Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, А. А. Дороговцев, О локализации расширенного стохастического интеграла, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 9, 19–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:38:44

УДК 519.21

А. М. Гомилко, А. А. Дороговцев

О локализации расширенного стохастического интеграла

Дано достаточное условие локальности расширенного стохастического интеграла по гауссовской мере на бесконечномерном пространстве. В конечномерном случае для векторного поля v из класса Соболева дано достаточное условие обращения в нуль дивергенции v на множестве нулей самого поля.

Библиография: 12 названий.

Введение

Пусть $\{w(t), t \in [0, 1]\}$ – винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Основным объектом исследования в настоящей работе является расширенный стохастический интеграл [1]

$$\int_0^1 x(t) dw(t)$$

от случайной функции x , удовлетворяющей условию

$$M \int_0^1 x(t)^2 dt < +\infty,$$

по w .

Известно, что в том случае, когда случайная функция x прогрессивно измерима относительно потока σ -алгебр, порожденного w , расширенный стохастический интеграл совпадает с интегралом Ито [2], который обладает следующим свойством локальности. Если случайное событие $A \subset \Omega$ таково, что

$$x \mathbf{1}_A = 0 \quad \text{п.в.}, \quad (0.1)$$

то и для интеграла Ито справедливо

$$\int_0^1 x(t) dw(t) \mathbf{1}_A = 0 \quad \text{п.н.} \quad (0.2)$$

Это соотношение является следствием возможности построения интеграла Ито как некоторого предела интегральных сумм. Так как расширенный стохастический интеграл строится более сложным образом, чем интеграл Ито, то априори не ясно, обладает ли он похожим свойством. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выделить некоторый класс $\mathcal{L}$ подмножеств вероятностного пространства так, что для всякой случайной функции x , входящей в область определения расширенного стохастического интеграла, и любого $A \in \mathcal{L}$ из (0.1)

следует (0.2). Далее про множества, обладающие вышеописанным свойством, говорим, что расширенный стохастический интеграл допускает локализацию на множестве A . Локализация расширенного стохастического интеграла исследовалась рядом авторов [3], [4]. Так, в работе [3] показана локальность расширенного стохастического интеграла на произвольных $A \in \mathcal{F}$ при условии, что рассматриваются только стохастически дифференцируемые интегранты. В [4], [5] введен класс гладких открытых подмножеств вероятностного пространства, на которых расширенный стохастический интеграл допускает локализацию. Наша работа продолжает линию [4], [5]. Основная идея работы состоит в следующем. Известно (см., например, [5]), что расширенный стохастический интеграл является сопряженным к оператору стохастического дифференцирования и, тем самым, может рассматриваться как некоторый бесконечномерный дифференциальный оператор на подходящем пространстве. Следовательно, множество, на котором расширенный стохастический интеграл будет обладать свойством локальности, должно быть достаточно массивным в любой малой окрестности каждой своей точки. В конечномерном случае такие множества удается охарактеризовать с помощью отношения

$$\frac{\lambda_d(B(x, r) \cap A)}{\lambda_d(B(x, r))},$$

где $B(x, r)$ – открытый шар радиуса R с центром в x , а λ_d – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$. В бесконечномерном случае для характеристики множеств, обладающих данным свойством, приходится использовать полугруппу Орнштейна–Уленбека [6].

Статья разбита на три части. В § 1 излагаются основные факты о расширенном стохастическом интеграле и известные утверждения о его локальности. Кроме того, здесь же приведены необходимые сведения о полугруппе Орнштейна–Уленбека на пространстве с гауссовской мерой. Второй параграф содержит описание класса множеств в $\mathbb{R}^d$, на которых является локальным оператор дивергенции, связанный с расширенным стохастическим интегралом в конечномерном случае. В § 3 приведены достаточные условия на множество, при выполнении которых расширенный стохастический интеграл допускает локализацию на нем. Эти условия формулируются в терминах поведения преобразований Орнштейна–Уленбека от индикатора множества.

§ 1. Расширенный стохастический интеграл, гладкие открытые множества и полугруппа Орнштейна–Уленбека

Так как мы собираемся рассматривать и конечномерный, и бесконечномерный случаи, то подходящей конструкцией расширенного стохастического интеграла является его определение в терминах гауссовского белого шума так, как это было сделано в работе [1]. Такой подход оправдан исторически, так как именно в этом контексте проблема локальности расширенного стохастического интеграла исследовалась впервые. Кроме того, при этом описание основных операторов стохастического анализа в пространстве интегрируемых с квадратом функционалов является удобным для наших целей. Заметим, однако, что все соответствующие объекты могут быть определены и в терминах гауссовских

мер на бесконечномерных пространствах. Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим гауссовский белый шум ξ на H , т.е. обобщенный гауссовский случайный элемент в H с нулевым средним значением и единичным ковариационным оператором. Формально ξ представляет собой набор $\{(\xi, \varphi); \varphi \in H\}$ совместно гауссовских случайных величин, обладающий свойством линейности по φ , такой, что

$$M(\xi, \varphi) = 0, \quad M(\xi, \varphi)^2 = \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in H.$$

Отметим, что в случае, когда H конечномерно, ξ является обычным случайным вектором в H . Для каждого $k \geq 1$ через H_k обозначим пространство всех k -линейных симметричных форм Гильберта–Шмидта на H с нормой

$$\forall A_k \in H_k \quad \|A_k\|_k^2 = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} A_k(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})^2.$$

Здесь $\{e_k\}$ – ортонормированный базис в H , от выбора которого значение $\|A_k\|$ не зависит. Для произвольной случайной величины α , интегрируемой с квадратом и измеримой относительно ξ , имеет место разложение Ито–Винера

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi, \dots, \xi), \quad (1.1)$$

в котором ряд сходится в среднем квадратическом, а отдельные слагаемые $A_k(\xi, \dots, \xi)$ представляют собой бесконечномерные аналоги многочленов Эрмита, построенные по соответствующим k -линейным формам. При этом справедливо равенство

$$M\alpha^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k! \|A_k\|_k^2.$$

По формам $\{A_k\}$ из разложения (1.1) и произвольному элементу $h \in H$ можно построить новые формы $A_k(h, \cdot, \dots, \cdot)$ размерности на единицу меньше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [1]. Случайная величина α называется *стохастически дифференцируемой*, если существует такой случайный элемент $D\alpha$ в H с конечным вторым моментом, что

$$\forall h \in H \quad (D\alpha, h) = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k(h, \xi, \dots, \xi).$$

В том случае, когда $\dim H < +\infty$, стохастическая производная совпадает с замыканием градиента гладких функций относительно сходимости в среднем квадратическом по стандартной гауссовской мере.

Оператор D является замкнутым оператором, действующим из пространства $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (с принятым соглашением $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$) в пространство $L_2(\Omega, P, H)$ H -значных случайных элементов, имеющих конечный второй момент нормы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [1]. Оператор $I = D^*$ называется *расширенным стохастическим интегралом*.

