Кольцо с комплексной структурой удобно также представлять в виде цилиндра или “трубки”. При стягивании окружности, лежащей посередине кольца, получается нод

РИС. 3. Пант можно также представить как сферу с тремя дырками

Значение топологии Громова выражает следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\{(C_n, u_n)\}$ – последовательность J_n -голоморфных стабильных над X кривых, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) J_n суть C^k -гладкие и сходятся к J в C^k -топологии для некоторого $k \geq 1$;
- 2) $\text{area}[u_n(C_n)] \leq A$ для всех n ;
- 3) все C_n параметризованы одной и той же вещественной поверхностью Σ ;
- 4) (C_n, u_n) сходится возле границы; это означает, что существуют такие параметризации $\sigma_n: \Sigma \rightarrow C_n$ и такие кольца A_α в Σ , что выполняется следующее:

- а) каждое A_α примыкает в точности к одной компоненте γ_α границы $\partial\Sigma$, образы $\sigma_n(A_\alpha)$ не содержат нодальных точек кривых C_n и комплексные структуры $\sigma_n^* J_{C_n}$ постоянны на каждом кольце A_α ;
- б) отображения $u_n \circ \sigma_n$ сходятся на каждом A_α в $L^{1,p}$ -топологии.

Тогда существует такая подпоследовательность стабильных кривых, также обозначаемая $\{(C_n, u_n)\}$, которая сходится в топологии Громова к стабильной над X кривой (C_∞, u_∞) .

Данная теорема принадлежит Громову [6], доказательства имеются также в [13] и [14]. Нам потребуется более точное описание сходимости по Громову, которое можно извлечь из [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. В условиях теоремы 3.1, можно найти параметризацию $\sigma_n: \Sigma \rightarrow C_n$ и конечное покрытие Σ открытыми множествами $\{V_\alpha\}$ и $\{V_{\alpha\beta}\}$ со следующими свойствами (см. рис. 6):

- i) каждое V_α есть либо диск, либо кольцо, либо пант, и $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$;
- ii) к каждой граничной компоненте Σ прилегает одно V_α , которое является кольцом;
- iii) каждое $V_{\alpha\beta}$ есть кольцо, пересекающее V_α и V_β по кольцам $W_{\alpha,\beta} := V_{\alpha\beta} \cap V_\alpha$ и $W_{\beta,\alpha} := V_{\alpha\beta} \cap V_\beta$; при этом $V_{\alpha\beta} = V_{\beta\alpha}$, а кольца $W_{\alpha,\beta}$ и $W_{\beta,\alpha}$ различны и дизъюнкты;
- iv) $\sigma_n^* J_{C_n}|_{V_\alpha}$ не зависит от n , а $u_n \circ \sigma_n|_{V_\alpha}$ сходится в $L^{1,p}$ -топологии к $u_\infty \circ \sigma_\infty|_{V_\alpha}$;
- v) существуют $L^{1,p}$ -гладкие отображения $\varphi_{\alpha\beta}^n: V_{\alpha\beta} \rightarrow \Delta^2$ и $\varphi_{\alpha\beta}^\infty: V_{\alpha\beta} \rightarrow \Delta^2$, которые индуцируют биголоморфизмы $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}^n: \sigma_n(V_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\cong} \{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = \lambda_{\alpha\beta}^n\}$ и $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}^\infty: \sigma_\infty(V_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\cong} \{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = \lambda_{\alpha\beta}^\infty\}$; при этом $\lambda_{\alpha\beta}^n \in \Delta$, $\lambda_{\alpha\beta}^n$ сходится к $\lambda_{\alpha\beta}^\infty \in \Delta$ и $\varphi_{\alpha\beta}^n$ сходится к $\varphi_{\alpha\beta}^\infty$ в $L^{1,p}$ -топологии;
- vi) для координатных функций z_1 и z_2 на Δ^2 композиции $z_1 \circ \varphi_{\alpha\beta}^n|_{W_{\alpha,\beta}}$ и $z_2 \circ \varphi_{\alpha\beta}^n|_{W_{\beta,\alpha}}$ не зависят от n ; более того, образы $z_1 \circ \varphi_{\alpha\beta}^n(W_{\alpha,\beta})$ и $z_2 \circ \varphi_{\alpha\beta}^n(W_{\beta,\alpha})$ суть кольца $A_{r_{\alpha,\beta}1}$ и $A_{r_{\beta,\alpha}1}$ соответственно;
- vii) для заданной предельной кривой (C_∞, u_∞) соответствующее покрытие $\{V_\alpha, V_{\alpha\beta}\}$ вещественной поверхности Σ можно выбрать зависящим только от $\{(C_\infty, u_\infty)\}$, т.е. одним и тем же для всех последовательностей $\{(C_n, u_n)\}$, сходящихся к (C_∞, u_∞) .

Таким образом, теорема 3.1 обеспечивает тот факт, что при деформации псевдоголоморфная кривая “распадается” опять же на псевдоголоморфные кривые, и дает возможность продолжать процесс локальной деформации.

Теперь изучим вопрос локальной деформации голоморфных некомпактных кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. *Банаховым шаром* мы будем называть шар в некотором комплексном банаховом пространстве. Подмножество $\mathcal{M}$ банахова шара B называется *банаховым аналитическим множеством конечного определения (коразмерности)*, б.а.м.к.о., если существует голоморфное отображение $F: B \rightarrow \mathbb{C}^N$ с $N < \infty$ такое, что $\mathcal{M} = \{x \in B : F(x) = 0\}$.

Важность этого определения заключается в том, что, в отличие от общих банаховых аналитических множеств, б.а.м.к.о. по своим свойствам похожи на обычные конечномерные аналитические множества. А именно, верна

ТЕОРЕМА 3.3 [15]. Пусть B – шар в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} \subset B$ – б.а.м.к.о. и x_0 – точка в $\mathcal{M}$. Тогда существует окрестность $U \ni x_0$ в B такая, что $\mathcal{M} \cap U$ есть объединение конечного числа б.а.м.к.о. $\mathcal{M}_j$, каждое из которых неприводимо в x_0 .

Более того, каждое $\mathcal{M}_j$ представляется как собственное разветвленное накрытие над областью в замкнутом линейном подпространстве $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}$ конечной коразмерности.

Целью данного параграфа является доказательство существования полного семейства голоморфных деформаций стабильной над X кривой, параметризованного б.а.м.к.о. Прежде чем формулировать результат, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Пусть C – нодальная кривая, E – голоморфное векторное расслоение над C и $C = \bigcup_{i=1}^l C_i$ – разложение C на неприводимые компоненты. Предположим, что E достаточно гладко продолжается вплоть до границы ∂C . Определим $L^{1,p}$ -сечение v расслоения E над C как набор $(v_i)_{i=1}^l$ таких $v_i \in L^{1,p}(C_i, E)$, что в каждой нодальной точке $z \in C_i \cap C_j$ выполнено $v_i(z) = v_j(z)$. Определим E -значную L^p -интегрируемую $(0, 1)$ -форму ξ на C как набор $(\xi_i)_{i=1}^l$ из $(0, 1)$ -форм $\xi_i \in L^p(C_i, E \otimes \Lambda^{(0,1)})$. Пусть $L^{1,p}(C, E)$ обозначает банахово пространство $L^{1,p}$ -сечений E над C и $L^p(C, E \otimes \Lambda^{(0,1)})$ – банахово пространство L^p -интегрируемых $(0, 1)$ -форм C . Обозначим через $\mathcal{H}^{1,p}(C, E)$ банахово пространство тех $L^{1,p}$ -сечений E над C , которые голоморфны в C .

Аналогично, для комплексного многообразия X через $L^{1,p}(C, X)$ мы будем обозначать множество наборов $u = (u_i)_{i=1}^l$ таких $u_i \in L^{1,p}(C_i, X)$, что в каждой нодальной точке $z \in C_i \cap C_j$ выполнено $u_i(z) = u_j(z)$. Легко видеть, что $L^{1,p}(C, X)$ есть банахово многообразие с касательным пространством $T_u L^{1,p}(C, X) = L^{1,p}(C, u^* TX)$. Далее, через $\mathcal{H}^{1,p}(C, X)$ будем обозначать пространство голоморфных $L^{1,p}$ -отображений из C в X . Отметим, что для $u \in \mathcal{H}^{1,p}(C, X)$ выполнено $u(C) \subset u(\bar{C}) \Subset X$.

Нашей целью в этом параграфе является следующая

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть (X, J) – комплексное многообразие и (C_0, u_0) – стабильная комплексная кривая над X , параметризованная вещественной поверхностью Σ . Существуют б.а.м.к.о. $\mathcal{M}$ и $\mathcal{C}$ и голоморфные отображения $F: \mathcal{C} \rightarrow X$ и $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ со следующими свойствами:

- а) для каждого $\lambda \in \mathcal{M}$ слой $C_\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$ есть нодальная кривая, параметризуемая поверхностью Σ , причем $C_{\lambda_0} \cong C_0$ для некоторого λ_0 ;
- б) для $F_\lambda := F|_{C_\lambda}$ пара (F_λ, C_λ) есть стабильная над X кривая, причем $F_{\lambda_0} = u_0$;
- в) если (C', u') – стабильная над X кривая, достаточно близкая к (C_0, u_0) в топологии Громова, то существует $\lambda' \in \mathcal{M}$ такое, что $(C', u') = (C_{\lambda'}, F_{\lambda'})$;
- г) для подходящего $N \in \mathbb{N}$ и малого шара B в банаховом пространстве $\mathcal{H}^{1,p}(C_0, u_0^* TX) \oplus \mathbb{C}^N$ б.а.м.к.о. $\mathcal{M}$ реализуется как множество нулей голоморфного отображения Φ из B в конечномерное пространство $H^1(C, u_0^* TX)$.

