Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко, Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 10, 53–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:28:23

УДК 517.98

В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко

Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп

Нами построена C^* -алгебра, обслуживающая теорию асимптотических представлений, и ее вложение в алгебру Калкина, индуцирующее изоморфизм K_1 -групп. Как следствие, мы показываем, что векторные расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$, которые могут быть получены с помощью асимптотических представлений дискретной группы π , могут быть получены и с помощью представлений группы $\pi \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина. Мы приводим также обобщение понятия фредгольмова представления и показываем, что асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления.

Библиография: 8 названий.

Введение

Различные классы представлений дискретных групп оказываются полезными для сопоставления гомотопических инвариантов неодносвязных многообразий с рациональными характеристическими классами Понтрягина многообразий. Именно, если $\rho: \pi_1(X) \rightarrow A$ есть унитарное представление фундаментальной группы $\pi_1(X)$ многообразия X в некоторую C^* -алгебру A , то справедлива следующая обобщенная формула Хирцебруха:

$$\text{sign}_\rho(X) = 2^{2k} \langle L(X) \cdot f_X^* \text{ch}_\rho(\xi), [X] \rangle \in K_0(A) \otimes \mathbb{Q},$$

где $\text{sign}_\rho(X) \in K_0(A)$ есть обобщенная сигнатура многообразия X , являющаяся гомотопическим инвариантом, $L(X)$ – класс Хирцебруха многообразия X , $[X] \in H_{4k}(X)$ – его фундаментальный класс, $\dim X = 4k$, $f_X: X \rightarrow B\pi$ – характеристическое отображение, а $\text{ch}_\rho(\xi) \in K_A^0(B\pi)$ – характер Черна канонического A -расслоения над $B\pi$, порожденного представлением ρ .

В случае, когда ρ является фредгольмовым представлением или, более общим образом, представлением в алгебру Калкина $\mathcal{Q}$, эта формула дает соотношение числовых инвариантов, поскольку $K_0(\mathcal{Q}) = 0$, а $K_1(\mathcal{Q}) = \mathbb{Z}$. Другим примером служат так называемые асимптотические представления, изучаемые в настоящей работе, которые тоже дают соотношение числовых инвариантов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 96-01-00276) и РФФИ/ННО (грант № 96-01-00028).

Цель настоящей работы – дать корректное определение асимптотических представлений как представлений в некоторую C^* -алгебру и показать, что в некотором смысле асимптотические представления являются частным случаем представлений в алгебру Калкина. Как следствие, мы показываем, что класс векторных расслоений над классифицирующим пространством $B\pi$, задаваемых асимптотическими представлениями дискретной группы π , содержится в классе векторных расслоений над $B\pi$, задаваемых представлениями группы $\pi \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина. В §2 мы приводим также обобщение понятия фредгольмова представления и показываем, что асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления. В последнем параграфе рассмотрена также связь асимптотических представлений с расширениями C^* -алгебр.

Мы выражаем признательность Г.Г. Каспарову за полезные советы.

Результаты §§ 1 и 2 получены авторами совместно. Результаты §3 получены В.М. Мануйловым.

§1. Асимптотические представления как представления в алгебру Калкина

1.1. Определение асимптотического представления. Пусть π – дискретная конечно представленная группа, $F \subset \pi$ – конечное подмножество. Обозначим через $U(n)$ унитарную группу размерности n и зафиксируем число $\varepsilon > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение $\sigma: \pi \rightarrow U(n)$ называется ε -почти представлением по отношению к конечному подмножеству F , если имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma(g^{-1}) &= \sigma(g)^{-1} \quad \forall g \in \pi, \\ \|\sigma\|_F &= \sup\{\|\sigma(gh) - \sigma(g)\sigma(h)\| : g, h, gh \in F\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, $\sigma = \{\sigma_k: \pi \rightarrow U(n_k)\}$ – последовательность ε_k -почти представлений по отношению к конечному подмножеству $F \subset \pi$. Мы предполагаем, что группы $U(n_k)$ вложены в группы $U(n_{k+1})$ стандартным способом

$$U(n_k) \ni u \mapsto u \oplus \mathbf{E}_{n_{k+1}-n_k} \in U(n_k) \oplus U(n_{k+1} - n_k) \subset U(n_{k+1}),$$

что позволяет сравнивать почти представления для различных k . Рассмотрим отображения

$$\sigma_k \oplus \mathbf{1}_{(n_{k+1}-n_k)}: \pi \rightarrow U(n_k) \oplus U(n_{k+1} - n_k) \rightarrow U(n_{k+1}),$$

которые мы также обозначаем через σ_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $\sigma = \{\sigma_k\}$ – последовательность ε_k -почти представлений. Последовательность σ называется *асимптотическим представлением* группы π (по отношению к конечному подмножеству F и к последовательности $\{n_k\}$), если выполнены следующие соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad (1.1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \|\sigma_k(g) - \sigma_{k+1}(g)\| : g \in F \subset \pi \} = 0. \quad (1.2)$$

Пусть $\{m_k\}$ – другая возрастающая последовательность такая, что $m_k \geq n_k$. Тогда заменяя группы $U(n_k)$ на $U(m_k)$ и отображения σ_k на

$$\bar{\sigma}_k = \sigma_k \oplus \mathbf{E}_{(m_k - n_k)} : \pi \rightarrow U(n_k) \oplus U(m_k - n_k) \rightarrow U(m_k),$$

мы получаем новое асимптотическое представление $\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_k\}$ по отношению к последовательности $\{m_k\}$, которое мы называем *стабилизацией* асимптотического представления σ .

В работе [1] было показано, что такое определение эквивалентно определению, данному в работах [2], [3]. Оно не зависит от выбора конечного подмножества F при условии, что это подмножество достаточно велико, а группа π конечно представлена.

Два асимптотических представления σ_0 и σ_1 называются *гомотопными*, если существует семейство асимптотических представлений $\sigma_t = \{\sigma_{t,k}\}$ таких, что функции $\sigma_{t,k}(g)$ непрерывны для всех $g \in \pi$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_t \|\sigma_{t,k}\|_F = 0$, а граничные представления $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\sigma}_1$ являются стабилизациями представлений σ_0 и σ_1 , соответственно.

Легко видеть, что каждое асимптотическое представление гомотопно некоторому асимптотическому представлению, отвечающему заданной последовательности $\{n_k\}$.

Асимптотические представления в конечномерные группы $U(n_k)$ можно понимать также как представления в одну бесконечную группу $U(\infty) = \lim U(n)$. Группа $U(\infty)$ действует естественным образом в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве H , а норма прямого предела совпадает с нормой этого действия в H .

Таким образом, определения 1.1 и 1.2 можно изменить, положив $n_k = \infty$. Мы будем называть тогда последовательность σ *асимптотическим представлением в группу $U(\infty)$* .

Ясно, что асимптотическое представление σ в смысле определения 1.2 порождает асимптотическое представление в группу $U(\infty)$ с помощью стабилизации каждого отображения $\{\sigma_k\}$. Обратно, если дано асимптотическое представление σ в группу $U(\infty)$ и возрастающая последовательность n_k , можно определить асимптотическое представление $\tilde{\sigma}$ в смысле определения 1.2, стабилизация которого гомотопна асимптотическому представлению σ . Более того, если два представления σ_1

и σ_2 в смысле определения 1.2 гомотопны как представления в группу $U(\infty)$, то они гомотопны так же и как асимптотические представления в смысле определения 1.2.

Следующее обобщение понятия асимптотического представления представляется более полезным. Мы можем заменить группу $U(\infty)$ на ее замыкание $\overline{U}(\infty)$ по операторной норме гильбертова пространства H . В этом случае остается верной стабильная гомотопическая эквивалентность между представлениями в смысле определения 1.2 и представлениями в группу $\overline{U}(\infty)$.

