Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, Асимптотика решений краевых задач для уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами в области с малой полостью, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 9, 107–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:44:10

УДК 517.946

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий

Асимптотика решений краевых задач для уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами в области с малой полостью

Найдены и обоснованы асимптотические представления решений краевых задач для уравнения второго порядка с быстроосциллирующими коэффициентами в области с малой полостью (ее диаметр сравним с периодом осцилляции). На границе полости назначаются условия Дирихле или Неймана. В дополнение к обычной для теории осреднения структуре асимптотического ряда возникают члены, описывающие явление пограничного слоя вблизи отверстия, а решения осредненной задачи и их быстроосциллирующие корректоры приобретают особенности в точке, к которой стягиваются отверстия. Размерность области и другие факторы влияют даже на основной член асимптотики. Обсуждаются обобщения, в том числе и на систему уравнений теории упругости.

Библиография: 52 названия.

§ 1. Постановка задач и предварительное описание результатов

1. Краевые задачи. Пусть $n \geq 2$, Ω – параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, определенный неравенствами $-a_i < x_i < a_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_i = p_i p_0^{-1}$, а $p_0, p_1, \dots, p_n$ – натуральные числа. Пусть еще ω – область в $\mathbb{R}^n$ с компактным замыканием $\bar{\omega}$, содержащая начало координат O и имеющая гладкую границу. Обозначим через $\varepsilon = (p_0 N)^{-1}$ малый положительный параметр (N – большое натуральное число) и введем зависящие от ε множества

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : y \equiv \varepsilon^{-1}x \in \omega\}, \quad \Omega(\varepsilon) = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon. \quad (1.1)$$

В области $\Omega(\varepsilon)$, содержащей малую полость ω_ε , рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x)u(\varepsilon, x) = f(\varepsilon, x, \varepsilon^{-1}x), \quad x \in \Omega(\varepsilon). \quad (1.2)$$

Здесь $\partial_x = \text{grad}$,

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x) = l_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} l_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}; \quad (1.3)$$

функции $l_{\dots}(x, y)$ принадлежат классу $C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, 1]^n)$ и являются периодическими с периодами $2a_i$ и 1 относительно x_i и y_i соответственно, $i = 1, \dots, n$ (далее такие функции называем гладкими, x - и y -периодическими). Кроме того, $l_0 \geq 0$, $l_{ij} = l_{ji}$ и

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i l_{ij}(x, y) \xi_j \geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad y \in \mathbf{S} \equiv [0, 1]^n, \quad (1.4)$$

причем c_0 – положительная постоянная. Наконец, правая часть f уравнения (1.2) принадлежит $C^\infty([0, \varepsilon_0) \times \overline{\Omega} \times \mathbf{S})$ и является y -периодической; $\varepsilon_0 > 0$.

На $\partial\Omega$ поставим условия периодичности

$$[u]_i = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.5)$$

где величины

$$[v]_i(x) = v(x + a_i e^i) - v(x - a_i e^i) \quad \text{при } x_i = 0$$

равны скачку функции v при переходе с грани Γ_i^+ на грань Γ_i^- параллелепипеда Ω , а $\Gamma_i^\pm = \{x \in \overline{\Omega} : x_i = \pm a_i\}$, e^i – орт оси Ox_i .

На внутренней части $\partial\omega_\varepsilon$ границы $\partial\Omega(\varepsilon)$ назовем либо условия Дирихле

$$u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (1.6)$$

либо условия Неймана

$$\mathcal{N}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x)u(\varepsilon, x) \equiv \sum_{i,j=1}^n \nu_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) l_{ij} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon. \quad (1.7)$$

В (1.7) $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внутренней нормали к $\partial\omega_\varepsilon$. Все данные задачи считаются гладкими, и условия (1.5)–(1.7) взяты однородными только для простоты.

Перечисленные задачи могут рассматриваться как модели сред с периодической структурой, имеющих малые изолированные дефекты. Нашей целью является построение асимптотики $u(\varepsilon, x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Асимптотическая структура решения существенно зависит от размерности n пространства и от свойств оператора (1.3). Поэтому описание результатов статьи, зависимое от вспомогательных утверждений, откладываем до п. 4.

2. Разрешимость задач. Предположим сначала, что

$$l_0(x, y) \geq C_0 > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \mathbf{S}. \quad (1.8)$$

Обозначим через $\mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon))$ пространство x -периодических функций из класса Соболева $H^1(\Omega(\varepsilon))$. В силу (1.4), (1.8) скалярным произведением в $H^1(\Omega(\varepsilon))$ может служить выражение

$$\langle u, v \rangle_\varepsilon = (l_0 u, v)_{\Omega(\varepsilon)} + \sum_{i,j=1}^n \left(l_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\Omega(\varepsilon)}, \quad (1.9)$$

где $(\cdot, \cdot)_\Xi$ – скалярное произведение в $L_2(\Xi)$. Величина $\langle u, u \rangle_\varepsilon^{1/2}$ является нормой в $H^1(\Omega(\varepsilon))$, эквивалентной

$$(\|\partial_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2)^{1/2}, \quad (1.10)$$

причем константы эквивалентности не зависят от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Положим

$$\mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon); \omega_\varepsilon) = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon)) : v = 0 \text{ на } \partial\omega_\varepsilon\}.$$

Под обобщенным решением задачи (1.2), (1.5), (1.7) подразумевается элемент u пространства $\mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon))$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\langle u, v \rangle_\varepsilon = (f, v)_{\Omega(\varepsilon)} \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon)). \quad (1.11)$$

В случае условий Дирихле (1.6) и решение u , и пробные функции v берутся из пространства $\mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon); \omega_\varepsilon)$. Следующее утверждение есть не что иное, как теорема Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если $f \in L_2(\Omega(\varepsilon))$ и выполнено условие (1.8), то существует единственное решение $u \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon))$ задачи (1.2), (1.5); (1.6) или (1.7) и верна оценка

$$\|u; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c\|f; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \quad (1.12)$$

с постоянной c , не зависящей от f и от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Пусть теперь

$$l_0(x, y) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \mathbf{S}; \quad (1.13)$$

тогда величина $\langle u, u \rangle_\varepsilon^{1/2}$ оказывается лишь полунормой в $\mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon))$. Она же является нормой в $\mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon); \partial\omega_\varepsilon)$ (благодаря условиям Дирихле (1.6)), но в неравенстве $\langle u, u \rangle_\varepsilon^{1/2} \geq c_\varepsilon \|u; H^1(\Omega(\varepsilon))\|$ для $u \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon); \partial\omega_\varepsilon)$ множитель c_ε существенно зависит от ε .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $f \in L_2(\Omega(\varepsilon))$ и выполнено условие (1.13).

1) Решение $u \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon))$ задачи (1.2), (1.5), (1.7) существует в том и только том случае, если $(f, 1)_{\Omega(\varepsilon)} = 0$. Оно определено с точностью до постоянного слагаемого, а решение u^0 , нормированное соотношением $(u^0, 1)_{\Omega^0} = 0$, единственно и удовлетворяет оценке (1.12) (при этом Ω^0 — фиксированная подобласть Ω , не пересекающаяся с $\overline{\omega_\varepsilon}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, а левая часть (1.12) совпадает с (1.10)).

2) Существует единственное решение $u \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon); \omega_\varepsilon)$ задачи (1.1), (1.5), (1.6); оно подчинено неравенству

$$\|\partial_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\| + \varepsilon^{-1+n/2} \|Ru; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon^{1-n/2} \|R^{-1}f; L_2(\Omega(\varepsilon))\|, \quad (1.14)$$

в котором $R(x) = r^{-n/2} |\ln(r/a)|^{-1}$, $r = |x|$, $a = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$ и постоянная c не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В части существования и единственности решений можно сослаться на известные результаты (см. [1] и др.). Поэтому осталось проверить неравенство (1.14) или при учете (1.9), (1.13), (1.4) и (1.11) неравенство

$$\|\partial_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \geq c\varepsilon^{n-2} \|Ru; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2, \quad (1.15)$$

где $u \in \mathcal{H}^1(\Omega(\varepsilon); \partial\omega_\varepsilon)$. Продолжим функцию u нулем на ω_ε и обозначим через (r, φ) сферические координаты; точка φ принадлежит единичной сфере S^{n-1} . Не ограничивая общности, считаем u гладкой (в конце пользуемся замыканием по норме H^1) и пишем $u(r, \varphi)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{a(\varphi)} r^{-1} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-2} |u(r, \varphi)|^2 dr \\ &= 2 \int_0^{a(\varphi)} r^{-1} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-2} \int_0^r \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi) u(\rho, \varphi) d\rho dr \\ &= 2 \int_0^{a(\varphi)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi) u(\rho, \varphi) \int_\rho^{a(\varphi)} r^{-1} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-2} dr d\rho \\ &\leq 2 \int_0^{a(\varphi)} \left| \ln \frac{\rho}{a} \right|^{-1} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \right| |u(\rho, \varphi)| d\rho \\ &\leq 2 \left(\int_0^{a(\varphi)} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 r^{n-1} dr \right)^{1/2} \left(\int_0^{a(\varphi)} r^{-1} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-2} |u(r, \varphi)|^2 r^{2-n} dr \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

здесь $a(\varphi)$ – длина отрезка с началом O и концом на $\partial\Omega$, лежащего на луче, который проходит через точку φ на единичной сфере S^{n-1} . Так как $u(r, \varphi) = 0$ при $r \leq c\varepsilon$ (внутри ω_ε), то в последнем интеграле $r^{2-n} \leq c\varepsilon^{2-n}$ и, значит,

$$\int_0^{a(\varphi)} r^{-n} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-2} |u(r, \varphi)|^2 r^{n-1} dr \leq c\varepsilon^{2-n} \int_0^{a(\varphi)} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 r^{n-1} dr.$$

Проинтегрировав по $\varphi \in S^{n-1}$, приходим к (1.15).

Укажем оценки старших производных. Пусть $\mathcal{H}^l(\Omega(\varepsilon))$ – подпространство x -периодических функций из $H^l(\Omega(\varepsilon))$, $l = 1, 2, \dots$, и $\partial_x^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть $u \in \mathcal{H}^{l+2}(\Omega(\varepsilon))$ – решение задачи (1.2), (1.5); (1.6) или (1.7) с правой частью $f \in \mathcal{H}^l(\Omega(\varepsilon))$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l+2} \varepsilon^{2|\alpha|-2} \|\partial_x^\alpha u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \\ & \leq c \left\{ \sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon^{2|\alpha|+2} \|\partial_x^\alpha f; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|\partial_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \varepsilon^2 \|u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где постоянная c не зависит от u и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В случае (1.13) последнее слагаемое из фигурных скобок можно удалить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем какую-нибудь ячейку периодичности $\mathbf{S}_\varepsilon$ (сдвиг куба $[0, \varepsilon]^n$ на вектор $m^\varepsilon = (\varepsilon m_1, \dots, \varepsilon m_n)$, где m_i – целые числа) и обозначим через Σ_ε объединение $\mathbf{S}_\varepsilon$ и всех других ячеек, примыкающих к $\mathbf{S}_\varepsilon$, т.е. $\Sigma_\varepsilon = \{x : m_i - 1 \leq \varepsilon^{-1}x_i \leq m_i + 2\}$.

Пусть сначала Σ_ε не пересекается с границей $\partial\Omega(\varepsilon)$. Положим

$$\bar{u}(\varepsilon) = (\text{mes}_n \Sigma_\varepsilon)^{-1} \int_{\Sigma_\varepsilon} u(\varepsilon, x) dx, \quad \tilde{u}(\varepsilon, x) = u(\varepsilon, x) - \bar{u}(\varepsilon). \quad (1.17)$$

Функция $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(\varepsilon, x, \partial_x) \tilde{u}(\varepsilon, x) = f(\varepsilon, x) - l_0(x, \varepsilon^{-1}x) \bar{u}(\varepsilon), \quad x \in \Sigma_\varepsilon. \quad (1.18)$$

Перейдем к “быстрым” переменным $y = \varepsilon^{-1}x$ и применим локальные оценки решений эллиптических уравнений (см., например, [1], [2]). Вернувшись к прежним координатам x и умножив полученное неравенство на ε^{-2-n} , находим

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq l+2} \varepsilon^{2|\alpha|-2} \|\partial_x^\alpha \tilde{u}; L_2(\mathbf{S}_\varepsilon)\|^2 \\ & \leq c \left\{ \varepsilon^{-2} \|\tilde{u}; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon^{2|\alpha|} \|\partial_x^\alpha f; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 + \|\bar{u}; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Поскольку $\tilde{u}$ обладает нулевым средним по Σ_ε , то справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} |\partial_x \tilde{u}(\varepsilon, x)|^2 dx \geq c \varepsilon^{-2} \int_{\Sigma_\varepsilon} |\tilde{u}(\varepsilon, x)|^2 dx \quad (1.20)$$

(см. [1]) и, следовательно, в силу очевидных соотношений $\partial_x^\alpha \tilde{u} = \partial_x^\alpha u$, $|\alpha| \geq 1$, и $\|\tilde{u}; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 \leq c \|u; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2$ неравенство (1.19) переписываем в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l+2} \varepsilon^{2|\alpha|-2} \|\partial_x^\alpha u; L_2(\mathbf{S}_\varepsilon)\|^2 \\ & \leq c \left\{ \sum_{|\alpha| \leq l} \varepsilon^{2|\alpha|+2} \|\partial_x^\alpha f; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 + \|\partial_x u; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 + \|u; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Перейдем к рассмотрению запрещенных случаев. Если $\partial\Omega \cap \Sigma_\varepsilon \neq \emptyset$, то ввиду x -периодичности u и f нужная перезапись оценки (1.21) затруднений не вызывает. Пусть $\partial\omega_\varepsilon \cap \Sigma_\varepsilon \neq \emptyset$ (подчеркнем, что количество таких ячеек $\mathbf{S}_\varepsilon$ не зависит от ε ; см. (1.1)). При задании на $\partial\omega_\varepsilon$ условий Неймана (1.7) все выкладки (1.17)–(1.21) сохраняются, но в них приходится Σ_ε и $\mathbf{S}_\varepsilon$ заменить на $\Sigma_\varepsilon \setminus \omega_\varepsilon$ и $\mathbf{S}_\varepsilon \setminus \omega_\varepsilon$, а при употреблении локальных оценок – принять во внимание равенство $\mathcal{N}(\varepsilon, x, \partial_x) \tilde{u}(\varepsilon, x) = 0$, $x \in \partial\omega_\varepsilon \cap \Sigma_\varepsilon$. В случае условий Дирихле (1.6) достаточно положить $\tilde{u} = u$ и $u = 0$, произвести те же самые замены множеств и вывести (1.20) из неравенства Фридрихса (так как $u = 0$ на $\partial\omega_\varepsilon \cap \Sigma_\varepsilon \neq \emptyset$).