Доказательство основывается на построении локальных деформаций стабильных кривых и анализе условий склейки локальных моделей. При этом важную роль играет следующий результат о возможности решения задачи типа Кузена.

ЛЕММА 3.5. Пусть C – нодальная кривая и E – голоморфное векторное расслоение над C , C^1 -гладкое вплоть до границы. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^l$ – конечное покрытие C штейновыми областями с кусочно гладкими границами. Положим $V_{ij} := V_i \cap V_j$ и предположим, что все тройные пересечения $V_i \cap V_j \cap V_k$ с $i \neq j \neq k \neq i$ пусты.

Тогда для $2 \leq p < \infty$ кограничный оператор Чеха

$$\begin{aligned} \delta: \quad \sum_{i=1}^l \mathcal{H}^{1,p}(V_i, E) &\longrightarrow \sum_{i < j} \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, E), \\ \delta: \quad (v_i)_{i=1}^l &\longmapsto (v_i - v_j) \end{aligned} \quad (3.1)$$

обладает следующими свойствами:

- i) образ $\text{Im}(\delta)$ имеет конечную коразмерность и замкнут; более того, $\text{Coker}(\delta) = H^1(C, E) = H^1(C_{\text{comp}}, E)$, где C_{comp} обозначает объединение компактных неприводимых компонент C ;
- ii) ядро $\text{Ker}(\delta)$ изоморфно $\mathcal{H}^{1,p}(C, E)$ и допускает замкнутое прямое дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перед рассмотрением комплекса Чеха изучим соответствующую $\bar{\partial}$ -задачу. Для этого рассмотрим оператор

$$\bar{\partial}: L^{1,p}(C, E) \longrightarrow L^p(C, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)}). \quad (3.2)$$

Сначала мы докажем, что этот оператор обладает теми же свойствами, что и (3.1), т. е. $\text{Ker}(\bar{\partial})$ допускает замкнутое прямое дополнение, $\text{Im}(\bar{\partial})$ имеет конечную коразмерность и замкнут и $\text{Coker}(\bar{\partial}) = H^1(C, E) = H^1(C_{\text{comp}}, E)$. Более того, мы построим естественные изоморфизмы между (ко)ядрами (3.1) и (3.2).

Поскольку граница C гладкая, существуют нодальные кривые C^+ и C^{++} такие, что $C \Subset C^+ \Subset C^{++}$ и разности $C^+ \setminus \bar{C}$ (соответственно $C^{++} \setminus \bar{C}^+$) состоят из колец A_α^+ (соответственно A_α^{++}), примыкающих к соответствующим компонентам γ_α (соответственно γ_α^+) границы ∂C (соответственно ∂C^+ , см. рис. 4). Тогда E продолжается до голоморфного векторного расслоения над C^{++} , также обозначаемого E .

Рис. 4. $C \Subset C^+ \Subset C^{++}$. Границы C^{++} , C^+ и C обозначены соответственно сплошной, пунктирной и штрихованной линией

Рассмотрим пучки на C^{++}

$$\begin{aligned} L_{\text{loc}}^{1,p}(\cdot, E): V &\mapsto L_{\text{loc}}^{1,p}(V, E), \\ L_{\text{loc}}^p(\cdot, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)}): V &\mapsto L_{\text{loc}}^p(V, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)}) \end{aligned}$$

и гомоморфизм пучков, индуцированный оператором

$$\bar{\partial}: L_{\text{loc}}^{1,p}(V, E) \longrightarrow L_{\text{loc}}^p(V, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)}).$$

Тогда пучки $L_{\text{loc}}^{1,p}(\cdot, E)$ и $L_{\text{loc}}^p(\cdot, E \otimes \bar{\Omega}_{C^{++}})$ вместе с $\bar{\partial}$ -гомоморфизмом образуют тонкую резольвенту (когерентного) пучка $\mathcal{O}^E$ голоморфных сечений E над C^{++} . В гладких точках C^{++} этот факт следует из теории L^p -регулярности для эллиптического оператора $\bar{\partial}$, а в нодальных точках применим следующие рассуждения.

Пусть $z \in C$ – нодальная точка, лежащая на пересечении неприводимых компонент C_i и C_j кривой C . Пусть ξ_i (соответственно ξ_j) – E -значные L_{loc}^p -интегрируемые $(0, 1)$ -формы, заданные в окрестности точки z в C_i (соответственно C_j). Найдем $L_{\text{loc}}^{1,p}$ -решение v_i (соответственно v_j) уравнения $\bar{\partial}v_i = \xi_i$ (соответственно $\bar{\partial}v_j = \xi_j$). Прибавляя локальное голоморфное сечение E над C_i , мы можем достичь равенства $v_i(z) = v_j(z)$. Тогда пара (v_i, v_j) определяет сечение пучка $L_{\text{loc}}^{1,p}(\cdot, E)$ в окрестности z . Это показывает, что лемма Дольбо для голоморфного расслоения E верна также в окрестности нодальных точек.

Это дает естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\bar{\partial}: L_{\text{loc}}^{1,p}(C^{++}, E) \rightarrow L_{\text{loc}}^p(C^{++}, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)})) &= H^0(C^{++}, E), \\ \text{Coker}(\bar{\partial}: L_{\text{loc}}^{1,p}(C^{++}, E) \rightarrow L_{\text{loc}}^p(C^{++}, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)})) &= H^1(C^{++}, E). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что подобные изоморфизмы верны для C и C^+ . Отметим также, что имеется естественный изоморфизм

$$H^1(C^{++}, E) = H^1(C^+, E) = H^1(C, E) = H^1(C_{\text{comp}}, E),$$

индуцированный отображениями ограничения

$$\begin{aligned} L_{\text{loc}}^p(C^{++}, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)}) &\longrightarrow L_{\text{loc}}^p(C^+, E \otimes \Lambda_{C^+}^{(0,1)}) \longrightarrow L_{\text{loc}}^p(C, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)}) \\ &\longrightarrow L_{\text{loc}}^p(C_{\text{comp}}, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)}). \end{aligned}$$

Теперь возьмем любое $\xi \in L^2(C^+, E \otimes \Lambda_{C^+}^{(0,1)})$, которое определяет нулевой класс когомологий в $H^1(C^+, E)$. Мы можем продолжить ξ нулем до элемента $\tilde{\xi} \in L_{\text{loc}}^2(C^{++}, E \otimes \Lambda_{C^{++}}^{(0,1)})$. Поскольку $[\tilde{\xi}]_{\bar{\partial}} = [\xi]_{\bar{\partial}} = 0$, существует $\tilde{v} \in L_{\text{loc}}^{1,2}(C^{++}, E)$ такое, что $\bar{\partial}\tilde{v} = \tilde{\xi}$. Ограничение $v := \tilde{v}|_{C^+}$ удовлетворяет соотношениям $\bar{\partial}v = \xi$ и $v \in L^{1,2}(C^+, E)$. Это показывает, что образ непрерывного(!) оператора

$$\bar{\partial}: L^{1,2}(C^+, E) \longrightarrow L^2(C^+, E \otimes \Lambda_{C^+}^{(0,1)}) \quad (3.4)$$

имеет конечную коразмерность. Отсюда и из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что этот образ замкнут. Далее, поскольку $L^{1,2}(C^+, E)$ есть гильбертово пространство, ядро оператора (3.4) допускает прямое дополнение $Q \subset L^{1,2}(C^+, E)$. Более того, оператор (3.4) отображает Q изоморфно на свой

образ. Поэтому оператор (3.4) расщепляется, т.е. существует непрерывный оператор

$$T^+ : L^2(C^+, E \otimes \Lambda_{C^+}^{(0,1)}) \longrightarrow L^{1,2}(C^+, E) \quad (3.5)$$

такой, что $\text{Im}(T^+) = Q$, и такой, что для любого $\xi \in L^2(C^+, E \otimes \Lambda_{C^+}^{(0,1)})$ с $[\xi]_{\bar{\partial}} = 0 \in H^1(C^+, E)$ выполнено $\bar{\partial}(T^+\xi) = \xi$.

Определим оператор $T : L^2(C, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)}) \rightarrow L^{1,2}(C, E)$ следующим образом. Для любого $\xi \in L^2(C, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)})$ продолжим ξ нулем до $\tilde{\xi} \in L^2(C^+, E \otimes \Lambda_{C^+}^{(0,1)})$ и положим $T(\xi) = T^+(\tilde{\xi})|_C$. Очевидно, что T непрерывен и, более того,

$$\|T^+(\tilde{\xi})\|_{L^{1,2}(C^+)} \leq c \cdot \|\xi\|_{L^2(C)}$$

с константой c , не зависящей от ξ . По теории L^p -регулярности для эллиптического $\bar{\partial}$ -оператора (см., например, [7]) для $2 \leq p < \infty$ и $v \in L_{\text{loc}}^{1,p}(C^+, E)$ имеется внутренняя оценка

$$\|v\|_{L^{1,p}(C)} \leq c' \cdot (\|v\|_{L^{1,2}(C^+)} + \|\bar{\partial}v\|_{L^p(C^+)}) \quad (3.6)$$

с константой c' , не зависящей от v . Отсюда следует, что для $2 \leq p < \infty$ и $\xi \in L^p(C, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)})$ с $[\xi]_{\bar{\partial}} = 0 \in H^1(C, E)$ выполнено

$$\|T(\xi)\|_{L^{1,p}(C)} \leq c'' \cdot \|\xi\|_{L^p(C)}$$

с константой c'' , не зависящей от ξ . Это означает, что оператор T является расщеплением оператора (3.2). Отсюда следует, что оператор (3.2) обладает свойствами i) и ii) леммы 3.5.