1.2. Асимптотическая C^* -алгебра. Хорошо известно, что асимптотические представления задают настоящие представления, однако в некоторых специальных C^* -алгебрах [3], [4]. Напомним эту конструкцию. Пусть $M_n = M_n(\mathbb{C})$ – комплексная $(n \times n)$ -матричная алгебра. Зафиксируем строго возрастающую последовательность n_k . Мы будем предполагать, что матричная алгебра M_{n_k} естественным образом вложена в алгебру $M_{n_{k+1}}$:

$$M_{n_k} \ni v \mapsto v \oplus \mathbf{0}_{n_{k+1}-n_k} \in M_{n_k} \oplus M_{n_{k+1}-n_k} \subset M_{n_{k+1}}.$$

Обозначим через M_f последовательность матричных алгебр $\{M_{n_k}\}$. Рассмотрим унитарную C^* -алгебру

$$B = B(M_f) = \prod_{k=1}^{\infty} M_{n_k},$$

состоящую из ограниченных по норме последовательностей матриц. Обозначим через B^+ C^* -алгебру B с присоединенной (новой) единицей. Обе алгебры B и B^+ содержат C^* -идеал

$$I = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_{n_k},$$

состоящий из последовательностей матриц, нормы которых стремятся к нулю.

Пусть $Q = B/I$ и $Q^+ = B^+/I$ – соответствующие факторалгебры. Обозначим отображения факторизации через

$$q: B \rightarrow Q, \quad q^+: B^+ \rightarrow Q^+.$$

Пусть

$$\overline{\alpha}: B^+ \rightarrow B^+$$

– отображение правого сдвига,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(m_1, m_2, \dots) &= (0, m_1, m_2, \dots), \quad (m_i) \in B \subset B^+, \\ \overline{\alpha}(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\overline{\alpha}(I) \subset I$, гомоморфизм $\overline{\alpha}$ индуцирует гомоморфизм факторалгебр $\alpha: Q^+ \rightarrow Q^+$. Пусть

$$Q_{\alpha}^+ = Q_{\alpha}^+(M_f) = \{q \in Q^+ : \alpha(q) = q\} \subset Q^+$$

– α -инвариантная C^* -подалгебра (отметим, что отображение α не является автоморфизмом, тем не менее его инвариантное подмножество является C^* -алгеброй).
 C^* -алгебра

$$Q_\alpha = Q_\alpha(M_f) = \{q \in Q : \alpha(q) = q\} \subset Q$$

определяется аналогично.

Обе алгебры Q_α и Q_α^+ являются факторалгебрами своих прообразов

$$\begin{aligned} B_\alpha &= q^{-1}(Q_\alpha), \\ B_\alpha^+ &= (q^+)^{-1}(Q_\alpha^+). \end{aligned}$$

Отметим, что множество B_α состоит из таких последовательностей

$$(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots) \in B \subset B^+,$$

что

$$\lim \|m_{i+1} - m_i\| = 0,$$

и является C^* -алгеброй.

Элементы алгебры Q_α^+ мы будем записывать в виде $(\lambda, (m_i))$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $(m_i) \in Q_\alpha$. Присоединенная единица дает расщепляющуюся короткую точную последовательность

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha^+ \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}, \quad (1.3)$$

где ϵ – аугментация, ставящая в соответствие элементу алгебры Q_α^+ его первую компоненту.

Тогда асимптотическое представление σ определяет гомоморфизм

$$\bar{\sigma}: \pi \rightarrow Q_\alpha^+ \quad (1.4)$$

по формуле

$$\bar{\sigma}(g) = q^+(1, \{\sigma_k(g) - \mathbf{E}_{n_k}\}).$$

Отметим, что из конечной представимости группы π и из свойств (1.1) и (1.2) асимптотического представления σ следует, что $\bar{\sigma}(g) \in Q_\alpha^+$ для всех $g \in \pi$.

Ясно, что композиция

$$\epsilon \circ \bar{\sigma}: \pi \rightarrow Q_\alpha^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

отображает всю группу π в единицу.

Гомоморфизм (1.4) естественным образом продолжается до унитарного $*$ -гомоморфизма алгебр

$$\bar{\sigma}: C^*[\pi] \rightarrow Q_\alpha^+, \quad (1.5)$$

где $C^*[\pi]$ – групповая C^* -алгебра группы π .

Обратно, рассмотрим унитарный $*$ -гомоморфизм (1.5), композиция которого с аугментацией ϵ является тривиальным гомоморфизмом $C^*[\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, порожденным гомоморфизмом группы π в тривиальную группу e . Тогда его ограничение на группу $\pi \subset C^*[\pi]$ порождается асимптотическим представлением группы π .

Аналогичным образом, заменяя алгебры матриц на алгебру компактных операторов и рассматривая их бесконечное прямое произведение, можно определить C^* -алгебры

$$Q_\alpha^+(\text{Comp}(H)) = B_\alpha^+(\text{Comp}(H))/I,$$

где $\text{Comp}(H)$ — C^* -алгебра компактных операторов.

Таким образом, имеются следующие естественные гомоморфизмы, составляющие коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Q_\alpha^+(M_f) & \rightarrow & Q_\alpha^+(\text{Comp}(H)) \\ \cup & & \cup \\ Q_\alpha(M_f) & \rightarrow & Q_\alpha(\text{Comp}(H)), \end{array} \quad (1.6)$$

порожденную вложением алгебр

$$M_{n_k} \subset \text{Comp}(H).$$

ЛЕММА 1.3. *Горизонтальные стрелки диаграммы (1.6) являются гомотопическими эквивалентностями C^* -алгебр.*

1.3. Вычисление K -групп. По лемме 1.3 при вычислении K -групп достаточно ограничиться лишь одной версией алгебр, которые мы будем обозначать для краткости через

$$\begin{aligned} B_\alpha^+ &= B_\alpha^+(M_f), & B_\alpha &= B_\alpha(M_f), \\ Q_\alpha^+ &= Q_\alpha^+(M_f), & Q_\alpha &= Q_\alpha(M_f). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{e} = \{(e_k)\} \in B$ — последовательность диагональных матриц, имеющих единицу на первом месте и нули на остальных, $e_k \in M_{n_k}$.

Ясно, что $\mathbf{e} \in B_\alpha$ и, кроме того, является проектором.

Другой проектор $\mathbf{1} \in B_\alpha^+$, являющийся единицей алгебры B_α^+ , может быть представлен как последовательность $(1, \{p_k = 0\})$.

ЛЕММА 1.4. *Имеют место изоморфизмы*

$$\begin{aligned} K_0(Q_\alpha^+) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ с образующими } [\mathbf{e}] \text{ и } [\mathbf{1}], \\ K_1(Q_\alpha^+) &= 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим гомоморфизм

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_1 \oplus \mathrm{tr}_2 : K_0(Q_\alpha^+) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Пусть $p \in M_r(Q_\alpha^+)$ – произвольный проектор, $p' \in M_r(B^+)$ – проектор, являющийся поднятием p . Такое поднятие p' существует. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} p' &= (\lambda, \{p'_k\}) \in M_r(B^+), \\ p'' &= \{p'_k\} \in M_r(B), \\ p'_k &\in M_r(M_{n_k}) = M_{n_k}(M_r), \quad \lambda \in M_r, \end{aligned}$$

– произвольное поднятие проектора $p \in M_r(Q_\alpha^+)$. Условие $p' \in (q^+)^{-1}(Q_\alpha^+) = B_\alpha^+$ означает, что

$$\|p'_k \oplus 0 \cdot \mathbf{E}_{(n_{k+1}-n_k)} - p'_{k+1}\| \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Поскольку $p^2 = p$, имеем $q^+((p')^2 - p') = 0$. Следовательно,

$$\lim \|((\lambda, p'_k))^2 - (\lambda, p'_k)\| = 0.$$

Поэтому

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

и

$$\lim \|((\lambda \mathbf{E}_{n_k} + p'_k))^2 - (\lambda \mathbf{E}_{n_k} + p'_k)\| = 0.$$

Это значит, что, начиная с номера k , спектр матриц $\lambda \mathbf{E}_{n_k} + p'_k$ располагается в малой окрестности D_k нуля и единицы, $D_k = D_k^0 \cup D_k^1$, и

$$\mathrm{diam}(D_k^i) \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

Положим

$$\tilde{p}'_k = -\lambda \mathbf{E}_{n_k} + \int_\gamma (\lambda \mathbf{E}_{n_k} + p'_k - \mu)^{-1} d\mu, \quad (1.10)$$

где γ – замкнутая кривая, охватывающая области D_k^1 и не пересекающаяся с D_k^0 , например, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - 1| = \frac{1}{2}\}$.

