Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Марчук, Построение сопряженных операторов в нелинейных задачах математической физики, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 10, 75–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:34:43

УДК 519.6

Г. И. Марчук

Построение сопряженных операторов в нелинейных задачах математической физики

В статье дан обзор принципов построения сопряженных операторов в нелинейных задачах. Автор стремится привлечь внимание к тем новым подходам в теории метода сопряженных операторов, которые во многих случаях позволяют получить необходимые сведения о физических процессах и неизвестных параметрах сложных систем при создании технологии проектирования или планирования экспериментов при решении прикладных задач.

Библиография: 27 названий.

Введение

Сопряженные уравнения все более активно начинают проникать в различные области математики и ее приложений. Первоначально определенные Лагранжем сопряженные операторы нашли глубокое теоретическое обоснование и широкое применение при решении многих задач математической физики. Но истинное значение теории сопряженных уравнений, пожалуй, было впервые оценено физиками при развитии квантовой механики. Уравнение Шрёдингера потребовало развития аппарата сопряженных уравнений и функций, по крайней мере, для задач на собственные значения. Здесь впервые сопряженные уравнения становятся необходимым математическим аппаратом для формулирования теории малых возмущений в спектральных проблемах.

В дальнейшем теория возмущений привлекла внимание многих исследователей. Первая математически строгая теория возмущений, по-видимому, начинается с работ Ф. Реллиха [1]–[3]. Дальнейшее развитие математическая теория возмущений получила в работах многих исследователей. Эти работы продолжили развитие теории возмущений в применении к широким классам задач математической физики. Однако объединяющей идеей всех этих работ явилась возможность разложения по малому параметру и обоснования сходимости полученного ряда к точному решению задачи.

Следующий этап активного интереса к сопряженным уравнениям и теории малых возмущений следует отнести к теории ядерных реакторов, где сложные задачи теории переноса нейтронов с замедлением их в средах потребовали формулирования соответствующих сопряженных уравнений и решения основных и со-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00389).

пряженных уравнений применительно к оценке первого собственного числа спектральной задачи, связанной с реализацией стационарной цепной реакции. Эти работы начались с исследований А. Вайнберга и Е. Вигнера [4] для простейших, так называемых, диффузионно-возрастных моделей переноса и замедления нейтронов и были в дальнейшем обобщены на кинетические уравнения реактора в работах Л. Н. Усачева [5]–[7], Г. И. Марчука и В. В. Орлова [8], В. Я. Пупко, А. В. Зродникова и Ю. И. Лихачева [9] и др. Созданная на базе основных и сопряженных уравнений реактора теория малых возмущений сыграла большую роль в развитии физики реакторов и в реализации проектов атомных электростанций.

Новый подход к сопряженным задачам был сформулирован в работе Б. Б. Кадомцева [10] для точечного источника в задаче переноса нейтронов. В работе [8] дана общая формулировка сопряженных задач по отношению к избранным линейным функционалам задач, которыми, в частности, могут быть измерения физических процессов, свойственных теории переноса излучения. Это уже не спектральные задачи, а задачи математической физики с заданными источниками в самих уравнениях, начальных данных или в граничных условиях.

В дальнейшем в работах автора было дано развитие теории сопряженных задач по отношению к заданным функционалам для некоторых классов задач математической физики. Оно оказалось плодотворным и для многих других направлений науки. В результате появились более или менее общие подходы к исследованию сложных систем и математических моделей. Эти подходы – основное содержание многолетних исследований автора в различных областях математики и ее приложениях к проблемам диффузии, моделям охраны окружающей среды, теории климата и его изменений, математическим проблемам обработки информации со спутников, математическим моделям в иммунологии и др. Вместе с развитием методов сопряженных уравнений формировался рациональный подход к решению обратных задач и к планированию математического эксперимента.