Вернемся к рассмотрению кограничного оператора Чеха (3.1). Зафиксируем разбиение единицы $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^l \varphi_i$, подчиненное покрытию $\{V_i\}_{i=1}^l$ кривой C . Возьмем коцикл $w = (w_{ij}) \in \sum_{i < j} \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, E)$. Для $i > j$ положим $w_{ij} := -w_{ji}$. Определим $f_i := \sum_j \varphi_j w_{ij}$. Тогда $f_i \in L^{1,p}(V_i, E)$ и $f_i - f_j = w_{ij}$. Следовательно, $\bar{\partial}f_i \in L^p(V_i, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)})$ и $\bar{\partial}f_i = \bar{\partial}f_j$ в V_{ij} . Таким образом, $\bar{\partial}f_i = \xi|_{V_i}$ для корректно определенного $\xi \in L^p(C, E \otimes \Lambda_C^{(0,1)})$. Более того, (w_{ij}) и ξ определяют один и тот же класс когомологий $[w_{ij}] = [\xi]$ в $H^1(C, E)$.

Предположим дополнительно, что индуцированный класс когомологий $[w_{ij}]$ тривиален. Положим $f := T(\xi)$ и $v_i = f_i - f$. Тогда $v_i \in L^{1,p}(V_i, E)$, $v_i - v_j = w_{ij}$ и $\bar{\partial}v_i = \bar{\partial}f_i - \bar{\partial}f = 0$. Поэтому $v := (v_i) \in \sum_{i=1}^l \mathcal{H}^{1,p}(V_i, E)$ и $\delta(v) = w$. Отсюда следует, что формула $T_\delta : w \mapsto v$ задает оператор T_δ , который является расщеплением δ . Явная конструкция показывает, что T_δ непрерывен. Отсюда следует утверждение леммы 3.5.

ЛЕММА 3.6. Пусть C – штейнова нодальная кривая с кусочно гладкой границей и X – комплексное многообразие. Тогда

- i) $\mathcal{H}^{1,p}(C, X)$ обладает естественно определенной структурой комплексного многообразия с касательным пространством $T_u \mathcal{H}^{1,p}(C, X) = \mathcal{H}^{1,p}(C, u^*TX)$;
- ii) если $C' \subset C$ – нодальная кривая, то отображение ограничения $\mathcal{H}^{1,p}(C, U) \rightarrow \mathcal{H}^{1,p}(C', U)$ голоморфно, а его дифференциал в точке $u \in \mathcal{H}^{1,p}(C, U)$ – также отображение ограничения $\mathcal{H}^{1,p}(C, u^*TU) \rightarrow \mathcal{H}^{1,p}(C', u^*TU)$, $v \mapsto v|_{C'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет осуществляться поэтапно.

Шаг 1. Предположим сначала, что образ $u(C)$ лежит в комплексной карте $U \subset X$ с комплексными координатами $w = (w_1, \dots, w_n): U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{C}^n$. Тогда множество $\mathcal{H}^{1,p}(C, U)$ есть открытая окрестность u в $\mathcal{H}^{1,p}(C, X)$ и, естественно, отождествляется со множеством $\mathcal{H}^{1,p}(C, U')$, которое является открытым множеством в банаховом пространстве $\mathcal{H}^{1,p}(C, \mathbb{C}^n)$. Это задает на $\mathcal{H}^{1,p}(C, U)$ структуру комплексного банахова многообразия с касательным пространством $T_u \mathcal{H}^{1,p}(C, U) \cong \mathcal{H}^{1,p}(C, \mathbb{C}^n) \cong \mathcal{H}^{1,p}(C, u^*TU)$ в точке $u \in \mathcal{H}^{1,p}(C, U)$.

Отметим, что если u_t , $t \in [0, 1]$, — C^1 -кривая в $\mathcal{H}^{1,p}(C, U)$, то касательный вектор $v \in \mathcal{H}^{1,p}(C, u^*TU)$ к u_t в u_0 задается формулой $v(z) = \frac{\partial u}{\partial t}(z) \in T_{u(z)}U$. Заметим, что последняя формула не зависит от выбора комплексных координат $w = (w_1, \dots, w_n): U \rightarrow \mathbb{C}^n$ в U . Отсюда вытекают два следующих следствия.

Во-первых, *комплексная структура в $\mathcal{H}^{1,p}(C, U)$ не зависит от выбора комплексных координат $w = (w_1, \dots, w_n): U \rightarrow \mathbb{C}^n$ в U* . Во-вторых, для C выполнено свойство ii) леммы.

Таким образом, если $u(C)$ содержится в некоторой карте, то лемма 3.6 верна.

Шаг 2. Предположим, что $u_0 \in \mathcal{H}^{1,p}(C, X)$ фиксировано и что существует конечное покрытие $\{V_i\}_{i=1}^l$ кривой C такое, что, во-первых, выполнены условия леммы 3.5, а во-вторых, для каждого V_i лемма 3.6 верна (например, если каждое $u_0(V_i)$ содержится в некоторой карте $U_i \subset X$).

Обозначим $V_{ij} := V_i \cap V_j$. Выберем шары

$$B_{ij} \subset \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, u_0^*TX) \cong T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, X)$$

такие, что существуют биголоморфизмы $\psi_{ij}: B_{ij} \xrightarrow{\cong} B'_{ij} \subset \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, X)$ с $\psi_{ij}(0) = u_0|_{V_{ij}}$ и $d\psi_{ij}(0) = \text{Id}: \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, u_0^*TX) \rightarrow \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, u_0^*TX)$. Затем выберем шары $B_i \subset \mathcal{H}^{1,p}(V_i, X)$ такие, что $u_0|_{V_i} \in B_i$ и для любого $u_i \in B_i$ выполнено $u_i|_{V_{ij}} \in B'_{ij}$.

Теперь однозначно определены голоморфные отображения $\varphi_{ij}: B_i \rightarrow B_{ij} \subset \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, u_0^*TX)$, $\varphi_{ij}: u_i \mapsto \psi_{ij}^{-1}(u_i|_{V_{ij}})$ и голоморфное отображение

$$\begin{aligned} \Phi: \prod_{i=1}^l B_i &\longrightarrow \sum_{i < j} \mathcal{H}^{1,p}(V_{ij}, u_0^*TX), \\ \Phi: (u_i)_{i=1}^l &\longmapsto \varphi_{ij}(u_i) - \varphi_{ji}(u_j). \end{aligned}$$

Легко видеть, что отображение Φ задает условие совместимости локальных голоморфных отображений $u_i: V_i \rightarrow X$, а именно, $(u_i)_{i=1}^l \in \prod_{i=1}^l B_i$ тогда и только тогда определяют голоморфное отображение $u: C \rightarrow X$, когда $\Phi(u_i) = 0$. Кроме того, дифференциал $d\Phi$ в точке $(u_0|_{V_i})$ является кограничным оператором Чеха (3.1). Поскольку C — штейнова, $H^1(C, u_0^*TX) = 0$. Используя лемму 3.5 и теорему о неявной функции, мы получим, что утверждения i) и ii) леммы 3.6 выполняются в некоторой окрестности отображения $u_0 \in \mathcal{H}^{1,p}(C, X)$.

Шаг 3. Можно показать, что для любой штейновой нодальной кривой C и для любого $u \in \mathcal{H}^{1,p}(C, X)$ утверждения i) и ii) леммы 3.6 выполняются в некоторой окрестности отображения u , применяя шаг 2 достаточное число раз. Например, если C — кольцо $A_{r,R}$, то его можно покрыть узкими кольцами A_{r_i, R_i} , $0 < R_i - r_i \ll 1$, а каждое из колец A_{r_i, R_i} — малыми секторами $V_{ij} = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : r_i < \rho < R_i, \alpha_j < \theta < \beta_j\}$ с $0 < \beta_j - \alpha_j \ll 1$. Детали мы предоставляем читателю.

Одной из трудностей при построении *голоморфных* семейств стабильных кривых является тот факт, что пространство модулей голоморфных структур на некомпактной римановой поверхности Σ не имеет естественной комплексной структуры и, более того, может иметь нечетную вещественную размерность. Например, если Σ – кольцо, то оно биголоморфно стандартному кольцу $A_{r,1}$ с однозначно определенным $r \in (0, 1)$, и значит, интервал $(0, 1)$ образует пространство модулей. В общем случае, если Σ имеет род g и k граничных компонент, то вещественная размерность пространства модулей равна $d = 6g - 6 + 3k$, за исключением четырех случаев, когда Σ есть либо сфера ($g = 0, k = 0$), либо тор ($g = 1, k = 0$), либо диск ($g = 0, k = 1$), либо кольцо ($g = 0, k = 2$), см., например, [8]. Отметим, что в этих и только этих случаях группа голоморфных автоморфизмов соответствующих комплексных кривых (Σ, J) имеет положительную размерность.

Ситуацию можно исправить, вводя дополнительные k параметров, а именно, фиксируя k отмеченных точек, по одной на каждой граничной компоненте. Пусть A – кольцо с граничными окружностями γ_0 и γ_1 и X – комплексное многообразие.