Итак, после упомянутых модификаций неравенство (1.21) оказывается верным для всех ячеек, причем постоянную c можно выбрать общей. Теперь формула (1.16) получается суммированием (1.21) при учете конечной кратности покрытия Ω множествами типа Σ_ε .

При $l_0 = 0$ вычитаемое справа в (1.18) исчезает, а в (1.19) и (1.21) нет $\|\tilde{u}; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|$ и $\|u; L_2(\Sigma_\varepsilon)\|$ – это подтверждает последнюю фразу в формулировке предложения 1.3.

3. Предельные задачи. Одной из базовых идей теории осреднения (см. [3]–[8] и др.) является разделение зависимостей от “медленных” x и “быстрых” $y = \varepsilon^{-1}x$ переменных. В частности, после такого разделения естественным образом возникает уравнение на ячейке

$$L_0(x, y, \partial_y) v(x, y) = h(x, y), \quad y \in \mathbf{S} = [0, 1]^n, \quad (1.22)$$

параметрически зависящее от $x \in \Omega$ и рассматриваемое в классе y -периодических функций, где

$$L_0(x, y, \partial_y) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} l_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j}. \quad (1.23)$$

В следующем утверждении (см. [9] и ср. с предложениями 1.2, 1) и 1.3) фигурирует пространство $\mathcal{H}^l(\mathbf{S})$, составленное из y -периодических функций, а зависимость от $x \in \overline{\Omega}$ считается (и оказывается) гладкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть $h \in \mathcal{H}^l(\mathbf{S})$, $l = 0, 1, \dots$. Решение $v \in \mathcal{H}^{l+2}(\mathbf{S})$ уравнения (1.22) существует в том и только том случае, если

$$\langle h \rangle \equiv (h, 1)_{\mathbf{S}} = 0. \quad (1.24)$$

Решение определено с точностью до постоянного слагаемого; при выполнении условия нормировки $\langle v \rangle = 0$ оно становится единственным.

Далее под решением уравнения (1.22) всегда подразумевается y -периодическая функция с нулевым средним по $\mathbf{S}$.

В результате применения обычной процедуры осреднения (см. [3]–[8] и др.) появляется дифференциальный оператор

$$\mathbf{L}(x, \partial_x) = \mathbf{l}_0(x) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{l}_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1.25)$$

освобожденный от быстрых переменных и имеющий такие коэффициенты:

$$\mathbf{l}_0 = \langle l_0 \rangle, \quad \mathbf{l}_{ij} = \langle l_{ij} \rangle + \sum_{p=1}^n \left\langle l_{ip} \frac{\partial Y_j}{\partial y_p} \right\rangle; \quad (1.26)$$

здесь $Y_j(x, y)$ – решение уравнения (1.22) с правой частью

$$h_j(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial l_{ij}}{\partial y_i}(x, y). \quad (1.27)$$

Известно (см. [3]–[8]), что для коэффициентов (1.26) справедливы условие типа (1.4) и равенство $\mathbf{l}_{ij}(x) = \mathbf{l}_{ji}(x)$. Поэтому верны формулируемые ниже утверждения о предельной задаче:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(x, \partial_x)U(x) &= F(x), \quad x \in \Omega; \\ [U]_i &= \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right]_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.28)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. 1) В случае (1.8) существует единственное решение $U \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ задачи (1.28) с правой частью $F \in L_2(\Omega)$.

2) При выполнении (1.13) решение $U \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ задачи (1.28) с $F \in L_2(\Omega)$ существует тогда и только тогда, когда $(F, 1)_{\Omega} = 0$. Оно определено с точностью до постоянного слагаемого.

3) Если $F \in \mathcal{H}^l(\Omega)$ при некотором $l = 0, 1, \dots$, то $U \in \mathcal{H}^{l+2}(\Omega)$.

Наконец, явление пограничного слоя вблизи отверстия ω_ε описывается при помощи решений уравнения

$$L_0(0, y, \partial_y)w(y) = \mathbf{F}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \quad (1.29)$$

снабженного краевыми условиями

$$w(y) = \mathbf{G}(y), \quad y \in \partial\omega, \quad (1.30)$$

или

$$N_0(0, y, \partial_y)w(y) \equiv \sum_{i,j=1}^n \nu_i(y) l_{ij}(0, y) \frac{\partial w}{\partial y_j}(y) = \mathbf{G}(y), \quad y \in \partial\omega, \quad (1.31)$$

соответствующими (1.6) или (1.7). Вопрос о разрешимости задач (1.29), (1.30) и (1.29), (1.31) обсуждается в п. 3 § 2.

4. Описание результатов. Планомерное изучение эллиптических задач в областях с сингулярными возмущениями в виде малых полостей и отверстий начато работами А. М. Ильина [10]–[12] (см. также [13]) – в них применялся метод сращиваемых разложений и были построены и обоснованы асимптотические представления решений различных краевых задач для уравнений второго порядка. Иной, хотя и близкий по духу, метод, центральным моментом в котором является процедура перераспределения невязок (см. ниже), был предложен В. Г. Мазья, С. А. Назаровым, Б. А. Пламеневским [14], [15] и затем применен для упомянутого класса сингулярно возмущенных задач в [16]–[21] (см. также [22], [23]), где помимо асимптотик решений общих краевых задач для эллиптических систем изучались асимптотики собственных чисел и вектор-функций, энергетических функционалов и пр.

Основным техническим элементом обоих методов служит обработка (“сращивание” или “перераспределение”) разложений функций около точки O и на бесконечности. При отсутствии осцилляции подобные разложения решений вытекают из общих результатов В. А. Кондратьева [24] (см. также [25]–[29] и др.) об эллиптических задачах в областях с коническими точками. В нашем случае та же теория позволяет получить разложения вблизи точки O решений осредненной задачи (1.28). В ячеечном уравнении (1.22) медленные переменные x выступают как параметр, и нужные разложения по $r = |x|$ доступны даже без ссылок на [24]. Однако в уравнении (1.29) коэффициенты оператора $L_0(0, y, \partial_y)$ не стабилизируются на бесконечности, теория В. А. Кондратьева оказывается неприменимой, а вопрос о поведении при $|y| \rightarrow \infty$ решений $w(y)$ типа пограничного слоя решается отдельно, и ответ на него извлекается из статей С. А. Назарова [30], [31].

Все используемые далее разложения решений U , v и w предельных задач обобщаются в §2. В остальных параграфах для задачи (1.2), (1.5); (1.6) или (1.7) выводятся результаты того же свойства, что и в [11], [12], [22; гл. 1], [23; гл. 2] для случая гладких коэффициентов. Вкупе с упоминавшейся процедурой перераспределения невязок применяется метод построения полных асимптотических рядов для решений задач с быстроосциллирующими коэффициентами, предложенный Н. С. Бахваловым в [32] (см. также [3]–[8] и [33], [34]). Тем не менее, простое совмещение двух подходов не приводит к успеху – требуются новые соображения, что вызвано следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, при реализации итерационных процессов из [32] происходит “потеря гладкости”, т.е. определение асимптотического члена U_k гладкого типа зависит от старших производных предыдущих членов $U_{k-1}, \dots, U_0$, которые (члены), как станет ясно далее, в нашей ситуации могут даже терять непрерывность в точке O . Во-вторых, разложения на бесконечности решений $w_k(y)$ типа пограничного слоя отягощены двойной, степенной и периодической, зависимостью от y , и употребление процедуры перераспределения невязок сталкивается с трудностями, не встречавшимися в [14], [15], [22], [23] (ср. с [35]–[37]). Все это требует модификации названных алгоритмов, хотя по виду асимптотический ряд

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{k=\mu}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ U_k(x, \log \varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 Y_j\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial U_k}{\partial x_j}(x, \log \varepsilon) + \varepsilon^2 v_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \log \varepsilon\right) + \chi(x) w_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \log \varepsilon\right) \right\} \quad (1.32)$$

не отличается от привычного: в (1.32) U_k – решения осредненной задачи в области без отверстия, два следующих члена представляют собой быстроосциллирующие корректоры, а последний является решением типа пограничного слоя около $\partial\omega_\varepsilon$. Подчеркнем, что только основные члены U_0 и w_0 определяются по прежним схемам из [32] и [22], [23].

Обрисует структуру статьи. В следующем, втором, параграфе собраны известные факты о поведении решений предельных задач вблизи проколотой точки $x = 0$ или на бесконечности; попутно вводятся специальные решения внешних задач (1.29), (1.30) и (1.29), (1.31) и определяются интегральные характеристики множества ω , связанные с оператором $L_0(0, y, \partial_y)$.

В §3 мы приступаем собственно к асимптотическому анализу – изучается задача Дирихле в трехмерной области. Сначала при условии $l_0 > 0$ (все предельные задачи однозначно разрешимы) строится и обосновывается главный член асимптотики решения, а затем определяются все коэффициенты ряда (1.32) и производится сравнение его частичной суммы с истинным решением задачи (1.2), (1.5), (1.6) по энергетической метрике (оценки старших производных обсуждаются в п. 1 §6). Наконец, в п. 4 §3 рассматривается оператор (1.3) с нулевым свободным членом l_0 ; в отличие от предыдущего случая, для которого $\mu = 0$ в (1.32), здесь из-за неоднозначной разрешимости задачи (1.28) появляется “растущее” слагаемое $\varepsilon^{-1}c_0$, т.е. оказывается, что $\mu = -1$ в (1.32) (для оператора второго порядка с гладкими коэффициентами подобный эффект отражен в [12], [13], а для общих эллиптических задач – в [15], [21], [23]). Подчеркнем еще, что случай $n > 3$ лишь незначительными деталями отличается от $n = 3$.

Четвертый параграф посвящен двумерной задаче Дирихле, для которой при $l_0 \neq 0$ асимптотические конструкции усложняются ввиду рациональной зависимости всех, в том числе и основных, членов ряда (1.32) от параметра $\log \varepsilon$ (впервые для уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами такая зависимость была обнаружена в [11]; обобщение этого результата на системы можно найти в [15], [21], [23]). Если же $l_0 = 0$, то, по-прежнему, слагаемые из (1.32) – полиномы от $\log \varepsilon$; кроме того, в обеих ситуациях $\mu = 0$. Подобное варьирование структуры асимптотического ряда, обусловленное изменением n или l_0 , наблюдается и для задачи Неймана (1.2), (1.5), (1.7), обсуждаемой в §5. Кроме того, в §5 приводятся различные обобщения постановок задач и реализации итерационных процессов: краевые условия Дирихле на границе $\partial\Omega$ или ее части, эллиптические системы уравнений, удаление нескольких малых отверстий и т.п.

§2. Асимптотические разложения решений предельных задач

1. Ячеечное уравнение. Для укорачивания формул примем соглашение: запись $a(x, y) = a_0(x, y) + o(r^{\Lambda-0})$ означает, что для любых мультииндексов α, γ и положительного δ справедливо соотношение

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\gamma a(x, y) - \partial_x^\alpha \partial_y^\gamma a_0(x, y)| \leq c_{\alpha\gamma\delta} r^{\Lambda-|\alpha|-\delta} \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \mathbf{S}.$$

Коэффициенты l_{ij} из (1.23) гладко зависят от параметра x . Поэтому оператор L_0 раскладывается в ряд Тейлора в точке $x = 0$, и следующее утверждение становится очевидным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если для правой части h верна формула

$$h(x, y) = \sum_{j=\mu}^J r^j h^{(j)}(\varphi, \log r, y) + o(r^{J+1-0}), \quad (2.1)$$

то аналогичное представление

$$v(x, y) = \sum_{j=\mu}^J r^j v^{(j)}(\varphi, \log r, y) + o(r^{J+1-0}) \quad (2.2)$$

выполняется и для решения v уравнения (1.22). Здесь μ — целое число, $J = \mu, \mu + 1, \dots$; (r, φ) — сферические координаты, $r = |x|$, $\varphi \in S^{n-1}$; функции $h^{(j)}$ и $v^{(j)}$ зависят гладко от $\varphi \in S^{n-1}$, полиномиально от $\log r$ и гладко периодически от $y \in \mathbf{S}$, причем их средние по $\mathbf{S} = [0, 1]^n$ равны нулю.

Всюду далее имеем дело со случаем $\mu = -2$.

2. Осредненная задача. Принимая проколотое пространство $\mathbb{R}^n \setminus O$ за конус, конкретизируем результаты теории эллиптических задач в областях с коническими точками.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [24], [25], а также [27]–[29]). Пусть

$$F(x) = \sum_{j=0}^J r^{j-2} F^{(j)}(\varphi, \log r) + o(r^{J-1-0}); \quad (2.3)$$

тогда решение U задачи (1.28), подчиненное условию $U(x) = o(r^{-0})$, обладает такой асимптотикой при $r \rightarrow 0$:

$$U(x) = \sum_{j=0}^J r^j U^{(j)}(\varphi, \log r) + o(r^{J+1-0}). \quad (2.4)$$

Здесь всюду обозначения аналогичны использованным в предложении 2.1.