Теперь несколько слов о нелинейных задачах математической физики. Как известно, математический аппарат сопряженных уравнений в своей классической форме развит только для линейных задач и основан на тождестве Лагранжа. При рассмотрении уравнений гидротермодинамики процессов в атмосфере и океане автор столкнулся с нелинейными задачами, которые требовали развития специального аппарата сопряженных уравнений. Эта задача нашла неожиданное решение на основе построения обычных, сопряженных в смысле Лагранжа, уравнений, которые в своих коэффициентах требовали использования решения основных уравнений [11], [12]. В результате последовательное решение основных и затем сопряженных уравнений позволило развить теорию малых возмущений.

В последние годы нелинейные задачи становятся объектом широкого фронта исследований. И, естественно, при этом возникают те или иные обобщения теории сопряженных уравнений, имеющие значение для определенных классов задач. Большой интерес здесь вызывают подходы, сформулированные в работах В. П. Маслова [13], а также В. С. Владимирова и И. В. Воловича [14]. Плодотворной оказалась и теория нелинейных сопряженных уравнений, предложенная М. М. Вайнбергом [15]. Исследованию данных вопросов посвящены также работы автора сов-

местно с В. И. Агошковым [16], [17].

Естественно, что столь широкий набор проблем, связанных с применением сопряженных уравнений, нуждался в математическом обосновании. Этим вопросам посвящена специальная монография, написанная автором в сотрудничестве с В. И. Агошковым и В. П. Шутяевым [18]. В указанной монографии не только рассмотрены вопросы сопряженных уравнений и задач, но и дано исследование теории возмущений в довольно общем виде со строгим математическим обоснованием новых проблем.

Имея в виду, что теоретическое обоснование применения сопряженных уравнений к решению задач математической физики продвинуто в специальной литературе достаточно глубоко, автор в настоящей статье дает обзор принципов построения сопряженных операторов в нелинейных задачах и делает попытку привлечь внимание к этим новым подходам более или менее широкого круга научных сотрудников и инженеров-исследователей, которые, возможно, получают определенный импульс к созданию технологии проектирования или планирования экспериментов при решении прикладных задач. Эти подходы позволяют во многих случаях получить необходимые сведения о физических процессах и неизвестных параметрах сложных систем. В расчете на этот круг читателей автор будет стремиться к возможно более простой форме изложения. Обобщение обсуждаемых методов и их строгое математическое обоснование могут быть проведены на основе специальной литературы, ссылки на которую читатель найдет в конце статьи.

Наконец, хотелось бы отметить еще одну важную особенность рассматриваемой теории сопряженных уравнений. Именно с их помощью в трудах Р. Беллмана [19], Л. С. Понтрягина [20], Н. Н. Красовского [21], Ж.-Л. Лионса [22], Р. Гловинского [23] и других исследователей удалось вплотную подойти к решению проблем оптимального управления и проблеме чувствительности решения основных задач или функционалов по отношению к входным данным. А это, в свою очередь, позволяет все глубже проникнуть в природу моделируемых процессов, уточнять математические постановки задач, что особенно важно в случаях обычно чрезвычайно трудных для анализа и интерпретаций нелинейных задач. И здесь значение теории сопряженных уравнений трудно переоценить.

§1. Построение сопряженных операторов на основе тождества Лагранжа

Пусть X, Y – сепарабельные гильбертовы пространства. Через X^* и Y^* обозначим сопряженные к X и Y пространства, состоящие из линейных и ограниченных, соответственно, над X и Y функционалов. Для упрощения обозначений скалярные произведения, нормы и отношения двойственности в этих пространствах будем обозначать, соответственно, как

$$\begin{aligned} (f, g)_X, \quad \|f\|_X &= (f, f)_X^{1/2}, \quad \langle f, g^* \rangle_X, \quad f, g \in X, \quad g^* \in X^*, \\ (f, g)_Y, \quad \|f\|_Y &= (f, f)_Y^{1/2}, \quad \langle f, g^* \rangle_Y, \quad f, g \in Y, \quad g^* \in Y^*. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь первый принцип построения сопряженных операторов в нелинейных задачах. Пусть $F(u)$ есть нелинейный оператор, действующий из X в Y . Область определения $D(F) \subset X$ этого оператора предполагается выпуклым множеством, плотным в X . Пусть также $0 \in D(F)$ и выполнено условие $F(0) = 0$. Определим сопряженный оператор, соответствующий $F(u)$, на основе тождества Лагранжа [11], [12], [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Оператор $A^*(u)$ с некоторой областью определения $D(A^*) \subset Y^*$ и областью значений из X^* называется *сопряженным оператором, соответствующим $F(u)$* , если $A^*(u)$ удовлетворяет тождеству Лагранжа