ТЕОРЕМА 3.7. *Существуют комплексные банаховы многообразия $\mathcal{M}(A, X)$ и $\mathcal{C}(A, X)$, голоморфная проекция $\pi_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}(A, X) \rightarrow \mathcal{M}(A, X)$ и голоморфные отображения $\text{ev}: \mathcal{C}(A, X) \rightarrow X$, $z_1: \mathcal{C}(A, X) \rightarrow \Delta$, $z_2: \mathcal{C}(A, X) \rightarrow \Delta$ и $\lambda_{\mathcal{M}}: \mathcal{M}(A, X) \rightarrow \Delta$ со следующими свойствами:*

- i) *для любого $y \in \mathcal{M}(A, X)$ слой проекции $C_y := \pi_{\mathcal{C}}^{-1}(y)$ есть нодальная кривая, параметризуемая кольцом A ; более того, отображение $(z_1, z_2): C_y \rightarrow \Delta^2$ задает биголоморфизм на кривую $\{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = \lambda_{\mathcal{M}}(y)\}$; в частности, C_y есть либо стандартный нод, если $\lambda_{\mathcal{M}}(y) = 0$, либо голоморфное кольцо $\{|\lambda_{\mathcal{M}}(y)| < |z_1| < 1\}$;*
- ii) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, X) & \xrightarrow{(\text{ev}, z_1, z_2)} & X \times \Delta^2 \\ \downarrow \pi_{\mathcal{C}} & & \downarrow \lambda = z_1 \cdot z_2 \\ \mathcal{M}(A, X) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{M}}} & \Delta \end{array} \quad (3.7)$$

коммутативна; более того, для любого $y \in \mathcal{M}(A, X)$ сужение $\text{ev}|_{C_y} \in \mathcal{H}^{1,p}(A_a, X)$ с $a = \lambda_{\mathcal{M}}(y)$, а отображения $\text{ev}_1: y \in \mathcal{M}(A, X) \mapsto \text{ev}|_{C_y}(z_1^{-1}(1))$ и $\text{ev}_2: y \in \mathcal{M}(A, X) \mapsto \text{ev}|_{C_y}(z_2^{-1}(1))$ голоморфны;

- iii) *пусть C – кольцо или нод с гладкой границей $\partial C = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$, $p_i \in \gamma_i$ – отмеченные точки и $u: C \rightarrow X$ – голоморфное $L^{1,p}$ -гладкое отображение; тогда существуют единственное $y \in \mathcal{M}(A, X)$ и единственный биголоморфизм $\varphi: C \rightarrow C_y$ такие, что $\text{ev} \circ \varphi = u: C \rightarrow X$ и $z_i \circ \varphi(p_i) = 1 \in \bar{\Delta}$; иначе говоря, $\mathcal{M}(A, X)$ параметризует голоморфные отображения в X из колец и нодов с отмеченными точками на границе;*
- iv) *если коммутативная диаграмма с комплексными пространствами $\mathcal{W}$ и $\mathcal{Z}$ и голоморфными отображениями*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{(\text{ev}^{\mathcal{Z}}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} & X \times \Delta^2 \\ \downarrow \pi_{\mathcal{Z}} & & \downarrow \lambda = \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 \\ \mathcal{W} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{W}}} & \Delta \end{array} \quad (3.8)$$

обладает свойствами i) и ii), в частности, если слои $\mathcal{Z}_w := \pi_{\mathcal{Z}}^{-1}(w)$ суть нодальные кривые с индуцированными отображениями $f_w := \text{ev}^{\mathcal{Z}}|_{\mathcal{Z}_w} \in \mathcal{H}^{1,p}(\mathcal{Z}_w, X)$, то диаграммы (3.7) и (3.8) единственным образом дополняются до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{C}(A, X) & \xrightarrow{(\text{ev}, z_1, z_2)} & X \times \Delta^2 \\ \downarrow \pi_{\mathcal{Z}} & & \downarrow \pi_{\mathcal{C}} & & \downarrow \lambda = z_1 \cdot z_2 \\ \mathcal{W} & \xrightarrow{F} & \mathcal{M}(A, X) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{M}}} & \Delta, \end{array} \quad (3.9)$$

в которой $\lambda_{\mathcal{M}} \circ F = \lambda_{\mathcal{W}}$ и $(\text{ev}, z_1, z_2) \circ \tilde{F} = (\text{ev}^{\mathcal{Z}}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$;

- v) дифференциал $d\lambda_{\mathcal{M}}: T_y \mathcal{M}(A, X) \rightarrow T_{\lambda_{\mathcal{M}}(y)} \Delta \cong \mathbb{C}$ не вырожден ни в какой точке $y \in \mathcal{M}(A, X)$, и для каждого $a \in \Delta$ слой $\lambda_{\mathcal{M}}^{-1}(a)$ естественно изоморфен многообразию $\mathcal{H}^{1,p}(A_a, X)$, где A_a — кривая $\{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = a\}$; в частности, для любого $y \in \mathcal{M}(A, X)$ имеются биголоморфизм $C_y \cong A_{\lambda_{\mathcal{M}}(y)}$ и естественная точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{1,p}(C_y, u^*TX) \xrightarrow{\iota_y} T_y \mathcal{M}(A, X) \xrightarrow{d\lambda_{\mathcal{M}}(y)} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (A, p_1, p_2) — гладкое кольцо с отмеченными точками, по одной на каждой граничной компоненте $\gamma_i \cong S^1$, и пусть J — комплексная структура на A . Известно, (A, J) биголоморфно некоторому кольцу $A_{r,1} = \{r < |z| < 1\}$. Легко видеть, что существует в точности один изоморфизм $\psi: (A, J) \rightarrow A_{r,1}$, который гладко продолжается до диффеоморфизма $\psi: \bar{A} \rightarrow \bar{A}_{r,1}$ с $\varphi(p_1) = 1$. Положим $a := \varphi(p_2)$. Теперь очевидно, что существует единственный биголоморфизм $\varphi: (A, J) \rightarrow A_a := \{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = a\}$ такой, что $\varphi(p_1) = 1$ и $\varphi(p_2) = a$.

Таким образом, отображение $\lambda: \Delta^2 \rightarrow \Delta$, $\lambda(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$ со слоем A_a над $a \in \Delta$ представляет собой голоморфное пространство модулей колец с отмеченными точками на граничных компонентах, пополненное в $a = 0$ стандартным nodом. При $a \neq 0$ координаты $z_i, i = 1, 2$, реализуют вложение каждого A_a как кольца в $\mathbb{C}$ так, что окружность γ_i становится внешней единичной окружностью. При $a \rightarrow 0$ кольца A_a вырождаются в стандартный нод, а каждое z_i переходит в стандартную координату на соответствующей компоненте нода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее мы обозначаем символом A_a кольцо (или соответственно нод) с фиксированными точками на границе ∂A_a , а также с однозначно определяемыми координатами z_1 и z_2 .

Зафиксируем $r, 0 < r < 1$. Для $|a| < r$ зададим отображения $\zeta_1^a, \zeta_2^a: A_{r,1} \rightarrow A_a$ формулами $\zeta_1^a(z) := z$ и $\zeta_2^a(z) := a/z$, так что ζ_i^a являются обращениями координат z_i . Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \Psi_r: \prod_{|a| < r} \mathcal{H}^{1,p}(A_a, X) &\longrightarrow \mathcal{H}^{1,p}(A_{r,1}, X) \times \mathcal{H}^{1,p}(A_{r,1}, X) \times \Delta(r), \\ \Psi_r: u \in \mathcal{H}^{1,p}(A_a, X) &\longmapsto (u \circ \zeta_1^a, u \circ \zeta_2^a, a). \end{aligned}$$

Легко видеть, что Ψ_r голоморфно на каждом $\mathcal{H}^{1,p}(A_a, X)$ и что образ Ψ_r состоит из таких троек (u_1, u_2, a) , что каждое $u_i \in \mathcal{H}^{1,p}(A_{r,1}, X)$ продолжается до $u_i \in \mathcal{H}^{1,p}(A_{|a|,1}, X)$ и $u_2(z) = u_1(a/z)$. Поэтому Ψ_r инъективно и его образ замкнут. Зададим на дизъюнктном объединении $\mathcal{M}(A, X) := \prod_{a \in \Delta} \mathcal{H}^{1,p}(A_a, X)$

топологию, индуцированную отображениями Ψ_r . Очевидно, что она согласована с топологией в каждом слое $\mathcal{H}^{1,p}(A_a, X)$.

Наша задача – построение подходящей голоморфной структуры на $\mathcal{M}(A, X)$, согласованной с введенными выше голоморфными структурами на каждом слое $\mathcal{H}^{1,p}(A_a, X)$, а также с заданной выше топологией на $\mathcal{M}(A, X)$.

Начнем со специального случая $X = \mathbb{C}^n$. Легко видеть, что при $a \neq 0$ любая функция $f \in \mathcal{H}^{1,p}(A_a, \mathbb{C}^n)$ единственным образом представляется в виде ряда Лорана $f(z_1) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z_1^i$. Положим $f^+(z_1) := \sum_{i=0}^{\infty} c_i z_1^i$ и $f^-(z_1) := \sum_{i=-\infty}^0 c_i z_1^i$. Функцию f^- удобно также рассматривать как функцию аргумента $z_2 = a/z_1$, и тогда $f^-(z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{-i} (z_2/a)^i$. При этом $f^+ \in \mathcal{H}^{1,p}(\{|z_1| < 1\}, \mathbb{C}^n)$, $f^- \in \mathcal{H}^{1,p}(\{|z_2| < 1\}, \mathbb{C}^n)$, $f^+(0) = f^-(z_2 = 0) = c_0$ и $f(z_1) = f^+(z_1) + f^-(a/z_1) - c_0$, так что пара (f^+, f^-) задает голоморфную функцию $\hat{f} \in \mathcal{H}^{1,p}(A_0, \mathbb{C}^n)$. Получающиеся канонические изоморфизмы $\mathcal{H}^{1,p}(A_a, \mathbb{C}^n) \cong \mathcal{H}^{1,p}(A_0, \mathbb{C}^n)$ определяют на $\prod_{|a| < 1} \mathcal{H}^{1,p}(A_a, \mathbb{C}^n)$ структуру тривиального банахова расслоения с базой $\{|a| < 1\}$, а значит, и структуру банахова многообразия.