Функции F и U , упомянутые в теореме 2.2, принадлежат $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ только в случаях $n > 4$ и $n > 2$ соответственно. Это вступает в противоречие с формулировкой предложения 1.5. При $n \geq 3$ ситуация исправляется при помощи известной оценки

$$\|u; H^1(\Omega)\| \geq c \|r^{-1}u; L_2(\Omega)\|, \quad (2.5)$$

вытекающей из неравенства Харди (см., к примеру, §2.4 в [28] или [29]) и обеспечивающей существование решения $U \in H^1(\Omega)$ задачи (1.28) при ограничении $rF \in L_2(\Omega)$, которому функция из (2.3) уже удовлетворяет. При $n = 2$ вместо (2.5) имеем такую оценку:

$$\|u; H^1(\Omega)\| \geq c \left\| r^{-1} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-1} u; L_2(\Omega) \right\|. \quad (2.6)$$

Она следует из известного одномерного неравенства Харди

$$\int_0^{a(\varphi)} r^{-1} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-2} |u(r, \varphi)|^2 dr \leq 4 \int_0^{a(\varphi)} r \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 dr,$$

которое было установлено, по существу, при проверке (1.15). Значит, утверждения 1.5, 1), 2) остаются в силе при условии $r |\ln(r/a)| F \in L_2(\Omega)$, однако такое расширение сферы действия результата недостаточно, так как для F из (2.3) указанное включение может нарушаться. Здесь нас спасает стандартный прием, описанный, например, в гл. 2 [28] или [29]: сначала при помощи леммы 3.5.11 из этих книг строится частное решение $U^{(0)}(\varphi, \log r)$ уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{l}_{ij}(0) \frac{\partial}{\partial x_j} U^{(0)} = r^{-2} F^{(0)} \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus O, \quad (2.7)$$

затем оно умножается на срезку $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, равную 1 вблизи точки O , и, наконец, при использовании предложения 1.5 отыскивается решение $\tilde{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ задачи (1.28) с новой правой частью $F - \mathbf{L}\chi U^{(0)}$, подчиненной нужному условию, — сумма $U = \tilde{U} + \chi U^{(0)}$ как раз удовлетворяет (1.28). Нетрудно убедиться в том, что решение однородного уравнения (2.7) с нужным поведением при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$c_0 + c_1 \{-\sigma \log r + \psi(\varphi)\}, \quad (2.8)$$

где c_i — произвольные постоянные, а в фигурных скобках располагается фундаментальное решение для оператора (2.7). Подчеркнем, что за счет выбора множителя c_1 в аддитивной составляющей (2.8) функции $U^{(0)}$ можно найти решение U даже при нарушении равенства $(F, 1)_\Omega = 0$ (ср. с предложением 1.5, 2) и см. подробности в § 2.4 [28] или [29]). Итак, указанная процедура приводит к утверждению, обобщающему предложение 1.5.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $n = 2$ и верна формула (2.3). Тогда существует решение U задачи (1.28), представимое в виде (2.4). В случае (1.13) оно определено с точностью до постоянного слагаемого, а в случае (1.8) — с точностью до слагаемого $\text{const} \cdot G(x)$, где G — функция Грина задачи (1.28) с особенностью в точке O .

3. Задачи о пограничном слое. Вопрос о разрешимости задач (1.29), (1.30) и (1.29), (1.31) изучен в полной мере (см., например, [38]), и мы ограничиваемся формулировками соответствующих утверждений.

Обозначим через $\mathcal{D}$ пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ по норме интеграла Дирихле $\|\partial_x u; L_2(\mathbb{R}^n \setminus \omega)\|$. Из уже упоминавшихся одномерных неравенств Харди вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \|\partial_y u; L_2(\mathbb{R}^n \setminus \omega)\| &\geq c \|\rho^{-1} u; L_2(\mathbb{R}^n \setminus \omega)\|, \quad n \geq 3; \\ \|\partial_y u; L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)\| + \|u; L_2(B_{R_e} \setminus \omega)\| &\geq c \left\| \rho^{-1} \left| \ln \frac{\rho}{R_i} \right|^{-1}; L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega) \right\|; \end{aligned}$$

здесь $u \in \mathcal{D}$, $\rho = |y|$ и $B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$, причем $\overline{\omega} \subset B_{R_e}$ и $B_{R_i} \subset \omega$. Поскольку, используя подходящее продолжение функции $\mathbf{G}$, краевые условия можно

сделать однородными, будем считать, что $\mathbf{G} = 0$ в (1.30) и (1.31). Под *обобщенным решением* задачи (1.29), (1.31) понимается элемент w пространства $\mathcal{D}$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^n \left(l_{ij}(0, \cdot) \frac{\partial w}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathbb{R}^n \setminus \omega} = (\mathbf{F}, v)_{\mathbb{R}^n \setminus \omega} \quad \forall v \in \mathcal{D}. \quad (2.9)$$

Для задачи Дирихле дополнительно требуется, чтобы w и v аннулировались на $\partial\omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если $n > 2$ и $\rho\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$, $\mathbf{G} = 0$, то существует единственное решение $w \in \mathcal{D}$ задачи (1.29), (1.30) (или задачи (1.29), (1.31)).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть $n = 2$ и $\rho|\ln(\rho/R_i)|\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$, $\mathbf{G} = 0$. При этих условиях*

- 1) *существует единственное решение $w \in \mathcal{D}$ задачи (1.29), (1.30);*
- 2) *задача (1.29), (1.31) имеет решение $w \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{F}, 1)_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega} = 0$; оно определено с точностью до постоянного слагаемого.*

В [30], [31] построена и обоснована асимптотика на бесконечности решения задачи Дирихле для системы уравнений второго порядка в плоской области с угловым выходом на бесконечность. Отсутствие у границы $\partial\omega$ некомпактной компоненты упрощает как саму процедуру отыскания асимптотики (нет пограничных слоев около сторон угла), так и рассуждения, приводящие к оправданию разложений. Ограничение $n = 2$ имело чисто геометрическую природу и связывалось опять-таки с неудобными краевыми эффектами. Перечисленные обстоятельства позволяют без труда перенести результаты [30], [31] не только на уравнение (1.29) при $n = 2$, но и на многомерные внешние задачи Дирихле и Неймана.

Процедура [30], [31] отыскания разложений при $\rho = |y| \rightarrow \infty$ во многом напоминает обычный алгоритм построения асимптотического ряда для решения дифференциального уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами (к примеру, сферические координаты (ρ, φ) объявляются медленными, а декартовы y – быстрыми). В следующих параграфах понадобится только сам результат – разложение решения, и потому сопутствующие конструкции мы здесь не затрагиваем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть $\mathbf{G} \in C^\infty(\partial\omega)$, а для правой части $\mathbf{F}$ уравнения (1.29) при любых мультииндексе α и положительном δ верна формула*

$$\left| \partial_y^\alpha \left\{ \mathbf{F}(y) - \sum_{j=1}^J \rho^{-j-2} [\mathbf{F}^{(j)}(\varphi, \log \rho) + \mathbf{H}^{(j)}(\varphi, \log \rho, y)] \right\} \right| \leq c_{\alpha\delta} \rho^{-J-3+\delta}. \quad (2.10)$$

Тогда для исчезающего на бесконечности решения w задачи (1.29), (1.30) или (1.29), (1.31) справедливо соотношение

$$\left| \partial_y^\alpha \left\{ w(y) - \sum_{j=1}^J \rho^{-j} [w^{(j)}(\varphi, \log \rho) + W^{(j)}(\varphi, \log \rho, y)] \right\} \right| \leq c_{\alpha\delta} \rho^{-J-1+\delta}, \quad (2.11)$$

причем $W^{(j)}(\cdot, \cdot, y)$ имеют нулевые средние по $y \in \mathbf{S}$ и допускают представление

$$\begin{aligned} \rho^{-j} W^{(j)}(\varphi, \log \rho, y) &= \rho^{-j} \mathbf{W}^{(j)}(\varphi, \log \rho, y) \\ &+ \sum_{i=1}^n Y_i(0, y) \frac{\partial}{\partial y_i} [\rho^{-j+1} w^{(j-1)}(\varphi, \log \rho)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Наконец, $\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^{(2)} = 0$, а обозначения в (2.10)–(2.12) аналогичны использованным в предложениях 2.1, 2.2 и в п. 3 §1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Если $\mathbf{F}$ и w заменить рядами из (2.10) и (2.11) (положить там $J = \infty$) и приравнять члены порядка $O(\rho^{-j-2})$ слева и справа в (1.29), то после вычисления среднего по третьему аргументу $y \in \mathbf{S}$ получится уравнение вида (2.7) для $\rho^{-j} w^{(j)}$, а оставшаяся (с нулевым средним) часть равенства дает уравнение на $\mathbf{S}$ с оператором $L_0(0, y, \partial_y)$ для определения $\rho^{-j-2} \mathbf{W}^{(j+2)}$ (увеличение индекса на 2 согласуется с соотношениями $\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^{(2)} = 0$). Такая же картина наблюдается и в классической процедуре осреднения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Из-за того, что у членов сумм по j в (2.10) и (2.11) множителями служат y -периодические функции $\mathbf{H}^{(j)}$ и $W^{(j)}$, оценки остатков, указанные в предложении 2.6, имеют иное качество, нежели в предложениях 2.1 и 2.2: они (остатки) убывают на бесконечности с той же скоростью, что и любые их производные, – именно так ведет себя первый (с номером $J+1$) из отброшенных членов.

Асимптотические формулы для решений, обслуживающие потребности асимптотического анализа исходной задачи, не всегда согласуются с утверждениями о разрешимости предельных задач в энергетических классах. Так, функция $\mathbf{F}$, фигурирующая в (2.10), удовлетворяет условиям предложений 2.4, 2.5 только при $n \leq 3$. Впрочем, для $n > 3$ положение дел исправляется при помощи того же приема, что и в п. 2, – построения частного решения, компенсирующего слагаемые $\rho^{-j-2}(\mathbf{F}^{(j)} + \mathbf{H}^{(j)})$ с $j \leq (n-2)/2$ в представлении для $\mathbf{F}$.

Другая неувязка состоит в том, что предложение 2.5, относящееся к случаю $n = 2$, вовсе не гарантирует существование убывающих при $|y| \rightarrow \infty$ решений задач (1.29), (1.30) и (1.29), (1.31). С помощью таких решений описывается явление пограничного слоя около ω_ε , для которого малость на удалении от ω_ε – неотъемлемое свойство. Иными словами, совершенно необходимо определить условия существования убывающего решения w . Задачей Дирихле мы займемся в следующем разделе, а сейчас обратимся к задаче Неймана (1.29), (1.31).

Опираясь на результаты [30], [31], нетрудно заключить, что при $n = 2$ для функции $\omega \in \mathcal{D}$, удовлетворяющей уравнению (1.29) с правой частью $\mathbf{F}$ из (2.10), справедливы неравенства (2.11), где $|\alpha| > 0$, но при $\alpha = (0, 0)$ неравенство (2.11) заменяется таким:

$$\left| w(y) - c_\omega - \sum_{j=1}^J \rho^{-j} [w^{(j)}(\varphi, \log \rho) + W^{(j)}(\varphi, \log \rho, y)] \right| \leq c_0 \delta \rho^{-J-1-\delta}; \quad (2.13)$$

здесь c_ω – постоянная, зависящая от ω . Так как $1 \in \mathcal{D}$ – решение однородной задачи (1.29), (1.31), то справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть выполнены условия предложения 2.6, $n = 2$ и

$$\mathfrak{C}_N(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \equiv (\mathbf{F}, 1)_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega} + (\mathbf{G}, 1)_{\partial \omega} = 0. \quad (2.14)$$

Тогда существует единственное, исчезающее на бесконечности решение задачи (1.29), (1.31), и оно подчинено (2.11).

4. О логарифмической емкости множества ω ($n = 2$). В этом и следующих двух разделах для внешних задач (1.29), (1.30) и (1.29), (1.31) вводятся характеристики, аналогичные таким классическим объектам теории гармонических функций, как емкость и тензор присоединенной массы (см. [39] и др.). За ними сохраняются прежние названия, хотя замещение оператора Лапласа оператором $L_0(0, y, \partial_y)$ приводит не только к изменению названных интегральных характеристик множества ω , но и к модификации самих определений. Используемые далее свойства этих характеристик приводятся без доказательств, поскольку их проверка следует стандартной схеме (см., например, [39]) с изменениями, вызванными периодичностью коэффициентов, но обсуждавшимися подробно в [31; § 5].

Пусть $n = 2$ и $\Psi(x)$ – фундаментальное решение главной (в точке $x = 0$) части $\mathbf{L}^0(\partial_y)$ осредненного оператора (1.25),

$$\Psi(y) = -\sigma \log \rho + \psi(\varphi) \quad (2.15)$$

(оно уже возникало в (2.8)). Так как Ψ определено с точностью до постоянного слагаемого, можно соблюсти условие $(\psi, 1)_{S^1} = 0$. Рассмотрим сумму

$$\mathcal{X}(y) = \Psi(y) + \sum_{j=1}^n Y_j(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(y), \quad (2.16)$$

в которой Y_j – специальные решения ячеечного уравнения, фигурирующие в (1.26). Непосредственные вычисления при учете (1.23) и (1.27) показывают, что $L_0(0, y, \partial_y) \mathcal{X}(y)$ – линейная комбинация с ограниченными коэффициентами вторых и третьих производных функции Ψ . Таким образом, записывая решение однородной задачи (1.29), (1.30) в виде

$$\zeta(y) = \left[1 - \chi \left(\frac{\rho}{R_e} \right) \right] \mathcal{X}(y) + \zeta_0(y) \quad (2.17)$$

(где $\chi \in C_0^\infty(-2, 2)$, $\chi(t) = 1$ при $|t| < 1$, а R_e определено в п. 3), получаем для ζ_0 задачу с правыми частями, удовлетворяющими условиям предложения 2.5, 1), т.е. находим $\zeta_0 \in \mathcal{D}$. Ясно, что $\mathcal{X} \notin \mathcal{D}$ и потому ζ – нетривиальное решение однородной задачи (1.29), (1.30).

Для ζ_0 справедливы формулы типа (2.12) и (2.11) с $|\alpha| \geq 1$. В соответствии с (2.15)–(2.17) перепишем их так:

$$\zeta(y) = \mathcal{X}(y) + C_\omega + \dots = -\sigma \log r + \psi(\varphi) + C_\omega + \dots \quad (2.18)$$

(многоточием обозначаются несущественные для текущих рассуждений слагаемые).

