Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, А. Е. Шишков,
О сходимости в градиентных системах с вырожденным
положением равновесия, *Матем. сб.*, 2007, том 198, но-
мер 6, 65–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:24:37

УДК 517.954

В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, А. Е. Шишков**О сходимости в градиентных системах
с вырожденным положением равновесия**

Наша базовая модель – это полулинейное эллиптическое уравнение с коэрцитивной C^1 -нелинейностью: $\Delta\psi + f(\psi) = 0$ в Ω , $\psi = 0$ на $\partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная гладкая область. Основное условие (H_R) на резонансное ветвление состоит в следующем: если ветвление равновесия происходит в некоторой точке ψ с k -мерным ядром линейаризованного оператора $\Delta + f'(\psi)I$, то множество ветвления S_k в точке ψ является локально гладким k -мерным многообразием.

Для $N = 1$ первый результат о стабилизации к одной точке равновесия был получен Т. И. Зеленьком в 1968 г.

В работе показано, что подход Зеленька, основанный на методе функций Ляпунова, применим к общим градиентным системам в гильбертовом пространстве с гладким резонансным ветвлением. Рассматривается также случай их асимптотически малых неавтономных возмущений.

Развиваемый подход представляет собой альтернативу методу стабилизации Хейла (1992 г.) и другим близким методам в теории градиентных систем.

Библиография: 32 названия.

§ 1. Введение: проблема сходимости и эволюционная полнота

1.1. Полулинейные эллиптические уравнения и проблема сходимости. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Наша базовая модель – это классическое полулинейное коэрцитивное эллиптическое уравнение из теории горения

$$V'(\psi) \equiv \Delta\psi + f(\psi) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \psi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1.1)$$

где f – заданная функция, удовлетворяющая условиям

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f'(u) < 0, \quad |u| \gg 1. \quad (1.2)$$

Это неоптимальное условие коэрцитивности является достаточным для демонстрации нашего подхода. Например, $f(u) = u - u^3$ (аналитическая нелинейность) или $f(u) = |u|^{p-1}u - |u|^{q-1}u$ с некоторыми $q > p > 1$. Оператор в (1.1)

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00370), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1549.2003.1), Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”, фонда CERN-INTAS (грант № 00-0136) и INTAS (грант № 03-51-5007).

Работа третьего автора выполнена при поддержке фонда CERN-INTAS (грант № 00-0136) и INTAS (грант № 03-51-5007).

© В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, А. Е. Шишков, 2007

является потенциальным и коэрцитивным, поэтому классическая вариационная теория дает существование решений как критических точек соответствующего функционала V в пространстве $H_0^1(\Omega)$:

$$V(\psi) = -\frac{1}{2} \int |D\psi|^2 dx + \int F(\psi) dx, \quad (1.3)$$

где $F' = f$ (см., например, [1]). Если f не удовлетворяет условию коэрцитивности (1.2), то в наиболее хорошо изученном степенном случае

$$f(u) = |u|^{p-1}u, \quad 1 < p < p_S = \frac{N+2}{N-2}, \quad (1.4)$$

версия классической теории Люстерника–Шнирельмана [2]–[4] (см., например, [5]–[7]) устанавливает существование, по крайней мере, счетного множества критических точек соответствующего функционала (1.3).

Обозначим через $\Phi = \{\psi\}$ множество всех ограниченных решений эллиптической задачи (1.1) в коэрцитивном и некоэрцитивном случаях. Эволюционная полнота множества Φ решений задачи (1.1) определяется при помощи соответствующего параболического уравнения

$$u_t = V'(u) \equiv \Delta u + f(u) \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (1.5)$$

с произвольным ограниченным начальным условием u_0 . Как следует из классической параболической теории [8], в предположении (1.2) орбита $\{u(\cdot, t), t > 0\}$ равномерно ограничена. Для таких гладких градиентных систем можно определить их ω -предельное множество $\omega(u_0)$, которое является непустым компактным инвариантным и связным в топологии $L^2(\Omega)$ (или $C(\Omega)$) и

$$\omega(u_0) \subseteq \Phi \quad (1.6)$$

(см. [9], [10; с. 483–487]). Понятие эволюционной полноты множества Φ нелинейных собственных функций было введено в [11] для уравнения пористой среды

$$u_t = \Delta(|u|^{m-1}u) + \frac{1}{m-1}u, \quad m > 1,$$

в ограниченной области. В этом случае 0 не включается в Φ (как обычно, 0 не является собственной функцией) и это порождает некоторые специфические трудности в асимптотическом анализе.

В настоящей работе $0 \in \Phi$, так что эволюционная полнота Φ означает, что для параболического потока (1.5)

$$\text{для произвольного } u_0 \text{ существует некоторое } \psi \in \Phi \text{ такое, что } \omega(u_0) = \{\psi\}. \quad (1.7)$$

Естественно, это – классическая *проблема сходимости* в теории динамических систем. Очевидно, (1.7) справедливо для любой гладкой градиентной системы, если Φ состоит из изолированных точек (это – непосредственное следствие связности множества $\omega(u_0)$), т.е.

$$\Phi \text{ является дискретным} \implies \text{эволюционная полнота (1.7) имеет место.} \quad (1.8)$$

Случаи ветвления: два подхода. Случай, когда Φ не является дискретным и состоит из непрерывных семейств ввиду ветвления положения равновесия, был предметом изучения на протяжении длительного времени. Существование различных ветвей стационарных решений установлено с помощью классической вариационной техники, см. [1] и [12] в приложении к полулинейным эллиптическим задачам. В некоторых случаях метод расслоения [6], [7] дает явную картину связи числа ветвей с алгебраической немонотонностью функции $f(u)$. В общей ситуации Φ может содержать непрерывные подсемейства (см. примеры в § 3).