При этом отображение $\Psi_r: \prod_{|a| < r} \mathcal{H}^{1,p}(A_a, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{H}^{1,p}(A_{r,1}, \mathbb{C}^n)^2 \times \Delta(r)$ является голоморфным. Если $U \subset \mathbb{C}^n$ – открытое подмножество, то $\mathcal{M}(A, U)$ также открыто в $\mathcal{M}(A, \mathbb{C}^n)$, а значит, наследует голоморфную структуру. При этом естественная проекция $\lambda_{\mathcal{M}}: \mathcal{M}(A, U) \rightarrow \Delta$ становится голоморфной. Легко видеть, что дифференциал $d\lambda_{\mathcal{M}}$ невырожден. Поэтому мы можем определить *универсальное семейство кривых* $\mathcal{C}(A, U)$ как расслоенное произведение $\mathcal{M}(A, U) \times_{\Delta} \Delta^2$ относительно отображений $\lambda_{\mathcal{M}}: \mathcal{M}(A, U) \rightarrow \Delta$ и $\lambda: \Delta^2 \rightarrow \Delta$, которое является голоморфным банаховым многообразием в силу невырожденности $d\lambda_{\mathcal{M}}$.

Пусть $\pi_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}(A, U) \rightarrow \mathcal{M}(A, U)$ обозначает естественную проекцию. Тогда слой $\mathcal{C}_y$ над $y \in \mathcal{M}(A, U)$ биголоморфен A_a с $a = \lambda_{\mathcal{M}}(y)$. Естественная проекция из $\mathcal{C}(A, U)$ на Δ^2 индуцирует голоморфные функции z_1 и z_2 на $\mathcal{C}(A, U)$ со значениями в Δ такие, что выполнено свойство i) теоремы 3.7.

Пусть теперь $a \neq 0 \in \Delta$ и $f \in \mathcal{H}^{1,p}(A_a, \mathbb{C}^n)$. Представим f в виде $f(z_1) = f^+(z_1) + f^-(a/z_1) - f_0$, где $f^{\pm} \in \mathcal{H}^{1,p}(\Delta, \mathbb{C}^n)$ с $f^+(0) = f^-(0) = f_0$. Аналогично, для $f \in \mathcal{H}^{1,p}(A_0, \mathbb{C}^n)$ имеем $f = (f^+, f^-)$, где опять $f^{\pm} \in \mathcal{H}^{1,p}(\Delta, \mathbb{C}^n)$ с $f^+(0) = f^-(0) = f_0$. Рассмотрим голоморфную функцию $\tilde{f}(z_1, z_2) := f^+(z_1) + f^-(z_2) - f_0$, $\tilde{f} \in \mathcal{H}^{1,p}(\Delta^2, \mathbb{C}^n)$. Зададим отображения $\tilde{e}v_a: \mathcal{H}^{1,p}(A_a, \mathbb{C}^n) \times \Delta^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ по формуле $\tilde{e}v(f, z_1, z_2) := \tilde{f}(z_1, z_2)$. Легко видеть, что $\tilde{e}v_a$ определяют голоморфное отображение $\tilde{e}v: \mathcal{M}(A, \mathbb{C}^n) \times \Delta^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$. Пусть ev обозначает сужение этого отображения на $\mathcal{C}(A, \mathbb{C}^n) \subset \mathcal{M}(A, \mathbb{C}^n) \times \Delta^2$. Мы предоставляем читателю проверку того, что $\mathcal{M}(A, \mathbb{C}^n)$, $\mathcal{C}(A, \mathbb{C}^n)$, $ev: \mathcal{C}(A, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ и $z_{1,2}: \mathcal{C}(A, \mathbb{C}^n) \rightarrow \Delta$ удовлетворяют утверждениям теоремы 3.7.

Отсюда следует, что для $U \subset \mathbb{C}^n$ мы можем определить отображение $ev: \mathcal{C}(A, U) \rightarrow U$ просто как сужение $ev: \mathcal{C}(A, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Утверждения теоремы 3.7 опять же останутся верными. В частности, если $G: U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфно, то естественные биекции $\mathcal{M}(A, U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(A, U')$ и $\mathcal{C}(A, U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(A, U')$ являются биголоморфизмами. Это означает, что голоморфная структура в $\mathcal{M}(A, U)$ не зависит от вложения $U \subset \mathbb{C}^n$.

Пусть $C = A_{r,1}$ – кольцо и $u: C \rightarrow X$ – голоморфное вложение. Тогда $du: TC \rightarrow u^*TX$ – вложение голоморфных расслоений над C , что определяет голоморфное нормальное расслоение как фактор-расслоение $N_C := u^*TX/TC$. Поскольку C – штейнова, расслоение N_C – голоморфно тривиально. Зафиксируем голо-

морфный репер $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \in \mathcal{H}^{1,p}(C, N_C)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, а также его подъем $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1} \in \mathcal{H}^{1,p}(C, u^*TX)$. Пусть $B^{n-1}(r)$ обозначает шар радиуса r в $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $w = (w_1, \dots, w_{n-1})$. Из леммы 3.6 следует, что существует голоморфное отображение $\Psi: C \times B^{n-1}(r) \rightarrow X$ такое, что $\frac{\partial \Psi}{\partial w_i} \Big|_{z \in C, w=0} = \sigma_i(z)$.

Поэтому Ψ – биголоморфно в окрестности $C \equiv C \times \{0\}$. В частности, для достаточно малого r образ $U := \Psi(C \times B^{n-1}(r))$ будет картой с координатами $(z, w_1, \dots, w_{n-1})$. При этом образ $u(C')$ любого меньшего кольца $C' \Subset C$ будет лежать в U .

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть общий случай, когда $C \cong A_a$ произвольно и $u: C \rightarrow X$ – голоморфное отображение. Если $a = 0$, то C – нод, и значит, существует окрестность V_0 нодальной точки такая, что образ $u(\overline{V}_0)$ лежит в некоторой карте X . Если $a \neq 0$ и образ $u(\overline{C})$ не лежит ни в какой карте X , то тогда u непостоянно. Поэтому для некоторого $|a| < r < 1$ отображение u будет вложением в некоторой окрестности окружности $S_r^1 := \{|z_1| = r\} \subset C \cong \{|a| < |z_1| < 1\}$.

В любом случае существует покрытие $\{V_0, V_1, V_2\}$ кривой $C = \{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = a\}$ вида

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(z_1, z_2) \in C : r_1 < |z_1| < 1\}, \\ V_2 &= \{(z_1, z_2) \in C : r_2 < |z_2| < 1\}, \\ V_0 &= \{(z_1, z_2) \in C : |z_1| < R_1, |z_2| < R_2\}, \end{aligned}$$

где $0 < r_1 < R_1 < 1$, $0 < r_2 < R_2 < 1$, $r_1 \cdot R_2 > |a| < r_2 \cdot R_1$, а V_0 таково, что образ $u(\overline{V}_0)$ лежит в некоторой карте U в X .

Рис. 5. Покрытие $\{V_0, V_1, V_2\}$. Кривая A_a обозначена отрезком гиперболы жирной линией, элементы покрытия V_0, V_1 и V_2 – штрихпунктирной линией

Зафиксируем координату z_1 на V_1 и координату z_2 на V_2 . Введем на V_0 новые координаты $\tilde{z}_1 := z_1/R_1$ и $\tilde{z}_2 := z_2/R_2$, а также отмеченные точки $\tilde{p}_1 := R_1$ и $\tilde{p}_2 := a/R_2$. Положим $\tilde{a} := a/(R_1 R_2)$. Тогда $V_0 \cong A_{\tilde{a}} = \{(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \in \Delta^2 : \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 = \tilde{a}\}$ с $\tilde{z}_i(\tilde{p}_i) = 1$. Легко видеть, что изменение комплексного параметра $a = z_1 z_2$ на C , параметризующего голоморфные структуры в кольце с отмеченными точками на границе, можно свести к изменению аналогичного параметра в V_0 . А именно, пусть

$C' \cong A_{a'} = \{(z_1, z_2) \in \Delta^2 : z_1 \cdot z_2 = a'\}$ получается в результате (малой) деформации параметра a . Положим $\tilde{a}' := a'/(R_1 R_2)$. Рассмотрим C' как склейку комплексных кривых V'_0, V_1 и V_2 , где V'_0, V_1 и V_2 задаются в C' теми же уравнениями $V'_0 = \{(z_1, z_2) \in C' : |z_1| < r_1, |z_2| < r_2\}$, $V_i = \{r_i < |z_i| < 1\}$ при $i = 1, 2$, но теперь координаты (z_1, z_2) удовлетворяют новому соотношению $z_1 \cdot z_2 = a'$, и $V'_0 \cong A_{\tilde{a}'}$.