$$\langle F(u), v \rangle_Y = \langle u, A^*(u)v \rangle_X \quad (1.1)$$

при любых $u \in D(F)$, $v \in D(A^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Оператор $A^*(u)$, вводимый с помощью (1.1), называется также *ассоциированным* [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Подчеркнем, что в определении A оператор $A^*(u)$ мы называли “сопряженным оператором, соответствующим $F(u)$ ”, а не “сопряженным к $F(u)$ ”, поскольку необходимо помнить, что $F(u)$ есть элемент из Y , а $A^*(u)$ есть оператор из Y^* в X^* (зависящий от $u \in D(F)$).

Отметим, что в случае нелинейного оператора F может оказаться несколько операторов A^* , удовлетворяющих (1.1), т.е. определение 1.1 не приводит к однозначному A^* (см. пример ниже). Частично эту неоднозначность можно устранить следующим образом. Так, предположим, что элемент $F(u)$ представим в виде

$$F(u) = A(u)u, \quad (1.2)$$

где $A(u)$ есть некоторый линейный оператор, зависящий от u и с областью определения $D(A) \supset D(F)$. Фиксируя элемент $u \in D(F)$, обычным образом, как это делается в теории линейных операторов, введем (гильбертов) сопряженный оператор $A^*(u)$ на основе тождества

$$\langle A(u)w, v \rangle_Y = \langle w, A^*(u)v \rangle_X, \quad (1.3)$$

где $w \in D(A)$, $v \in D(A^*)$. И таким образом приходим к следующему определению сопряженного оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Оператор $A^*(u)$ с областью определения $D(A^*) \subset Y$ и областью значений из X^* назовем *сопряженным оператором, соответствующим $F(u)$* , если $A^*(u)$ удовлетворяет (1.3) при любых $D(F)$, $w \in D(A)$, $v \in D(A^*)$.

Согласно этому определению оператор $A^*(u)$ определен уже однозначно по заданному $A(u)$. Однако представление (1.2) (т.е. вид оператора $A(u)$) вновь неоднозначно, и это снова может привести к нескольким сопряженным операторам, соответствующим $F(u)$. “Частичное” же устранение неоднозначности здесь состоит в том, что переход от $A(u)$ к $A^*(u)$ однозначен.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $(t, x) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $X = X^* = Y = Y^* = L_2(\Omega)$ – пространство вещественных периодических по t и по x функций с периодом, равным единице по каждой из переменных (и, естественно, определенных при $(t, x) \in \mathbb{R}^2$). Нормы в $L_2(\Omega)$ имеет обычный вид:

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dt dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим периодическую задачу вида

$$F(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + au = f, \quad a = \text{const} > 0, \quad (1.4)$$

где оператор F имеет область определения $D(F) = C^{(1)}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Представим $F(u)$ следующими способами:

$$\begin{aligned} F(u) &= A_1(u) \cdot u, \quad \text{где} \quad A_1(u)v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + av, \\ F(u) &= A_2(u) \cdot u, \quad \text{где} \quad A_2(u)v = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(a + \frac{\partial u}{\partial x} \right) v, \\ F(u) &= A_3(u) \cdot u, \quad \text{где} \quad A_3(u)v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(uv)}{\partial x} + av. \end{aligned} \quad (1.5)$$