Первый подход к сходимости в параболических задачах в условиях ветвления был предложен в 1968 году Т. И. Зеленьком [13], который доказал свойство (1.7) для произвольных одномерных равномерно параболических уравнений с гладкими коэффициентами

$$u_t = a(x, u, u_x)u_{xx} + b(x, u, u_x) \quad (1.9)$$

с произвольными нелинейными граничными условиями. В 1978 году близкий результат был доказан Х. Матано [14] с использованием теоремы Штурма о нулях. Как оказалось, этот подход применим к произвольным гладким полностью нелинейным равномерно параболическим уравнениям при $N = 1$:

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}). \quad (1.10)$$

Подход Матано является принципиально одномерным, так как теорема Штурма о нулях несправедлива при больших размерностях и не может быть применена к параболическим уравнениям в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 2$.

Другое направление развития теории стабилизации градиентных систем связано с техникой, основанной на неравенстве Лоясевича–Саймона. Хорошо известно, что в действительном банаховом пространстве E для градиентных систем

$$u_t = V'(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in E, \quad (1.11)$$

где V – C^2 -функционал с C^1 -производной Фреше $V': E \rightarrow E'$, E' – дуальное пространство, неравенство Лоясевича–Саймона является эффективным инструментом изучения проблемы стабилизации. В частности, оно полностью решает проблему в случае аналитической нелинейности (см. ссылки в [15]). Если неподвижная точка ψ такая, что $V'(\psi) = 0$, то классическое неравенство Лоясевича–Саймона имеет вид

$$|V(v) - V(\psi)|^{1-\theta} \leq c \|V'(v)\|_{E'} \quad (1.12)$$

в окрестности ψ , где $c > 0$ – постоянная и $\theta \in (0, 1/2]$ называется *показателем Лоясевича* (см. основные ссылки и исторические комментарии в [15]). Если (1.12) справедливо с показателем θ для критического многообразия, то (см. [15; теорема 3.10]) при естественных предположениях о спектральных свойствах линеаризованного оператора (все они выполняются в нашем эллиптическом случае) можно установить:

- (i) что ω -предельное множество $\omega(u_0)$ произвольной ограниченной орбиты состоит из единственной неподвижной точки, т.е. выполняется (1.7),
- (ii) скорость сходимости траектории к ψ когда $t \rightarrow \infty$.

Например, в случае конечной регулярности наилучшая возможная константа $\theta = 1/2$ гарантирует экспоненциальную сходимость [16; теорема 1.1]:

$$\|u(t) - \psi\|_E \leq ce^{-\delta t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \delta > 0. \quad (1.13)$$

В общей ситуации, говоря упрощенно (см. пример в [15]),

$$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \implies \|u(t) - \psi\|_E \leq ct^{-\theta/(1-2\theta)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Использование подхода Лоясевича–Саймона к параболическим уравнениям (1.5) не предполагает ограничений на размерность N , хотя при наличии ветвления проверка справедливости соответствующего неравенства на сингулярном подмножестве становится чрезвычайно трудной проблемой (см., например, [15]). С другой стороны, в § 5 мы покажем, что неравенство Лоясевича–Саймона (1.12) неприменимо к общим C^∞ -динамическим системам, т.е. показатель $\theta \in (0, 1/2]$ существует не всегда. Действительно, это означает, что такого рода анализ нуждается в других нерациональных модулях непрерывности в неравенстве (1.12).

Контрпримеры и условия резонансного ветвления. Уже давно известно (см. [17]), что для общих неаналитических градиентных систем на плоскости $\mathbb{R}^2$ нет сходимости вида (1.7). Идея соответствующей конструкции является основной в доказательстве существования несходящихся орбит для специальных параболических уравнений типа (1.5) с C^∞ -функцией $f = f(u, x)$ (см. [18] и более ранние ссылки в ней). В главной части конструкций в [17], [18] используется тот факт, что размерность многообразия неподвижных точек меньше размерности соответствующего ядра линеаризованного оператора (имеется в виду определенный “дефект” размерности).

Хорошо известно, что существуют специальные (часто похожие на наш случай) случаи ветвления равновесия, когда подход Хейла применим и обеспечивает сходимость орбит градиентных систем (см. [19], где имеется обзор результатов и соответствующие ссылки). Этот подход существенно опирается на спектральные свойства линеаризованного оператора (основная гипотеза Хейла состоит в том, что 0 имеет кратность не больше 1 или $k > 1$ при специальных предположениях) и использует свойства устойчивого, неустойчивого и центрального многообразий, трудно проверяемые для менее гладких уравнений. Отметим также недавнюю работу [20], где использован близкий подход к стабилизации и приведены соответствующие ссылки.

Мы используем метод, основанный на идеях Зеленьяка (1968 г.) для одномерного случая, которые базируются на свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и соответствующих функциях Ляпунова. Для нас важно, что подход Зеленьяка позволяет устанавливать экспоненциальную сходимость к одной неподвижной точке и может быть обобщен

на неавтономные возмущения градиентных систем, к которым неприменима классическая теория устойчивого центрального многообразия.

Приведем формулировку основного “резонансного” предположения, при выполнении которого не существуют несходящиеся орбиты. Мы формулируем его в общей форме, где под производной Фреше для уравнения (1.5) понимается оператор $V''(\psi) = \Delta + f'(\psi)I$, который является фредгольмовым оператором индекса нуль в каждой неподвижной точке из Φ .

Условие (H_R) . Если ветвление происходит в произвольной неподвижной точке ψ и $\dim \ker V''(\psi) = k \geq 1$, то соответствующее множество ветвления S_k , состоящее из неподвижных точек, является локально гладким k -мерным многообразием (т.е. относительно открытой поверхностью).

В качестве первого замечания отметим, что, очевидно, условие (H_R) всегда выполняется в линейном случае с $f(\psi) = \lambda\psi$, где ветвления в точках равновесия происходят при $\lambda \in \sigma(\Delta)$. В этом случае подмножества совпадают:

$$S_k = \ker V''(\psi), \quad V''(\psi) = \Delta + \lambda I. \quad (1.15)$$

Естественно, в линейном случае сходимость всех орбит вытекает из полноты и замкнутости множества всех собственных функций оператора Δ как прямое следствие общей теории самосопряженных операторов [21], и мы не рассматриваем здесь этот случай.