Ясно, что матрица $\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}$, определенная интегралом (1.10), является проектором, для которого

$$\|\tilde{p}'_k - p'_k\| = \|(\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) - (p'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k})\| \rightarrow 0$$

(это следует из (1.9)). Таким образом, последовательность

$$\tilde{p}' = (\lambda, \{\tilde{p}'_k\})$$

также является проектором и одновременно поднятием элемента p .

Положим

$$\mathrm{tr}_1(p) = \mathrm{tr}(\lambda) \in \mathbb{Z}, \quad (1.11)$$

$$\mathrm{tr}_2(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathrm{tr}(p'_k). \quad (1.12)$$

Предел в (1.12) существует, так как благодаря условию (1.8) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathrm{tr}(p'_k) - \mathrm{tr}(p'_{k+1})) = 0.$$

С другой стороны, благодаря (1.10) имеем

$$\|\tilde{p}'_{k+1} - \tilde{p}'_k \oplus 0 \cdot \mathbf{E}_{(n_{k+1}-n_k)}\| \rightarrow 0,$$

т.е.

$$\mathrm{tr}(\tilde{p}'_{k+1}) - \mathrm{tr}(\tilde{p}'_k) \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Так как матрица $\tilde{p}'_k$ является разностью двух проекторов, ее след принимает целочисленные значения. Следовательно, из (1.13) вытекает существование предела $\lim_k \mathrm{tr}(\tilde{p}'_k)$ и, соответственно, существование предела в формуле (1.12).

Отметим, что определения (1.11) и (1.12) корректны, т.е. не зависят от выбора проектора p , представляющего элемент K -группы, и от выбора проектора – поднятия $\tilde{p}'$.

Покажем, что гомоморфизм (1.7) является изоморфизмом. Заметим, что, начиная с некоторого k , проекторы $\tilde{p}'_{k+1} + \lambda \mathbf{E}_{n_{k+1}}$ и $(\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) \oplus \lambda \mathbf{E}_{(n_{k+1}-n_k)}$ эквивалентны, т.е.

$$\tilde{p}'_{k+1} + \lambda \mathbf{E}_{n_{k+1}} = U_{k+1}^{-1} ((\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) \oplus \lambda \mathbf{E}_{(n_{k+1}-n_k)}) U_{k+1},$$

а унитарные матрицы U_k могут быть выбраны сходящимися к единичному оператору

$$\|U_k - \mathbf{E}\| \rightarrow 0.$$

Переходя к стабилизации, имеем

$$\begin{aligned} & (\tilde{p}'_{k+1} + \lambda \mathbf{E}_{n_{k+1}}) \oplus \lambda \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+1})} \\ &= (U_{k+1} \oplus \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+1})})^{-1} \\ & \quad \cdot ((\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) \oplus \lambda \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_k)}) (U_{k+1} \oplus \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+1})}) \\ &= V_{k+1}^{-1} (\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) V_{k+1}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \tilde{p}'_{k+s} + \lambda \mathbf{E}_{n_{k+s}} \\ &= U_{k+s}^{-1} (U_{k+s-1} \oplus \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+s-1})})^{-1} \cdots (U_{k+1} \oplus \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+1})})^{-1} \\ & \quad \cdot ((\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) \oplus \lambda \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_k)}) \\ & \quad \cdot (U_{k+1} \oplus \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+1})}) \cdots (U_{k+s-1} \oplus \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_{k+s-1})}) U_{k+s} \\ &= V_{k+s}^{-1} ((\tilde{p}'_k + \lambda \mathbf{E}_{n_k}) \oplus \lambda \mathbf{E}_{(n_{k+2}-n_k)}) V_{k+s}. \end{aligned}$$

Последовательность $V = \{V_{k+s}\}$ принадлежит алгебре B_α , поскольку

$$V_{k+s+1} - V_{k+s} = V_{k+s}(U_{k+s+1} - 1) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$(1, \{V_{k+s} - \mathbf{E}_{n_{k+s}}\}) \in B_\alpha^+.$$

Таким образом, проектор $\tilde{p}'$ эквивалентен проектору $p'' = (\lambda, \{p''_{k+s}\})$, где p''_{k+s} задается последовательностью с совпадающими членами:

$$p''_{k+s} = (\tilde{p}'_k \oplus 0 \cdot \mathbf{E}_{(n_{k+s}-n_k)}).$$

Поэтому проектор p'' равен прямой сумме двух слагаемых, первое из которых, λ , эквивалентно некоторому кратному проектора $\mathbf{1}$, а второе эквивалентно некоторому кратному проектора $\mathbf{e}$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \text{tr}_1(\mathbf{1}) &= 1, & \text{tr}_2(\mathbf{1}) &= 0, \\ \text{tr}_1(\mathbf{e}) &= 0, & \text{tr}_2(\mathbf{e}) &= 1, \end{aligned}$$

имеем как сюръективность, так и инъективность гомоморфизма (1.7).

Перейдем теперь к вычислению группы $K_1(Q_\alpha^+) = 0$. Нам следует показать, что группа обратимых элементов матричной алгебры $M_r(Q_\alpha^+)$ имеет только одну компоненту связности. Пусть $u = (\lambda, \{u_k\}) \in M_r(Q_\alpha^+)$ – обратимый элемент. Тогда $\lambda \in M_r(\mathbb{C})$ – обратимая матрица. Следовательно, имеется гомотопия к случаю, когда $\lambda = \mathbf{E}_r$.

Действительно, пусть λ_t ,

$$\begin{aligned} \det \lambda_t &\neq 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ \lambda_0 &= \lambda, & \lambda_1 = \mathbf{E}_r, \end{aligned}$$

– гомотопия матрицы λ . Тогда положим

$$u_t = (\lambda_t, \{(\lambda_t \otimes \mathbf{E}_{n_k})(\lambda_0 \otimes \mathbf{E}_{n_k})^{-1} u_k\}) = (\lambda_t, \{(\lambda_t \lambda_0^{-1} \otimes \mathbf{E}_{n_k}) u_k\}).$$

Легко проверить, что последовательность $(\lambda_t \lambda_0^{-1} \otimes \mathbf{E}_{n_k}) u_k$ принадлежит алгебре $M_r(B_\alpha)$ при всех $t \in [0, 1]$, поэтому путь u_t принадлежит $M_r(B_\alpha^+)$. Кроме того, этот путь непрерывен по t и обратим.

Положим

$$u_1 = (\mathbf{E}_r, \{(\lambda_0^{-1} \otimes \mathbf{E}_{n_k}) u_k\}) = (\mathbf{E}_r, \{v_k\}),$$

где

$$v_k = (\lambda_0^{-1} \otimes \mathbf{E}_{n_k}) u_k.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что элемент $u_1 \in M_r(B_\alpha^+)$ унитарен.

Нам нужно, далее, соединить u_1 гомотопией с единицей. Для этого рассмотрим последовательность $v_k \in M_r(B_\alpha)$ и выберем номер k_0 так, что $\|v_k - v_{k+1}\| < \frac{1}{2}$ при всех $k > k_0$. Будем считать, что значения v_k являются значениями функции $v(t)$, $1 \leq t < \infty$, в целых точках $t = k$, и продолжим определение функции $v(t)$ на вещественные значения переменной t , выбирая выпуклую линейную комбинацию на каждом интервале $[k, k+1]$: если $t = k + \tau$, $0 < \tau < 1$, тогда положим

$$v(t) = \tau v_{k+1} + (1 - \tau) v_k.$$

Тогда легко видеть, что элемент $\mathbf{E}_r + v(t)$ обратим при всех $t > k_0$.