На основе операторов $\{A_i(u)\}$ и равенства (1.3) строим соответствующие сопряженные операторы $\{A_i^*(u)\}$ (для этого можно применить обычную методику интегрирования по частям):

$$\begin{aligned} A_1^*(u)w &= -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial(uw)}{\partial x} + aw = -\frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} + \left(a - \frac{\partial u}{\partial x} \right) w, \\ A_2^*(u)w &= -\frac{\partial w}{\partial t} + \left(a + \frac{\partial u}{\partial x} \right) w, \\ A_3^*(u)w &= -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{u}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + aw. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отметим, что каждой из областей определения $\{D(A_i^*)\}$ операторов $\{A_i^*\}$ принадлежит пространство периодических функций $W_2^1(\Omega)$. Поэтому, по крайней мере на $W_2^1(\Omega)$, операторы $\{A_i^*(u)\}$ имеют вид, представленный в (1.6). Таким образом, неоднозначность представления $F(u)$ в виде $A(u)$ и привела к неоднозначному определению сопряженного оператора, соответствующего $F(u)$. Однако каждый из операторов $\{A_i^*(u)\}$ удовлетворяет тождеству Лагранжа (1.3).

§ 2. Класс операторов $\mathcal{D}$ и сопряженные к ним операторы

Пусть X – рефлексивное вещественное банахово пространство и F – нелинейное, непрерывно дифференцируемое по Гато отображение из X в X^* , удовлетворяющее условию $F(0) = 0$. Из этого множества операторов выделим класс $\mathcal{D}$ операторов таких, что каждому $F \in \mathcal{D}$ отвечает отображение G из этого множества такое, что

$$\langle z, G'(x)y \rangle_X = \langle y, F'(x), z \rangle_X \quad (2.1)$$

для всех $x, y, z \in X$ (где $G'(x)$, $F'(x)$ – производные Гато от G , F , соответственно, а $\langle z, y \rangle_X \equiv y(z)$ есть значение функционала $y \in X^*$ на элементе $z \in X$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [15]. Оператор $G \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий (2.1) при любых $x, y, z \in X$, называется *сопряженным к F* .

При выполнении условия (2.1) будем также писать

$$G'(x) = (F'(x))^*. \quad (2.2)$$

Сопряженный оператор в смысле определения 2.1 является единственным. Действительно, если равенству (2.2) удовлетворяет и отображает $\Phi \in \mathcal{D}$, то $G'(x) = \Phi'(x)$. Однако

$$\frac{d}{dt}G(tx) = G'(tx)x, \quad \frac{d}{dt}\Phi(tx) = \Phi'(tx)x,$$

поэтому по формуле Лагранжа имеем

$$G(x) = \int_0^1 G'(tx)x dt = \int_0^1 \Phi'(tx)x dt = \Phi(x),$$

т.е. $G = \Phi$. Поскольку сопряженный оператор G единственный, то можно писать

$$G \equiv F^*, \quad (2.3)$$

а также

$$(F')^* = (F^*)'. \quad (2.4)$$

Оператор $F \in \mathcal{D}$ называется *симметричным*, если $F = F^*$, и *кососимметричным*, если $F^* = -F$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $X = \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) = \{u \in W_2^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$, $(\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1))^* = \overset{\circ}{W}_2^{-1}(0, 1)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} + u^2(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ее обобщенная постановка формулируется следующим образом: требуется отыскать функцию $u(x) \in \mathring{W}_2^1(0, 1)$, удовлетворяющую равенству

$$a(u, v) \equiv \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u^2 v \right) dx = \int_0^1 f v dx \quad (2.6)$$

при любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(0, 1)$. Если с помощью соотношения

$$(F(u), v)_{L_2} = a(u, v) \quad (2.7)$$

ввести оператор F , действующий из $\mathring{W}_2^1(0, 1)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(0, 1)$, с областью определения $D(F) = \mathring{W}_2^1(0, 1)$, то обобщенную формулировку задачи (2.6) можно записать в виде операторного уравнения

$$F(u) = f. \quad (2.8)$$

Теперь для оператора F легко показать, что он непрерывно дифференцируем по Гато, а $F'(u)$ определяется равенством

$$(F'(u)v, w)_{L_2} = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} + 2uvw \right) dx \quad (2.9)$$

и является оператором из $\mathring{W}_2^1(0, 1)$ в $\mathring{W}_2^{-1}(0, 1)$. Кроме того, здесь оператор F принадлежит множеству $\mathcal{D}$; он имеет сопряженный оператор F^* , совпадающий с F , т.е. F симметричен.