В случае оператора Лапласа ζ носит название *функции Грина* с полюсом на бесконечности, а в подобном (2.18) разложении

$$\zeta(y) = -\frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{\rho}{c_{\log}(\omega)} \right] + \dots$$

фигурирует логарифмическая емкость $c_{\log}(\omega)$ (см. [40]). По аналогии, величину $\exp(-\sigma^{-1}C_\omega)$, возникающую в согласии с (2.18), назовем *логарифмической L_0 -емкостью* множества ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *В условиях предложения 2.6, при $n = 2$ существует единственное решение w задачи (1.29), (1.30), подчиненное соотношениям (2.11), $|\alpha| > 0$, и (2.12), причем*

$$c_\omega = \mathfrak{C}_D(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \equiv (\mathbf{F}, \zeta)_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega} - (\mathbf{G}, N_0(0, y, \partial_y)\zeta)_{\partial\omega}. \quad (2.19)$$

Вывод подобных (2.19) интегральных представлений для коэффициентов в асимптотике содержится в работе [31; §5]. Напоследок сформулируем два утверждения, ставшие очевидными.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. 1) $\mathfrak{C}_D(0, 1) = 1$.

2) *Равенство $\mathfrak{C}_D(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = 0$ является необходимым и достаточным условием (при $n = 2$) существования исчезающего на бесконечности решения задачи (1.29), (1.30).*

5. О емкости множества ω ($n = 3$). Фундаментальное решение Ψ для оператора $\mathbf{L}^0(\partial_y)$ в $\mathbb{R}^3$ оказывается обобщенно однородной функцией порядка -1 , т.е. $\Psi(y) = \rho^{-1}\Psi^0(\varphi)$. По Ψ построим сумму $\mathcal{X}$ так, как это указано в (2.16). Обозначим через X исчезающее на бесконечности решение задачи (1.29), (1.30) с $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G} = 1$. В силу предложения 2.6 для него справедливы формулы вида (2.11). Обсудим главный член асимптотического разложения на бесконечности. После вычислений при учете (1.26), (1.27) имеем

$$L_0(0, \cdot, \partial_y)\mathcal{X} = \mathbf{L}^0(\partial_y)\Psi - b_{ij} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j} - l_{ij} Y_p \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_p}, \quad (2.20)$$

$$b_{ij} = l_{ij} + l_{ip} \frac{\partial Y_j}{\partial y_p} + \frac{\partial}{\partial y_p} (l_{pj} Y_i) - \mathbf{l}_{ij} \quad (2.21)$$

(здесь принято соглашение о суммировании по $i, j, p = 1, 2, 3$). Первое слагаемое справа в (2.20) равно нулю на $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}$. Функции (2.21) являются гладкими y -периодическими и обладают нулевым средним по $\mathbf{S}$; обозначим через B_{ij} решение уравнения (1.22) с $h = -b_{ij}$. Теперь

$$L_0(0, y, \partial_y) \left\{ \mathcal{X}(y) + \sum_{i,j=1}^3 B_{ij}(y) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j}(y) \right\} = O(\rho^{-4}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Столь быстрое убывание на бесконечности выражения (2.22) наводит на мысль, что сумма из фигурных скобок, умноженная на какую-то постоянную, служит

главным членом асимптотики решения X . Это наблюдение подтверждается процедурой построения асимптотики, описанной в [30], [31]. Именно, выполняются неравенства, согласующиеся с (2.11):

$$\begin{aligned} |X(y) - C_\omega \Psi(y)| &\leq c_\delta \rho^{\delta-2}, & |\partial_y X(y) - C_\omega \partial_y \mathcal{X}(y)| &\leq c_\delta \rho^{\delta-2}, \\ |\partial_y \partial_y^\alpha (X(y) - C_\omega \mathcal{X}(y))| &\leq c_\alpha \rho^{\delta-2}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

здесь C_ω — постоянная, зависящая от множества ω , а δ — произвольное число из $(0, 1)$. Подчеркнем, что вычитаемые в (2.23) максимально упрощены — лишние члены отнесены в остаток. Укороченная запись (ср. с (2.18)) имеет вид

$$X(y) = C_\omega \Psi(y) + \dots$$

В случае оператора Лапласа $\Psi(y) = (4\pi\rho)^{-1}$ и $X(y) = \text{cap}(\omega)\rho^{-1} + O(\rho^{-2})$. Поэтому величину $4\pi C_\omega$ естественно назвать L_0 -емкостью множества ω . Справедлива следующая

ЛЕММА 2.12. $C_\omega > 0$.

6. Внешняя задача Неймана ($n = 2, 3$); матрица присоединенной массы. Пусть $n = 3$ и X — решение задачи (1.29), (1.31) с $\mathbf{F} = 0$ и какой-нибудь правой частью $\mathbf{G}$. Тогда справедливы неравенства (2.23); вычислим коэффициент C_ω , который теперь зависит от $\mathbf{G}$. Поскольку $\zeta = 1$ — решение однородной задачи, то аналогично (2.19)

$$C_\omega = (\mathbf{G}, 1)_{\partial\omega}. \quad (2.24)$$

При $n = 2$ аналогичное скалярное произведение фигурировало в условиях (2.14).

В [39; приложение G] интегральные характеристики внешней задачи Неймана связывались с решениями, имеющими линейный рост при $\rho \rightarrow \infty$. Найдем подобные решения для уравнения с периодическими коэффициентами. Положим

$$\zeta_k(y) = y_k + Y_k(y) + X_k(y), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.25)$$

где Y_k указаны в (1.26), (1.27), а X_k — решение задачи (1.29), (1.31), в которой

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{G}_k(y) = - \sum_{i=1}^n \nu_i(y) \left\{ l_{ik}(y) + \sum_{j=1}^n l_{ij}(y) \frac{\partial Y_k}{\partial y_j}(y) \right\}. \quad (2.26)$$

Так как $L_0(0, y, \partial_y)(y_k + Y_k(y)) = 0$ и

$$(\mathbf{G}_k, 1)_{\partial\omega} = - \int_\omega L_0(0, y, \partial_y)(y_k + Y_k(y)) dy = 0,$$

то в силу утверждений 2.5, 1), 2.9 и 2.6 (а также согласно (2.24) в случае $n = 3$) решение $X_k(y)$ убывает, как $O(\rho^{1-n} |\log \rho|^s)$. Примем во внимание член

$$\rho^{1-n} [w^{(n-1)}(\varphi, \log \rho) + W^{(n-1)}(\varphi, \log \rho, y)]$$

разложения $X_k(y)$. Если коэффициенты постоянны, то осциллирующая добавка $W^{(n-1)}$ отсутствует, и согласно [24], [25] $\rho^{n-1}w^{(n-1)}$ оказывается линейной комбинацией производных фундаментального решения Ψ . Этот же результат сохраняется и для уравнения с периодическими коэффициентами – со ссылками на статьи [30], [31] напишем аналогично (2.24):

$$\left| X_k(y) - \sum_{p=1}^n m_{kp}^\omega \frac{\partial \Psi}{\partial y_p}(y) \right| \leq c\rho^{\delta-n}, \quad \left| \partial_k X_k(y) - \sum_{p=1}^n m_{kp}^\omega \frac{\partial \mathcal{X}_k}{\partial y_p}(y) \right| \leq c\rho^{\delta-n};$$

здесь $m^\omega = \|m_{kp}^\omega\|$ – некоторая $(n \times n)$ -матрица, зависящая от ω , и

$$\mathcal{X}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_j \partial y_k}$$

(ср. с (2.16)). В случае оператора Лапласа m^ω – матрица (тензор) присоединенной массы для множества ω (см. [39]). В рассматриваемом случае матрица m^ω сохраняет базовые свойства (см. очередную лемму), и потому мы не изменяем ее названия.

ЛЕММА 2.13. *Матрица m^ω симметрическая и положительно определенная.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. В случае оператора Лапласа рассмотренные интегральные характеристики не зависят от положения множества ω относительно фиксированной системы декартовых координат (в частности, m^ω – тензор; см. [39]). Для оператора $L_0(0, y, \partial_y)$ это не так – без каких-либо предположений о симметрии матрицы $\|l_{ij}(0, y)\|$ характеристики неизменны только при переносе начала координат из одного узла целочисленной решетки в другой при сохранении направлений осей (именно поэтому m^ω именуется у нас матрицей).

§3. Построение асимптотического разложения решения трехмерной задачи Дирихле

1. Старший член асимптотики. Случай $l_0 > 0$. Для построения старшего члена асимптотического разложения применим классическую процедуру осреднения [3]–[8].

ЛЕММА 3.1 (см., например, [5]). Пусть $\varphi(x, y)$ – y -периодическая функция из $C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbf{S})$. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x)\varphi(x, \varepsilon^{-1}x) \\ &= \varepsilon^{-2} \left\{ L_0(x, y, \partial_y)\varphi(x, y) + \varepsilon L_1(x, y, \partial_x, \partial_y)\varphi(x, y) + \varepsilon^2 L_2(x, y, \partial_x)\varphi(x, y) \right\} \Big|_{y=\varepsilon^{-1}x}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в котором L_0 – оператор (1.23),

$$\begin{aligned} L_2(x, y, \partial_x) &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} l_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} + l_0(x, y), \\ L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) &= - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} l_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial y_i} l_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Основной член асимптотики решения задачи (1.2), (1.5), (1.6) вне любой фиксированной окрестности множества ω_ε представим как сумму

$$U_0(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k(x, y) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) + \varepsilon^2 v_0(x, y), \quad (3.3)$$

где $y = \varepsilon^{-1}x$, а v_0 — некоторая гладкая y -периодическая функция с нулевым средним по **S**. Помещая (3.3) в (1.2), получаем для v_0 уравнение (1.22) с правой частью

$$h_U(x, y) = f(0, x, y) - L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) \sum_{k=1}^3 Y_k(x, y) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) - L_2(x, y, \partial_x) U_0(x) \quad (3.4)$$

(далее мы откажемся от такого определения v_0). В силу формул (1.25), (1.26) и (3.2) условие разрешимости названного уравнения принимает вид

$$\mathbf{L}(x, \partial_x) U_0(x) = \langle f^{(0)} \rangle(x); \quad (3.5)$$

при этом $f^{(0)}(x, y) = f(0, x, y)$, а обозначение $\langle f^{(0)} \rangle$ введено в (1.24). Таким образом, слагаемое U_0 суммы (3.3) определяется из задачи (3.5), (1.5).

Функция (3.3) не удовлетворяет краевому условию (1.6). Поправку типа пограничного слоя ищем в виде произведения

$$\chi_\Omega(x) w_0(\varepsilon^{-1}x), \quad (3.6)$$

где $\chi_\Omega(x) = \chi(d_\Omega |x|/2)$, а d_Ω — радиус шара, содержащегося в Ω ; эталонная срезка χ введена после (2.17). Разложим коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ в ряды Тейлора в окрестности точки $x = 0$ и перейдем к быстрым переменным $y = \varepsilon^{-1}x$; оператор $\mathcal{L}$ допускает расщепление

$$\mathcal{L} \sim \varepsilon^{-2} \{ M^{(0)}(y, \partial_y) + \varepsilon M^{(1)}(y, \partial_y) + \varepsilon^2 M^{(2)}(y, \partial_y) + \dots \}, \quad (3.7)$$

в котором $M^{(0)}(y, \partial_y) = L_0(0, y, \partial_y)$ (см. (1.23)) и

$$\begin{aligned} M^{(k)}(y, \partial_y) = & - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y) \Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial y_j} \\ & + \sum_{|\alpha|=k-2} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_0(x, y) \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Здесь при $n = 3$ использованы мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и обозначения

$$y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}, \quad \partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

Теперь ясно, что функция w_0 должна удовлетворять однородному уравнению (1.29), содержащему слева главную часть операторного ряда (3.7). Поскольку

роль пограничного слоя заключается в компенсации невязки на $\partial\omega_\varepsilon$ асимптотического решения (3.3), естественно подчинить w_0 краевому условию (1.30), в котором $\mathbf{G}(y) = -U_0(0)$. Таким образом,

$$w_0(y) = -U_0(0)X(y), \quad (3.8)$$

где X — емкостный потенциал, введенный в п. 5 §2.

На первый взгляд кажется, что построение основного члена (3.3) завершено, однако быстрая осцилляция коэффициентов приводит к неожиданному эффекту: пограничный слой (3.6) привносит в (1.2) быстроосциллирующую невязку $O(1)$, которую следует компенсировать слагаемым v_0 из (3.3). В самом деле, учитывая (2.23) и (3.8), напомним

$$\begin{aligned} \chi(x)w_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= -\chi(x)U_0(0)c_\omega \left\{ \Psi(y) + \sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y_p}(y) \right\} + \dots \\ &= -\chi(x)U_0(0)c_\omega \left\{ \varepsilon \Psi(x) + \varepsilon^2 \sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x) \right\} + \dots, \end{aligned}$$

применим лемму 3.1 и получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \partial_x\right)\left(\chi(x)w_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) &= U_0(0)c_\omega \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} l_{jk}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_k} (\chi(x)\Psi(x)) \right. \\ &\quad \left. + \chi(x) \frac{\partial}{\partial y_j} l_{jk}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x) \right) \right\} + \dots \quad (3.9) \end{aligned}$$

Здесь многоточием обозначены члены, содержащие ε^h с $h > 0$. Даже в случае $\chi = 1$ выражение из фигурных скобок в (3.9) аннулируется только при условии независимости коэффициентов l_{jk} от медленных переменных x (в соответствии с определением Y_p ; см. (1.27)). Таким образом, функция (3.6) порождает дополнительную невязку

$$\begin{aligned} h_w(x, y) &= U_0(0)c_\omega \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \frac{\partial l_{jk}}{\partial y_j}(x, y) \Psi(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_k}(x) \right. \\ &\quad \left. + \chi(x) \frac{\partial}{\partial y_j} (l_{jk}(x, y) - l_{jk}(0, y)) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial Y_p}{\partial y_k}(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x) \right) \right\}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Ясно, что $\langle h_w \rangle = 0$, т.е. выражение (3.10) удается компенсировать при помощи слагаемого v_0 из (3.3), если определить его как решение уравнения (1.22) с правой частью $h = h_U + h_w$. Соответственно, $v_0 = v_{0U} + v_{0w}$, причем v_{0U} — гладкая функция обеих переменных x и y , но ввиду присутствия в (3.10) фундаментального решения $\Psi(x) = O(r^{-1})$ и разностей $l_{jk}(x, y) - l_{jk}(0, y) = O(r)$ функция v_{0w} удовлетворяет таким соотношениям:

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\sigma v_{0w}(x, y)| \leq c_{\alpha\sigma} r^{-1-|\alpha|}. \quad (3.11)$$

В (3.11) α и σ — произвольные мультииндексы, $r = |x|$.