Требуемую гомотопию элемента u_1 можно построить по формуле

$$u_t = (\mathbf{E}_r, \{v_{k,t}\}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$v_{k,t} = v(k_0 + (1 - t)(k - k_0)).$$

При $t = 1$ получим обратимый элемент $(\mathbf{E}_r, \{v_{k_0}\})$, задаваемый постоянной последовательностью $\{v_{k_0}\}$. Так же, как на первом шаге гомотопии, можно соединить элемент $(\mathbf{E}_r, \{v_{k_0}\})$ с единицей $(\mathbf{E}_r, \{0\})$.

1.4. Асимптотические представления как представления в алгебру Калкина. Обозначим через $\mathcal{Q}$ алгебру Калкина, т.е. факторалгебру

$$\mathcal{Q}(H) = B(H) / \text{Comp}(H),$$

где H – сепарабельное гильбертово пространство, $B(H)$ – C^* -алгебра ограниченных операторов и $\text{Comp}(H)$ – C^* -подалгебра компактных операторов.

ТЕОРЕМА 1.5. *Имеет место вложение*

$$\psi: Q_\alpha^+(\text{Comp}(H)) \otimes C(S^1) \rightarrow \mathcal{Q}(H) \quad (1.14)$$

такое, что индуцированный его ограничением на подалгебру $Q_\alpha(\text{Comp}(H)) \otimes C(S^1)$ гомоморфизм

$$\psi_*: K_1(Q_\alpha(\text{Comp}(H)) \otimes C(S^1)) \rightarrow K_1(\mathcal{Q}) \quad (1.15)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с определения гомоморфизма (1.14). Представим гильбертово пространство H как бесконечную прямую сумму со слагаемыми, изоморфными H :

$$\tilde{H} = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k, \quad H_k = H.$$

Гомоморфизм ψ будет строиться как гомоморфизм в алгебру Калкина $\mathcal{Q}(\tilde{H})$.

Рассмотрим элемент $v \in Q_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H))$. Пусть $v' = (\lambda, \{v'_k\}) \in B_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H))$ — поднятие элемента v . Определим оператор $\psi(v)$, действующий на пространстве $\tilde{H}$ следующим образом: если $k \geq 1$, то оператор $\psi(v)$ действует на подпространстве H_k как $\lambda + v'_k$; если $k \leq 0$, то оператор $\psi(v)$ действует на подпространстве H_k умножением на число λ .

Оператор $\psi(v)$ определен не однозначно, а с точностью до компактного слагаемого. Поэтому $\psi(v)$ корректно определяет элемент $\overline{\psi}(v) \in \mathcal{Q}(\tilde{H})$.

Положим $\psi(v \otimes 1_{C(S^1)}) = \overline{\psi}(v)$. Остается определить значение ψ на функции $u = e^{2\pi i t} \in C(S^1)$. Рассмотрим фредгольмов оператор F (индекса 0) в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$, действующий как оператор сдвига:

$$F: H_{k+1} \xrightarrow{\equiv} H_k.$$

Оператор F коммутирует с образом $\psi(Q_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H)))$ по модулю компактных операторов. Следовательно, мы будем иметь корректно определенный гомоморфизм ψ , положив

$$\psi(1_{Q_{\alpha}^{+}} \otimes e^{2\pi i t}) = F.$$

Покажем теперь, что гомоморфизм (1.15) является изоморфизмом. Поскольку $K_1(Q_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H))) = 0$, по формуле Кюннета получаем, что

$$K_1(Q_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H)) \otimes C(S^1)) \cong K_0(Q_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H))) \otimes K^1(S^1).$$

Пусть $[u] \in K^1(S^1)$ — образующая. Тогда группа $K_1(Q_{\alpha}^{+}(\text{Compr}(H)) \otimes C(S^1))$ порождается двумя элементами: $[e] \otimes [u]$ и $[1] \otimes [u]$.

Так как

$$\psi(1 \otimes u) = F \quad \text{и} \quad \text{ind } F = 0,$$

имеем

$$\psi_*([1] \otimes [u]) = 0.$$

Вычислим элемент $\psi_*([e] \otimes [u])$. Согласно [5] имеем

$$[e] \otimes [u] = [(1 - e) \otimes 1 + e \otimes u],$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_*([e] \otimes [u]) &= \psi_*([(1 - e) \otimes 1 + e \otimes u]) \\ &= [1 - \psi(e \otimes 1) + \psi(e \otimes u)] = [1 - \psi(e) + \psi(e)F]. \end{aligned}$$

Поскольку элемент $e \in Q_\alpha$ является проектором, а $\psi(e)$ коммутирует с F по модулю компактных операторов, имеет место равенство

$$\psi_*([e] \otimes [u]) = [1 - \psi(e) + \psi(e)F\psi(e)]. \quad (1.16)$$

Таким образом, оператор G в правой части (1.16) является прямой суммой двух операторов: первый из них является тождественным на образе проектора $1 - \psi(e)$, а второй – ограничение F' оператора F на образ проектора $\psi(e)$. Легко проверить, что индекс оператора F' равен единице. Действительно, образ проектора $\psi(e)$ разлагается в прямую сумму одномерных подпространств, порожденных первыми базисными векторами $e_{1,k}$ в гильбертовых пространствах H_k при $k \geq 1$.

С другой стороны, оператор F' является оператором сдвига, переводящим вектор $e_{1,k}$ в вектор $e_{1,k-1}$. Отсюда следует, что $\text{ind } F' = 1$.

Таким образом, $\text{ind } G = 1$, значит, гомоморфизм ψ_* отображает образующую группы $K_1(Q_\alpha(\text{Comp}(H)) \otimes C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ в образующую группы $K_1(\mathcal{Q})$.

Обозначим через $\mathcal{R}_a(\pi)$ группу Гротендика асимптотических представлений группы π . Пусть $\tilde{\mathcal{R}}_a(\pi)$ – ядро отображения

$$\mathcal{R}_a(\pi) \rightarrow \mathcal{R}_a(e) \cong \mathbb{Z}, \quad (1.17)$$

определенного ограничением представления на тривиальную подгруппу e .

Пусть $B\pi$ – классифицирующее пространство группы π . Напомним, что в работе [1] дана конструкция, позволяющая по асимптотическому представлению группы π построить векторное расслоение над $B\pi$. Эта конструкция определяет гомоморфизм

$$\varphi: \tilde{\mathcal{R}}_a(\pi) \rightarrow K^0(B\pi), \quad (1.18)$$

который можно описать следующим образом. Пусть $C^*[\pi]$ – групповая C^* -алгебра группы π , а $\xi \in K_{C^*[\pi]}^0(B\pi)$ – универсальное расслоение. Асимптотическое представление σ определяет гомоморфизм

$$\bar{\sigma}: C^*[\pi] \rightarrow Q_\alpha^+, \quad (1.19)$$

отображающий универсальное расслоение ξ в элемент $\bar{\sigma}_*(\xi) \in K_{Q_\alpha^+}^0(B\pi)$. Гомоморфизм (1.5) задает гомоморфизм

$$\varphi': \mathcal{R}_a(\pi) \rightarrow K_{Q_\alpha^+}^0(B\pi) \quad (1.20)$$

по формуле

$$\varphi'(\sigma) = \bar{\sigma}_*(\xi).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{R}}_a(\pi) & \longrightarrow & \mathcal{R}_a(\pi) & \longrightarrow & \mathcal{R}_a(e) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'_e \\ K_{Q_\alpha}^0(B\pi) & \longrightarrow & K_{Q_\alpha^+}^0(B\pi) & \longrightarrow & K_{\mathbb{C}}^0(B\pi) . \end{array}$$

Из леммы 1.4, формулы Кюннета и из (1.3) следует, что нижняя строчка диаграммы точна, поэтому корректно определена левая вертикальная стрелка. Поскольку

$$K_{Q_\alpha}^0(B\pi) = K^0(B\pi) \otimes K_0(Q_\alpha) \cong K^0(B\pi),$$

мы можем определить φ как отображение, задаваемое левой вертикальной стрелкой после отождествления $K_{Q_\alpha}^0(B\pi)$ с $K^0(B\pi)$. Заметим, что образ гомоморфизма φ'_e совпадает с подгруппой в $K^0(B\pi)$, порожденной тривиальными представлениями.