Условие (H_R) не может быть улучшено в том смысле, что в нерезонансном случае, когда гладкое стационарное многообразие S_k имеет размерность $k < \dim \ker V''(\psi)$, невозможно применить идеи конструкции несходящихся орбит из [17], [18]. Согласно нашему доказательству любой дефект размерности разрушает подход, предложенный в этих работах. Относительно условия резонансного ветвления мы отсылаем к классической теории ветвления для нелинейных уравнений в банаховых пространствах [22; гл. 7,8], [23; гл. 6], [24; § 30.1] (точнее, к условиям, которые гарантируют необходимость ветвления в вариационной постановке), а также к [12], где детально обсуждаются приложения к эллиптическим задачам. Отметим, что в уравнении (1.1) параметр ветвления присутствует неявно и случай такого ветвления является менее изученным в литературе. Мы приведем простой пример, показывающий, что в стандартной нелинейной эллиптической задаче резонансное ветвление с $k = N - 1$ действительно существует в размерности $N \geq 2$.

1.2. Основной результат, план доказательства, обобщения. Сформулируем основной результат статьи, который, как мы отмечали, доказывается с использованием ключевых идей Зеленьяка из работы [13].

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть f – C^1 -функция, $\Phi = \{\psi\}$ – подмножество всех ограниченных решений эллиптической задачи (1.1) и выполняется условие (H_R) . Пусть $u(x, t)$ – единственное классическое решение (1.5) с начальной функцией u_0 . Тогда

- (i) в коэрцитивном случае (1.2) существует единственное $\psi \in \Phi$ такое, что $\omega(u_0) = \{\psi\}$;

- (ii) в некоэрцитивном случае (1.4) справедливо предыдущее утверждение для произвольной равномерно ограниченной орбиты;
- (iii) в обоих случаях сходимость к ψ является экспоненциальной.

Предположение ограниченности орбиты в п. (ii) является существенным, так как (1.5) допускает решения, которые взрываются за конечное время, и поэтому представляют пример совершенно другого асимптотического поведения (специфическая асимптотическая техника приведена в [25]). Как мы отметили, для аналитических нелинейностей $f(u)$ (для (1.4) это означает, что $p = 3, 5, \dots$) заключение об эволюционной полноте следует из классического неравенства Лоясевича–Саймона (см. ссылки в [15], [26], где была предложена версия таких неравенств для некоторых неаналитических постановок). Результат п. (iii) дает основания предполагать, что в случае резонансного ветвления в окрестности S_k выполняется неравенство Лоясевича–Саймона с $\theta = 1/2$, но мы не изучаем здесь этот вопрос.

Статья имеет следующую структуру. Теорема 1.1 доказывается в §2. В §3 мы приводим несколько примеров, показывающих возможность резонансного ветвления. В §5 показано, что для некоторых C^∞ -нелинейностей неравенство Лоясевича–Саймона не выполняется с любым сколь угодно малым $\theta > 0$, так что для соответствующей стабилизационной техники нужны другие нерадикальные модули непрерывности в (1.12). Из п. (iii) теоремы 1.1 следует, что такие существенно неаналитические контрпримеры соответствуют изолированным неподвижным точкам.

Результаты справедливы также для гладких уравнений высокого порядка. В частности, теорема 1.1 справедлива для общих параболических потоков порядка $2m$ при произвольном $m \geq 1$

$$u_t = (-1)^{m+1} \Delta^m u + f(u) \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.16)$$

с m нулевыми условиями Дирихле. Критический соболевский показатель для уравнения (1.16) есть

$$p_S = \frac{N + 2m}{N - 2m}, \quad N > 2m. \quad (1.17)$$

Мы можем также рассматривать равномерно параболические уравнения четвертого порядка вида

$$u_t = -\Delta g(\Delta u) + f(u), \quad g'(s) \geq c_0 > 0, \quad (1.18)$$

или с другими потенциальными операторами в различных метриках. В §6 мы распространяем наш подход на гладкие градиентные системы в гильбертовом пространстве. В §7 изучаем случай асимптотически малых неавтономных возмущений градиентных систем. Мы показываем, что основной результат о сходимости (1.7) ограниченных орбит остается справедливым для возмущенных параболических уравнений (1.5) вида

$$u_t = \Delta u + f(u) + h(t)g(u), \quad \text{где } h(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (1.19)$$

и $g(u)$ – заданная гладкая функция. Аналогичные возмущения допустимы также в уравнениях (1.16) и (1.18). В дальнейшем мы приведем некоторые ограничения на скорость убывания $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$, но, во всяком случае, мы рассматриваем неэкспоненциально малые возмущения, например, $h(t) = O(1/t^3)$.

Настоящая работа посвящается памяти Т. И. Зеленька.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Итак, мы рассматриваем равномерно эллиптическое уравнение (1.1) и соответствующий равномерно параболический поток (1.5). Отметим, что подмножество всех стационарных решений $\Phi = \{\psi\}$ включает и тривиальное $\psi = 0$. Очевидно, 0 является экспоненциально устойчивым для уравнения (1.5) с нелинейностью (1.4) и поэтому должен учитываться в анализе эволюционной полноты.

Отметим еще раз, что в силу потенциальности структуры уравнения (1.1) и условия (H_R) имеют место следующие свойства:

- (i) множество S_k является открытым, так что любое решение $\psi \in S_k$ имеет окрестность, относительно открытую в S_k ;
- (ii) $V(\psi) = B = \text{const}$ для всех $\psi \in S_k$.