2. Обоснование старшего члена асимптотики. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(\varepsilon, x) = & \left(1 - \chi_\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left\{ U_0(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) + \varepsilon^2 v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \\ & + \chi_\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) U_0(0) + \chi_\Omega(x) w_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где χ_Ω – та же срезка, что и в (3.6), $\chi_\omega(\varepsilon^{-1}x) = \chi(\varepsilon^{-1}d_\omega|x|)$, а d_ω – радиус шара, содержащего $\overline{\omega}$. Разность $\mathcal{R}_0 = u - \mathcal{V}_0$ удовлетворяет задаче

$$\mathcal{L}\mathcal{R}_0 = \mathcal{F}_0 \quad \text{в } \Omega(\varepsilon), \quad \mathcal{R}_0 = 0 \quad \text{на } \partial\omega_\varepsilon \quad (3.13)$$

(для краткости условия периодичности (1.5) не пишем). Краевое условие в (3.13) получилось однородным благодаря введению в (3.12) срезающей функции χ_ω , поскольку в силу (3.8), (3.11) и равенства $X = 1$ на $\partial\omega$ имеем

$$\mathcal{V}_0(\varepsilon, x) = 0 + U_0(0) + w_0(\varepsilon^{-1}x) = U_0(0) - U_0(0) \quad \text{при } x \in \partial\omega_\varepsilon.$$

Пользуясь соотношениями для функций U_0, v_0, w_0 и Y_k , справедливыми согласно их построению, представим правую часть $\mathcal{F}_0$ как сумму шести слагаемых:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^1(\varepsilon, x) = & -\varepsilon \left(1 - \chi_\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left\{ L_2(x, y, \partial_x) \sum_{k=1}^3 Y_k(x, y) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) \right. \\ & \left. + (L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) + \varepsilon L_2(x, y, \partial_x)) v_0(x, y) \right\}, \\ \mathcal{F}_0^2(\varepsilon, x) = & f(\varepsilon, x, y) - (1 - \chi_\omega(\varepsilon^{-1}x)) f(0, x, y), \\ \mathcal{F}_0^3(\varepsilon, x) = & [\mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x), \chi_\omega(\varepsilon^{-1}x)] \\ & \times \left(U_0(x) - U_0(0) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k(x, y) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) + \varepsilon^2 v_0(x, y) \right), \\ \mathcal{F}_0^4(\varepsilon, x) = & -\chi_\omega(\varepsilon^{-1}x) l_0(x, \varepsilon^{-1}x) U_0(0), \\ \mathcal{F}_0^5(\varepsilon, x) = & -[\mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x), \chi_\Omega(x)] w_0(\varepsilon^{-1}x) \\ & - U_0(0) c_\omega [L_1(x, y, \partial_x, \partial_y), \chi_\Omega(x)] \Psi(x), \\ \mathcal{F}_0^6(\varepsilon, x) = & -\chi_\Omega(x) \left\{ (\mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1}x, \partial_x) - \mathcal{L}(0, \varepsilon^{-1}x, \partial_x)) w_0(\varepsilon^{-1}x) \right. \\ & + c_\omega U_0(0) (L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) - L_1(0, y, \partial_x, \partial_y)) \Psi(x) \\ & \left. + c_\omega U_0(0) (L_0(x, y, \partial_y) - L_0(0, y, \partial_y)) \sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отметим, что при формировании $\mathcal{F}_0^5$ и $\mathcal{F}_0^6$ принято во внимание выражение (3.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. При условии (1.8) имеет место оценка

$$\|\mathcal{R}_0; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\delta \varepsilon^{1-\delta}, \quad (3.15)$$

где δ – произвольное положительное число, но постоянная c_δ может зависеть от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспоминая соотношения (1.11), (1.12) и (2.5), получаем неравенство

$$c_0 \| \mathcal{R}_0; H^1(\Omega(\varepsilon)) \| \leq \| r \mathcal{F}_0; L_2(\Omega(\varepsilon)) \| \equiv \| \mathcal{F}_0 \|.$$

Оценим правую часть, основываясь на (3.14). Поскольку $|f(\varepsilon, x, y) - f(0, x, y)| \leq c\varepsilon$, имеем

$$\| \mathcal{F}_0^2 \|^2 \leq c \left(\varepsilon^2 + \int_{\{r < d_\omega \varepsilon\}} r^2 |f(0, x, y)|^2 dx \right) \leq c(\varepsilon^2 + \varepsilon^5).$$

Столь же очевидно, что $\| \mathcal{F}_0^4 \|^2 \leq c\varepsilon^5$.

Ввиду формулы (3.11) и гладкости функций U_0, v_{0U} выводим для $\mathcal{F}_0^1$ следующее неравенство:

$$\| \mathcal{F}_0^1 \|^2 \leq c\varepsilon^2 \int_{\Omega(\varepsilon)} r^2 (1 + r^{-4} + \varepsilon^2 r^{-6}) dx \leq c\varepsilon^2.$$

Так как $U_0(x) - U_0(0) = O(r)$, то по тем же причинам

$$\| \mathcal{F}_0^3 \|^2 \leq c\varepsilon^{-4} \int_{\{r < 2d_\omega \varepsilon\}} r^2 (r^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 (1 + r^{-2})) dx \leq c\varepsilon^3.$$

Для обработки $\mathcal{F}_0^5$ и $\mathcal{F}_0^6$ вспомним асимптотику емкостного потенциала X , построенного в п. 5 § 2. В силу (3.1) $[\mathcal{L}, \chi_\Omega] = [\varepsilon^{-1} L_1 + L_2, \chi_\Omega]$ — дифференциальный оператор с коэффициентами, равными нулю при $r < d_\Omega/2$. Пользуясь оценками (2.23) с $|\alpha| = 0$ и замечая, что слагаемое $\varepsilon^{-1} [L_1, \chi_\Omega](\varepsilon U_0(0) c_\omega \Psi)$ удалено из $[\mathcal{L}, \chi_\Omega] w_0$, приходим к неравенству

$$\| \mathcal{F}_0^5 \|^2 \leq c \int_{\Omega(\varepsilon)} r^2 \left\{ \varepsilon^{-2} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{2\delta-4} + \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 \right\} dx \leq c_\delta \varepsilon^{2(1-\delta)}.$$

Теперь разберемся с $\mathcal{F}_0^6$. Представим w_0 в виде

$$\begin{aligned} w_0 &= K \left(\Psi(y) + \sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y_p}(y) \right) + \tilde{w}_0(y) \\ &= K \left(\varepsilon \Psi(x) + \varepsilon^2 \sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x) \right) + \tilde{w}_0(y), \end{aligned}$$

где $K = -U_0(0) c_\omega$. Ссылаясь на лемму 3.1, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1} x, \partial_x) w_0(\varepsilon^{-1} x) &= \mathcal{L}(x, \varepsilon^{-1} x, \partial_x) \tilde{w}_0(\varepsilon^{-1} x) \\ &+ K (L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) + \varepsilon L_2(x, y, \partial_x)) \Psi(x) \\ &+ K (L_0(x, y, \partial_y) + \varepsilon L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) + \varepsilon^2 L_2(x, y, \partial_x)) \sum_{p=1}^3 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x). \end{aligned}$$

По сравнению с этой формулой в представлении $\mathcal{F}_0^6$ (см. (3.14)) фигурируют разности операторов, коэффициенты которых суть $O(r)$ (поэтому в очередном интегральном неравенстве возникает дополнительный весовой множитель r^2). Члены,

не имеющие коэффициентов ε или ε^2 , устраняются вычитанием, а норма слагаемого, содержащего $\tilde{w}_0$, оценивается при помощи (2.23) с малым δ . Учитывая соотношение $\partial_x^\alpha \Psi(x) = O(r^{-1-|\alpha|})$, заключаем, что

$$\|\mathcal{F}_0^6\|^2 \leq c \int_{\Omega(\varepsilon)} r^2 \cdot r^2 \left\{ \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2\delta-4} + \varepsilon^2 r^{-6} + \varepsilon^2 r^{-6} + \varepsilon^4 r^{-8} \right\} dx \leq c\varepsilon^2,$$

где $\delta > 0$. Осталось собрать приведенные формулы.

Упростим асимптотическое приближение (3.12), удалив из него срезающие функции, которые нужны были только для соблюдения краевого условия (1.6). Именно, положим

$$\mathcal{U}_0(\varepsilon, x) = U_0(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) + \varepsilon^2 v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \chi_\Omega U_0(0)X\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.16)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что

$$\|\mathcal{U}_0 - \mathcal{V}_0; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon. \quad (3.17)$$

Таким образом, в силу (3.15), (3.17) и (2.5) справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. *При условии (1.8) решение задачи (1.2), (1.5), (1.6) и его асимптотическое приближение (3.16) связаны неравенством*

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{U}_0\| &\equiv \|r^{-1}(u - \mathcal{U}_0); L_2(\Omega(\varepsilon))\| + \|\partial_x(u - \mathcal{U}_0); L_2(\Omega(\varepsilon))\| \\ &\leq c\|u - \mathcal{U}_0; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\delta \varepsilon^{1-\delta}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\delta > 0$ – произвольное число, а постоянная c_δ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Итак, главный член асимптотики решения задачи (1.2), (1.5), (1.6) содержит две асимптотические поправки – быстроосциллирующую и типа пограничного слоя около $\partial\omega_\varepsilon$. Согласно (2.12) на удалении от $\bar{\omega}_\varepsilon$ обе поправки имеют порядок ε , но вблизи отверстия превалирует $U_0(0)X$. В формулах для производных решения главенствует пограничный слой.

При помощи (3.11) и (2.23) находим, что

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^2 v_0; H^1(\Omega(\varepsilon))\| &\leq c\varepsilon^2 \left(\int_\varepsilon^c [r^{-1}(r^{-1} + \varepsilon^{-1})]^2 r^2 dr \right)^{1/2} \leq c\varepsilon, \\ \|\chi_\Omega U_0(0)X; H^1(\Omega(\varepsilon))\| &\leq c \left(\int_\varepsilon^c \left[\varepsilon^{-1} \left(1 + \frac{r}{\varepsilon}\right)^{-2} \right]^2 r^2 dr \right)^{1/2} \leq c\varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит, слагаемое $\varepsilon^2 v_0(x, y)$ устраняется из асимптотического приближения (3.16) безболезненно – соотношение (3.18) сохраняется. В то же время удаление члена $-\chi_\Omega(x)U_0(0)X(\varepsilon^{-1}x)$, описывающего пограничный слой, приводит к потере точности:

$$\left\| u - \left(U_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right) \right\| \leq c\varepsilon^{1/2}.$$

Подчеркнем, что именно такая мажоранта $c\varepsilon^{1/2}$ получается обычно (см. [3]–[8] и др.) при оправдании процедуры осреднения без учета каких-либо пограничных слоев. Убрать корректоры Y_k из последней формулы нельзя, так как их норма в $H^1(\Omega(\varepsilon))$ составляет $O(1)$.

Теорема 3.3 дает оценку разности $u - \mathcal{U}_0$ по энергетической метрике. Вместе с тем, применяя принцип максимума и используя прежнее представление (3.14) правой части задачи (3.13), можно установить такое неравенство:

$$\left| u(\varepsilon, x) - \left\{ U_0(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) + \varepsilon^2 v_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \chi_\Omega U_0(0) X\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \right| \leq c_\delta \varepsilon^{1-\delta} \quad \text{при } x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}.$$

Теперь без изменения мажоранты $O(\varepsilon^{1-\delta})$ из фигурных скобок можно удалить как $\varepsilon Y_k \frac{\partial U_0}{\partial x_k}$, так и $\varepsilon^2 v_0$ (напоминаем, что согласно (3.11) $\varepsilon^2 v_0(x, \varepsilon^{-1}x) = O(\varepsilon)$ при $x \in \Omega(\varepsilon)$), однако поправка типа пограничного слоя обязана оставаться. Впрочем, в соответствии с (2.23) можно обойтись без срезающей функции χ_Ω и упростить формулу до такой:

$$\left| u(\varepsilon, x) - \left\{ U_0(x) - U_0(0) X\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \right| \leq C_\delta \varepsilon^{1-\delta} \quad \text{при } x \in \overline{\Omega(\varepsilon)}.$$

3. Построение полной асимптотики. Как уже говорилось, нам придется пользоваться процедурой перераспределения невязок. Дело в том, что коэффициенты операторов $M^{(p)}$ суть полиномы от y , и потому при использовании обычных итерационных процедур в правых частях уравнений (1.29) для w_k окажутся слагаемые $O(\rho^{-j+k})$, где $j, k = 1, 2, \dots$. Это означает, что w_k обязательно содержат выражения $O(\rho^{2-j+k})$ и, тем самым, теряют основное свойство пограничного слоя – затухание на бесконечности. Для устранения несоответствия изменим процедуру и сохраним справа в (1.29) лишь остаток $o(\rho^{-2})$, отщепив члены $O(\rho^k)$ с $k \geq -2$, пригодные для уравнений (1.22) и (1.28) после замены $\rho \mapsto r$. Иными словами, невязка, образованная w_k , компенсируется не только решениями $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots$ типа пограничного слоя, но и решениями $U_{k+1}, v_{k+1}, U_{k+2}, v_{k+2}, \dots$ других типов. Аналогично, неудобные части невязок, порожденных U_k и v_k , после замены $r \mapsto \rho$ учитываются при решении внешних задач для $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots$. В такой комбинированной обработке всех возникающих невязок и состоит процедура их перераспределения. Реализуем ее в рассматриваемой ситуации.