Поэтому для подходящей малой окрестности $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}(A, X)$ кривой (C, u) над X определено голоморфное отображение

$$\begin{aligned} \Theta: \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{M}(A, U) \times \mathcal{H}^{1,p}(V_1, X) \times \mathcal{H}^{1,p}(V_2, X); \\ \Theta: (C', u') &\longmapsto ((A_{\tilde{a}'}, u|_{V'_0}), u|_{V_1}, u|_{V_2}). \end{aligned}$$

С другой стороны, набор отображений $u_0: V'_0 \rightarrow X$, $u_1: V_1 \rightarrow X$ и $u_2: V_2 \rightarrow X$ в точности тогда задает отображение $u': C' \rightarrow X$, когда u_1 совпадает с u_0 на $W_1 := V_1 \cap V'_0$, а u_2 совпадает с u_0 на $W_2 := V_2 \cap V'_0$. Отметим, что области $W_i \subset V_i$ не меняются в процессе деформации комплексной структуры на C . Конструкция склейки из шага 2 доказательства леммы 3.6 завершает доказательство теоремы.

Теперь мы можем завершить

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4. Пусть (C_0, u_0) – стабильная кривая над комплексным многообразием X с параметризацией $\sigma_0: \Sigma \rightarrow C_0$. Воспользуемся предложением 3.2 и зафиксируем соответствующее покрытие $\{V_\alpha, V_{\alpha\beta}\}$ поверхности Σ , для которого выполнены свойства i)–vi). В частности, существуют бигоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}^0: \sigma_0(V_{\alpha\beta}) \rightarrow A_{\lambda_{\alpha\beta}^0}$. Из свойств i)–vi) вытекает, что для любого набора $\lambda := (\lambda_{\alpha\beta})$, достаточно близкого к $\lambda^0 := (\lambda_{\alpha\beta}^0)$, существуют нодальная кривая C и параметризация $\sigma: \Sigma \rightarrow C$ такие, что остаются в силе свойства i)–vi) и существуют бигоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}: \sigma(V_{\alpha\beta}) \rightarrow A_{\lambda_{\alpha\beta}}$. В частности, комплексные структуры на каждом $\sigma(W_{\alpha\beta})$ не меняются. Более того, в $V_{\alpha\beta}$ существуют голоморфные координаты z_1 и z_2 такие, что $z_1|_{W_{\alpha,\beta}}$ и $z_2|_{W_{\beta,\alpha}}$ не меняются при изменении $\lambda_{\alpha\beta}$ и $z_1 \cdot z_2 \equiv \lambda_{\alpha\beta}$. Это означает, что диск $\Delta_{\alpha\beta} := \{\lambda_{\alpha\beta} : |\lambda_{\alpha\beta}^0 - \lambda_{\alpha\beta}| \leq \varepsilon\}$ параметризует *голоморфное* семейство кривых вида $\sigma(V_{\alpha\beta})$.

Изменение комплексной структуры в $V_{\alpha\beta}$ проиллюстрировано на рис. 6.

РИС. 6. Комплексная структура $V_{\alpha\beta}$ с прилегающими V_α и V_β . Можно считать, что при изменении $\lambda_{\alpha\beta}$ комплексная структура меняется лишь в заштрихованной области

Пусть $N \in \mathbb{N}$ – количество элементов покрытия вида $V_{\alpha\beta} = V_{\beta\alpha}$. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ полидиск

$$\Delta_{\lambda}^N := \{\lambda := (\lambda_{\alpha\beta}) : |\lambda_{\alpha\beta}^0 - \lambda_{\alpha\beta}| \leq \varepsilon\}$$

параметризует голоморфное семейство нодальных кривых $\{C_{\lambda}\}_{\lambda \in \Delta_{\lambda}^N}$. При этом каждая кривая $C_{\lambda} = \sigma(\Sigma)$ получается склейкой кусков $\sigma(V_{\alpha})$ и $\sigma(V_{\alpha\beta})$. Обозначим $\mathcal{M} := \bigcup_{\lambda \in \Delta_{\lambda}^N} \mathcal{H}^{1,p}(C_{\lambda}, X)$. Куски $\sigma(V_{\alpha})$ не содержат нодальных точек, и комплексные структуры на $\sigma(V_{\alpha})$ постоянны и не зависят от $\lambda = (\lambda_{\alpha\beta})$. Кроме того, имеются естественные изоморфизмы $\sigma(V_{\alpha\beta}) \cong A_{\lambda_{\alpha\beta}}$. Поэтому корректно определено отображение

$$\begin{aligned} \Theta: \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, X) \times \prod_{\alpha\beta} \mathcal{M}(V_{\alpha\beta}, X); \\ \Theta: \quad (C_{\lambda}, u) &\longmapsto (u|_{V_{\alpha}}, (\lambda_{\alpha\beta}, u|_{V_{\alpha\beta}})). \end{aligned}$$

Легко видеть, что набор $(u_{\alpha}, (\lambda_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta})) \in \prod_{\alpha} \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, X) \times \prod_{\alpha\beta} \mathcal{M}(V_{\alpha\beta}, X)$ в точности тогда лежит в образе Θ , когда для всех пар (α, β) выполнены условия склейки $u_{\alpha}|_{W_{\alpha,\beta}} = u_{\alpha\beta}|_{W_{\alpha,\beta}}$.

Повторим процедуру склейки из шага 2 леммы 3.6. Для этого выберем шары

$$\begin{aligned} B_{\alpha} &\subset \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, u_0^*TX) \cong T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, X), \\ B_{\alpha\beta} &\subset \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha\beta}, u_0^*TX) \oplus \mathbb{C} \cong T_{u_0} \mathcal{M}(V_{\alpha\beta}, X), \\ B'_{\alpha,\beta} &\subset \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, u_0^*TX) \cong T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, X) \end{aligned}$$

такие, что существуют биголоморфизмы

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}: B_{\alpha} &\xrightarrow{\cong} \psi_{\alpha}(B_{\alpha}) \subset \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, X), \\ \psi_{\alpha\beta}: B_{\alpha\beta} &\xrightarrow{\cong} \psi_{\alpha\beta}(B_{\alpha\beta}) \subset \mathcal{M}(V_{\alpha\beta}, X), \\ \psi'_{\alpha,\beta}: B'_{\alpha,\beta} &\xrightarrow{\cong} \psi'_{\alpha,\beta}(B'_{\alpha,\beta}) \subset \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, X) \end{aligned}$$

со свойствами

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}(0) &= u_0|_{V_{\alpha}}, & d\psi_{\alpha}(0) &= \text{Id}: T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, X) \rightarrow T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha}, X), \\ \psi_{\alpha\beta}(0) &= u_0|_{V_{\alpha\beta}}, & d\psi_{\alpha\beta}(0) &= \text{Id}: T_{(\lambda_{\alpha,\beta}^0, u_0)} \mathcal{M}(V_{\alpha}, X) \rightarrow T_{(\lambda_{\alpha,\beta}^0, u_0)} \mathcal{M}(V_{\alpha}, X), \\ \psi'_{\alpha,\beta}(0) &= u_0|_{W_{\alpha,\beta}}, & d\psi'_{\alpha,\beta}(0) &= \text{Id}: T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, X) \rightarrow T_{u_0} \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, X). \end{aligned}$$

Уменьшая при надобности шары B_{α} и $B_{\alpha\beta}$, мы можем полагать, что для всех $\xi_{\alpha} \in B_{\alpha}$ и всех $\xi_{\alpha\beta} \in B_{\alpha\beta}$ ограничения образов $\psi_{\alpha}(\xi_{\alpha})|_{W_{\alpha,\beta}}$ и $\psi_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta})|_{W_{\alpha,\beta}}$ лежат в образе $\psi'_{\alpha,\beta}(B'_{\alpha,\beta})$. Рассмотрим голоморфное отображение

$$\begin{aligned} \Psi: \quad \prod_{\alpha} B_{\alpha} \times \prod_{\alpha < \beta} B_{\alpha\beta} &\longrightarrow \sum_{\alpha,\beta} \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, u_0^*TX); \\ \Psi: \quad (v_{\alpha}, v_{\alpha\beta}) &\longmapsto \psi'_{\alpha,\beta}{}^{-1}(\psi_{\alpha}(v_{\alpha})|_{W_{\alpha,\beta}}) - \psi'_{\alpha,\beta}{}^{-1}(\psi_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta})|_{W_{\alpha,\beta}}). \end{aligned}$$

Как и в аналогичных ситуациях выше, отображение Ψ задает условие склейки локальных голоморфных отображений $\psi_{\alpha}(v_{\alpha}): V_{\alpha} \rightarrow X$ и $\psi_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}): V_{\alpha\beta} \rightarrow X$. Поэтому мы можем отождествить $\mathcal{M} \cap \prod_{\alpha} B_{\alpha} \times \prod_{\alpha < \beta} B_{\alpha\beta}$ со множеством $\Psi^{-1}(0)$.