Поскольку для любой C^* -алгебры A имеет место естественный изоморфизм

$$j: K_A^0(B\pi \times S^1 \times S^1) \xrightarrow{\sim} K_{A \otimes C(S^1)}^0(B\pi \times S^1),$$

умножение на элемент Ботта $\beta \in K^0(S^1 \times S^1)$ задает вложение

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_A: K_A^0(B\pi) &\xrightarrow{\otimes \beta} K_A^0(B\pi \times S^1 \times S^1) \xrightarrow{j} K_{A \otimes C(S^1)}^0(B\pi \times S^1) \\ &= K_{A \otimes C(S^1)}^0(B(\pi \times \mathbb{Z})). \end{aligned} \quad (1.21)$$

В случае $A = Q_\alpha$ мы будем писать $\bar{\beta}$ вместо $\bar{\beta}_{Q_\alpha}$.

Обозначим через $\mathcal{R}_\mathcal{Q}(\pi)$ группу (виртуальных) представлений группы π в алгебру Калкина. Легко видеть, что гомоморфизм (1.18) позволяет определить гомоморфизм

$$\bar{\psi}: \mathcal{R}_a(\pi) \rightarrow \mathcal{R}_\mathcal{Q}(\pi \times \mathbb{Z}) \quad (1.22)$$

формулой $\bar{\psi}(\bar{\sigma}) = \psi(\bar{\sigma} \otimes \text{id})$ для $\bar{\sigma} \in \mathcal{R}_a(\pi)$ и

$$\bar{\sigma} \otimes \text{id}: C^*[\pi \times \mathbb{Z}] \cong C^*[\pi] \otimes C(S^1) \rightarrow Q_\alpha^+ \otimes C(S^1).$$

Пусть $\eta \in K_{C^*[\pi \times \mathbb{Z}]}^0(B(\pi \times \mathbb{Z}))$ – универсальное расслоение над $B(\pi \times \mathbb{Z})$. Тогда существует также гомоморфизм

$$f: \mathcal{R}_\mathcal{Q}(\pi \times \mathbb{Z}) \rightarrow K_\mathcal{Q}^0(B(\pi \times \mathbb{Z})), \quad (1.23)$$

определенный как образ расслоения η над $B(\pi \times \mathbb{Z})$ при представлении в алгебру Калкина.

Все описанные гомоморфизмы (1.15)–(1.22) можно представить диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{R}}_a(\pi) & \xrightarrow{\varphi} & K_{Q_\alpha}^0(B\pi) & \xrightarrow{\beta} & K_{Q_\alpha \otimes C(S^1)}^0(B\pi \times S^1) \\ \downarrow & & & & \downarrow \psi_* \\ \mathcal{R}_a(\pi) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathcal{R}_\mathcal{Q}(\pi \times \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f} & K_\mathcal{Q}^0(B\pi \times S^1), \end{array} \quad (1.24)$$

где левая вертикальная стрелка является вложением.

ТЕОРЕМА 1.6. *Диаграмма (1.24) коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное вычисление.

Диаграмма (1.24) определяет гомоморфизм

$$\overline{\varphi}: \widetilde{\mathcal{R}}_a(\pi) \rightarrow K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi \times S^1) \cong K^1(B\pi \times S^1). \quad (1.25)$$

Теорема 1.6 также показывает, что каждый элемент группы $K^0(B\pi)$, который может быть получен с помощью асимптотического представления фундаментальной группы π , может быть получен также с помощью представления группы $\pi \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина, т.е. что гомоморфизм $\overline{\varphi}$ пропускается через группу $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\pi \times \mathbb{Z})$.

§ 2. Асимптотические представления и фредгольмовы представления

Заметим, что группа $K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi \times S^1)$ может быть разложена в прямую сумму

$$K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi \times S^1) = K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi) \oplus K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi \wedge S^1) \cong K^1(B\pi) \oplus K^0(B\pi), \quad (2.1)$$

индуцированную вложением $i: s_0 \rightarrow S^1$, где $s_0 \in S^1$ — отмеченная точка, и образ гомоморфизма $\overline{\varphi}$ (1.25) лежит только во втором слагаемом (2.1). Действительно, рассмотрим композицию отображения $\overline{\varphi}$ с отображением $i^*: K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi \times S^1) \rightarrow K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi)$. Поскольку в отображении $\overline{\varphi}$ участвует умножение на элемент Ботта, его композиция с i^* есть нулевое отображение. Поэтому образ группы $\widetilde{\mathcal{R}}_a(\pi)$ лежит в $K^0(B\pi)$ и, следовательно, определяет (виртуальное) векторное расслоение над $B\pi$.

С другой стороны, образ отображения (1.23) не обязан содержаться во втором слагаемом (2.1). Это, однако, имеет место в случае, когда представление группы $\pi \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина является частью фредгольмова представления группы π [6]. Используя понятие асимптотического представления, мы можем теперь дать обобщение фредгольмовых представлений, которое также обеспечит включение образа таких представлений во второе слагаемое (2.1).

Пусть $\rho: \pi \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Q}$ — представление в алгебру Калкина, а $F \subset \pi$ — конечное подмножество группы π , содержащее ее образующие. Пусть $B(H)$ — C^* -алгебра ограниченных операторов сепарабельного гильбертова пространства H . Обозначим через $q: B(H) \rightarrow \mathcal{Q}$ каноническую проекцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем отображение $\tau: \pi \rightarrow B(H)$ ε -тривиализацией для ρ , если

- i) $\|\tau(gh) - \tau(g)\tau(h)\| \leq \varepsilon$ для всех $g, h \in F \subset \pi$;
- ii) $q(\tau(g)) = \rho(g; 0)$ для всех $g \in \pi$, $(g; 0) \in \pi \times \mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε -тривиализация τ_ε для ρ . Тогда пара (τ_ε, ρ) называется *асимптотическим фредгольмовым представлением*.

Пусть u — образующая группы $\mathbb{Z}$. Заметим, что образ группы π при ε -тривиализациях коммутирует с некоторым фредгольмовым оператором $F \in q^{-1}(\rho(0, u)) \subset B(H)$ с точностью до компактных операторов. Обозначим группу всех асимптотических фредгольмовых представлений группы π через $\mathcal{R}_{aF}(\pi) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\pi \times \mathbb{Z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Образ $\mathcal{R}_{aF}(\pi)$ при отображении f (1.23) лежит в группе $K^0(B\pi \wedge S^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь результатами [1], можно построить локально тривиальное расслоение над $B\pi$ (точнее, над остовом пространства $B\pi$ любой размерности) со слоями, изоморфными гильбертову пространству H со структурной группой $GL(H)$, исходя из почти представления τ_ε при достаточно малых ε . Для этого следует построить функции склейки, действующие в слоях ξ_x ,

$$T_g(x): \xi_x \rightarrow \xi_{gx},$$

где $g \in \pi$, $x \in E\pi$. Для этого нужно выбрать по одному представителю a_α в каждой орбите нульмерных симплексов пространства $E\pi$ и определить $T_g(a_\alpha) = \tau_\varepsilon(g)$. Возьмем произвольный нульмерный симплекс $b \in E\pi$. Тогда существует такой элемент $h \in \pi$, что $b = h(a_\alpha)$, и следует положить $T_g(b) = \tau_\varepsilon(gh)\tau_\varepsilon^{-1}(h)$. Далее эти функции склейки продолжаются по линейности на все симплексы пространства $E\pi$. Но, очевидно,

$$q(T_g(b)) = q(\tau_\varepsilon(gh)\tau_\varepsilon^{-1}(h)) = q(\tau_\varepsilon(g)) = \rho(g, 0),$$