Название оправдано тем, что в случае, когда, например, $H = L_2([0, 1])$, а ξ построен с помощью винеровского процесса w по правилу

$$\forall \varphi \in H \quad (\xi, \varphi) := \int_0^1 \varphi(s) dw(s),$$

расширенный стохастический интеграл совпадает на прогрессивно измеримых случайных функциях с интегралом Ито [2].

В работах [4], [5] были введены гладкие открытые множества на исходном вероятностном пространстве следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [4], [5]. Случайное событие Δ называется *гладким открытым множеством*, если существует стохастически дифференцируемая случайная величина α такая, что

$$\mathbf{1}_\Delta = \mathbf{1}_{\{\alpha > 0\}}.$$

Используя соотношение $I = D^*$ и цепное правило, справедливое для стохастических производных, можно показать [4], [5], что расширенный стохастический интеграл обладает свойством локальности на гладких открытых множествах.

В конечномерном случае расширенный стохастический интеграл является замыканием дифференциального оператора, который на гладких векторных функциях имеет вид

$$I(\vec{f}) = \sum_{i=1}^d f_i x_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

здесь $\vec{x}$ – точка пространства, d – размерность. Поэтому при исследовании локальности оператора I можно использовать аналоги теорем Лебега о приближении значений функции усреднениями по шарам. Аналогом таких усреднений в бесконечномерной ситуации могут выступать операторы полугруппы Орнштейна–Уленбека.

В терминах разложения Ито–Винера (1.1) действие операторов этой полугруппы задается следующим образом:

$$T_t \alpha = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} A_k(\xi, \dots, \xi).$$

Построенные таким образом операторы обладают набором хороших свойств (см. [6]). Для нас будет важно, что $T_t \alpha$ имеет бесконечное число стохастических производных и сходится к α в среднем квадратическом при $t \rightarrow 0+$. В §3 мы предлагаем вероятностное представление для операторов $\{T_t\}$, которое можно использовать при обсуждении локальности расширенного стохастического интеграла.

§ 2. Свойства локальности оператора дивергенции

Пусть $x = \vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $H_n = L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ – вещественное гильбертово функциональное пространство со стандартным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_n$:

$$(\vec{v}, \vec{u})_n = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{v}(x) \cdot \vec{u}(x) d\mu(x),$$

и нормой $\|\cdot\|_n$, где $\mu(x)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Через H обозначим вещественное гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x) d\mu(x)$$

и нормой $\|\cdot\|$. Для функций, принадлежащих пространствам H_n или H локальным образом, будем пользоваться обозначениями H_n^{loc} и H^{loc} соответственно. Для множеств финитных бесконечно дифференцируемых векторных и скалярных функций введем обозначения

$$\mathcal{D}_n = C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Рассматривается линейный оператор $A_0: H_n \rightarrow H$ такой, что

$$A_0 \vec{v} = -\nabla \cdot \vec{v}, \quad (2.1)$$

с областью определения $D(A_0) = \mathcal{D}_n$. Для $\vec{v} \in D(A_0)$ и $g \in \mathcal{D}$ имеем очевидное соотношение

$$(A_0 \vec{v}, g) = \{\vec{v}, A_0^* g\}_n, \quad (2.2)$$

где линейный оператор $A_0^*: H \rightarrow H_n$:

$$A_0^* g = \{g_1, \dots, g_n\}, \quad g_j = \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Таким образом, область определения $D(A_0^*)$ сопряженного к A_0 оператора A_0^* плотна в H и, значит, оператор A_0 допускает замыкание $A = \overline{A_0} = A^{**}$ [7; § 8.1].

Стандартным способом доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Область определения оператора A имеет вид*

$$D(A) = \{\vec{v} \in H_n : \nabla \cdot \vec{v} \in H\}, \quad A\vec{v} := -\nabla \cdot \vec{v}, \quad (2.3)$$

где дифференциальное выражение $\nabla \cdot \vec{v}$ понимается в смысле теории распределений (см., например, [8; гл. 1]):

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{v} \in H_n$ и $\nabla \cdot \vec{v} \in H$, а функция $\varphi \in \mathcal{D}$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, причем

$$\varphi(x) = 0, \quad |x| \geq 1, \quad \varphi(0) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) = 1.$$

Тогда последовательность функций

$$\begin{aligned}\vec{v}_k(x) &= k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(k(x-y)) \vec{v}(y) d\mu(y) \\ &= k^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(ky) \vec{v}(y) d\mu(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

стремится при $h \rightarrow 0$ к $\vec{v}$ в смысле нормы пространства H_n (см. [9]). Далее, пусть последовательность функций $\chi_k(x) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\chi_k(x) &= 1, & |x| &\leq k, \\ \chi_k(x) &\in [0, 1], & |x| &\in [k, k+1], \\ \chi_k(x) &= 0, & |x| &\geq k+1.\end{aligned}$$

Тогда последовательность вектор-функций $\vec{u}_k(x) = \chi_k(x) \vec{v}_k \in \mathcal{D}$ удовлетворяет соотношению $\|\vec{u}_k(x) - \vec{v}(x)\|_n \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Кроме того, в силу (2.3) последовательность

$$\begin{aligned}A_0 \vec{u}_k(x) &= -\nabla \cdot \chi_k(x) \vec{v}_k(x) \\ &= -\nabla \chi_k(x) \cdot \vec{v}_k(x) - \chi_k(x) k^n \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(k(x-y)) \vec{v}(y) d\mu(y)\end{aligned}$$

стремится при $k \rightarrow \infty$ в пространстве H к функции $A\vec{v}$ из (2.3). Таким образом, множество

$$D_0 = \{\vec{v} \in H_n : -\nabla \cdot \vec{v} \in H\} \subset D(A),$$

и на этом множестве $A\vec{v} = -\nabla \cdot \vec{v}$.

Далее, если $\vec{v} \in D(A)$, то найдется такая последовательность $\vec{v}_k \in \mathcal{D}_n$, что

$$\|\vec{v}_k - \vec{v}\|_n + \|A\vec{v}_k - A\vec{v}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \vec{v}(x) \cdot \nabla \varphi(x) d\mu(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{v}_k \cdot \nabla \varphi(x) d\mu(x) \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \vec{v}_k(x) \varphi(x) d\mu(x) (A\vec{v}(x), \varphi(x)).\end{aligned}$$

Это означает, что в смысле распределений $-\nabla \cdot \vec{v} = A\vec{v} \in H$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что при описании области определения (2.3) оператора A условие $\nabla \cdot \vec{v} \in H$ нельзя заменить на условие

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \in H^{\text{loc}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \nabla \cdot \vec{v} \in H.$$

Действительно, пусть $n = 2$ и функция $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \varphi(x) \equiv 1, \quad |x| \leq 1, \quad \varphi(x) \equiv 0, \quad |x| \geq 2.$$

Положим

$$\vec{v} = \{v_1, v_2\}, \quad v_1(x) = \frac{x_2}{|x|} \psi(x), \quad v_2(x) = -\frac{x_1}{|x|} \psi(x).$$