2.1. Доказательство теоремы 1.1. Итак, мы рассматриваем гладкий поток (1.5) в, скажем, $H_0^2(\Omega)$ и изучаем ω -предельное множество $\omega(u_0)$ равномерно ограниченной орбиты $\{u(t), t > 0\}$. Возьмем произвольную неподвижную точку ψ из ω -предельного множества $\omega(u_0)$, которое является непустым компактным и связным множеством для таких градиентных систем [9]. Таким образом, существует монотонная последовательность $\{t_k\} \rightarrow \infty$ такая, что

$$u(t_k) \rightarrow \psi \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Во-первых, если $0 \notin \sigma(V''(\psi))$, где $V''(\psi) = \Delta + f'(\psi)I$, то ψ является изолированной точкой [22], [1] и сходимость (1.7) следует при любом заданном u_0 . Следовательно, можно предполагать в соответствии с условием (H_R) , что $0 \in \sigma(V''(\psi))$ и ψ является неизолированной точкой и принадлежит гладкому многообразию S_k ветвления в точке ψ , где k совпадает с размерностью $\ker V''(\psi)$.

Наш дальнейший анализ использует структуру доказательств Зеленька в случае $N = 1$ (см. [13]) и состоит из семи шагов.

Шаг 1: оптимальная аппроксимация $u(t)$ на S_k . Пусть $S_k = \{\psi_\mu\}$, где $\mu \in \mathbb{R}^k$ обозначает локальные координаты на S_k такие, что $\psi = \psi_0$. Для точки $u(t)$ при произвольном $t \gg 1$, где $u(t) \approx \psi$, мы определяем оптимальное приближение $\psi_{\mu(t)}$ элемента $u(t)$ на S_k при помощи минимизации расстояния

$$h(\mu) = \|u(t) - \psi_\mu\|, \quad (2.2)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает $L^2(\Omega)$ -норму, индуцированную скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда $\inf_{\mu} h(\mu)$ достигается при некотором $\mu = \mu(t) \approx 0$, и по построению выполняется условие ортогональности

$$u(t) - \psi_{\mu(t)} \perp \ker V''(\psi_{\mu(t)}). \quad (2.3)$$

В дальнейшем эволюционном анализе мы будем иметь дело с неподвижной точкой ψ_{μ} на S_k для $\mu \approx 0$. Достаточно доказать, что существует предел

$$\mu(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Шаг 2: априорные оценки решений линеаризованного стационарного уравнения. Мы линеаризуем стационарное уравнение (1.1) в точке $\psi = \psi_{\mu(t)}$ и рассматриваем соответствующую неоднородную задачу

$$V''(\psi_{\mu(t)})w = g, \quad (2.4)$$

где $g \in L^2$ – заданная функция. Тогда ввиду ортогональности (2.3) стандартная теория эллиптических самосопряженных операторов (см., например, [23], [21]) дает существование постоянной $C_1 > 0$ такой, что

$$\|w\|_{H^2} \equiv \|u(t) - \psi_{\mu(t)}\|_{H^2} \leq C_1 \|g\|. \quad (2.5)$$

Шаг 3: спектральная лакуна. В силу условия (H_R) $0 \in \sigma(V''(\psi_{\mu}))$ для всех $\mu \approx 0$. Более того, условие резонанса также гарантирует, что спектральная лакуна

$$\Lambda(\mu) = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A}'(\psi_{\mu})), \lambda \neq 0\} \quad (2.6)$$

равномерно отграничена от нуля, т.е. существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$\Lambda(\mu) \geq c_2 > 0 \quad \text{для всех } \mu \approx 0. \quad (2.7)$$

Это следует из того факта, что в силу (H_R) ядро $\ker \mathbf{A}'(\psi_{\mu})$ изменяется непрерывно по $\mu \approx 0$ как касательное пространство в непрерывно изменяющейся точке ψ_{μ} на заданном гладком многообразии S_k .

Шаг 4: оценки решений линеаризованного параболического уравнения. Положим $w(t) = u(t) - \psi_{\mu(t)}$. Рассмотрим параболическое уравнение (1.5), линеаризуем правую часть в $u = w_{\mu(t)}$ и запишем его как неоднородное эллиптическое уравнение (2.4). Тогда в силу линеаризации мы получаем дополнительный квадратичный член $g_1(u) = \frac{1}{2} f''(\xi_{\mu})(u - \psi_{\mu(t)})^2$, так что в (2.4)

$$g = u_t + g_1(u), \quad \text{где } |g_1(u)| \leq C_3 \|u(t) - \psi_{\mu(t)}\|_{H^2}^2. \quad (2.8)$$

В силу сходимости в таком параболическом уравнении мы имеем, что малость $w(x, t) = u(x, t) - w_{\mu(t)}(x)$ гарантирует малость производных, так что мы можем считать, что C_3 является равномерно ограниченной на любом интервале $[t_k, t_k + T]$ при $k \rightarrow \infty$.

Комбинируя эллиптическую оценку (2.5) и параболическую (2.8), мы получаем следующую оценку:

$$\|u(t) - \psi_{\mu(t)}\|_{H^2}^2 \leq C_4 \|u_t\|^2 \quad (2.9)$$

для всех $t \gg 1$ таких, что сохраняется ортогональность (2.3).

Шаг 5: локальная экспоненциальная сходимость функций Ляпунова. Функция Ляпунова $V(u(t))$ является строго монотонно возрастающей на эволюционной орбите:

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) = \int_{\Omega} (u_t)^2 > 0, \quad u_t \neq 0, \quad (2.10)$$

так что существует конечный предел

$$V(u(t)) \rightarrow B^+ \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

и тогда $V \equiv B$ на S_k . Фиксируя параметр оптимального приближения $\mu = \mu(t)$ и используя стандартное разложение в точке ψ_{μ} , мы получаем, что

$$|V(u) - V(\psi_{\mu})| \leq C_5 \|u - \psi_{\mu}\|_{H^1}^2 \leq C_5 \|u - \psi_{\mu}\|_{H^2}^2. \quad (2.12)$$

Поэтому из (2.10) в силу (2.9) и (2.12) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} [B - V(u(t))] = - \int_{\Omega} (u_t)^2 \leq -C_6 \|u - \psi_{\mu(t)}\|_{H^2}^2 \leq -C_7 [B - V(u(t))]. \quad (2.13)$$