Как видно из определения 2.1, сопряженные операторы определены только для тех нелинейных операторов, которые составляют класс $\mathcal{D}$. Если же оператор F не принадлежит классу $\mathcal{D}$, то F не имеет сопряженного оператора в смысле определения 2.1. Это обстоятельство затрудняет использование определения 2.1, так как в целом ряде практических задач возникают как раз такие нелинейные операторы, которые не принадлежат классу $\mathcal{D}$.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим оператор F и пространства из примера 1.1. Введем оператор T , определяемый выражением

$$T(u_0)v = \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \left(a + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) v$$

и областью определения $D(T) = C^{(1)}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Здесь u_0 — некоторая функция из $D(F) = C^{(1)}(\Omega)$. Тогда для u_0 и $u = u_0 + h$ имеем

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(u_0) - T(u - u_0)\|_{L_2(\Omega)} &= t^2 \left\| h \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq t^2 \|h\|_{L_2(\Omega)} \|h\|_{C^{(1)}(\Omega)}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} - T(u_0)h \right\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \end{aligned}$$

т.е. $F'(u_0)h = T(u_0)h$. Таким образом, оператор F имеет производную Гато в каждой точке $u \in D(F) = C^{(1)}(\Omega)$, $F'(u) = T(u)$. На основе вида F и F' легко заметить [16], что оператор F не принадлежит классу $\mathcal{D}$ и что F не имеет сопряженного оператора в смысле определения 2.1.

§3. Построение сопряженного оператора на основе формулы Тейлора

Пусть выполнены предположения из §1. Будем считать также, что $F(u)$ обладает производной Гато $F'(u)$ в любой точке $u \in D(F)$, т.е. в точке $u \in D(F)$ существует предел

$$\left. \frac{d}{dt} F(u + th) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} = F'(u) \cdot h$$

для всякого $h \in D(F')$, где $F'(u)$ есть линейный (вообще говоря, неограниченный!) оператор (действующий на h) из X в Y с областью определения $D(F') \supset D(F)$. Предел здесь понимается в “сильном” смысле, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{F(u + th) - F(u)}{t} - F'(u) \cdot h \right\|_Y = 0.$$

Отметим, что если $F'(u)$ будет также ограниченным оператором, то его можно по непрерывности продолжить до оператора (за которым оставим прежнее обозначение $F'(u)$), применимого к любому элементу $h \in X$.

При сделанных ограничениях абстрактная функция $\varphi(t) = F(u_0 + t(u - u_0))$, где u, u_0 – любые элементы из $D(F)$, дифференцируема в любой точке $t \in [0, 1]$. Будем считать, что производная $\varphi'(t) = d\varphi/dt$ ограничена и почти всюду непрерывна на $[0, 1]$. В этом случае справедлива формула Лагранжа

$$F(u) = F(u_0) + \int_0^1 F'(u_0 + t(u - u_0)) dt (u - u_0), \quad (3.1)$$

являющаяся одной из простейших формул Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Если в (3.1) принять $u_0 = 0$, то получаем следующее выражение:

$$F(u) = \int_0^1 F'(tu) dt \cdot u \equiv A(u)u, \quad u \in D(F), \quad (3.2)$$

где

$$A(u) = \int_0^1 F'(tu) dt \quad (3.3)$$

есть линейный оператор с областью определения $D'(A) = D(F)$, действующий из X в Y : $A(u)(t_1 v_1 + t_2 v_2) = t_1 A(u)v_1 + t_2 A(u)v_2$, $A(u): X \rightarrow Y$, $v_1, v_2 \in D(A)$, t_1, t_2 – любые вещественные числа.