Предположим, что при $0 \leq j < k$ функции U_j, v_j и w_j , допускающие соответственно представления (2.2), (2.4) с $\mu = -2$ и (2.11), построены. Найдем U_k, v_k и w_k .

Образованная функциями v_m ($m < k$) невязка $L_2 v_{k-2} + L_1 v_{k-1}$ содержит слагаемые порядков r^{-3} и r^{-4} ; отщепим их и отправим в задачи для пограничного слоя. В правых частях уравнений (1.22), (1.28) для определения U_k, v_k останется

выражение

$$F_k^v(x, y) = - \sum_{q=1}^2 \left\{ L_q(x, y, \partial_x, \partial_y) v_{k-q}(x, y) - \chi_\Omega(x) \sum_{(p, m) \in S_q} L_q^{(p)}(x, y, \partial_x, \partial_y) (r^{-m} v_{k-q}^{(-m)}(\varphi, \log r, y)) \right\}.$$

Здесь множество суммирования имеет вид

$$S_q = \{(p, m) : p = 0, 1, \dots, q-1; m = 3-q, \dots, 2; p-m < 0\},$$

$v_m^{(j)}$ – коэффициент разложения (2.4) функций v_k ,

$$\begin{aligned} L_2^{(p)}(x, y, \partial_x) &= - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=p-2} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha \partial_x^\alpha l_0(x, y)|_{x=0}, \\ L_1^{(p)}(x, y, \partial_x, \partial_y) &= - \sum_{i,j=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} \frac{\partial}{\partial y_j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}. \end{aligned}$$

Функцию $F_k^v - \langle F_k^v \rangle$, обладающую нулевым средним по $\mathbf{S}$, поместим в уравнение (1.22), а $\langle F_k^v \rangle$ – в (1.28).

Аналогично поступим с коэффициентами U_m ($m < k$) ряда (1.32). Допустимое в (1.28) слагаемое соответствующей невязки, попадающее в уравнение для U_k , имеет вид $\langle F_k^U \rangle$, где

$$\begin{aligned} F_k^U(x, y) &= -L_2(x, y, \partial_x) \sum_{j=1}^3 Y_j(x, y) \frac{\partial U_{k-2}}{\partial x_j}(x) \\ &\quad + \chi_\Omega(x) L_2(0, y, \partial_x) \sum_{j=1}^3 Y_j(0, y) \frac{\partial U_{k-2}^{(0)}}{\partial x_j}(\varphi, \log r), \end{aligned}$$

а $U_m^{(0)}$ – коэффициент представления (2.2) функции U_m . Функция

$$\langle F_k^U + h_k^U \rangle_\perp \quad (3.19)$$

предназначена для нахождения v_k . В (3.19) и далее $\langle A \rangle_\perp = A - \langle A \rangle$. Слагаемое h_k^U суммы (3.19) определяется по формуле

$$h_k^U(x, y) = -L_2(x, y, \partial_x) U_k(x) - L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) \sum_{j=1}^3 Y_j(x, y) \frac{\partial U_{k-1}}{\partial x_j}(x).$$

В правых частях задач для нахождения v_k и U_k появляется невязка, образованная слагаемыми $\varepsilon^m w_m$ ($m < k$) пограничного слоя. Уравнение (1.28) содержит среднее $\langle F_k^w \rangle$ функции

$$F_k^w(x, y) = - \sum_{q=1}^2 \sum_{(i,j) \in T_{kq}} \left\{ \chi_\Omega(x) \left(L_q(x, y, \partial_x, \partial_y) - \sum_{p=0}^{j+q-3} L_q^{(p)}(x, y, \partial_x, \partial_y) \right) + [L_q(x, y, \partial_x, \partial_y), \chi_\Omega(x)] \right\} \left(r^{-j} (W_i^{(j)}(\varphi, \log r, y) + w_i^{(j)}(\varphi, \log r)) \right);$$

при этом $T_{kq} = \{(i, j) : i = 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots; i + j = k + 2 - q\}$.

Невязка, порожденная членами пограничного слоя и попадающая в правую часть (1.22), представима так:

$$\langle F_k^w + h_k^w \rangle_\perp.$$

Помимо уже известной функции F_k^w здесь фигурирует величина

$$h_k^w(x, y) = -\chi_\Omega(x) \sum_{(p,q) \in T_{k0}} \left(L_0(x, y, \partial_y) - \sum_{m=0}^{q-3} L_0^{(m)}(x, y, \partial_y) \right) (r^{-q} W_p^{(q)}(\varphi, \log r, y)),$$

где

$$L_0^{(p)}(x, y, \partial_y) = - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y) \Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Итак, коэффициент U_k асимптотического ряда (1.32) есть решение задачи (1.28), в которой

$$F_k = \langle F_k^v + F_k^U + F_k^w + f_k \rangle_\perp, \quad (3.20)$$

а $f_k(x, y)$ — коэффициент ряда Маклорена для $f: \varepsilon \mapsto f(\varepsilon, x, y)$,

$$f_k(x, y) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}(0, x, y).$$

Функция v_k отыскивается из уравнения (1.22) с правой частью

$$h_k = \langle F_k^v + F_k^U + F_k^w + h_k^U + h_k^w + f_k \rangle_\perp. \quad (3.21)$$

Для описания задач, определяющих w_k , введем следующие обозначения. Пусть $\Upsilon(z, y)$ — y -периодическая функция, принадлежащая $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$; тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \Upsilon(y, y) = D_j \Upsilon(y) + \mathfrak{D}_j \Upsilon(y),$$

где

$$D_j \Upsilon(y) = \frac{\partial \Upsilon}{\partial z_j}(z, y) \Big|_{z=y}, \quad \mathfrak{D}_j \Upsilon(y) = \frac{\partial \Upsilon}{\partial y_j}(z, y) \Big|_{z=y}.$$

В уравнение (1.29) для w_k поместим невязки $\mathbf{F}_k^U$, $\mathbf{F}_k^v$, образованные U_m и v_m , $m \leq k$, и имеющие недопустимый для уравнений (1.22), (1.28) рост при $r \rightarrow 0$. Функция $\mathbf{F}_k^U$ имеет вид

$$\mathbf{F}_k^U(x, y) = -M^{0,2}(y, D) \sum_{j=1}^3 Y_j(0, y) \frac{\partial U_{k-1}^{(0)}}{\partial y_j}(\varphi, \log \rho), \quad (3.22)$$

причем оператор $M^{0,2}(y, D)$ определяется равенством

$$M^{k,2}(y, D) = - \sum_{i,j=1}^n D_i \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} D_j + \sum_{|\alpha|=k-2} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_0(x, y)|_{x=0}$$

при $k = 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k^v(x, y) = & - \sum_{(p,q,j) \in P_k} M^{q,2}(y, D) (\rho^j v_p^{(j)}(\varphi, \log r, y)) \\ & + M^{0,1}(y, D, \mathfrak{D}) (\rho^{-2} v_{k-2}^{(-2)}(\varphi, \log \rho, y)); \end{aligned} \quad (3.23)$$

здесь $P_k = \{(p, q, j) : p, q = 0, 1, \dots; j = -2, -1, \dots; q + j < 0; q + j + p = k - 2\}$,

$$\begin{aligned} M^{k,1}(y, D, \mathfrak{D}) = & - \sum_{i,j=1}^n \left\{ D_i \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} \mathfrak{D}_j \right. \\ & \left. + \mathfrak{D}_i \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} D_j \right\}. \end{aligned}$$

Итак, правая часть $\mathbf{F}_k$ уравнения (1.29) для w_k равна сумме

$$\mathbf{F}_k^v(x, y) + \mathbf{F}_k^U(x, y) + \mathbf{F}_k^w(x, y). \quad (3.24)$$

Здесь через $\mathbf{F}_k^w$ обозначена часть невязки, образованной членами w_m , $m < k$, пограничного слоя, исчезающая при $\rho \rightarrow +\infty$ как $o(\rho^{-2})$. Именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k^w(x, y) = & - \sum_{p=1}^k \left(M^{(p)}(y, \partial_y) w_{k-p}(y) - \sum_{m=0}^2 M^{p,m}(y, D, \mathfrak{D}) \right) \\ & \times \left(\sum_{j=1}^{p-m+2} \rho^{-j} (W_{k-p}^{(j)}(\varphi, \log \rho, y) + w_{k-p}^{(j)}(\varphi, \log \rho)) \right), \end{aligned}$$

где

$$M^{k,0}(y, \mathfrak{D}) = - \sum_{i,j=1}^n \mathfrak{D}_i \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha l_{ij}(x, y)|_{x=0} \mathfrak{D}_j.$$

На этом процедура перераспределения невязок заканчивается – правая часть $\mathbf{G}_k$ краевого условия (1.30) на компакте $\partial\omega$ находится без ее участия. Используя

разложения функций U_p , Y_j и v_q в ряды по степеням r , получаем следующее выражение для $G_k = w_k|_{\partial\omega}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_k(y) = & - \sum_{q=0}^k \rho^q U_{k-q}^{(q)}(\varphi, \log \rho) - \sum_{q=-2}^k \rho^q v_{k-q-2}^{(q)}(0, \varphi, y) \\ & - \sum_{(p,q,m) \in Q_k} \sum_{j=1}^3 \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial_x^\alpha Y_j(x, y)|_{x=0}, \quad y \in \partial\omega; \end{aligned}$$

здесь $Q_k = \{(p, q, m) : p, q, m = 0, 1, \dots; p + q + m = k - 1\}$.

Перейдем к оправданию асимптотики. Построим частичную сумму ряда (1.32)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_N(\varepsilon, x) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left\{ U_k(x, \log \varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^3 Y_j(x, y) \frac{\partial U_k}{\partial x_j}(x, \log \varepsilon) \right. \\ \left. + \varepsilon^2 v_k(x, y, \log \varepsilon) + \chi_\Omega(x) w_k(x, y, \log \varepsilon) \right\}, \quad (3.25) \end{aligned}$$

коэффициенты U_k , v_k и w_k которого найдены из задач (1.28), (1.22) и (1.29), (1.30) с правыми частями, определенными по формулам (3.20), (3.21), (3.22). Невязки, образованные слагаемым $\chi_\Omega w_k$, не участвуют в определении (3.20) функции F_k , однако входят в правые части равенства (3.21) для h_k . Поэтому порядок определения слагаемых суммы (3.25) с одинаковыми номерами таков: сначала отыскивается U_k , затем w_k и, наконец, v_k .

С целью оценить погрешность приближения решения $u(\varepsilon, x)$ асимптотическим $\mathcal{U}_N(\varepsilon, x)$ поступаем так же, как и в п. 2. Сначала нужно построить вспомогательную функцию $\mathcal{V}_N$, полностью удовлетворяющую условию Дирихле (1.6) и мало отличающуюся от $\mathcal{U}_N$. Затем $\mathcal{V}_N$ подставляется в уравнения (1.2), (1.6) и формируется задача

$$\mathcal{L}\mathcal{R}_N = \mathcal{F}_N \quad \text{в } \Omega(\varepsilon), \quad \mathcal{R}_N = 0 \quad \text{на } \partial\omega_\varepsilon$$

для $\mathcal{R}_N = u - \mathcal{V}_N$. Остается оценить норму $\|\mathcal{F}_N\|$ и вывести подобное (3.15) неравенство

$$\|\mathcal{R}_N; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\delta \varepsilon^{N+1-\delta},$$

которое вместе с аналогичным (3.17) соотношением

$$\|\mathcal{U}_N - \mathcal{V}_N; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\delta \varepsilon^{N+1},$$

получаемся прямым вычислением нормы упомянутого продолжения, приводит к желанному результату. Самый трудоемкий, но в то же время рутинный этап — обработка правой части $\mathcal{F}_N$. Все особенности этого этапа, обусловленные соединением быстрой осцилляции коэффициентов и сингулярным возмущением границы, были продемонстрированы достаточно подробно в п. 2. Поэтому здесь мы ограничиваемся формулировкой финальной оценки.

ТЕОРЕМА 3.4. *При условии (1.8) решение задачи (1.2), (1.5), (1.6) и его асимптотическое приближение (3.25) связаны неравенством*

$$\begin{aligned} & \|r^{-1}(u - \mathcal{U}_N; L_2(\Omega(\varepsilon)))\| + \|\nabla(u - \mathcal{U}_N; L_2(\Omega(\varepsilon)))\| \\ & \leq c\|u - \mathcal{U}_N; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\delta \varepsilon^{N+1-\delta}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

в котором $\delta > 0$ – произвольное число, а постоянная c_δ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

4. Случай $l_0 = 0$. Если l_0 удовлетворяет (1.13), то изложенная процедура построения асимптотики нуждается в модификации: необходимые условия разрешимости задачи (1.28) для определения коэффициентов U_k ряда (1.32), вообще говоря, не выполняются.