Интегрирование этого неравенства приводит к локальной экспоненциальной сходимости $V(u(t))$ к B на произвольно больших ограниченных интервалах $[t_k, t_k + T]$ при $k \rightarrow \infty$:

$$B - V(u(t)) \leq [B - V(u(t_k))] e^{-C_7(t-t_k)}. \quad (2.14)$$

Шаг 6: локальная экспоненциальная сходимость $V(u(t))$ порождает экспоненциальную сходимость $u(t)$ к неподвижной точке. Здесь мы используем лемму 4 из [13], фактически устанавливающую весовое неравенство Гронуолла с использованием техники дискретных разбиений интервала. Отметим, что конечные разбиения широко использовались для доказательства более общих неравенств типа Гронуолла (см. книгу Хенри [27; гл. 7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть для всех $t > 0$

$$\int_t^{\infty} \int_{\Omega} (u_t)^2 \leq C_8 e^{-t}. \quad (2.15)$$

Тогда существует постоянная $C_9 > 0$ такая, что

$$\|u(t) - u(\tau)\| \leq C_9 e^{-t/2} \quad \text{для всех } 0 < t \leq \tau < \infty. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, если $|t - \tau| \leq 1$, то применяем неравенство Гёльдера и получаем

$$\|u(t) - u(\tau)\|^2 = \int_{\Omega} \left(\int_t^{\tau} u_t \right)^2 \leq (\tau - t) \int_{\Omega} \int_t^{\tau} (u_t)^2 \leq C_8 e^{-t}.$$

Если $|t - \tau| > 1$, то мы равномерно разбиваем интервал $[t, \tau]$ на K частей длины 1 с остатком, затем применяем неравенство Гёльдера на каждом интервале

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(\tau)\|^2 &\leq \sum_{i=0}^{K-1} \int_{\Omega} \int_{t+i}^{t+i+1} (u_t)^2 + \int_{\Omega} \int_{t+i+K}^{\tau} (u_t)^2 \\ &\leq C_8 \sum_{i=0}^{K-1} e^{-(t+i)} + C_8 e^{-(t+i+K)} \leq C_9 e^{-t}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Шаг 7: из экспоненциальных оценок вытекает сходимость к ψ . Мы продолжаем описывать эволюцию $u(t)$ на большом конечном интервале $[t_k, t_k + T]$ при $k \gg 1$, на котором по предположению выполняются все оценки, вытекающие из оптимальности приближения на стационарном подмножестве S_k . Итак, для произвольного $t \in [t_k, t_k + T]$ имеем

(а) в силу (2.14) и (2.10) величина

$$\int_t^{\infty} \int_{\Omega} (u_t)^2 = B - V(u(t))$$

является экспоненциально малой;

(б) в силу предложения 2.1 $\|u(t_k) - u(t)\|$ является экспоненциально малой.

Поэтому $u(t) \approx u(t_k) \approx \psi$ для всех $t \geq t_k$, что заканчивает доказательство в случае (i).

Случай (ii) рассматривается аналогично, если мы зафиксируем равномерно ограниченную орбиту.

(iii) См. (b) выше.

§ 3. Обсуждение: резонансное ветвление и экспоненциальная сходимость

3.1. Пример: неизоллированная точка равновесия и резонансное ветвление. Рассмотрим уравнение с кубической аналитической нелинейностью в единичном шаре $\mathbb{R}^N$

$$\Delta\psi + \psi^3 = 0 \quad \text{в } B_1 = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^N, \quad \psi|_{\partial B_1} = 0. \quad (3.1)$$

Тогда значение $p = 3$ является субкритическим соболевским параметром, если $(N + 2)/(N - 2) > 3$, т.е. $N < 4$. Другие $p < p_S$ дают аналогичные примеры для любых $N \geq 2$.

Рассмотрим (3.1) в половине шара $\Omega_+ = B_1 \cap \{x_1 > 0\}$. Существует единственное строго положительное решение $\psi_+ \in H_0^1(\Omega_+)$ задачи (3.1) в Ω_+ , строящееся при помощи стандартной вариационной процедуры [23], [7].

Так как уравнение (3.1) является инвариантным при отражении $x_1 \mapsto -x_1$, то, полагая $\psi = \psi_+$ в Ω_+ и $\psi = -\psi_+$ в $\Omega_- = B_1 \setminus \overline{\Omega}_+$, получаем нерадиальное H_0^1 -решение задачи (3.1) в B_1 . Это продолженное решение является обобщенным решением (3.1) в том смысле, что оно удовлетворяет соответствующему интегральному тождеству и, следовательно, является классическим решением

в силу общей теории равномерно эллиптических уравнений. Семейство гладких инвариантных ортогональных преобразований $\mathbb{R}^N$, оставляющих инвариантными лапласиан и граничные условия Дирихле, порождает непрерывное семейство решений, состоящее из неизолированных точек. По классической теории ветвления [1] в этом случае 0 принадлежит спектру соответствующего линеаризованного оператора $V''(\psi) = \Delta + 3\psi^2 I$.

В частности, мы фиксируем $N - 1$ угол вращения $\{\theta_1, \dots, \theta_{N-1}\}$ полярной системы координат в $\mathbb{R}^N$ и получаем $N - 1$ линейно независимых элементов ядра оператора $\Delta + 3\psi^2 I$, определяемых равенствами

$$\varphi_k = \frac{d}{d\theta_k} \psi, \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

Имея в виду эти вращения, можем ожидать, что стационарное подмножество S_{N-1} является точно $(N - 1)$ -мерным, так что $k = N - 1$ совпадает с размерностью ядра. К сожалению, мы не можем доказать точное равенство и предлагаем в дальнейшем другую нелокальную модель, для которой условие (H_R) выполняется. В задаче на плоскости ($N = 2$) соответствующая собственная функция оператора $V''(\psi)$ с $\lambda = 0$ задается вращением на единственный угол $\theta = \theta_1$, так что

$$\varphi_1 = \frac{d}{d\theta} \psi, \quad (3.2)$$

и ядро, по-видимому, является одномерным (мы не доказываем этого).