Тогда при $j = 1, 2$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_j^2(x) dx_1 dx_2 \leq \int_{|x| \leq 2} dx_1 dx_2 < \infty.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{x_1 x_2}{|x|^3} \varphi(x) + \frac{x_2}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{x_1 x_2}{|x|^3} \varphi(x) - \frac{x_1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_2}$$

и, значит,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{x_2}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} - \frac{x_1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_2}.$$

Таким образом, $\nabla \cdot \vec{v} \in H$, однако

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \notin H^{\text{loc}}.$$

Далее понадобится разложение пространства H_n в ортогональную сумму (см. [10; с. 22])

$$H_n = H_n^0 \oplus H_n^1, \quad (2.4)$$

где

$$H_n^0 = \{\vec{v} \in H_n : \nabla \cdot \vec{v} = 0\}, \quad H_n^1 = \{\vec{v} \in H_n : \vec{v} = \nabla \cdot \psi, \psi \in H_n^{\text{loc}}\}.$$

При этом пространство H_n^0 является замыканием в H_n множества финитных бесконечно дифференцируемых вектор-функций с нулевой дивергенцией.

ЛЕММА 2.2. *Область определения $D(A)$ оператора A состоит из функций вида*

$$\vec{v} = \nabla \cdot \varphi + \vec{w} \in H_n \quad (2.5)$$

таких, что

$$\varphi \in W_2^{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad -\Delta \varphi \in H, \quad \vec{w} \in H_n^0, \quad (2.6)$$

причем

$$A\vec{v} = -\Delta \varphi. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{v} \in D(A)$. Тогда найдется такая последовательность $\vec{v}_k \in \mathcal{D}_n$, что

$$\|\vec{v}_k - \vec{v}\|_n \rightarrow 0, \quad \|A\vec{v}_k - A\vec{v}\|_n \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Согласно (2.4) имеем разложения

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{k,0} + \nabla \psi_k, \quad \vec{v}_{k,0} \in H_n^0. \quad (2.8)$$

При этом в силу ортогональности разложения (2.4) получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(x) \cdot \vec{v}_k(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \psi_k(x) d\mu(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

откуда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \nabla \cdot \vec{v}_k(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \varphi(x) \cdot \nabla \psi_k(x) d\mu(x).$$

Таким образом, в смысле теории распределений выполняется равенство

$$\Delta \psi_k = \nabla \cdot \vec{v}_k \in \mathcal{D}$$

и, значит, функция $\psi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ [8; гл. 1, § 4]. Тогда и функция $\vec{v}_{k,0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Далее, в силу ортогональности (2.8) существуют пределы в пространстве H_n

$$\vec{w} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{v}_{k,0}, \quad \nabla \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla \varphi_k.$$

Тогда так как в H_n

$$A\vec{v}_k = \Delta \varphi_k \rightarrow A\vec{v}, \quad k \rightarrow \infty,$$

то, значит, и

$$\Delta \varphi_k \rightarrow \Delta \varphi, \quad k \rightarrow \infty,$$

в H . Таким образом, для $\vec{v} \in D(A)$ справедливо представление (2.5) с функцией

$$\varphi \in W_2^{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad \Delta \varphi \in H.$$

Пусть теперь функция $\vec{v}$ имеет вид (2.5) со свойствами (2.6), (2.7). Тогда $\nabla \cdot \vec{v} = \Delta \varphi \in H$ и по лемме 2.1 из (2.6) получаем, что $\vec{v} \in D(A)$.

Лемма доказана.

Далее через $B_h(x_0)$ обозначаем шар радиуса $h > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для произвольного измеримого множества $\Omega \in \mathbb{R}^n$ полагаем $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, а через $\chi_\Omega(x)$ будем обозначать его характеристическую функцию:

$$\chi_\Omega(x) = 1, \quad x \in \Omega, \quad \chi_\Omega(x) = 0, \quad x \notin \Omega.$$

Напомним определение дифференцируемости функции в точке в смысле пространства L_p [9; гл. 8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$, имеет производную в точке x_0 в смысле L_p , если существует такая линейная функция $\Lambda(x) = \Lambda_{x_0}(x)$, что

$$\left\{ h^{-n} \int_{|x| \leq h} |f(x_0 + x) - f(x_0) - \Lambda(x)|^p d\mu(x) \right\}^{1/p} = o(h), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Следуя определению 2.1, будем говорить, что вектор-функция

$$\vec{u}(x) = \{u_1, \dots, u_n\} \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad p \in [1, \infty),$$

имеет производную в точке x_0 в смысле L_p , если каждая из компонент u_j имеет такую производную в точке x_0 .

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, $\mu(\Omega) \neq 0$. Тогда согласно теореме Лебега [9; гл. 1, §2] для почти всех $x \in \Omega$ выполняется соотношение

$$\frac{\mu(B_h(x_0) \cap \Omega)}{\mu(B_h(x_0))} = 1 + o(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

В связи с (2.10) дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть число $p \in (0, \infty)$. Измеримое множество $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ненулевой меры называется *обобщенно гладким порядка p* , если для почти всех $x_0 \in \Omega$ выполняется соотношение

$$\frac{\mu(B_h(x_0) \cap \Omega)}{\mu(B_h(x_0))} = 1 + o(h^p), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Далее совокупность всех обобщенно гладких множеств порядка p обозначаем через $\mathcal{E}_p$. Очевидно, что $\mathcal{E}_{p_1} \subset \mathcal{E}_{p_2}$, $p_2 < p_1$, и можно считать, что произвольное измеримое множество ненулевой меры является обобщенно гладким порядка 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Непосредственно из определений 2.1 и 2.2 следует, что в случае $p \geq 1$ множество Ω принадлежит $\mathcal{E}_p$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\chi_\Omega(x)$ для почти всех $x_0 \in \Omega$ имеет нулевую производную в смысле L_p . Кроме того, в [11; теорема 10] доказано следующее утверждение: если функция $f \in L_p^{\text{loc}}$, $p \geq 1$, удовлетворяет для почти всех $x_0 \in \Omega$ соотношению

$$\frac{1}{h^n} \int_{|x-x_0| \leq h} |f(x)|^p d\mu(x) = O(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

то f имеет нулевую производную в смысле L_p для почти всех $x_0 \in \Omega$. Полагая в этом утверждении функцию $f(x) = 1 - \chi_\Omega(x)$, заключаем, что при $p \geq 1$ условие (2.11) эквивалентно условию (для почти всех $x_0 \in \Omega$)

$$\frac{\mu(B_h(x_0) \cap \Omega)}{\mu(B_h(x_0))} = 1 + O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

ЛЕММА 2.3. Семейство $\mathcal{E}_p$ замкнуто относительно образования конечных пересечений и счетных объединений.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – измеримое множество ненулевой меры и $p \in [1, \infty)$. Тогда следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) $\Omega \in \mathcal{E}_p$;
- 2) найдется такая функция $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, которая имеет производную в точке x_0 в смысле L_p для почти всех $x_0 \in \Omega$, причем

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \Omega \quad (\text{п.в.}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ является очевидной (в качестве $f(x)$ достаточно взять функцию $\chi_\Omega(x)$). Таким образом, для доказательства леммы следует установить справедливость импликации $2) \Rightarrow 1)$.