Изучим подробнее поведение Ψ в интересующей нас точке $y_0 \in \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$, $y_0 = (\psi_\alpha^{-1}(u_0|_{V_\alpha}), \psi_{\alpha\beta}^{-1}(u_0|_{V_{\alpha\beta}}))$, $\Psi(y_0) = 0 \in \sum_{\alpha,\beta} \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, u_0^*TX)$. Легко видеть, что касательное пространство в y_0 равно

$$T_{y_0}(\prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}) = \sum_\alpha \mathcal{H}^{1,p}(V_\alpha, u_0^*TX) \oplus \sum_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha\beta}, u_0^*TX) \oplus \mathbb{C}^N,$$

а дифференциал $d\Psi(y_0)$ на слагаемом $\sum \mathcal{H}^{1,p}(V_\alpha, u_0^*TX) \oplus \sum \mathcal{H}^{1,p}(V_{\alpha\beta}, u_0^*TX)$ совпадает с кодифференциалом Чеха (3.1) относительно покрытия $\{V_\alpha, V_{\alpha\beta}\}$ кривой C_0 . По лемме 3.5 мы можем представить $\sum \mathcal{H}^{1,p}(W_{\alpha,\beta}, u_0^*TX)$ в виде прямой суммы $\mathcal{W} \oplus \mathcal{Q}$, где $\mathcal{W} = \text{Im}(d\Psi(y_0))$, а $\mathcal{Q}$ изоморфно $H^1(C_0, u_0^*TX)$ и конечномерно. Пусть $\Psi_{\mathcal{W}}$ и $\Psi_{\mathcal{Q}}$ – соответствующие компоненты $\Psi = (\Psi_{\mathcal{W}}, \Psi_{\mathcal{Q}})$ относительно этого разложения, и пусть $\widetilde{\mathcal{M}} := \Psi_{\mathcal{W}}^{-1}(0)$. По лемме 3.5 и теореме о неявной функции $\widetilde{\mathcal{M}}$ – комплексное подмногообразие в $\prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$ с касательным пространством в $y_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}$, равным $\mathcal{H}^{1,p}(C_0, u_0^*TX) \oplus \mathbb{C}^N$, а $\mathcal{M}$ задается в $\widetilde{\mathcal{M}}$ как множество нулей голоморфного отображения $\Phi := \Psi_{\mathcal{Q}}|_{\widetilde{\mathcal{M}}}: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{Q} \cong H^1(C, u_0^*TX)$. Это определяет на $\mathcal{M}$ структуру банахова аналитического множества конечного определения.

Для завершения доказательства остается построить соответствующее голоморфное семейство нодальных кривых $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ и голоморфное отображение $F: \mathcal{C} \rightarrow X$. Заметим, что с каждым шаром B_α мы можем естественно ассоциировать тривиальное семейство $\pi_\alpha: \mathcal{C}_\alpha := B_\alpha \times V_\alpha \rightarrow B_\alpha$, а с каждым шаром $B_{\alpha\beta}$ – голоморфное семейство $\pi_{\alpha\beta}: \mathcal{C}_{\alpha\beta} \rightarrow B_{\alpha\beta}$, слой которого $\pi_{\alpha\beta}^{-1}(v_{\alpha\beta})$ равен $A_{\lambda_{\alpha\beta}}$, где $\lambda_{\alpha\beta}$ однозначно определяется из соотношения $\psi_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) = (\lambda_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}(V_{\alpha\beta}, X)$.

Продолжим эти семейства до семейств $\tilde{\pi}_\alpha: \tilde{\mathcal{C}}_\alpha \rightarrow \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}: \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta} \rightarrow \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$. Очевидно, что $\tilde{\mathcal{C}}_\alpha$ и $\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}$ каноническим образом склеиваются в глобально определенное семейство нодальных кривых $\tilde{\pi}: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$. При этом $\mathcal{C}$ будет банаховым многообразием. Кроме того, мы получим корректно определенные голоморфные отображения $F_\alpha: \mathcal{C}_\alpha \rightarrow X$ и $F_{\alpha\beta}: \mathcal{C}_{\alpha\beta} \rightarrow X$ такие, что для $z \in V_\alpha$ выполнено $F(v_\alpha, v_{\alpha\beta}, z) := \psi_\alpha(v_\alpha)[z]$ плюс аналогичные соотношения для $F_{\alpha\beta}$.

Определим $\mathcal{C}$ как сужение $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{C}}|_{\mathcal{M}}$. Заметим, что сужение тривиального голоморфного семейства $\tilde{\mathcal{C}}_\alpha = V_\alpha \times \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$ на $\mathcal{M}$ – также тривиальное голоморфное семейство. Значит, $\mathcal{C}$ – б.а.м.к.о. в окрестности точек $y \in \mathcal{C} \cap \tilde{\mathcal{C}}_\alpha$. Аналогичным образом, каждое голоморфное семейство кривых $\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}$ выделяется в тривиальном расслоении $\Delta^2 \times \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{pr}} \prod B_\alpha \times \prod B_{\alpha\beta}$ условием $z_1 \cdot z_2 - \lambda_{\alpha\beta} = 0$, где $\lambda_{\alpha\beta}: B_{\alpha\beta} \rightarrow \Delta$ – голоморфный параметр деформации комплексной структуры в $V_{\alpha\beta}$, а z_1 и z_2 – стандартные координаты на Δ^2 . Поэтому $\mathcal{C}$ – б.а.м.к.о. также в окрестности точек $y \in \mathcal{C} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}$. Поскольку $\mathcal{M}$ фактически определялось условием совпадения локальных отображений F_α и $F_{\alpha\beta}$, на $\mathcal{C}$ задано глобальное голоморфное отображение $F: \mathcal{C} \rightarrow X$.

Свойства а), б) и г) теоремы 3.4 для $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ и F вытекают непосредственно из конструкции, а свойство в) получается с использованием предложения 3.2.

В доказательстве нужного нам варианта принципа непрерывности для мероморфных отображений (см. теорему 4.2 следующего параграфа или теорему 5.1.3 в [2]) используется следующее следствие основных результатов этого параграфа.

Пусть (C_n, u_n) – последовательность неприводимых стабильных кривых над X , сходящаяся к стабильной кривой (C_∞, u_∞) .

ЛЕММА 3.8. *Существуют индекс N и комплексная (возможно, сингулярная) поверхность Z с голоморфными отображениями $\pi_Z: Z \rightarrow \Delta$ и $F: Z \rightarrow X$, которые определяют голоморфное семейство нодальных стабильных над X кривых, соединяющее (C_N, u_N) с (C_∞, u_∞) . Более точно, выполняется следующее:*

- 1) для каждого $\lambda \in \Delta$ слой $C_\lambda = \pi_Z^{-1}(\lambda)$ есть связная нодальная кривая с границей ∂C_λ , а пара (C_λ, u_λ) с $u_\lambda := F|_{C_\lambda}$ – стабильная кривая над X ;
- 2) все кривые C_λ , за исключением конечного числа, – связные и гладкие;
- 3) (C_0, u_0) равна (C_∞, u_∞) и существует $\lambda_N \in \Delta$ такое, что $(C_{\lambda_N}, u_{\lambda_N}) = (C_N, u_N)$;
- 4) существуют открытые множества $V_1, \dots, V_m$ в Z такие, что каждое V_j биголоморфно $\Delta \times A_j$, где A_j – некоторое кольцо; более того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{\cong} & \Delta \times A_j \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_\Delta \\ \Delta & \xlongequal{\quad} & \Delta \end{array}$$

коммутативна, причем каждое кольцо $C_\lambda \cap V_j \cong \{\lambda\} \times A_j$ примыкает в точности к одной компоненте границы ∂C_λ , а число m областей V_j равно количеству компонент границы каждой кривой C_λ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта лемма сформулирована без доказательства в предложении 5.1.1 из [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ и $\text{ev}: \mathcal{C} \rightarrow X$ задают полное семейство голоморфных деформаций нодальной стабильной над X кривой (C_∞, u_∞) , построенное в теореме 3.3. Пусть $\lambda^* \in \mathcal{M}$ параметризует кривую (C_∞, u_∞) . Выберем последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda^*$ в $\mathcal{M}$ такую, что $(C_n, u_n) \cong (\pi_{\mathcal{C}}^{-1}(\lambda_n), \text{ev}|_{\pi_{\mathcal{C}}^{-1}(\lambda_n)})$ для всех достаточно больших n . Поскольку $(C_\infty, u_\infty) = (\pi_{\mathcal{C}}^{-1}(\lambda^*), \text{ev}|_{\pi_{\mathcal{C}}^{-1}(\lambda^*)})$ поднимается в окрестности границы в $\hat{U}$, то, уменьшая $\mathcal{M}$, мы можем считать, что это верно для всех $\lambda \in \mathcal{M}$.

По построению пространство $\mathcal{M}$ – б.а.м.к.о., и значит, применима теорема 3.3. В частности, существует конечное число неприводимых в λ^* компонент $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}_1$ – компонента $\mathcal{M}$, содержащая бесконечно много λ_n . Представим $\mathcal{M}_1$ в окрестности λ^* как собственное разветвленное накрытие $\pi_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow B_1$ над банаховым шаром B_1 . Если Δ – любой вложенный диск в B_1 , то $\pi_1^{-1}(\Delta)$ – одномерное аналитическое множество, неприводимые компоненты которого также параметризуются дисками. Поэтому существует голоморфное отображение $\varphi: \Delta \rightarrow \mathcal{M}_1$, проходящее через λ^* и λ_N с некоторым $N \gg 1$. Прообраз семейства $\pi_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ относительно φ определяет голоморфное семейство нодальных стабильных над X кривых с тотальным пространством $\pi_Z: Z \rightarrow \Delta$ и отображением $F: Z \rightarrow X$, содержащим (C_∞, u_∞) и (C_N, u_N) .

Поскольку C_N – гладкая, общий слой $C_\lambda = \pi_Z^{-1}(\lambda)$ – тоже гладкая кривая. Выбирая при необходимости меньший диск, мы можем считать, что C_λ сингулярны лишь для конечного числа $\lambda \in \Delta$. Остальные свойства 1)–4) следуют из конструкции семейства $\pi_Z: Z \rightarrow \Delta$ и отображения $F: Z \rightarrow X$.

§ 4. Принцип непрерывности и доказательство основной теоремы

Сформулируем принцип непрерывности из работы [2], необходимый для доказательства основной теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Эрмитово комплексное многообразие (X, h) называется *диск-выпуклым*, если для любой последовательности (C_n, u_n) стабильных кривых над X , параметризованных одной и той же вещественной поверхностью Σ и обладающих свойствами

- 1) C_n неприводимы при всех n , и границы ∂C_n непусты;
- 2) площади $\text{area}_h[u_n(C_n)]$ равномерно ограничены;
- 3) (C_n, u_n) сходятся в окрестности границ ∂C_n ,

существует компакт $K \subseteq X$, содержащий все $u_n(C_n)$.