Используя близкие отражения, можно построить в единичном шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^N$ нелинейные собственные функции $\psi_l(x)$, удовлетворяющие (3.1) с любым числом $l \geq 1$ связных компонент положительности и отрицательности этих функций. При помощи инвариантного ортогонального преобразования каждое такое решение индуцирует непрерывное семейство других стационарных решений.

3.2. Об экспоненциальной сходимости. Мы проиллюстрируем причину экспоненциальной сходимости при помощи вышеприведенного примера в $\mathbb{R}^2$, где ядро является одномерным с базисной функцией (3.2).

Условия ортогональности для ветвления. Ветвление в задаче (3.1) происходит от решения $\psi_0 = \psi$, так что по классической теории ветвления [22] мы ищем гладкую кривую решений в виде

$$\psi_\mu = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \mu^3\psi_3 + \mu^4\psi_4 + \dots, \quad (3.3)$$

где с точностью до масштаба μ может быть идентифицировано как угол вращения. Подставляя (3.3) в (3.1) и собирая подобные члены, приходим к системе для неизвестных коэффициентов разложения

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 + \psi_0^3 = 0, \\ \Delta\psi_1 + 3\psi_0^2\psi_1 = 0, \\ \Delta\psi_2 + 3\psi_0^2\psi_2 = -3\psi_0\psi_1^2, \\ \Delta\psi_3 + 3\psi_0^2\psi_3 = -\psi_1^3 - 6\psi_0\psi_1\psi_2, \\ \Delta\psi_4 + 3\psi_0^2\psi_4 = -3\psi_0\psi_2^2 - 3\psi_1^2\psi_2 - 6\psi_0\psi_1\psi_3, \\ \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

Второе уравнение показывает, что ψ_1 находится в непустом ядре и, следовательно, задается формулой (3.2). Третье уравнение порождает первое условие ортогональности

$$\int_{\Omega} \psi_0 \psi_1^3 = 0, \quad (3.5)$$

которое является необходимым для возникновения ветвления. Определяя ψ_2 с точностью до неизвестной постоянной β_2 ,

$$\psi_2 = \bar{\psi}_2 + \beta_2 \psi_1,$$

где $\bar{\psi}_2$ является решением неоднородного уравнения, и подставляя в четвертое уравнение, получаем, что для его разрешимости необходимо выполнение равенства

$$\int_{\Omega} \psi_1^4 + 6 \int_{\Omega} \psi_0 \psi_1^2 \bar{\psi}_2 + 6\beta_2 \int_{\Omega} \psi_0 \psi_1^3 = 0.$$

Так как последний член с β_2 исчезает в силу (3.5), мы приходим ко второму условию ортогональности

$$\int_{\Omega} \psi_1^4 + 6 \int_{\Omega} \psi_0 \psi_1^2 \bar{\psi}_2 = 0. \quad (3.6)$$

Затем, выбирая, как и выше

$$\psi_3 = \bar{\psi}_3 + \beta_3 \psi_1,$$

мы получаем из пятого уравнения, что

$$2 \int_{\Omega} \psi_0 \psi_1^2 \bar{\psi}_3 + \int_{\Omega} \psi_0 \psi_1 \bar{\psi}_2^2 + \int_{\Omega} \psi_1^3 \bar{\psi}_2 + \frac{2}{3} \beta_2 \int_{\Omega} \psi_1^4 = 0.$$

Это определяет β_2 и так далее. Итак, в общем случае такой вид ветвления требует более одного условия ортогональности (и, конечно, существования нетривиального ядра).

О связи с центральным многообразием. Обсудим сейчас как эти условия ветвления влияют на эволюционные свойства соответствующего параболического уравнения

$$u_t = \Delta u + u^3 \quad \text{в } B_1 \times \mathbb{R}_+. \quad (3.7)$$

В этом аналитическом случае существует локально центральное C^∞ -многообразие $W_{\text{loc}}^c(\psi_0)$; см. общую теорию в [28], [29; §9], [30] для приложений к уравнению реакции-диффузии и [19], где изучается проблема сходимости.

Так как $W_{\text{loc}}^c(\psi_0)$ является касательным к соответствующему центральному многообразию $E^c(0) = \text{Span}\{\psi_1\}$, то, изучая поведение на центральном многообразии решений вида

$$u(x, t) = \psi_0(x) + a_1(t)\phi_1(x) + \dots \quad \text{для } t \gg 1$$

(см. ссылки и точные оценки для случая неаналитического потока в следующем параграфе) и проектируя уравнение (3.7) на $E^c(0)$, мы получаем возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$a_1' = \gamma a_1^2 + \dots, \quad (3.8)$$

где, как легко видеть, постоянная γ исчезает, так как

$$\gamma = \int_{\Omega} \psi_0 \psi_1^3 = 0 \quad (3.9)$$

в силу первого условия ортогональности (3.5). Поэтому члены высокого порядка должны быть вовлечены в рассмотрение, но и это, как кажется, не помогает обнаружить подходящую нетривиальную эволюцию на центральном многообразии.

В самом деле, нетрудно увидеть, что это однородное многообразие ветвления S_1 является центральным многообразием для параболической задачи. При сделанных выше предположениях, обозначая через $\{\phi_k\}$ полное подмножество собственных функций оператора $V''(\psi_0) = \Delta + 3\psi_0^2 I$, мы можем предполагать следующее разложение (ср. (3.3))

$$S_1 = \{\psi_\mu = \psi_0 + a_1(\mu)\phi_1 + a_2(\mu)\phi_2 + \dots\},$$

где $a_k(0) = 0$ для любого k . Поэтому эволюция на этом центральном многообразии с

$$u(x, t) = \psi_0(x) + \sum_k a_k(t)\phi_k(x)$$

управляется тривиальной динамической системой

$$a'_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которую мы наблюдали в (3.8), (3.9). Отметим, что центральное многообразие, состоящее только из точек равновесия, не является исключительным случаем в параболических задачах; см. [31], где такое инвариантное экспоненциально устойчивое центральное многообразие обнаруживается в задаче со свободной границей в модели Мюллинс–Секерка (вид течения Хеле–Шоу).