значит, после перехода к факторам функции склейки $q(T_g(x)) = \rho(g, 0)$ становятся постоянными, и мы получаем локально плоское расслоение над $B\pi$ с группой обратимых элементов алгебры Калкина в качестве структурной группы. Но так как любое локально тривиальное расслоение со слоем H тривиально, соответствующее факторрасслоение со слоями, изоморфными алгебре Калкина, также тривиально, следовательно, проекция $f(\rho)$ на первое слагаемое группы $K_{\mathcal{Q}}^0(B\pi)$ в разложении (2.1) равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. В §1 мы видели, что асимптотическое представление $\sigma = (\sigma_n)$ задает гомоморфизм $\rho: \pi \times \mathbb{Z} \rightarrow GL(\mathcal{Q})$ в группу обратимых элементов алгебры Калкина. Но то же самое асимптотическое представление дает также ε -тривиализация для ρ для каждого $\varepsilon > 0$. Действительно, мы можем определить их как образ в $B(H)$ последовательности почти представлений $(1, 1, \dots, 1, \sigma_n(g), \sigma_{n+1}(g), \dots)$, т.е. как блочно-диагональные операторы

$$\tau_{\varepsilon_n}(g) = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E} \oplus \dots \oplus \mathbf{E} \oplus \sigma_n(g) \oplus \sigma_{n+1}(g) \oplus \dots, \quad g \in \pi.$$

Таким образом, асимптотические представления определяют асимптотические фредгольмовы представления, и имеет место вложение $\mathcal{R}_a(\pi) \subset \mathcal{R}_{aF}(\pi)$.

§ 3. Асимптотические представления и расширения

В работе [3] показано, что, используя квазицентральные аппроксимативные единицы, можно построить асимптотические представления, исходя из расширений C^* -алгебр. В этом параграфе мы покажем, как эта конструкция связана с асимптотическими представлениями исходной C^* -алгебры.

В теореме 1.5 было построено вложение $Q_\alpha^+(\text{Com}(H)) \subset \mathcal{Q}(H)$. Покажем, как строится аналогичное вложение $\psi : Q_\alpha^+(M_f) \rightarrow \mathcal{Q}$. Удобство такой конструкции заключается в том, что рассматриваемые почти представления являются конечномерными.

Пусть V_k — n_k -мерное гильбертово пространство со стандартным действием алгебры M_{n_k} и с фиксированным базисом $\{e_k^{(i)}\}$, $i \leq n_k$. Зафиксируем вложения

$$j_k : V_{k-1} \rightarrow V_k,$$

переводящие векторы $e_{k-1}^{(i)}$ в $e_k^{(i)}$. Обозначим через W_{k-1} ортогональные дополнения

$$V_k = j_k(V_{k-1}) \oplus W_{k-1}.$$

Для $k = 1$ положим $W_0 = V_1$. Положим, далее,

$$H_k = V_k \oplus \left(\bigoplus_m W_{k,m} \right), \quad W_{k,m} \cong W_k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad H = \bigoplus_k H_k$$

и определим гомоморфизм ψ C^* -алгебры $Q_\alpha^+(M_f)$ в алгебру Калкина $\mathcal{Q}$ гильбертова пространства H . Пусть $q \in Q_\alpha^+(M_f)$, а $q' = (q_k) \in B^+(M_f)$ — поднятие q . Обозначим через $(q_k)_{ij}$ матричные элементы матрицы q_k . По определению последовательности $(q_k)_{ii}$ стабилизируются, и эти стабилизации $\lim_{i \rightarrow \infty} (q_k)_{ii}$ не зависят от k . Обозначим значение этих пределов через $\lambda(q)$. Определим $\psi(q)$ как оператор в H , действующий на подпространствах V_k умножением на матрицы q_k , а на подпространствах $W_{k,m}$ — умножением на $\lambda(q)$. Такой оператор определен с точностью до компактных операторов, поэтому он задает элемент $\psi(q) \in \mathcal{Q}$. Рассмотрим теперь C^* -алгебру $Q_\alpha^+ \otimes C(S^1)$ непрерывных Q_α^+ -значных функций на окружности. Вышеописанная конструкция позволяет определить гомоморфизм

$$Q_\alpha^+ \otimes C(S^1) \rightarrow \mathcal{Q}.$$

Положим $\psi(q \otimes 1_{C(S^1)}) = \psi(q)$. Тогда остается определить образ функции $u = e^{2\pi i t}$ из $C(S^1)$. Определим фредгольмов оператор F (нулевого индекса) на гильбертовом пространстве H следующими условиями:

- i) F отображает каждое подпространство V_k (кроме V_1) на подпространство $V_{k-1} \oplus W_{k-1,1}$ так, что $F(e_k^{(i)}) = e_{k-1}^{(i)}$ при $i < n_{k-1}$;
- ii) F изоморфно отображает подпространство V_1 на $W_{0,1}$;
- iii) F изоморфно отображает каждое подпространство $W_{k,m}$ на подпространство $W_{k,m+1}$.

Определенный таким образом оператор F коммутирует с образом $\psi(Q_\alpha^+)$ по модулю компактных операторов, следовательно, мы получим требуемый гомоморфизм ψ , если положим $\psi(1_{Q_\alpha^+} \otimes e^{2\pi i t}) = F$.

Обозначим базисные векторы подпространств $W_{k,m}$ через $w_{k,m}^{(j)}$, где $n_{k-1} + 1 \leq j \leq n_k$. Тогда действие оператора F можно представить диаграммой

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & \leftarrow & w_{1,2}^{(1)} & \leftarrow & w_{1,1}^{(1)} & \leftarrow & | & e_1^{(1)} & \leftarrow & e_2^{(1)} & \leftarrow & e_3^{(1)} & \leftarrow & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \leftarrow & w_{1,2}^{(n_1)} & \leftarrow & w_{1,1}^{(n_1)} & \leftarrow & | & e_1^{(n_1)} & \leftarrow & e_2^{(n_1)} & \leftarrow & e_3^{(n_1)} & \leftarrow & \dots \\
 \dots & \leftarrow & w_{2,3}^{(n_1+1)} & \leftarrow & w_{2,2}^{(n_1+1)} & \leftarrow & w_{2,1}^{(n_1+1)} & \leftarrow & | & e_2^{(n_1+1)} & \leftarrow & e_3^{(n_1+1)} & \leftarrow & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \leftarrow & w_{2,3}^{(n_2)} & \leftarrow & w_{2,2}^{(n_2)} & \leftarrow & w_{2,1}^{(n_2)} & \leftarrow & | & e_2^{(n_2)} & \leftarrow & e_3^{(n_2)} & \leftarrow & \dots \\
 \dots & \leftarrow & w_{3,4}^{(n_2+1)} & \leftarrow & w_{3,3}^{(n_2+1)} & \leftarrow & w_{3,2}^{(n_2+1)} & \leftarrow & w_{3,1}^{(n_2+1)} & \leftarrow & | & e_3^{(n_2+1)} & \leftarrow & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \leftarrow & w_{3,4}^{(n_3)} & \leftarrow & w_{3,3}^{(n_3)} & \leftarrow & w_{3,2}^{(n_3)} & \leftarrow & w_{3,1}^{(n_3)} & \leftarrow & | & e_3^{(n_3)} & \leftarrow & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Пусть A – такая C^* -алгебра, что существует гомоморфизм аугментации

$$\epsilon_A: A \rightarrow \mathbb{C}$$

алгебры A в поле комплексных чисел, а $\mathcal{F}_A \subset A$ – конечный набор образующих алгебры A . Мы можем повторить наши определения асимптотических представлений из § 1 для случая C^* -алгебр вместо дискретных групп.