В частности, все компактные многообразия диск-выпуклы. Свойство диск-выпуклости инвариантно относительно замены эрмитовой метрики h на эквивалентную метрику h' , $c \cdot h \leq h' \leq C \cdot h$. Отметим также, что у такой последовательности (C_n, u_n) по теореме 3.1 существует сходящаяся по Громову подпоследовательность.

Пусть U – область в комплексном многообразии X , а Y – комплексное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Оболочкой мероморфности* U относительно Y называется наибольшая область $(\hat{U}_Y, \hat{\pi})$ над X , которая содержит U (т.е. существует вложение $i: U \rightarrow \hat{U}_Y$ с $\hat{\pi} \circ i = \text{Id}$), такая, что каждое мероморфное отображение $f: U \rightarrow Y$ продолжается до мероморфного отображения $\hat{f}: \hat{U} \rightarrow Y$.

Конструкция Картана–Туллена (см. [1]) позволяет доказать существование и единственность оболочки:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любой области U в комплексном многообразии X и для любого комплексного пространства Y существует оболочка мероморфности $(\hat{U}_Y, \hat{\pi})$ относительно Y .*

В [2; теорема 5.1.3] была доказана следующая

ТЕОРЕМА 4.2. *Для любой области $U \subset X$ в диск-выпуклой комплексной эрмитовой поверхности (X, h) и любого диск-выпуклого кэлера пространства Y оболочка мероморфности $(\hat{U}_Y, \hat{\pi})$, снабженная эрмитовой метрикой $\hat{\pi}^*h$, также диск-выпукла.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Смысл теоремы поясним на следующем примере. Пусть X – диск-выпукло и $U \subset X$ – некоторая область. Пусть $f: U \rightarrow Y$ – мероморфное отображение и $\{(C_n, u_n)\}$ – последовательность голоморфных стабильных над X кривых, сходящаяся в топологии Громова к (C_∞, u_∞) , причем образы границ $u_n(\partial C_n)$ и $u_\infty(\partial C_\infty)$ лежат в U . Предположим также, что f продолжается вдоль каждой кривой $u_n(C_n)$. Это означает, что существует комплексная поверхность V_n , содержащая C_n , и голоморфное, локально биголоморфное отображение $u'_n: V_n \rightarrow X$ такое, что $u'_n|_{C_n} = u_n$ и f мероморфно продолжается с $u'^{-1}_n U$ на все V_n .

Последнее равносильно подъему кривых (C_n, u_n) в оболочку $\hat{U}$, т.е. существованию голоморфных отображений $\hat{u}_n: C_n \rightarrow \hat{U}$ таких, что $\hat{\pi} \circ \hat{u}_n = u_n$. Иначе говоря, в качестве V_n можно взять любую окрестность подъема C_n в $\hat{U}$. Легко видеть,

что получающиеся кривые $(C_n, \hat{u}_n)$ стабильны над $\hat{U}$, имеют равномерно ограниченную площадь и сходятся возле границы ∂C_n . По утверждению теоремы 4.2 и теоремы компактности Громова (теорема 3.1) некоторая подпоследовательность $(C_n, \hat{u}_n)$ сходится к $\hat{U}$ -стабильной кривой $(C_\infty, \hat{u}_\infty)$, причем $\hat{\pi} \circ \hat{u}_\infty = u_\infty$. Это означает, что f продолжается вдоль кривой $u_\infty(C_\infty)$. Таким образом, теорема 4.2 является обобщением принципа продолжения Е. Леви.

Мы докажем более общее утверждение, чем основная теорема. А именно, вместо мероморфных функций (т.е. мероморфных отображений в $\mathbb{CP}^1$) мы рассмотрим общий случай мероморфных отображений в произвольное диск-выпуклое кэлерово пространство Y .

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $u: S^2 \rightarrow X$ – симплектическая иммерсия сферы S^2 в диск-выпуклую кэлерову поверхность X такая, что $M := u(S)$ имеет только положительные двойные точки. Предположим, что $c_1(X)[M] > 0$. Тогда оболочка мероморфности $(\hat{U}_Y, \pi)$ произвольной окрестности U образа M относительно диск-выпуклого кэлерова пространства Y содержит рациональную кривую C с условием $\pi^*c_1(X)[C] > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u: S^2 \rightarrow X$ – симплектическая иммерсия сферы, имеющая лишь положительные самопересечения. Пусть U – относительно компактная область в X , содержащая $M := u(S^2)$. Обозначим через $(\hat{U}_Y, \hat{\pi}_Y)$ ее оболочку мероморфности относительно Y .

Шаг 1. Существует (ω -ручная) почти комплексная структура $J_0 \in \mathcal{J}_U$ такая, что M – J_0 -голоморфная кривая.

Это утверждение доказано в [2; лемма 1.1.2]. Более того, существует гладкая гомотопия $h: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_U$, соединяющая $J_0 = h(0)$ и $J_{\text{st}} = h(1)$. Обозначим $M_0 := M$. Как и в лемме 2.5, пусть $\mathcal{M}_h(M_0, J_0)$ обозначает компоненту $\mathcal{M}_h$, проходящую через (M_0, J_0) .

Шаг 2. Предположим, что компонента $\mathcal{M}_h(M_0, J_0)$ некомпактна.

Тогда п. iii) леммы 2.5 утверждает, что существует непрерывная кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_h$, начинающаяся в (M_0, J_0) и обладающая свойством б) из п. iii) леммы 2.5. Рассмотрим J_n -голоморфные сферы M_n , которые образуют в $\mathcal{M}_h(M_0, J_0)$ дискретное множество, в то время как J_n сходится к $J^* \in \mathcal{J}_U$.

Если $M_n \cap U = \emptyset$ при некотором n , то M_n – искомая рациональная кривая, поскольку $J_n = J_{\text{st}}$ на $\hat{U} \setminus U$.

Если $M_n \cap U \neq \emptyset$ при всех n , то некоторая подпоследовательность, по-прежнему обозначаемая M_n , сходится в топологии Громова к (вообще говоря, приводимой) кривой $M^{(1)}$. Если $M^{(1)}$ обладает неприводимой компонентой $M_0^{(1)}$, лежащей вне U и такой, что $c_1(X)[M_0^{(1)}] > 0$, то $M_0^{(1)}$ – искомая рациональная кривая.

В противном случае существует компонента $M_0^{(1)}$ предельной кривой $M^{(1)}$ с условием $c_1(X)[M_0^{(1)}] > 0$, пересекающая U . Повторим шаг 2 для $M_0^{(1)}$ вместо M_0 . Поскольку площадь превдоголоморфных сфер ограничена снизу (см. [6]), то после конечного повторения шага 2 мы или получим искомую рациональную кривую в оболочке $\hat{U}_Y$, или придем к следующей ситуации:

Шаг 3. $\mathcal{M}_h(M_0, J_0)$ – компактно.

Из п. iii) теоремы 2.6 и следствия 2.7 мы получаем непрерывные пути (M_t^n, J_t^n) такие, что:

- 1) $M_0^n = M_0$ при всех n ;
- 2) $J_0^n = J_0$ при всех n ;
- 3) $J_1^n \rightarrow J_{\text{st}}$.

По теореме компактности Громова некоторая подпоследовательность последовательности M_1^n сходится к J_{st} -голоморфной нодальной кривой C^* над $\widehat{U}_Y$. Выберем неприводимую компоненту C кривой C^* с $\pi^*c_1(X)[C] > 0$. Тогда C – искомая рациональная кривая в $\widehat{U}_Y$.

Список литературы

1. *Ивашкович С. М.* Продолжение аналитических объектов методом Картана–Туллена // Труды конференции по комплексному анализу и математической физике. Красноярск, 1988. С. 53–61.
2. *Ivashkovich S., Shevchishin V.* Pseudo-holomorphic curves and envelopes of meromorphy of two-spheres in $\mathbb{CP}^2$ // Preprint. Bochum SFB-237, 1995, <http://xxx.lanl.gov-9804014>.
3. *Barth W., Peters C., Van de Ven A.* Compact complex surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
4. *Grauert H.* Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen // Math. Ann. 1962. V. 146. P. 331–368.
5. *Немировский С. Ю.* Голоморфные функции и вложенные вещественные поверхности // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 599–606.
6. *Gromov M.* Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds // Invent. Math. 1985. V. 82. P. 307–347.
7. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. New-York: Springer-Verlag, 1966.
8. *Абикоф У.* Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера. М.: Мир, 1985.
9. *McDuff D., Salomon D.* J-holomorphic curves and quantum cohomology // AMS Univ. Lecture Series. 1994. V. 6.
10. *Кобаяси С., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. II. М.: Наука, 1981.
11. *Hofer H., Lizan V., Sikorav J.-C.* On genericity for holomorphic curves in 4-dimensional almost-complex manifolds // Preprint, 1994.
12. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1989.
13. *Parker T., Wolfson J.* Pseudo-holomorphic maps and bubble trees // J. Geom. Anal. 1993. V. 3. P. 63–98.
14. *Hummel Chr.* Gromov's compactness theorem for pseudo-holomorphic curves. Basel: Birkäuser, 1997.
15. *Ramis J.-P.* Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

Université de Lille-I U.F.R.
de Mathématiques Villeneuve d'Ascq Cedex, France;
Ruhr-Universität, Bochum, Germany
E-mail: ivachkov@gat.univ-lille1.fr

Поступила в редакцию
23.01.1998

sewa@cplx.ruhr-uni-bochum.de