В этом случае, так же как и в других резонансных случаях, существует локальное центральное многообразие для параболической задачи, совпадающее со стационарным подмножеством S_k , так что не может наблюдаться эволюция орбит в $W_{\text{loc}}^c(\psi_0)$. Затем экспоненциальная сходимость в теореме 1.1, п. (iii) может быть ассоциирована с тем фактом, что в ортогональном дополнении к ядру поведение является чисто экспоненциальным и соответствующим эволюции на ортогональном устойчивом многообразии, построенном в другой точке равновесия $\psi = \psi_{\mu(t)} \approx \psi_0$ (см. шаг 1 в доказательстве § 2). В теории инвариантных многообразий это обычно выражается тем фактом, что для C^2 -нелинейностей и хороших линейризованных секториальных операторов с дискретным спектром и конечномерным устойчивым и центральным подпространством центральное многообразие является экспоненциально устойчивым (см., например, [29; предложение 9.2.3] и [30]).

§ 4. Явный пример с нелокальной нелинейностью

Пусть Ω – ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^N$, и пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\psi_k\}$ являются собственными значениями оператора Δ , где каждое λ_k повторено столько раз, какова его кратность $\kappa_k \geq 1$, и соответствующим полным, замкнутым подмножеством собственных функций, ортогональных в $L^2(\Omega)$. Случай единичного шара $\Omega = B_1$ является классическим. Здесь для Δ все собственные значения, собственные функции, кратности и т.д. описываются оператором Лапласа–Бельтрами Δ_σ на единичной сфере $S^{N-1} = \partial B_1$ в $\mathbb{R}^N$, который в полярных координатах (r, σ) задается формулой:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma. \quad (4.1)$$

Оператор Δ_σ – регулярный оператор с дискретным спектром в $L^2(S^{N-1})$ (снова каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность):

$$\sigma(-\Delta_\sigma) = \{\nu_k = k(k + N - 2), k \geq 0\} \quad (4.2)$$

и с ортогональным полным замкнутым подмножеством $\{V_k(\sigma)\}$ собственных функций, которые являются однородными гармоническими k -го порядка полиномами, ограниченными на S^{N-1} .

Фиксируем $l \geq 2$ и рассматриваем уравнение с нелокальным кубическим членом

$$u_t = \Delta u + \lambda_l u - \left(\int_\Omega u^2 \right) u \quad (4.3)$$

с теми же граничными условиями Дирихле и ограниченными начальными данными u_0 . Такая нелокальная параболическая модель может поставлять нам дальнейшие примеры асимптотик, получаемых путем явного вычисления (см. [7]). Во-первых, легко решить стационарное уравнение

$$\Delta \psi + \lambda_l \psi - \left(\int_\Omega \psi^2 \right) \psi = 0. \quad (4.4)$$

Именно, существует нетривиальное стационарное решение вида

$$\psi(x) = \pm \sqrt{\lambda_l - \lambda_j} \psi_j(x) \quad \text{при всех } \lambda_l > \lambda_j \quad (4.5)$$

и другие очевидным образом конструируемые линейные комбинации таких функций, соответствующие тем же собственным значениям.

4.1. Результат о сходимости. Во-вторых, изучая параболическое уравнение (4.3) и представляя искомое решение в форме разложения по собственным функциям

$$u(x, t) = \sum_k a_k(t) \psi_k(x),$$

мы получаем следующую динамическую систему для коэффициентов разложения:

$$a'_k = (\lambda_l - \lambda_k - |a|^2) a_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{где } |a|^2 = \sum a_k^2.$$

Интегрируя эту систему, получаем

$$a_k(t) = a_k(0)e^{(\lambda_l - \lambda_k)t} e^{-\int_0^t |a|^2(s) ds}.$$

Вычисляя сумму $|a|^2$, мы находим

$$|a|^2 = \Psi(t)e^{-\int_0^t |a|^2(s) ds}, \quad \text{где } \Psi(t) = \sum e^{2(\lambda_l - \lambda_k)t} a_k^2(0).$$

Полагая

$$Z = e^{-\int_0^t |a|^2(s) ds},$$

получаем простое ОДУ, $Z' = -2\Psi(t)Z^2$, которое после интегрирования дает

$$|a|^2(t) = \frac{a_l^2(0) + \sum_{\lambda_m \neq \lambda_l} e^{(\lambda_l - \lambda_m)t} a_m^2(0)}{1 + 2a_l^2(0)t + \sum_{\lambda_m \neq \lambda_l} (e^{2(\lambda_l - \lambda_m)t} - 1)a_m^2(0)/(\lambda_l - \lambda_m)},$$

где для простоты через $a_l^2(0)$ обозначается сумма $\sum_{\lambda_k = \lambda_l} a_k^2(0)$. Наконец, мы приходим к следующему выражению для коэффициентов разложения:

$$a_k(t) = a_k(0) \frac{e^{(\lambda_l - \lambda_k)t}}{\sqrt{1 + 2a_l^2(0)t + \sum_{\lambda_m \neq \lambda_l} (e^{2(\lambda_l - \lambda_m)t} - 1)a_m^2(0)/(\lambda_l - \lambda_m)}}. \quad (4.6)$$

Это выражение содержит три разных случая решений, с экспоненциальной и алгебраической скоростью сходящихся к точке покоя в зависимости от доминирующего члена в выражении под квадратным корнем в знаменателе. А именно, возьмем начальную функцию

$$u_0(x) = \sum a_k(0)\psi_k(x)$$

такую, что существует $j > 1$, для которого

$$a_1(0) = \dots = a_{j-1}(0) = 0 \quad \text{и} \quad a_j(0) \neq 0. \quad (4.7)$$

Тогда легко вывести из (4.6) следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть (4.7) выполняется. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$(i) \quad u(x, t) = O(e^{-(\lambda_j - \lambda_l)t}) \rightarrow 0, \quad \text{если } \lambda_j > \lambda_l; \quad (4.8)$$

$$(ii) \quad u(x, t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \rightarrow 0, \quad \text{если } \lambda_j = \lambda_l; \quad (4.9)$$

$$(iii) \quad u(x, t) = \psi(x) + O(te^{-2(\lambda_l - \lambda_j)t}), \quad \text{если } \lambda_j < \lambda_l, \quad (4.10)$$

где $\psi \neq 0$ является точкой равновесия.