Пусть выполнено условие 2) и точка $x_0 \in \Omega$, причем $f(x_0) = \beta > 0$ и $f(x)$ имеет производную в точке x_0 в смысле L_p . Введем обозначение

$$S(h) = S_{x_0}(h) = 1 - \frac{\mu(B_h(x_0) \cap \Omega)}{\mu(B_h(x_0))} = \frac{\mu(B_h(x_0) \setminus \Omega)}{\mu(B_h(x_0))}, \quad h > 0.$$

Тогда, учитывая, что $u(x) = 0$ при $x \notin \Omega$, получаем

$$\begin{aligned} \beta S(h) &= \frac{1}{\mu(B_h(x_0))} \int_{|x| < h, x_0+x \notin \Omega} f(x_0) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\mu(B_h(x_0))} \int_{|x| < h, x_0+x \notin \Omega} [f(x_0) - f(x_0+x) + \Lambda_{x_0}(x)] d\mu(x) \\ &\quad - \frac{1}{\mu(B_h(x_0))} \int_{|x| < h, x_0+x \notin \Omega} \Lambda_{x_0}(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

где $\Lambda_{x_0}(x)$ – линейная функция из определения 2.1, так что $|\Lambda_{x_0}(x)| \leq \|\Lambda_{x_0}\| \cdot |x|$. Отсюда, используя в первом интеграле неравенство Гёльдера вместе с условием 2), для $q = p/(p-1)$ имеем

$$\begin{aligned} \beta S(h) &\leq \left\{ \frac{1}{\mu(B_h(x_0))} \int_{|x| < h} |f(x_0) - f(x_0+x) + \Lambda_{x_0}(x)|^p d\mu(x) \right\}^{1/p} \cdot S^{1/q}(h) \\ &\quad + \|\Lambda_{x_0}\| h S(h) = o(h) S^{1/q}(h) + ch S(h), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значит, $S(h) = o(h) S^{1/q}(h)$, $h \rightarrow 0$, и тогда с учетом $1 - 1/q = 1/p$ получаем $S(h) = o(h^p)$, $h \rightarrow 0$.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – гладкое открытое множество в смысле определения 1.2.1 из [5]. Тогда $\Omega \in \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_2$, где $p = 2n/(n-2)$ при $n > 2$ и $p > 2$ любое при $n = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [5; лемма 1.2.1] для гладкого открытого множества Ω существует такая неотрицательная функция $f(x) \in W_2^{1,\text{loc}}$, что

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Omega \quad (\text{п.в.}).$$

Тогда [9; гл. 8, § 1] функция $f(x)$ имеет производную в смысле L_p для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, где $p = 2n/(n-2) > 2$ при $n > 2$, а при $n = 1, 2$ в качестве показателя p можно взять любое как угодно большое положительное число. Таким образом, с помощью леммы 2.4 заключаем, что $\Omega \in \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_2$.

Следствие доказано.

Далее понадобится следующее простое утверждение.

ЛЕММА 2.5. Пусть $f \in L_p^{\text{loc}}$, $p \in (1, \infty)$, причем

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega \in \mathcal{E}_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда для почти всех $x_0 \in \Omega$ функция f имеет нулевую производную в смысле L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие $\Omega \in \mathcal{E}_q$ и неравенство Гёльдера вместе с теоремой Лебега, получаем при почти всех $x_0 \in \Omega$ и $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^n} \int_{|x| \leq h} |f(x_0 + x)| dx &= \frac{1}{h^n} \int_{|x| \leq h, x_0 + x \notin \Omega} |f(x_0 + x)| dx \\ &\leq \frac{1}{h^n} \mu^{1/q}(B_h(x_0) \setminus \Omega) \cdot \left(\int_{|x| \leq h} |f(x_0 + x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq o(1) \frac{h^{1+n/q}}{h^n} \cdot \left(\int_{|x| \leq h} |f(x_0 + x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= o(h) \cdot \left(\frac{1}{h^n} \int_{|x| \leq h} |f(x_0 + x)|^p dx \right)^{1/p} = o(h). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Возвращаясь к вопросу о локальности оператора дивергенции, установим справедливость следующего важного утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\vec{u} \in D(A)$, причем для почти всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция $\vec{u}$ имеет производную в точке x в смысле L_1 . Предположим, что

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.12)$$

Тогда

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (\text{n.в.}). \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ со свойствами

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) = 1, \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq 1,$$

и положим $\varphi_h(x) = \varphi(x/h)$, $h > 0$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} L_h(y) &:= h^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(x-y) (A\vec{u})(x) d\mu(x) = h^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi_h(x-y) \cdot \vec{u}(x) d\mu(x) \\ &= h^{-(n+1)} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi' \left(\frac{x-y}{h} \right) u_j(x) d\mu(x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В частности, если $y \in \Omega$, то из (2.14) получаем

$$\begin{aligned} L_h(y) &= h^{-(n+1)} \sum_{j=1}^n \int_{|x-y| < h, x \notin \Omega} \varphi' \left(\frac{x-y}{h} \right) [u_j(x) - u_j(y) - \Lambda_{y,j}(x-y)] d\mu(x) \\ &\quad + h^{-(n+1)} \sum_{j=1}^n \int_{|x-y| < h, x \notin \Omega} \varphi' \left(\frac{x-y}{h} \right) \Lambda_{y,j}(x-y) d\mu(x). \end{aligned}$$

Отсюда для почти всех $y \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} |L_h(y)| &\leq ch^{-(n+1)} \sum_{j=1}^n \int_{|t|<h} |u_j(y+t) - u_j(y) - \Lambda_{y,j}(t)| d\mu(t) \\ &\quad + h^{-(n+1)} \|\Lambda_y\| \int_{|t|<h, t+y \notin \Omega} |t| d\mu(t) \\ &\leq c[o(1) + h^{-n} \mu(B_h(y) \setminus \Omega)] = o(1), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значит, для почти всех $y \in \Omega$ имеем соотношение

$$L_h(y) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

С другой стороны [9],

$$\|L_h(y) - (A\vec{u})(y)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

и, значит, существует такая последовательность $h_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, что для почти всех $y \in \Omega$

$$L_{h_k}(y) \rightarrow (A\vec{u})(y), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Сравнивая (2.15) с (2.16), получаем утверждение теоремы (2.13). Теорема 2.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть функция $\vec{u} \in D(A)$ и