Для удобства обозначений далее мы будем считать, что размерность почти представления $\tilde{\sigma}_k$ равна k .

Рассмотрим последовательность отображений $\tilde{\sigma}_k: A \rightarrow M_k$, $\tilde{\sigma}_k(1) = 1$, $\|\tilde{\sigma}_k(ab) - \tilde{\sigma}_k(a)\tilde{\sigma}_k(b)\| \rightarrow 0$ для $a, b \in \mathcal{F}_A$, где M_k стандартно действует в конечномерном гильбертовом пространстве V_k . Возьмем бесконечномерное гильбертово пространство $H_k \supset V_k$ и определим отображение $\sigma_k: A \rightarrow B(H_k)$ равенством

$$\sigma_k(a) = \tilde{\sigma}_k(a) \oplus \epsilon_A(a),$$

где $a \in A$, а $\epsilon_A(a)$ – скалярный оператор в $V_k^\perp$. Последовательность отображений $\{\sigma_k\}$ задает асимптотическое представление C^* -алгебры A , если (после отождествления всех H_k) нормы $\|\sigma_{k+1}(a) - \sigma_k(a)\|$ стремятся к нулю для всех $a \in \mathcal{F}_A$.

Положим $\sigma = \bigoplus_k \sigma_k: \pi \rightarrow B(H)$, где $H = \bigoplus_k H_k$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H C^* -алгебру $\mathcal{E}_0$, порожденную всеми компактными операторами, а также всеми операторами вида $\sigma(a)$, $a \in A$, и C^* -алгебру $\mathcal{E}$, порожденную алгеброй $\mathcal{E}_0$ и оператором сдвига F , определенным выше. Эти C^* -алгебры содержат идеал $\text{Comp}(H)$. Рассмотрим факторалгебру $\mathcal{E}_0 / \text{Comp}(H)$. Она изоморфна факторалгебре C^* -алгебры A по некоторому идеалу $J \subset A$. Тогда, поскольку оператор F коммутирует с элементами алгебры $\mathcal{E}_0$ по модулю компактных операторов

и спектр F совпадает с единичной окружностью, имеет место короткая точная последовательность

$$\text{Comp}(H) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow (A/J) \otimes C(S^1). \quad (3.1)$$

Мы воспользуемся дискретной версией конструкции из работы [3]. Напомним, что аппроксимативная единица $\{e_n\} \in \text{Comp}(H)$, $0 \leq e_n \leq 1$, называется *квазицентральной* (см. [7]) для короткой точной последовательности (3.1), если для любого элемента $b \in \mathcal{E}$ имеет место равенство $\lim_n \|e_n b - b e_n\| = 0$. Точная последовательность (3.1) определяет асимптотическое представление

$$\bar{\rho}_n: A \otimes C(S^1) \otimes C_0(S^1) \xrightarrow{as} \text{Comp}(H)$$

по формуле

$$\bar{\rho}_n(a \otimes g \otimes f) = (a \otimes g)' \cdot f(e_n),$$

где $(a \otimes g)' \in \mathcal{E}$ — поднятие элемента $(aJ) \otimes g \in (A/J) \otimes C(S^1)$, а $f \in C_0(S^1)$. Обозначим через $K_n \subset H$ подпространство, на котором $e_n \neq 0$, $e_n \neq 1$. Без ограничения общности (заменив элементы e_n на близкие к ним элементы конечного ранга) можно считать, что подпространства K_n конечномерны, $r(n) = \dim K_n$. Тогда мы можем определить последовательность *конечномерных* отображений

$$\rho_n: A \otimes C(S^1) \otimes C_0(S^1) \xrightarrow{as} M_{r(n)} \quad (3.2)$$

по формуле

$$\rho_n(a \otimes g \otimes f) = P_n(a \otimes g)' P_n \cdot f(e_n),$$

где P_n — проекция на K_n , $g \in C(S^1)$, $f \in C_0(S^1)$, $f(0) = 0$. Из квазицентральнойности $\{e_n\}$ следует, что для любых $a \otimes g \in A \otimes C(S^1)$, $f \in C_0(S^1)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\rho}(a \otimes g \otimes f) - \rho(a \otimes g \otimes f)\| = 0,$$

поэтому последовательность отображений (3.2) является асимптотическим представлением.

Пусть $\mathcal{F}' = \{\mathcal{F}_A \otimes 1, 1 \otimes e^{2\pi i x}\}$ — конечный набор образующих C^* -алгебры $A \otimes C(S^1)$. Для дальнейшего нам понадобится квазицентральная аппроксимативная единица специального вида. Определим последовательность натуральных чисел $m(n)$ так, чтобы были выполнены следующие условия:

- i) $m(n)$ стремится к бесконечности;
- ii) $\max_{1 \leq i \leq m(n)} \|\sigma_{n+i}(a) - \sigma_n(a)\|$ стремится к нулю для любого $a \in \mathcal{F}_A \subset A$;
- iii) $\frac{m(n+1) - m(n)}{m(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Мы предположили для удобства обозначений, что $\dim V_k = k$, значит, $\dim W_{k,l} = \dim V_k - \dim V_{k-1} = 1$. Переобозначим базисные векторы подпространств V_k через $v_k^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, а базисные векторы подпространств $W_{k,l}$ через $v_{k-l}^{(k)}$. В этих обозначениях оператор сдвига F , изображенный диаграммой на стр. 69, действует по формуле

$$Fv_k^{(j)} = v_{k-1}^{(j)}$$

и является прямой суммой операторов сдвига в подпространствах $H^{(j)}$, порожденных векторами $v_k^{(j)}$.

Для $k \geq 0$ положим

$$a_{n,k}^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k \leq n \text{ и } j \leq n + m(n), \\ \frac{m(n) - k + n}{m(n)} & \text{при } n < k \leq n + m(n) \text{ и } j \leq n + m(n), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$a_{n,-k}^{(j)} = a_{n,k}^{(j)}$$

и определим последовательность элементов $\{e_n\}$ как последовательность диагональных операторов в H , действующих умножением по формуле

$$e_nv_k^{(j)} = a_{n,k}^{(j)}v_k^{(j)}.$$

ЛЕММА 3.1. *Последовательность $\{e_n\}$ является квазицентральной аппроксимативной единицей для точной последовательности (3.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что последовательность $\{e_n\}$ является аппроксимативной единицей, поскольку для всех k, j имеем $e_nv_k^{(j)} \rightarrow v_k^{(j)}$. Покажем, что $\{e_n\}$ квазицентрально. Для этого достаточно оценить нормы коммутаторов

$$[e_n, \sigma(a)] \text{ для } a \in \mathcal{F}_A \text{ и } [e_n, F].$$

Из определения e_n видно, что $[e_n, \sigma(a)]v_k^{(j)} = 0$ для всех k, j кроме $k = j = n + m(n) + 1$, а

$$[e_n, \sigma(a)]v_{n+m(n)+1}^{(n+m(n)+1)} = e_n(\epsilon_A(a)v_{n+m(n)+1}^{(n+m(n)+1)} + v') - \sigma(a)e_nv_{n+m(n)+1}^{(n+m(n)+1)},$$

где $v' \in \text{Span}\{v_{n+m(n)+1}^{(j)}, 1 \leq j \leq n + m(n) + 1\}$, и $\|v'\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но так как $e_nv_{n+m(n)+1}^{(n+m(n)+1)} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[e_n, \sigma(a)]v_{n+m(n)+1}^{(n+m(n)+1)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_nv'\| = 0.$$

Для второго коммутатора имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[e_n, F]\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \bigoplus_k [e_n|_{H_k}, F|_{H_k}] \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(n)} = 0,$$

следовательно, $\{e_n\}$ квазицентрально.