Изменим структуру основного приближения. Именно, прибавим к (3.7) слагаемое

$$\varepsilon^{-1}c_0, \quad (3.27)$$

где c_0 – постоянная, подлежащая определению. Дополнительная невязка, порожденная (3.27) в (1.6), компенсируется еще одним слагаемым типа пограничного слоя

$$-\varepsilon^{-1}c_0\chi_\Omega(x)X(\varepsilon^{-1}x). \quad (3.28)$$

В (3.28) X – введенное в п. 5 §2 решение задачи (1.29), (1.30) с правыми частями $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G} = 1$, а χ_Ω – та же срезка, что и в (3.6). К невязке, образованной функцией (3.28), применим процедуру перераспределения. Ту ее часть, которая составляет $o(\rho^{-2})$, компенсируем членами $w_0, w_1, \dots$ пограничного слоя, а остальные слагаемые отправим в уравнения (1.22) и (1.28) для коэффициентов v_k и U_k ряда (1.32). Вспоминая структуру представления X на бесконечности (см. формулы (2.23) и лемму 2.12), находим представление для невязки, образованной пограничным слоем (3.28) и помещенной в уравнение (1.22):

$$\varepsilon^{-1}H_0 + \langle H_1 \rangle_\perp + \dots$$

Здесь многоточием обозначены несущественные на данном этапе слагаемые,

$$\begin{aligned} H_0(x, y) &= -c_0 C_\omega \left\{ (L_1 - L_1^{(0)})(x, y, \partial_x, \partial_y)(\chi_\Omega(x)\Psi(x)) \right. \\ & \quad \left. + \chi_\Omega(x)(L_0 - L_0^{(0)})(x, y, \partial_y) \left(\sum_{k=1}^3 Y_k(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x) \right) \right\}, \\ H_1(x, y) &= c_0 C_\omega \left\{ [L_1, \chi_\Omega](x, y, \partial_y) \sum_{k=1}^3 Y_k(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x) \right. \\ & \quad + \chi_\Omega(x)(L_1 - L_1^{(0)})(x, y, \partial_x, \partial_y) \left(\sum_{k=1}^3 Y_k(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x) \right) \\ & \quad \left. + [L_2, \chi_\Omega](x, y, \partial_x)\Psi(x) + \chi_\Omega(x)(L_2 - L_2^{(0)})(x, y, \partial_x)\Psi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнение (1.22) с правой частью H_0 имеет решение $c_0 V$, где

$$V(x, y) = C_\omega \chi_\Omega(x) \sum_{k=1}^3 (-Y_k(x, y) + Y_k(0, y)) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x). \quad (3.30)$$

Применяя процедуру перераспределения к невязке, образованной $c_0 V$, получаем в правой части уравнения (1.22) для v_0 дополнительный член $\langle H_2 \rangle_\perp$;

$$H_2(x, y) = -c_0 L_1(x, y, \partial_x, \partial_y) V(x, y). \quad (3.31)$$

В уравнение (1.28) для U_0 попадает сумма $\langle H_1 \rangle + \langle H_2 \rangle$. Согласно (3.29), (3.31) и (1.21)

$$\begin{aligned} \langle H_1 \rangle + \langle H_2 \rangle &= c_0 C_\omega \{ \mathbf{L}(\chi_\Omega \Psi) - \chi_\Omega \mathbf{L}^0(\Psi) \} \\ &= c_0 C_\omega \{ \chi_\Omega (\mathbf{L} - \mathbf{L}^0) \Psi + [\mathbf{L}, \chi_\Omega] \Psi \}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В самом деле, средняя часть (3.32) оказывается обычной функцией (не распределением), и потому благодаря равенству $\int_\Omega \mathbf{L}(\chi_\Omega \Psi) dx = 0$ (в смысле теории распределений) интеграл по Ω от любой из фигурных скобок в (3.32) равен -1 .

Таким образом, правая часть (3.5) наряду с функцией $\langle f^{(0)} \rangle$ содержит слагаемое (3.32), а условие разрешимости уравнения (3.5) выполняется в том случае, если

$$c_0 = C_\omega^{-1} \int_\Omega f^{(0)}(x) dx. \quad (3.33)$$

Итак, ряд (1.32) начинается со слагаемого, содержащего ε^{-1} , т.е. $\mu = -1$ в (1.32). Выясним погрешность в приближении решения $u(\varepsilon, x)$ только этим слагаемым

$$\mathcal{U}_{-1}(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-1} c_0 \{ 1 - \chi_\Omega(x) X(\varepsilon^{-1} x) + \varepsilon V(x, \varepsilon^{-1} x) \}. \quad (3.34)$$

Как и в п. 2, для оценки $u - \mathcal{U}_{-1}$ введем величину

$$\mathcal{V}_{-1}(x, \varepsilon^{-1} x) = \varepsilon^{-1} c_0 \{ 1 - \chi_\Omega X(\varepsilon^{-1} x) + \varepsilon (1 - \chi_\omega(\varepsilon^{-1} x)) V(x, \varepsilon^{-1} x) \}.$$

Разность $\mathcal{R}_{-1} = u - \mathcal{V}_{-1}$ удовлетворяет задаче

$$\mathcal{L} \mathcal{R}_{-1} = \mathcal{F}_{-1} \quad \text{в } \Omega(\varepsilon), \quad \mathcal{R}_{-1} = 0 \quad \text{на } \partial \omega_\varepsilon.$$

Оценка правой части $\mathcal{F}_{-1}$ производится по упрощенной схеме из п. 2. Отличия в появляющихся далее весовых нормах вызваны новой априорной оценкой (1.14) при условии (1.13).

ТЕОРЕМА 3.5. В случае $l_0 = 0$ решение задачи (1.2), (1.5), (1.6) и его асимптотическое приближение (3.34) связаны неравенством

$$\varepsilon^{1/2} \left\| r^{-3/2} \left| \ln \frac{r}{a} \right|^{-1} (u - \mathcal{U}_{-1}); L_2(\Omega(\varepsilon)) \right\| + \|\partial_x(u - \mathcal{U}_{-1}); L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c \|u - \mathcal{U}_{-1}; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\delta \varepsilon^{-1/2-\delta},$$

в котором $\delta > 0$ – произвольное число, а постоянная c_δ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Обращаем внимание на то, что

$$|\nabla_x \mathcal{U}_{-1}(\varepsilon, x)| = O\left(\varepsilon + \varepsilon^{-1} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-2}\right),$$

т.е. асимптотическое решение (3.34) не дает информации о поведении градиента решения: в качестве составляющей гладкого типа в (3.34) выступает постоянная (3.27). Для изучения асимптотики $\nabla_x \mathcal{U}_{-1}$ нужно, по крайней мере, учесть члены ряда (1.32) с номером $k = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Аналогичные модификации нужны и в процедуре построения младших членов асимптотики решения задачи (1.2), (1.5), (1.6): условие разрешимости задачи (1.28) для нахождения U_k обеспечивается дополнительными слагаемыми

$$\varepsilon^{k-1} c_k \{1 - \chi_\Omega(x) X(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon V(x, \varepsilon^{-1}x)\}, \quad (3.35)$$

относящимися к членам ряда (1.32) с номерами $k - 1$.

§ 4. Построение асимптотического разложения решения двумерной задачи Дирихле

В силу следствия 2.11, 2) решение плоской внешней задачи Дирихле (1.29), (1.30), описывающей явление пограничного слоя, затухает на бесконечности только при выполнении дополнительного условия. Это обстоятельство вынуждает модифицировать процедуру построения асимптотики (тот же самый эффект наблюдается и при отсутствии быстрой осцилляции коэффициентов; ср. с [11], [21; §1.2], [22; §2.4]). Все необходимые изменения мы проследим на примере главных асимптотических членов в случаях $l_0 > 0$ и $l_0 = 0$. Нахождение младших членов и обоснование разложений не встречают новых затруднений.

1. Случай $l_0 > 0$. Как и в п. 1 § 3, основной член асимптотики решения задачи (1.2), (1.5), (1.6) при $n = 2$ ищем в виде (3.3). Слагаемое $U_0(x)$, являющееся решением задачи (3.5), (1.5), ввиду следствия 2.3 в случае $n = 2$ определяется по формуле

$$U_0(x) = U_0^0(x) + AG(x), \quad (4.1)$$

где A – произвольная постоянная, а G – функция Грина с особенностью в точке O ,

$$G(x) = \Psi(x) + G^0(x); \quad (4.2)$$

$G^0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ – ее регулярная часть, а Ψ – фундаментальное решение (2.15) оператора $\mathbf{L}$.

Поправка $v_0 = v_{0U}$ находится из уравнения (1.22) с правой частью (3.4). Поскольку U_0 имеет логарифмическую особенность, в отличие от трехмерного случая слагаемое v_{0U} не является гладкой функцией: согласно предложению 2.1 для v_{0U} справедливо представление (2.2) с $\mu = -2$. Старший член $v_{0U}^{(-2)}$ этого представления удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} L_0(0, y, \partial_y)(r^{-2}v_{0U}^{(-2)}(\varphi, y)) \\ = -A \left(L_2(0, y, \partial_x)\Psi(x) + L_1(0, y, \partial_x, \partial_y) \sum_{p=1}^2 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(x) \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $L_0(0, y, \partial_y) = M^{(0)}(y, \partial_y)$ – первый член ряда Тейлора (3.7). В (4.3) дифференцирование ∂_y не затрагивает x и r , φ , т.е. множитель r^{-2} в (4.3) можно вынести за оператор L_0 .

Вычисляя при учете (4.2) и (2.15) главную часть невязки функции (3.3) в краевом условии (1.6), заключаем, что поправка w_0 – решение задачи (1.29), (1.30) с правыми частями

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(y) = -(M^{0,2}(y, D) + M^{0,1}(y, D, \mathcal{D}))(\rho^{-2}v_0^{(-2)}(\varphi, y)) \\ - AM^{0,2}(y, D) \left(\sum_{p=1}^2 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y_p}(y) \right), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0(y) = -U_0^0(0) - A \left\{ -\sigma \log(\varepsilon \rho) + \psi(\varphi) + G^0(0) + \sum_{p=1}^2 Y_p(0, y) \frac{\partial \Psi}{\partial y_p}(y) \right\} \\ - \rho^{-2}v_0^{(-2)}(\varphi, y), \quad y \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Напомним, что в трехмерном случае $\mathbf{F}_0 = 0$. Благодаря тому, что $\Psi(y) = \varepsilon \Psi(x)$ в $\mathbb{R}^3$, в §3 слагаемое вида (4.4) появлялось в правой части уравнения (1.22) для v_1 .

Решение w_0 обязано затухать на бесконечности. Между тем, двумерная внешняя задача разрешима в классе функций, исчезающих на бесконечности, при условии

$$\mathfrak{C}_D(\mathbf{F}_0, \mathbf{G}_0) = 0 \quad (4.6)$$

(следствие 2.11, 2)). Оказывается, что для выполнения (4.6) можно использовать произвол в выборе решения (4.1) – коэффициент A . Именно с целью соблюсти условие (4.6) и был в (4.1) расширен класс допустимых решений: к ограниченному решению $U_0^0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ задачи (3.5), (1.5) добавлена функция Грина G . Множитель A , конечно же, вычисляется при помощи интегрального представления (2.19) функционала $\mathfrak{C}_D$. Однако существует более простой путь: ограниченное решение w_0 задачи (1.29), (1.30) с правыми частями (4.4), (4.5) указывается явно:

$$w_0(y) = -U_0^0(0) + A(\sigma \log \varepsilon - G^0(0)) + A(\zeta(y) - \mathcal{X}(y)) - \rho^{-2}v_0^{(-2)}(\varphi, y); \quad (4.7)$$

здесь ζ – построенное в п. 4 §2 специальное решение (2.17), $\mathcal{X}$ – сумма (2.16). В согласии с асимптотическими формулами (2.18), (2.11), (2.10) получаем

$$(\zeta - \mathcal{X})(y) = C_\omega + \rho^{-1}Z(\varphi, \log \rho) + \sum_{p=1}^2 Y_p(0, y) \frac{\partial}{\partial y_p}(\rho^{-1}Z(\varphi, \log \rho)) + \dots, \quad (4.8)$$

где C_ω – интегральная характеристика, обсуждавшаяся перед предложением 2.10. Следовательно, для решения (4.7) типа пограничного слоя справедливо представление

$$w_0(y) = -U_0^0(0) + A(\sigma \log \varepsilon - G^0(0) + C_\omega) + \dots,$$

в котором многоточием обозначен исчезающий при $y \rightarrow \infty$ остаток. Таким образом, функция w_0 обладает необходимым свойством затухания на бесконечности, если

$$A = A(\log \varepsilon) = -U_0^0(0)\mu(\log \varepsilon), \quad (4.9)$$

где $\mu(\log \varepsilon) = \{\sigma|\log \varepsilon| + G^0(0) - C_\omega\}^{-1}$. Подчеркнем, что $\mu(\log \varepsilon) = O(|\log \varepsilon|^{-1})$, т.е. при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выражение из фигурных скобок положительно.

Итак, предъявлены слагаемые U_0 и w_0 в конструкции главного члена асимптотики решения u задачи (1.2), (1.5), (1.6) при $n = 2$; осталось найти функцию v_0 . Как и в трехмерном случае (ср. с п. 1 §3), пограничный слой w_0 порождает дополнительную невязку

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^2 \left\{ A \frac{\partial l_{jk}}{\partial y_j}(x, y) r^{-1} Z(\varphi, \log(\varepsilon^{-1}r)) \frac{\partial \chi}{\partial x_k}(x) \right. \\ & + \chi(x) \frac{\partial}{\partial y_j} (l_{jk}(x, y) - l_{jk}(0, y)) \left(A \frac{\partial}{\partial x_k} r^{-1} Z(\varphi, \log(\varepsilon^{-1}r)) \right. \\ & \left. \left. + A \sum_{p=1}^2 \frac{\partial Y_p}{\partial y_k}(0, y) \frac{\partial}{\partial x_p} r^{-1} Z(\varphi, \log(\varepsilon^{-1}r)) - \frac{\partial v_{0U}^{(-2)}}{\partial y_k}(\varphi, y) \right) \right\}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Она компенсируется решением v_{ow} уравнения (1.22). Таким образом, быстроосциллирующий корректор v_0 состоит из двух слагаемых v_{0U} и v_{0w} , являющихся решениями уравнения (1.22) с правыми частями (3.4) и (4.10) соответственно.

Построение следующих членов асимптотического ряда (1.32) проводится по прежней схеме, включающей процедуру перераспределения невязок и подобное (4.1) представление $U_k = U_k^0 + A_k G$ решения гладкого типа. Единственное отличие от случая $k = 0$ состоит в усложнении зависимостей коэффициентов от $\log \varepsilon$; в частности, оказывается, что $A_k(\log \varepsilon) = \mu(\log \varepsilon)^{-k} A_k^0(\log \varepsilon)$, где $A_k^0(l)$ – полином.