Формулу (3.2) положим в основу определения сопряженного оператора. Так, фиксируя элемент $u \in D(F)$, обычным образом (как это делается в теории линейных операторов) введем сопряженный к $A(u)$ оператор $A^*(u)$, действующий из Y^* в X^* :

$$A^*(u)u^* \in X^*, \quad A^*(u): Y^* \rightarrow X^*, \quad u \in D(F), \quad (3.4)$$

с областью определения $D(A^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [16]. Оператор $A^*(u) = \left(\int_0^1 F'(tu) dt \right)^*$ назовем *сопряженным оператором, соответствующим нелинейному оператору $F(u)$, $F(u) = A(u)u$.*

Из единственности производной Гато, единственности интеграла $\int_0^1 F'(tu) dt$ от оператор-функции $F'(tu)$ и из единственности сопряженного оператора к линейному, область определения которого плотна во всем пространстве, следует однозначность $A^*(u)$ в смысле определения 3.1. Далее, легко заметить, что для двух элементов $u \in D(A)$ и $u^* \in D(A^*)$ справедливо тождество

$$\langle F(u), u^* \rangle_Y = \langle A^*(u)u^* \rangle_X \quad (3.5)$$

или

$$\langle A(u)u, u^* \rangle_Y = \langle u, A^*(u)u^* \rangle_X \quad (3.6)$$

– тождество Лагранжа. Если к тому же элемент u есть решение прямого (основного) уравнения

$$F(u) \equiv A(u)u = f, \quad f \in R(F) \subset Y, \quad (3.7)$$

а u^* является решением сопряженного уравнения

$$A^*(u)u^* = g, \quad g \in R(A^*) \subset X^* \quad (3.8)$$

(при фиксированном u – решении (3.7)), то из (3.6) следует соотношение вида

$$\langle f, u^* \rangle_Y = \langle u, g \rangle_X \quad (3.9)$$

– соотношение сопряженности, играющее в прикладной математике и теории возмущений важную роль [8], [24].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если F – линейный: $F(u) = Fu$, то определение 3.1 приводит к сопряженному оператору, принятому в теории линейных операторов в гильбертовых пространствах. Здесь имеем $A^*(u) \equiv A^* = F^*$, а соотношение (3.6) есть $\langle A(u), u^* \rangle_Y = \langle u, A^*u^* \rangle_X$.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим оператор F и пространства из примера 1.1. Для данного оператора имеем (см. § 2)

$$F'(u)v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \left(a + \frac{\partial u}{\partial x} \right) v. \quad (3.10)$$

Найдем сопряженный оператор $(F'(u))^*$. Поскольку предполагается, что $X = X^* = Y^* = Y = L_2(\Omega)$, то интегрированием по частям получаем

$$(F'(u)v, u^*)_{L_2(\Omega)} = \left(v, -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} + au^* \right)_{L_2(\Omega)}.$$

Легко заметить, что при $u^* \in W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$|(F'(u)v, u^*)_{L_2(\Omega)}| \leq C \cdot \|u^*\|_{W_2^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)},$$

где $C = C(\|u\|_{C(\Omega)}) < \infty$. Таким образом, имеем $W_2^1(\Omega) \subset D(A^*)$ и сужение оператора $(F'(u))^*$ на множество $W_2^1(\Omega)$ есть

$$(F'(u))^* u^* = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} + au^*. \quad (3.11)$$

И если ограничиться рассмотрением сопряженного оператора $A^*(u)$ лишь на $W_2^1(\Omega)$, то $A^*(u)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} A^*(u)u^* &= \left(\int_0^1 F'(tu) dt \right)^* u^* = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \left(a + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) u^* \\ &= -\frac{\partial u^*}{\partial t} - \frac{u}{2} \frac{\partial u^*}{\partial x} + au^*. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, сопряженный оператор в смысле определения 3.1 здесь совпадает на $W_2^1(\Omega)$ лишь с одним из сопряженных операторов (именно, с $A_3^*(u)$) в смысле определения 1.1.

Оператор F из примеров 2.2 и 3.1 не принадлежит классу $\mathcal{D}$ [16] и не имеет сопряженного оператора в смысле определения 2.1. Однако сопряженный оператор в смысле определения 3.1 существует и является единственным (пример 3.1). Этот простой пример приводит нас к предположению, что определение 3.1 сопряженного оператора является более общим по сравнению с определением 2.2. Кроме того, как показано в [16], если $Y = X^*$ и оператор F принадлежит множеству $\mathcal{D}$, то сопряженные операторы в смысле определений 2.1 и 3.1 совпадают.