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2. \quad (2.17)$$

Тогда

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (n.в.). \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.5 (с $p = 2$) получаем, что $\vec{u}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, откуда и получаем утверждение (2.18).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Следствие 2.2 с учетом следствия 2.1 обобщает результат [5], где доказана локальность оператора A на гладких открытых множествах.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть функция $\vec{u} \in D(A)$, причем $\vec{u} \in W_1^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда из условия (2.12) вытекает утверждение (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включения $\vec{u} \in W_1^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ следует, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция $\vec{u}$ имеет производную в точке x в смысле L_1 . Отсюда и из теоремы 2.1 получаем утверждение следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Следствие 2.3 обобщает результат [9; предложение 3.5] (см. также [3]), где доказано свойство локальности оператора A на функциях $\vec{u} \in D(A)$ из пространства $\vec{u} \in W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Введем в рассмотрение ядро Пуассона

$$P_t(x) = \frac{c_n t}{(|x|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}, \quad c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}},$$

и интеграл Пуассона от функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ [9; гл. 3, § 2]:

$$v(x, t) := P_t * f = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) f(x - y) dy.$$

Пусть $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Для фиксированного x_0 изменим функцию f вне ограниченного открытого множества Ω , $x_0 \in \Omega$, положив ее там равной нулю. Для получившейся функции $\tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим ее интеграл Пуассона $v(x, t) = P_t * \tilde{f}$. Напомним определение гармонической производной в точке [9; гл. 8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Функция $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ имеет гармоническую производную в точке x_0 , если у функций

$$v(x, t), \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

существуют нетангенциальные пределы при $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$.

Будем говорить, что вектор-функция $\vec{u}(x) = (u_1, \dots, u_n) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ имеет гармоническую производную в точке x_0 , если каждая из компонент u_j имеет такую производную в точке x_0 .

Основной результат параграфа содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть функция $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\} \in D(A)$ имеет гармоническую производную для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $\vec{u}(x) = 0$, $x \in \Omega$, то $(A\vec{u})(x) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, будем считать, что множество Ω имеет конечную меру. Согласно лемме 2.2 имеем разложение

$$\vec{u} = \nabla \varphi + \vec{w} \in H_n, \tag{2.19}$$

где

$$\varphi \in W_2^{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad -\Delta \varphi \in H, \quad \vec{w} = \{w_1, \dots, w_n\} \in H_n^0, \tag{2.20}$$

причем

$$A\vec{u} = -\Delta \varphi. \tag{2.21}$$

Тогда функция $\vec{w}$ имеет гармоническую производную для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, не уменьшая общности, считаем, что $\vec{w}$ обращается в нуль в некоторой окрестности множества Ω .

По теореме 2 из [9; гл. 8, § 2] для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, что $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ и функция $\vec{w}$ может быть представлена в виде

$$\vec{w} = \vec{g} + \vec{f}, \quad \vec{g} \in W_1^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad \vec{f}(x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.22}$$

Далее понадобится более детальное описание построения представления (2.22), данное в [9]. Пусть $\alpha > 0$ – фиксированное число и

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x, t) : |x - x_0| < \alpha t\}$$

– конусы в пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{x_0 \in \Omega_\varepsilon} \Gamma_\alpha(x_0).$$

Функция $\vec{g}$ является следом на $t = 0$ некоторой функции $\vec{g}_0(x, t) \in W_1^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, которая при $(x, t) \in \mathcal{R}^*$ совпадает с интегралом Пуассона $(P_t * \vec{w})(x)$. В частности,

$$\vec{w}(x_0) = \vec{g}(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} (P_t * \vec{w})(x_0), \quad x_0 \in \Omega_\varepsilon,$$

где предел понимается в смысле нетангенциальной сходимости. Тогда так как $A\vec{w} = 0$, то

$$\nabla \cdot \vec{g}_0(x, t) = (\nabla \cdot P_t * \vec{w})(x) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{R}^*. \quad (2.23)$$

Пусть $\psi \in \mathcal{D}$ и $\psi(x) = 0$ при $x \notin F$, где $F \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое открытое множество такое, что $\Omega_\varepsilon \subset F$. Тогда, используя (2.23), получаем

$$\begin{aligned} (A\vec{g}, \psi) &= (\vec{g}, \nabla \psi)_n = \lim_{t \rightarrow +0} \int_F \vec{g}_0(x, t) \nabla \psi(x) d\mu(x) \\ &= - \lim_{t \rightarrow +0} \int_{F \setminus \Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot \vec{g}_0)(x, t) \psi(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

откуда, используя неравенство Коши–Буняковского, имеем оценку

$$\begin{aligned} |(A\vec{g}, \psi)| &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \left| \int_{F \setminus \Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot \vec{g}_0)(x, t) \psi(x) d\mu(x) \right| \leq c \int_{F \setminus \Omega_\varepsilon} |\psi(x)| d\mu(x) \\ &\leq c \mu^{1/2}(F \setminus \Omega_\varepsilon) \|\psi\|, \quad c = \|\vec{g}_0\|_{W_1^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.24) заключаем, что

$$\int_F |(A\vec{g})(x)|^2 d\mu(x) \leq c^2 \mu(F \setminus \Omega_\varepsilon). \quad (2.25)$$

Выбирая теперь открытое множество $F = F_\delta$ таким образом, чтобы $\Omega_\varepsilon \subset F_\delta$ и $\mu(F_\delta \setminus \Omega_\varepsilon) < \delta$ с произвольно малым $\delta > 0$, из (2.25) получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |(A\vec{g})(x)|^2 d\mu(x) \leq c^2 \delta,$$

откуда заключаем, что

$$(A\vec{g})(x) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega_\varepsilon. \quad (2.26)$$

Далее, в силу условия теоремы и разложения (2.22) имеем

$$\nabla \varphi(x) + \vec{g}(x) \in W_1^{1, \text{loc}}, \quad \nabla \varphi(x) + \vec{g}(x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon. \quad (2.27)$$

Тогда, используя (2.21), (2.26), (2.27) и следствие 2.3, получаем

$$(A\vec{u})(x) = A(\nabla\varphi)(x) = A(\nabla\varphi + \vec{g})(x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда заключаем, что $(A\vec{u})(x) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$.

Теорема 2.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Так как из условия, что $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ имеет производную в точке x_0 , следует существование у f в этой точке гармонической производной [9; гл. 8], то теорема 2.2 является обобщением теоремы 2.1, однако при доказательстве теоремы 2.2 использовалось следствие из теоремы 2.1 (следствие 2.3).

§ 3. Усреднение функций в бесконечномерном пространстве и измеримые линейные функционалы

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, μ – гауссовская мера на борелевской σ -алгебре пространства H , имеющая нулевое среднее значение и невырожденный корреляционный оператор S . Рассмотрим функцию $f: H \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть

$$h_\varepsilon(u) = e^{-\|u\|^2/(2\varepsilon^2)}, \quad u \in H, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\gamma(\varepsilon) = \int_H h_\varepsilon(u) \mu(du).$$

В том случае, когда $\dim H < +\infty$, имеют место следующие факты:

- 1) для всякой ограниченной и непрерывной в 0 функции f

$$\frac{1}{\gamma(\varepsilon)} \int_H f(u) h_\varepsilon(u) \mu(du) \rightarrow f(0), \quad \varepsilon \rightarrow 0+;$$

- 2) если вдобавок f дифференцируема в точке 0 и, по-прежнему, $f(0) = 0$, то

$$\frac{1}{\gamma(\varepsilon)} \int_H f(u) h_\varepsilon(u) \mu(du) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Покажем, что в случае $\dim H = +\infty$ свойство 1) имеет место, а аналог свойства 2) может нарушаться.