Отметим также, что, поскольку

$$\|e_{n+1} - e_n\| \leq \max \left\{ \frac{1}{m(n+1)}; \frac{m(n+1) - m(n)}{m(n)} \right\} \rightarrow 0,$$

получаем $\|\rho_{n+1} - \rho_n\| \rightarrow 0$ на образующих алгебры $A \otimes C(S^1) \otimes C_0(S^1)$.

Напомним, что через P_n мы обозначили проектор на подпространство в H , на котором $e_n \neq 0$, $e_n \neq 1$, т.е. на подпространство, порожденное векторами $v_k^{(j)}$ при $n < |k| \leq n + m(n)$, $j \leq n + m(n)$. Разобьем проектор P_n на две части: $P_n = P_n^+ \oplus P_n^-$, где P_n^+ — подпроектор P_n на линейную оболочку векторов $v_k^{(j)}$ при $k > 0$. Тогда формулы $\rho_n^\pm = P_n^\pm \rho P_n^\pm$ задают отображения $\rho^\pm = \{\rho_n^\pm\}$:

$$\rho_n^\pm: A \otimes C(S^1) \otimes C_0(S^1) \rightarrow M_{(n+m(n)) \times m(n)}.$$

Ясно, что $\rho = \rho^+ \oplus \rho^-$.

Известно еще одно асимптотическое представление $\beta = (\beta_m)$ коммутативной C^* -алгебры $C(S^1 \times S^1)$ в матричные алгебры M_m , определенное формулой

$$\beta_m(e^{2\pi i k x} e^{2\pi i l y}) = T_m^k U_m^l, \quad \beta_m: C(S^1) \otimes C(S^1) \xrightarrow{as} M_m,$$

где T_m и U_m — m -мерные матрицы Войкулеску: T_m — оператор сдвига, а U_m — диагональная матрица [8]. Это асимптотическое представление реализует изоморфизм Ботта.

Обратный элемент для образующей Ботта задается асимптотическим представлением $-\beta = (-\beta)_m$, где

$$(-\beta)_m(e^{2\pi i k x} e^{2\pi i l y}) = T_m^k U_m^{-l}.$$

Пусть $m = m(n)$. Тензорное произведение $\tilde{\sigma}$ и β дает асимптотическое представление $\tilde{\sigma} \otimes \beta = (\tilde{\sigma} \otimes \beta)_n$, где

$$(\tilde{\sigma} \otimes \beta)_n = \tilde{\sigma}_n \otimes \beta_{m(n)}: A \otimes C(S^1) \otimes C_0(S^1) \xrightarrow{as} M_{n \times m(n)}.$$

Напомним, что через $\epsilon_A: A \rightarrow \mathbb{C}$ мы обозначаем гомоморфизм аугментации, и обозначим через ϵ_n прямую сумму n экземпляров гомоморфизма ϵ_A . Тензорное произведение $\epsilon_A \otimes (-\beta) = (\epsilon_n \otimes (-\beta)_{m(n)})$ также определяет асимптотическое представление, тривиальное на A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. (i) *Отображения ρ^+ и ρ^- являются асимптотическими представлениями алгебры $A \otimes C(S^1) \otimes C_0(S^1)$.*

(ii) *Асимптотические представления ρ^+ и $\tilde{\sigma} \otimes \beta$ в матричные алгебры $M_{(n+m(n)) \times m(n)}$ являются эквивалентными; более того, для $a \in \mathcal{F}_A \subset A$, $e^{2\pi i x} \in C(S^1)$ и $f \in C_0(S^1)$ нормы*

$$\|\rho_n^+(a \otimes e^{2\pi i x} \otimes f) - \tilde{\sigma}_n(a) \otimes \beta_{m(n)}(e^{2\pi i x} \otimes f)\|$$

стремятся к нулю.

(iii) *Асимптотические представления ρ^- и $\epsilon_A \otimes (-\beta)$ являются эквивалентными; более того, для $a \in \mathcal{F}_A \subset A$, $e^{2\pi i x} \in C(S^1)$ и $f \in C_0(S^1)$ нормы*

$$\|\rho_n^-(a \otimes e^{2\pi i x} \otimes f) - \epsilon_n(a) \otimes (-\beta)_{m(n)}(e^{2\pi i x} \otimes f)\|$$

стремятся к нулю.

(iv) *В группе (виртуальных) асимптотических представлений имеет место равенство*

$$[\bar{\rho}] = [\rho] = [\tilde{\sigma} \otimes \beta] - [\epsilon_A \otimes \beta].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения следует из того, что

$$\|[f(e_n), P_n^\pm \sigma(a) P_n^\pm]\| \rightarrow 0 \quad \text{при } a \in \mathcal{F}_A, \quad \|[f(e_n), P_n^\pm F P_n^\pm]\| \rightarrow 0.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\rho_n(a \otimes e^{2\pi i x} \otimes f) = P_n^+ \left(\bigoplus_{i=n+1}^{m(n)} \sigma_i(a) \right) P_n^+ F P_n^+ f(e_n) = \bigoplus_{i=n+1}^{m(n)} \tilde{\sigma}_i(a) F P_n^+ f(e_n),$$

где $a' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \sigma_i(a) \in \mathcal{E}$ является поднятием для a , F является поднятием для $e^{2\pi i x}$ и $f(e_n)$ — диагональная матрица с элементами $f\left(\frac{m(n)-i+n}{m(n)}\right)$ на диагонали.

Обозначим (так же, как матрицу сдвига из пары матриц Войкулеску) через $T_{m(n)}$ оператор в H , действующий по формуле

$$T_{m(n)} v_k^{(j)} = v_{k-1}^{(j)} \quad \text{при } n+2 \leq k \leq n+m(n), \quad T_{m(n)} v_{n+1}^{(j)} = v_{n+m(n)}^{(j)}.$$

Тогда легко видеть, что нормы

$$\|P_n F P_n f(e_n) - T_{m(n)} f(e_n)\|$$

стремятся к нулю и что

$$T_{m(n)} f(e_n) = \beta_{m(n)}(e^{2\pi i x} \otimes f).$$

Остается заметить, что благодаря нашему выбору последовательности $m(n)$ нормы

$$\left\| \left(\bigoplus_{i=n+1}^{m(n)} \tilde{\sigma}_i \right)(a) - \left(\bigoplus_{i=n+1}^{m(n)} \tilde{\sigma}_n \right)(a) \right\|$$

также стремятся к нулю, что доказывает утверждение (ii).

Аналогично разбирается случай асимптотического представления ρ^- . Последнее утверждение предложения очевидно следует из предыдущих.

Список литературы

1. *Mishchenko A. S., Noor Mohammad.* Asymptotical representations of discrete groups // *Lie Groups and Lie Algebras Their Representations, Generalizations and Applications. Mathematics and Its Applications. V.433.* Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1998. P. 299–312.
2. *Connes A., Gromov M., Moscovici H.* Conjecture de Novikov et fibrés presque plats // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.* 1990. V. 310. P. 273–277.
3. *Connes A., Higson N.* Deformations, morphismes asymptotiques et K -theorie bivariente // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.* 1990. V. 311. P. 101–106.
4. *Loring T. A., Pedersen G. K.* Corona extendibility and asymptotic multiplicativity // *K-Theory.* 1997. V. 11. P. 83–102.
5. *Connes A.* An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of $\mathbb{R}$ // *Adv. Math.* 1981. V. 39. P. 31–55.
6. *Мищенко А. С.* О фредгольмовых представлениях дискретных групп // *Функц. анализ и его прилож.* 1975. Т. 9. № 2. С. 36–41.
7. *Arveson W.* Notes on extensions of C^* -algebras // *Duke Math. J.* 1977. V. 44. P. 329–355.
8. *Voiculescu D.* Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants // *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1983. V. 45. P. 429–431.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
06.03.1998