2. Случай $l_0 = 0$. Задача (3.5), (1.5), вообще говоря, неразрешима (см. предложение 1.5). Поступим так же, как и в п. 1, – расширим класс допустимых решений за счет растущих логарифмически при $x \rightarrow 0$. Иными словами, будем искать функцию U_0 в виде

$$U_0(x) = U_0^0(x) + c_0 + c_1 \chi_\Omega(x) \Psi(x). \quad (4.11)$$

Постоянная c_0 в настоящий момент произвольна, а множитель c_1 фиксируется так:

$$c_1 = - \int_{\Omega} \langle f_0 \rangle(x) dx. \quad (4.12)$$

Наконец, $U_0^0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ – решение уравнения

$$\mathbf{L}_0 U_0^0 = \langle f_0 \rangle - c_1 [\mathbf{L}_0, \chi_\Omega] \Psi \quad \text{в } \Omega \quad (4.13)$$

с условиями периодичности (1.5). Благодаря (4.12) условие разрешимости задачи (4.13), (1.5) удовлетворено (см. предложение 1.2, 1)). Так как решение U_0^0 определено с точностью до аддитивной постоянной, его можно нормировать равенством $U_0^0(0) = 0$.

Отыскивая главную часть невязки суммы (4.11) в краевом условии (1.6), вычисляем правые части задачи (1.29), (1.30) для поправки типа пограничного слоя w_0 ; они имеют вид (4.4), (4.5), где A и U_0^0 заменены соответственно на c_1 и c_0 , а величина $G^0(0)$ считается равной нулю (к такому выводу можно прийти, сравнив (4.1) и (4.11)). Таким образом, аналогично (4.7)

$$w_0(y) = -c_0 + c_1 \sigma \log \varepsilon + c_1 (\zeta(y) - \mathcal{X}(y)) - \rho^{-2} v_{0U}^{(-2)}(\varphi, y). \quad (4.14)$$

Функция (4.14) ограничена и затухает при $y \rightarrow \infty$ в случае

$$c_0 = c_1 \sigma \log \varepsilon - c_1 C_\omega.$$

Это равенство ликвидирует произвол в (4.11). Последняя составляющая главного члена – быстроосциллирующий корректор v_0 – находится так же, как и при $l_0 > 0$ (см. п. 1).

Ввиду “накопления логарифмов” из-за переходов от медленных переменных к быстрым и наоборот младшие члены ряда (1.32) становятся полиномами от $\log \varepsilon$ высших степеней.

§ 5. Обобщения

1. Задача Неймана. В большинстве случаев замена условий Дирихле (1.6) условиями Неймана (1.7) не приводит к каким-либо осложнениям, но требует введения новой интегральной характеристики, описанной в п. 6 § 2. При $l_0 > 0$ итерационные процессы построения полной асимптотики решения *трехмерной* задачи (1.2), (1.5), (1.7) *полностью совпадают* с процессами из § 3, а для *двумерной* задачи – даже *упрощаются* (так как постоянная удовлетворяет однородному условию (1.31), то рациональной зависимости от $\log \varepsilon$ в (4.9) не возникает). Если же $l_0 = 0$, то у исходной и осредненной задач имеются условия разрешимости, выполнение которых приходится отслеживать на каждом шаге алгоритма. Исследование влияния сингулярных возмущений границы на условия разрешимости задач с гладкими (без осцилляции) коэффициентами проводилось в [15] (см. также [22], [23]).

2. Оценки старших производных. Предложение 1.3 позволяет оценить соболевские нормы разности истинного и асимптотического решений, однако из-за специфики рассматриваемой задачи пространства Соболева снабжаются нормами, зависящими от ε (ср. с [41], [42] и др.). Так, например, улучшенная оценка (3.18) выглядит следующим образом:

$$\|r^{-1}(u_0 - \mathcal{U}_0); L_2(\Omega(\varepsilon))\| + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l+2} \varepsilon^{|\alpha|-1} \|\partial_x^\alpha(u_0 - \mathcal{U}_0); L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_{l,\delta} \varepsilon^{1-\delta}. \quad (5.1)$$

На первый взгляд кажется, что появление степеней ε с положительными показателями при старших производных разности $u_0 - \mathcal{U}_0$ делает оценку (5.1) бесполезной. Это впечатление ошибочно, поскольку из-за быстроосциллирующих корректоров

и пограничных слоев производная $\partial_x^\alpha \mathcal{U}_0(\varepsilon, x)$ сама оказывается большей; именно, согласно (3.16) при $|\alpha| > 0$

$$\|\partial_x^\alpha \mathcal{U}_0; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \sim c \left(\int_{\Omega(\varepsilon)} \left(\varepsilon^{1-|\alpha|} + \varepsilon^{-|\alpha|} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{|\alpha|} \right)^2 dx \right)^{1/2} \sim C \varepsilon^{1-|\alpha|}.$$

Теперь видно, что неравенство (5.1) обосновывает малость *относительной* погрешности приближения $\partial_x^\alpha u_0(\varepsilon, x)$ производной $\partial_x^\alpha \mathcal{U}_0(\varepsilon, x)$ и что распределение степеней ε справа в (5.1) следует признать правильным. Те же приемы, что и в доказательстве предложения 1.3, вместе с общими результатами [43] приводят к априорным оценкам решений в классах Гельдера. В частности, в дополнение к теореме 3.3 и следствиям из нее можно получить такую оценку:

$$\left| \nabla_x u(\varepsilon, x) - \nabla_x \left\{ U_0(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 Y_k \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial U_0}{\partial x_k}(x) - U_0(0) X \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\} \right| \leq c_\delta \varepsilon^{1-\delta}. \quad (5.2)$$

3. Системы уравнений. Асимптотические конструкции и процессы, подготовленные в данной статье, пригодны и для общих самосопряженных эллиптических краевых задач. В части обоснования ограничительным является тот факт, что в [30], [31] изучены только системы второго порядка. Вместе с тем, перенесение результатов на задачи теории упругости не встречает затруднений при сохранении условий периодичности типа (1.5). Все члены рядов становятся вектор-функциями, и потому для двумерной задачи в п. 1 §4 неизвестный вектор $A(\log \varepsilon)$ находится при решении системы линейных алгебраических уравнений, т.е.

$$A(\log \varepsilon) = P_1(\log \varepsilon) P_2(\log \varepsilon)^{-1}, \quad \deg P_i = i, \quad P_1 = (P_{11}, P_{12}). \quad (5.3)$$

4. Другие типы локальных возмущений. Предложенный подход годится и тогда, когда в Ω появляется малое инородное включение, т.е. уравнение (1.2) выполняется всюду в Ω , но его коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} l_{ij}(\varepsilon, x) &= l_{ij}^0(x, \varepsilon^{-1}x), \quad x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon; \\ l_{ij}(\varepsilon, x) &= l_{ij}^1(x, \varepsilon^{-1}x), \quad x \in \omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подчеркнем, что такая задача сохраняет все свойства задачи Неймана. Наконец, при помощи малозначительных модификаций итерационных процессов можно рассмотреть случай $l_{ij}^1(\varepsilon, y) = \varepsilon^m l_{ij}^2(\varepsilon, y)$ в (5.4); здесь m – целое (положительное или отрицательное) число.

5. Несколько отверстий. Обсудим задачу (1.2), (1.5), (1.6) в области $\Omega(\varepsilon)$, получающейся удалением из параллелепипеда Ω нескольких малых отверстий $\omega_\varepsilon^1, \dots, \omega_\varepsilon^N$ с диаметрами $O(\varepsilon)$ и центрами $P^1, \dots, P^N$, удаленными один от другого на расстояние $O(1)$ (если расстояние между двумя отверстиями есть $O(\varepsilon)$, то их следует рассматривать как единое целое – связность множества $\bar{\omega}$ в статье не использовалась). В случае $n = 3, l > 0$ итерационные процессы сохраняются, и только последнее слагаемое в (1.32) приходится заменить суммой

$$\sum_{m=1}^N \chi_m(x) w_k^m(\varepsilon^{-1}(x - P^m), \log \varepsilon) \quad (5.5)$$

(срезы χ_m нужно выбрать так, чтобы $\text{supp } \chi_m$ не содержал точек $P^1, \dots, P^{m-1}, P^{m+1}, \dots, P^N$). В двумерных задачах размножение пограничных слоев по формуле (5.5) сопровождается усложнением зависимостей коэффициентов от $\log \varepsilon$. Так, в случае $l > 0$ они оказываются дробями вида $P_{N-1}(\log \varepsilon)P_N(\log \varepsilon)^{-1}$.

6. Краевые условия на гранях параллелепипеда. Пусть на двух противоположных гранях $\Gamma_i^\pm$ параллелепипеда Ω заданы условия Дирихле или Неймана, а на остальных – условия периодичности (1.5). В соответствующей задаче для уравнения (1.2) можно построить полное асимптотическое разложение решения, так как явление пограничного слоя около прямолинейного участка границы изучено полностью (см. [4]–[7], [44]–[46] и др.). Именно, предельные задачи, разобранные в § 2, дополняются еще одной задачей, которая содержит уравнение с оператором $\mathcal{L}(x^0, y, \partial_y)$ в полубесконечной призме $\mathbb{P} = [0, 1]^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, а также краевые условия Дирихле или Неймана на основании и условия периодичности на боковых гранях призмы. Требование экспоненциального затухания на бесконечности решений этой задачи порождает краевые условия на $\Gamma_i^\pm$, которыми снабжается осредненная задача (1.28) в Ω , а сами дефектные функционалы, обеспечивающие затухание, исследовались в работах [4], [47]–[51] и др. (см. также гл. 3, 5 в книгах [28] и [29]).

Простота асимптотических конструкций, упомянутых в предыдущем абзаце, объясняется возможностью продолжить по периодичности данные задачи с Ω на слой, ограниченный гиперплоскостями $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = \pm a_i\}$. По-иному дела обстоят в случае постановки краевых условий на гранях, примыкающих одна к другой. Из-за возникновения настоящей (не устранимой периодическим продолжением) реберной особенности границы появляются дополнительные степенные пограничные слои, которые изучены только в двумерной ситуации (см. [37], [52]). Опять-таки, наиболее серьезное препятствие – исследование поведения около бесконечности решений задач с периодическими коэффициентами в угловых областях. Как и в п. 2, алгоритмы [37], [52] без особых усилий могут быть приспособлены к задаче Дирихле для системы уравнений теории упругости в прямоугольнике, но обобщения на системы сложной структуры, иные краевые условия или многомерные области пока недоступны.

Список литературы

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
3. *Benoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
4. *Lions J.-L.* Some methods in the mathematical analysis of systems and their control. Beijing, China: Science Press, 1981.
5. *Бажалов Н. С., Панасенко Г. А.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
6. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
7. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
9. *Берс Л., Джон Ф., Шеттер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1968.

10. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка в области с щелью. 1. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. № 4. С. 514–537.
11. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка в области с щелью. 2. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 2. С. 265–284.
12. Ильин А. М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 6. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 57–82.
13. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
14. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при вариации области вблизи конических точек // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 94–96.
15. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы матем. анализа. № 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. С. 72–153.
16. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
17. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса // Матем. сб. 1983. Т. 122. № 4. С. 435–456.
18. Мазья В. Г., Назаров С. А. Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Труды ММО. 1987. Т. 50. С. 79–129.
19. Мазья В. Г., Назаров С. А. Об особенностях решений задачи Неймана в конической точке // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 3. С. 52–63.
20. Козлов В. А., Мазья В. Г. О спектре операторного пучка, порожденного задачей Дирихле в конусе // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 5. С. 638–660.
21. Nazarov S. A. Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions // Modelisation Math. Anal. Numer. 1993. V. 27. № 6. P. 777–799.
22. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1980.
23. Mazja W. G., Nasarov S. A., Plamenevski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. V. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
24. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–298.
25. Razu A. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
26. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. V. 76. P. 29–60.
27. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
28. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в кусочногладких областях. М.: Наука, 1991.
29. Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
30. Назаров С. А. Задача Дирихле для эллиптической системы с периодическими коэффициентами в угловой области // Вестн. ЛГУ. 1990. № 1. С. 32–35.
31. Nazarov S. A. Asymptotics at infinity of the solution to the Dirichlet problem for a system of equations with periodic coefficients in an angular domain // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 297–325.
32. Базвалов Н. С. Осреднение дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 516–519.
33. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 12. С. 1634–1679.

34. Назаров С. А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
35. Слуцкий А. С. Степенной пограничный слой в задаче осреднения вырождающегося эллиптического уравнения // Деп. в ВИНТИ № 3358-В86, 1986.
36. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Трещины в композитных материалах. 1 // Механика композитных материалов. 1990. № 5. С. 842–851; 2 // Механика композитных материалов. 1990. № 6. С. 1038–1046.
37. Назаров С. А. Асимптотика решений задачи Дирихле для уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами в прямоугольнике // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 5. С. 692–722.
38. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Об асимптотике на бесконечности решений с конечным интегралом Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 12. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 149–163.
39. Поллиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
40. Ланскоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
41. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–160.
42. Назаров С. А. Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 1. Задача в конусе // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 4. С. 142–163.
43. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962.
44. Панасенко Г. П. Асимптотики высших порядков решений задач о контакте периодических структур // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 4. С. 505–538.
45. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Панасенко Г. П. Асимптотическое разложение решений системы теории упругости в перфорированных областях // Матем. сб. 1983. Т. 120. № 1. С. 22–41.
46. Oleinik O. A., Panasenko G. P., Yosifian G. A. On the asymptotic expansion for solution of a homogenization problem in elasticity // Appl. Anal. 1983. V. 15. № 1–4. P. 15–32.
47. Ландис Е. М., Панасенко Г. П. Теорема об асимптотике решений эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 6. С. 1253–1255.
48. Назаров С. А. Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 101–112.
49. Назаров С. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач с периодическими коэффициентами // Вестн. ЛГУ. 1985. № 15. С. 16–22.
50. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Об условиях затухания и предельном поведении решений системы уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 3. С. 550–553.
51. Oleinik O. A., Yosifian G. A. On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1982. V. 78. № 1. P. 29–53.
52. Назаров С. А. Асимптотика решений задачи Дирихле в прямоугольнике для уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 219–220.

Государственная морская академия им. адм. С. О. Макарова,
Санкт-Петербург;
Институт проблем машиностроения РАН,
Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
16.12.1996 и 15.06.1998