Вычислим $\gamma(\varepsilon)$ и

$$\int_H h_\varepsilon(u) \|u\|^2 \mu(du).$$

Пусть ковариационный оператор меры μ в S имеет собственный ортонормированный базис $\{e_k, k \geq 1\}$ и собственные числа $\{\lambda_k, k \geq 1\}$. Согласно предположению $\lambda_k > 0$ для всех $k \geq 1$. Мету μ удобно представлять как распределение в H случайного элемента

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k e_k,$$

где $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – независимые $N(0; 1)$ случайные величины. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon) &= \mathbf{M} e^{-\|\xi\|^2/(2\varepsilon^2)} \mathbf{M} \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \right\} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} e^{-\lambda_k \xi_k^2/(2\varepsilon^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_k/\varepsilon^2}}; \\ \int_H h_\varepsilon(u) \|u\|^2 \mu(du) &= \mathbf{M} e^{-\|\xi\|^2/(2\varepsilon^2)} \|\xi\|^2 = \mathbf{M} \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbf{M} \xi_k^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \right\} \\ &= \gamma(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sqrt{1 + \lambda_k \varepsilon^{-2}} \mathbf{M} \xi_k^2 e^{-\lambda_k \xi_k^2/(2\varepsilon^2)} = \gamma(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 + \varepsilon^{-2} \lambda_k}. \end{aligned}$$

Следовательно, для произвольного $r > 0$

$$\frac{1}{\gamma(\varepsilon)} \int_{\{\|u\| \geq r\}} h_\varepsilon(u) \mu(du) \leq \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 + \varepsilon^{-2} \lambda_k} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Полученное соотношение влечет за собой выполнение 1) стандартным образом. Рассмотрим теперь аналог 2), где вместо f рассматривается квадрат произвольного измеримого функционала. В терминах случайных величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$ произвольный измеримый функционал от случайного элемента ξ может быть записан в виде

$$g(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \xi_k,$$

где числа $\{\varphi_k, k \geq 1\}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 < +\infty.$$

Найдем

$$\mathbf{M} h_\varepsilon(\xi) g(\xi) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \mathbf{M} h_\varepsilon(\xi) \varphi_k \xi_k \varphi_j \xi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} h_\varepsilon(\xi) \varphi_k^2 \xi_k^2 = \gamma(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{1 + \varepsilon^{-2} \lambda_k}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \gamma(\varepsilon)} \int_H h_\varepsilon(u) g(u) \mu(du) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{\varepsilon^2 + \lambda_k}.$$

Последнее выражение может не быть ограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Например, для $\lambda_k = \varphi_k^2 = 1/k^2$, $k \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2}{\varepsilon^2 + \lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2 \varepsilon^2}.$$

Полученная сумма имеет порядок ε^{-1} при $\varepsilon \rightarrow 0+$, в чем легко убедиться, вычисляя ее с помощью вычетов.

Приведенные рассуждения показывают, что стохастически дифференцируемые функции (а линейные измеримые функционалы являются простейшими примерами таких функций) не наследуют все свойства дифференцируемых по Фреше функций.

Пусть ξ имеет единичный ковариационный оператор, т.е. является “белым шумом” в H , формально заданным с помощью равенства

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k,$$

где, по-прежнему, $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – независимые стандартные гауссовские величины, а $\{e_k, k \geq 1\}$ – ортонормированный базис в H . Несмотря на то что ξ – обобщенный случайный элемент в H , скалярные произведения

$$(\varphi, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, e_k) \xi_k, \quad \varphi \in H,$$

корректно определены и представляют собой семейство совместно гауссовских случайных величин. Далее речь идет о приближении функционалов от ξ , т.е. случайных величин, измеримых относительно $\sigma(\xi) = \sigma(\{(\varphi, \xi), \varphi \in H\})$. Чтобы подчеркнуть эту измеримость, иногда будем писать $\alpha(\xi)$ вместо α (хотя α не является борелевской функцией ξ). Для случайных величин или случайных элементов в H , интегрируемых с квадратом, справедливо разложение Ито–Винера в ряд по обобщенным многочленам Эрмита от ξ :

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi, \dots, \xi), \quad (3.1)$$

см. [5]. Если в H имеется другой “белый шум” ξ' , то через $\alpha(\xi')$ обозначаем случайную величину или элемент вида

$$\alpha(\xi') = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi', \dots, \xi'). \quad (3.2)$$

С помощью обычной предельной процедуры, используя (3.1), можно определить $\alpha(\xi')$ и при отсутствии конечного второго момента. Рассмотрим теперь следующие операторы в пространствах интегрируемых с квадратом случайных величин и элементов. Для α , имеющей разложение (3.1), стохастическая производная $D\alpha$ – случайный элемент в H такой, что

$$\forall \varphi \in H \quad (D\alpha, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} k A_k(\varphi; \xi, \dots, \xi).$$

Для случайного элемента F , имеющего разложение

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(\xi, \dots, \xi) \quad (3.3)$$

(с H -значными T_k), расширенный стохастический интеграл $I(F)$ – такая случайная величина, что

$$I(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda \tilde{T}_k(\underbrace{\xi, \dots, \xi}_{k+1}),$$

где $\Lambda \tilde{T}_k$ – симметризация формы $\tilde{T}_k$, заданной по правилу

$$\tilde{T}_k(\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}) = (\varphi_1, T_k(\varphi_2, \dots, \varphi_{k+1})).$$

Преобразование Орнштейна–Уленбека случайной величины α или случайного элемента F из (3.1) или (3.3)

$$\begin{aligned} T_t(\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} A_k(\xi, \dots, \xi), \\ T_t(F) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} T_k(\xi, \dots, \xi). \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{D}(D)$ и $\mathcal{D}(I)$ области определения D и I . Справедливо соотношение

$$\forall \alpha \in \mathcal{D}(D), F \in \mathcal{D}(I) \quad M\alpha I(F) = M(D\alpha, I(F)). \quad (3.4)$$

Используя (3.4), можно проверить, что на области определения D

$$T_t D = e^t D T_t,$$

а на области определения I

$$T_t I = e^{-t} I T_t.$$

Отметим, что в силу свойств операторов Орнштейна–Уленбека операторы DT_t и IT_t определены на всех интегрируемых с квадратом случайных величинах и элементах. Так как при $t \rightarrow 0+$ операторы T_t сильно сходятся к единичному, то мы будем использовать выражения DT_t и IT_t для аппроксимации D и I . Нам понадобится другое представление для T_t . Пусть ξ' – “белый шум” в H , не зависящий от ξ . Известно [12], что

$$T_t \alpha(\xi) = M\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1 - e^{-2t}}\xi')/\xi\}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим конечномерную случайную величину

$$\alpha = f((e_1, \xi), \dots, (e_d, \xi)),$$

где $\{e_k, k \geq 1\}$ – ортонормированный базис в H , f – борелевская функция на $\mathbb{R}^d$ такая, что

$$M\alpha^2 < +\infty.$$

В этом случае

$$T_t \alpha(\xi) = f_t((e_1, \xi), \dots, (e_d, \xi)),$$

где функция f_t получена из f с помощью интегрального преобразования

$$f_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d (\sqrt{1 - e^{-2t}})^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \exp\left\{-\frac{1}{2}\|e^{-t}x - u\|^2 \frac{1}{(1 - e^{-2t})}\right\} du. \quad (3.6)$$