§4. О других подходах к построению сопряженных операторов

Остановимся еще на одном подходе к построению сопряженных операторов, суть которого (см. [25]) состоит в сведении нелинейного уравнения к линейному, если это возможно. Дело в том, что некоторые нелинейные уравнения математической физики можно подходящей заменой свести к линейным. Если такой замены не существует, то в ряде случаев можно ввести в рассматриваемых линейных функциональных пространствах новые операции сложения и умножения такие, что нелинейное уравнение превращается в линейное относительно этих операций. Для преобразованных уравнений уже применима линейная теория. В частности, можно ввести сопряженное уравнение, провести соответствующие рассуждения, получить нужные формулы, а после этого, используя замену, вернуться к исходной нелинейной задаче. Такой подход к построению сопряженных операторов был использован В.П. Масловым для исследования некоторых нелинейных задач математической физики.

Мы проиллюстрируем здесь этот подход на простом примере. Рассмотрим нелинейную задачу вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (4.1)$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \quad (4.2)$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad (4.3)$$

где $h = \text{const} > 0$, $w_0(x)$ – заданная функция.

Будем предполагать, что решение задачи (4.1)–(4.3) существует и является достаточно гладкой функцией из $H = L_2(G)$, где $G = (0, 1) \times (0, T)$.

Пусть нам требуется вычислить функционал $J(w)$ от решения w вида

$$J(w) = \int_0^T \int_0^1 p(t, x) \exp \left(-\frac{w(t, x)}{h} \right) dx dt, \quad (4.4)$$

где $p \in H$ – заданная функция.

Как можно вычислить этот функционал, не решая нелинейной задачи (4.1)–(4.3)? Оказывается, что это можно сделать, используя решение некоторой сопряженной задачи, соответствующей (4.1)–(4.3). Сделаем в уравнении (4.1) замену неизвестной функции. Пусть

$$u = e^{-w/h}. \quad (4.5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{h} e^{-w/h} \frac{\partial w}{\partial t}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{h} e^{-w/h} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{h} e^{-w/h} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} e^{-w/h} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

то задача (4.1)–(4.3) заменой (4.5) сводится к линейной задаче вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (4.6)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 1, \quad (4.7)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (4.8)$$

где $u_0(x) = \exp(-w_0(x)/h)$. При этом функционал $J(w)$ принимает вид

$$J(w) = \int_0^T \int_0^1 p(t, x) u(t, x) dx dt. \quad (4.9)$$

Теперь для уравнения (4.6) можно построить обычным образом сопряженное уравнение и использовать его для вычисления функционала (4.9) (см. [26], [27]).

Сопряженную по отношению к (4.6)–(4.8) задачу рассмотрим в виде

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + p(t, x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (4.10)$$

$$u^*(t, 0) = u^*(t, 1) = 0, \quad (4.11)$$

$$u^*|_{t=T} = 0, \quad (4.12)$$

где функция $p(x, t)$ определяет функционал $J(w)$ из (4.4).

Умножим уравнение (4.6) на u^* скалярно в H , а уравнение (4.10) на u и результаты вычтем один из другого. Используя интегрирование по частям, а также начальные и граничные условия (4.7), (4.8), (4.11), (4.12), получаем формулу для вычисления функционала $J(w)$:

$$J(w) = \int_0^1 u^*(0, x) \exp(-w_0(x)/h) dx - \frac{h}{2} \int_0^T \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}(t, 1) - \frac{\partial u^*}{\partial x}(t, 0) \right) dt. \quad (4.13)$$

Таким образом, в данном случае значение $J(w)$ удастся выразить через решение u^* сопряженной задачи (4.10)–(4.12), которая является линейной.

Однако таким методом построения сопряженного оператора не всегда можно воспользоваться. Дело в том, что, во-первых, не всегда удастся нелинейную задачу свести к линейной. Во-вторых, часто бывает так, что исходное уравнение нелинейно, а рассматриваемый функционал является линейным, и при соответствующей замене уравнение перейдет в линейное, а функционал окажется нелинейным. Последнее обстоятельство не позволяет нам воспользоваться сопряженным уравнением для вычисления значения функционала.