Из приведенной формулы следует, что $f_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ и, в частности,

$$\begin{aligned} \nabla f_t(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d (\sqrt{1-e^{-2t}})^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\|e^{-t}x - u\|^2 \frac{1}{(1-e^{-2t})}\right\} (e^{-t}x - u) du \cdot \frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, случайная величина $T_t\alpha(\xi)$ имеет стохастическую производную и

$$\forall \varphi \in H \quad (DT_t\alpha(\xi), \varphi) = \sum_{k=1}^d \partial_k f_t((e_1, \xi), \dots, (e_d, \xi))(\varphi, e_k).$$

Используя (3.7) и формулу замены переменных, получаем

$$\forall \varphi \in H \quad (DT_t\alpha(\xi), \varphi) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{M}\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')(\varphi, \xi')/\xi\}. \quad (3.8)$$

Для того чтобы распространить эту формулу на случайные величины, не являющиеся конечномерными, полезна следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. *Пусть случайная величина β интегрируема с квадратом. Тогда существует $x \in H$ такой, что*

$$\forall \varphi \in H \quad (x, \varphi) = \mathbf{M}\beta(\xi, \varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить соотношение

$$|\mathbf{M}\beta(\xi, \varphi)| \leq \sqrt{\mathbf{M}\beta^2} \|\varphi\|.$$

Полученный элемент x обозначаем в дальнейшем как $\mathbf{M}\beta\xi$. Теперь из теоремы Фубини и предельного перехода следует, что

$$DT_t\alpha(\xi) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{M}\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')\xi'/\xi\} \quad (3.9)$$

для произвольной случайной величины α , интегрируемой с квадратом. При этом, используя в лемме 3.1 неравенство Гёльдера вместо неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$|DT_t\alpha(\xi)| \leq C_q \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{M}\{|\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')\xi'|^p/\xi\}, \quad (3.10)$$

где $1/p + 1/q = 1$, $1 < p \leq 2$. Теперь из (3.9) с учетом коммутационных соотношений между T_t , D и I получаем

$$\forall \alpha \in \mathcal{D}(D) \quad T_tD\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{M}\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')\xi'/\xi\}. \quad (3.11)$$

Для того чтобы получить такое же соотношение для расширенного стохастического интеграла, понадобится лемма, аналогичная лемме 3.1.

ЛЕММА 3.2. Пусть F – случайный элемент в H , имеющий конечный второй момент нормы, ξ' – “белый шум”, не зависящий от ξ . Тогда определена случайная величина

$$(F(\xi), \xi') := \sum_{k=1}^{\infty} (F(\xi), e_k)(e_k, \xi'),$$

где ряд сходится с вероятностью 1. При этом сумма ряда не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_k, k \geq 1\}$ и

$$\mathbf{M}(F(\xi), \xi')^2 = \mathbf{M}\|F(\xi)\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что ряд сходится с вероятностью 1, следует из теоремы Фубини. Кроме того,

$$\mathbf{M}(F(\xi), \xi')^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}\{(F(\xi), \xi')^2/\xi\} = \mathbf{M}\|F(\xi)\|^2.$$

Пусть $\{h_k, k \geq 1\}$ – другой ортонормированный базис. Обозначим через P_n и Q_n ортогональные проекторы на линейную оболочку $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{h_1, \dots, h_n\}$ соответственно. Отметим, что для произвольного $n \geq 1$ $Q_n \xi'$ и $P_n \xi'$ – обычные случайные элементы в H . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[(F(\xi), P_n \xi') - (F(\xi), Q_n \xi')]^2 &= \mathbf{M}[(P_n F(\xi), L_n \xi') - (Q_n F(\xi), L_n \xi')]^2 \\ &= \mathbf{M}\|(P_n - Q_n)F(\xi)\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь L_n – ортогональный проектор на линейную оболочку элементов $\{e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_n\}$. Лемма доказана.

Отметим, что имеет место равенство

$$\mathbf{M}|(F(\xi), \xi')|^p = C_p \mathbf{M}\|F(\xi)\|^p \quad (3.12)$$

для $p \geq 1$. Пусть теперь $F \in \mathcal{D}(I)$. Тогда для произвольной $\alpha \in \mathcal{D}(D)$ согласно (3.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\alpha(\xi)T_t I F(\xi) &= e^{-t} \mathbf{M}\alpha(\xi) I T_t F(\xi) = e^{-t} \mathbf{M}(D\alpha(\xi), T_t F(\xi)) \\ &= e^{-t} \mathbf{M}(T_t D\alpha(\xi), F(\xi)) = \mathbf{M}(D T_t \alpha(\xi), F(\xi)) \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \mathbf{M}(\mathbf{M}\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1 - e^{-2t}}\xi')\xi'/\xi\}, F(\xi)) \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \mathbf{M}\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1 - e^{-2t}}\xi')(F(\xi), \xi'). \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования полученной формулы введем новые обобщенные случайные элементы в H , которые формально записываются так:

$$\begin{aligned} \eta &= e^{-t}\xi + \sqrt{1 - e^{-2t}}\xi', \\ \varkappa &= \sqrt{1 - e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi'. \end{aligned}$$

Тогда, продолжая преобразования, получим

$$\begin{aligned} M\alpha(\xi)T_tIF(\xi) &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\alpha(\eta)(F(e^{-t}\eta + \sqrt{1-e^{-2t}}\kappa), \sqrt{1-e^{-2t}}\eta - e^{-t}\kappa) \\ &= M\alpha(\eta)\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\{(F(e^{-t}\eta + \sqrt{1-e^{-2t}}\kappa), \sqrt{1-e^{-2t}}\eta - e^{-t}\kappa)/\eta\}. \end{aligned}$$

Поэтому (учитывая, что ξ, ξ', η, κ одинаково распределены)

$$T_tIF(\xi) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\{(F(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi'), \sqrt{1-e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi')/\xi\}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть случайная величина $\alpha \in \mathcal{D}(D)$, случайный элемент $F \in \mathcal{D}(I)$. Тогда для всякого $t > 0$

$$\begin{aligned} T_tD\alpha(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')\xi')/\xi\}, \\ T_tIF(\xi) &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\{(F(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi'), \sqrt{1-e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi')/\xi\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для произвольных α и F , имеющих конечный второй момент,

$$\begin{aligned} DT_t\alpha(\xi) &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\{\alpha(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')\xi')/\xi\}, \\ IT_tF(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} M\{(F(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi'), \sqrt{1-e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi')/\xi\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество $A \in \mathcal{F}$ называется *обобщенно гладким порядка $p > 0$* (см. “конечномерную” часть), если

$$t^{-p}\mathbf{1}_A(\xi)(1 - T_t\mathbf{1}_A(\xi)) \xrightarrow{P} 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Семейство всех обобщенно гладких порядка p множеств обозначим $\mathcal{F}_p$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. Семейство $\mathcal{F}_p$ замкнуто относительно конечных пересечений и счетных объединений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}_p$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} 0 &\leq t^{-p}\mathbf{1}_{A_1 \cap A_2}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{A_1 \cap A_2}}(\xi) = t^{-p}\mathbf{1}_{A_1 \cap A_2}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}(\xi) \\ &\leq t^{-p}\mathbf{1}_{A_1 \cap A_2}(\xi)[T_t\mathbf{1}_{\overline{A_1}}(\xi) + T_t\mathbf{1}_{\overline{A_2}}(\xi)] \\ &\leq t^{-p}[\mathbf{1}_{A_1}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{A_1}}(\xi) + \mathbf{1}_{A_2}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{A_2}}(\xi)] \xrightarrow{P} 0, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Далее,

$$0 \leq t^{-p}\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}}(\xi) \leq t^{-p}\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{A_k}}(\xi)$$

для произвольного $k \geq 1$. Поэтому

$$\forall k \geq 1 \quad \mathbf{1}_{A_k}(\xi)t^{-p}\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(\xi)T_t\mathbf{1}_{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}}(\xi) \xrightarrow{P} 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Тем самым утверждение леммы доказано.

В работе [5] были введены гладкие открытые множества. Справедлива

ЛЕММА 3.4. *Любое гладкое открытое множество является обобщенно гладким порядка $1/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – гладкое открытое множество. Тогда [5] существует стохастически дифференцируемая случайная величина α такая, что $\alpha \geq 0$ и

$$A = \{\alpha > 0\}.$$

Для всякого $n \geq 1$ множество

$$A_n = \left\{ \alpha > \frac{1}{n} \right\}$$

будет гладким открытым и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Кроме того, при каждом $n \geq 1$ существует такая стохастически дифференцируемая случайная величина β_n , что $0 \leq \beta_n \leq 1$,

$$A = \{\beta_n > 0\}, \quad A_n \subset \{\beta_n = 1\}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} M\mathbf{1}_{A_n}(\xi)t^{-1/2}T_t\mathbf{1}_{\bar{A}}(\xi) &\leq M\mathbf{1}_{A_n}(\xi)t^{-1/2}T_t(1 - \beta_n)(\xi) \\ &= M\mathbf{1}_{A_n}(\xi)[t^{-1/2}T_t(1 - \beta_n)(\xi) - t^{-1/2}(1 - \beta_n)(\xi)] \\ &\leq P(A_n)^{1/2}(t^{-1}M[T_t(1 - \beta_n)(\xi) - (1 - \beta_n)(\xi)]^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Пусть случайная величина $(1 - \beta_n)$ имеет разложение Ито–Винера

$$1 - \beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi, \dots, \xi).$$

Тогда

$$M[T_t(1 - \beta_n)(\xi) - (1 - \beta_n)(\xi)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k! (1 - e^{-kt})^2 \|A_k\|_k^2.$$

Здесь $\|\cdot\|_k$ – норма Гильберта–Шмидта в пространстве k -линейных форм над H [5]. При этом в силу стохастической дифференцируемости $1 - \beta_n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot k! \|A_k\|_k^2 < +\infty.$$

Следовательно,

$$t^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k! (1 - e^{-kt})^2 \|A_k\|_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} k! k (1 - e^{-kt}) \|A_k\|_k^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Таким образом,

$$M\mathbf{1}_{A_n}(\xi)t^{-1/2}T_t\mathbf{1}_{\bar{A}}(\xi) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

С учетом (3.13) утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть A – обобщенно гладкое множество порядка $p > 1/2$, $F \in \mathcal{D}(I)$ и

$$F|_A = 0 \quad \text{н.в.}, \quad \mathbf{M}\|F\|^{q_1} < +\infty$$

для некоторого $q_1 > 2p/(2p-1)$.

Тогда

$$I(F)|_A = 0 \quad \text{н.в.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1

$$\begin{aligned} & |\mathbf{1}_A(\xi)T_t IF(\xi)| \\ &= \left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{1}_A(\xi) \mathbf{M}\{(F(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi'), \sqrt{1-e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi')/\xi\} \right| \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{1}_A(\xi) |\mathbf{M}\{(F(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi'), \sqrt{1-e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi') \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\bar{A}}(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi')/\xi\}| \\ &\leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{1}_A(\xi) (\mathbf{M}\{|(F(e^{-t}\xi + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi'), \sqrt{1-e^{-2t}}\xi - e^{-t}\xi')|^{q_1}/\xi\})^{1/q_1} \\ &\quad \times (T_t \mathbf{1}_{\bar{A}}(\xi))^{1/p_1}. \end{aligned}$$

По условию $q_1 > 2p/(2p-1)$, т.е. $p_1 < 2p$. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbf{1}_A(\xi) (T_t \mathbf{1}_{\bar{A}}(\xi))^{1/p_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}^{p_1}}} \mathbf{1}_A(\xi) T_t \mathbf{1}_{\bar{A}}(\xi) \right)^{1/p_1} \xrightarrow{P} 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Следовательно,

$$\mathbf{1}_A(\xi)T_t IF(\xi) \xrightarrow{P} 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

С другой стороны,

$$T_t IF(\xi) \xrightarrow{P} IF(\xi), \quad t \rightarrow 0+,$$

поэтому

$$\mathbf{1}_A(\xi)IF(\xi) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] А. В. Скороход, “Об одном обобщении стохастического интеграла”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **20**:2 (1975), 223–237.
- [2] D. Nualart, “The Malliavin calculus and related topics”, *Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] D. Nualart, E. Pardoux, “Stochastic calculus with anticipating integrands”, *Prob. Theory Related Fields*, **78** (1988), 535–581.
- [4] А. А. Дороговцев, “Расширенный стохастический интеграл для гладких функций от белого шума”, *Укр. матем. журн.*, **41**:11 (1989), 1460–1466.
- [5] А. А. Дороговцев, *Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [6] Б. Саймон, *Модель $P(\Phi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.

- [7] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [8] Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984.
- [9] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [10] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981.
- [11] A. S. Calderón, A. Zygmund, “Local properties of solutions of elliptic partial differential equations”, *Studia Math.*, **20** (1961), 171–225.
- [12] S. Watanabe, *Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

А. М. Гомилко (A. M. Gomilko)

Киевский национальный
торгово-экономический университет
E-mail: gomilko@ukrpost.net

Поступила в редакцию

28.04.2005

А. А. Дороговцев (A. A. Dorogovtsev)

Институт математики НАН Украины