Тем не менее этот метод построения сопряженного оператора нашел свое применение при исследовании ряда нелинейных задач математической физики (см. [1]). Особое внимание в работе [1] уделяется задачам, для которых в рассматриваемых функциональных пространствах можно ввести новые операции сложения и умножения на число и превратить исследуемое нелинейное уравнение в линейное относительно этих операций.

Итак, в настоящей работе мы рассмотрели различные подходы к определению сопряженных операторов в нелинейных задачах. Каждый из этих подходов может быть использован (в условиях его применимости) при исследовании тех или иных нелинейных задач математической физики. Многообразие таких подходов позволяет выбирать тот или иной способ построения сопряженного оператора в зависимости от целей исследования (построение законов сохранения, вычисление функционала, формулировка алгоритма возмущений, исследование разрешимости нелинейной задачи и т.п.).

Список литературы

1. *Rellich F.* Störungstheorie des Spektralzerlegung. I–V // *Math. Ann.* 1936. V. 113. P. 600–619; 667–685; 1939. V. 116. P. 555–570; 1940. V. 117. P. 346–382; 1942. V. 118. P. 462–484.

2. *Rellich F.* Störungstheorie des Spektralzerlegung. I–V // Proc. Internat. Mathematicians (Cambridge, Maas., 1950). V. 1. New York: Providence, 1952. P. 606–613.
3. *Rellich F.* Perturbation Theory of Eigenvalue Problem. New York: Cordon and Breach Sci. Pub., 1969.
4. *Weinberg A., Wigner E.* The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1958.
5. *Усачев Л. Н.* Уравнение для ценности нейтронов кинетического реактора в теории возмущений // Реакторостроение и теория реакторов. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 251.
6. *Усачев Л. Н.* Теория возмущений для коэффициента воспроизводства и других отношений чисел различных процессов в реакторе // Атом. энергия. 1963. Т. 15. №6. С. 472.
7. *Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г.* Теория возмущений и планирование эксперимента в проблеме ядерных данных для реакторов. М.: Атомиздат, 1980.
8. *Марчук Г. И., Орлов В. В.* К теории сопряженных функций // Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961. С. 30–45.
9. *Пупко В. Я., Зродников А. В., Лищачев Ю. И.* Метод сопряженных функций в инженерно-физических исследованиях. М.: Энергоатомиздат, 1984.
10. *Кадошцев Б. Б.* О функции влияния в теории переноса лучистой энергии // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. №3. С. 541–543.
11. *Марчук Г. И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
12. *Марчук Г. И.* Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология. 1974. №2. С. 9–37.
13. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
14. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Законы сохранения для нелинейных уравнений // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука, 1985. С. 147–162.
15. *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
16. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Сопряженные уравнения в нелинейных задачах и их приложения // Функциональные и численные методы математической физики. Киев: Наукова думка, 1988. С. 138–142.
17. *Marchuk G. I., Agoshkov V. I.* Conjugate operators and algorithms of perturbation in non-linear problems // Soviet J. Numer. Anal. and Math. Model. Part I, II 1988. №1. P. 21–46; №2. P. 115–136.
18. *Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П.* Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1993.
19. *Bellman R.* Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. New York: Holft, 1964.
20. *Понтрягин Л. С.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
21. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
22. *Lions J.-L.* Contrôlabilité exacte perturbations de systèmes distribués. V. 1; Perturbations. V. 2. Paris: Masson, 1988.
23. *Glowinski R.* Numerical methods for non-linear variational problems. New York: Springer-Verlag, 1984.
24. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
25. *Авдошин С. М., Белов В. В., Маслов В. П.* Математические аспекты синтеза вычислительных сред. М.: МИЭМ, 1984.
26. *Марчук Г. И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.

27. *Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Shutyaev V. P.* Adjoint equations and perturbation algorithms in non-linear problems. New York: CRC Press Inc., 1996.

Институт вычислительной математики РАН

Поступила в редакцию
26.02.1998