Важно, что случай (iii), когда ветвление равновесия возможно в силу (4.5), точно показывает, что сходимость к нетривиальному решению является экспоненциальной (см. теорему 1.1, п. (iii)). Важно также отметить, что сходимость в (4.10) не является чисто экспоненциальной и, в общем случае, содержит алгебраический сомножитель t младшего порядка, который индуцируется

$O(t)$ -членом в квадратном корне в (4.6). Другие $\ln t$ -возмущения также могут образоваться в задачах с обычными (локальными) нелинейностями (см. замечание в § 5).

Единственный случай в предложении 4.1, когда сходимость является неэкспоненциальной, – это случай (ii), в котором в силу (4.5) единственная точка равновесия является тривиальной, $\psi = 0$, и является изолированной.

4.2. Условие (H_R) выполняется. Приведем теперь доказательство того, что условие (H_R) выполняется для изучаемого класса операторов. Рассмотрим эллиптическое уравнение (4.4). Зафиксируем $j > l$, пусть $\kappa_j = 1 + k \geq 2$ является кратностью λ_j , и пусть $\{\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,k+1}\}$ является ортонормированным подмножеством собственных функций оператора Δ , соответствующих λ_j . Зафиксируем неподвижную точку

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \widehat{c}_i \psi_{j,i}(x) \quad (4.11)$$

такую, что после подстановки в (4.4) коэффициенты $\widehat{c}_i$ удовлетворяют условию (ср. (4.5))

$$\sum \widehat{c}_i^2 = \lambda_l - \lambda_j. \quad (4.12)$$

Стационарное подмножество S_k . Очевидно, подмножество S_k , содержащее неподвижную точку (4.11), описывается формулой

$$\psi = \widehat{\psi}(x) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \psi_{j,i}, \quad \text{где} \quad \sum c_i^2 = \lambda_l - \lambda_j. \quad (4.13)$$

Поэтому

$$\dim S_k = k = \kappa_j - 1 \geq 1. \quad (4.14)$$

Ядро оператора $V''(\widehat{\psi})$. Очевидно, имеем

$$V''(\widehat{\psi})v = \Delta v + \lambda_l v - 2\widehat{\psi} \left(\int \widehat{\psi} v \right) - v \left(\int \widehat{\psi}^2 \right). \quad (4.15)$$

Подставляя в (4.15) выражение (4.11), получаем следующее уравнение для ядра:

$$V''(\widehat{\psi})v \equiv \Delta v + \lambda_j v - 2\widehat{\psi} \left(\int \widehat{\psi} v \right) = 0. \quad (4.16)$$

Окончательно, выбирая v в форме

$$v = \sum_{i=1}^{k+1} b_i \psi_{j,i}$$

и подставляя в (4.16), получаем одно условие на $k+1$ коэффициент разложения

$$\sum_{i=1}^{k+1} b_i \widehat{c}_i = 0,$$

так что ядро является точно k -мерным.

В силу (4.14) это заканчивает анализ и доказывает, что условие (H_R) всегда выполняется для рассматриваемых нелокальных эллиптических операторов. Без каких-либо изменений этот пример распространяется на такие же операторы произвольного порядка

$$V'(\psi) = -(-\Delta)^m \psi + \lambda_l \psi - \left(\int_{\Omega} \psi^2 \right) \psi \quad \text{для любого } m \geq 1.$$

§ 5. Скорость сходимости может быть сколь угодно медленной: $\theta = 0$

Здесь мы представляем некоторые оценки, показывающие, что скорость сходимости в параболических задачах со специально подобранными нелинейностями может быть сколь угодно медленной.

5.1. Стартовое полулинейное параболическое уравнение. Пусть Ω – ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^N$ такая, что $\lambda_1 = -1$ является первым простым собственным значением оператора Δ в $L^2(\Omega)$ с областью определения $H_0^2(\Omega)$ и нормализованной собственной функцией $\phi_1 > 0$ в Ω . Рассмотрим следующее параболическое уравнение:

$$u_t = V'(u) \equiv \Delta u + u - e^{-1/u^2} \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

где мы полагаем $f(0) = 0$ по непрерывности. Здесь e^{-1/u^2} является стандартной C^∞ -функцией, которая не является аналитической в $u = 0$. В силу хороших спектральных свойств оператора Δ мы имеем, что существует локально инвариантное класса C^∞ одномерное центральное многообразие $W_{\text{loc}}^c(0)$ оператора $V'(u)$, являющееся касательным к собственному подпространству $E^c(0) = \text{Span}\{\phi_1\}$ оператора $\Delta + I$ (см. [29; теорема 9.2.2] и [30]). Изучая соответствующее поведение на центральном многообразии, представим решение в виде

$$u(x, t) = a_1(t)\phi_1(x) + u_2(x, t) \quad \text{для } t \gg 1, \quad (5.2)$$

где $u_2(x, t) = \sum_{k \geq 2} a_k(t)\phi_k(x) \perp E^c(0)$, $u_2(\cdot, t) = o(a_1(t))$ при $t \rightarrow \infty$ и предполагается, что $a_1(t) > 0$ для $t \gg 1$, т.е. мы берем положительное решение. Проектируя уравнение (5.1) на $E^c(0)$, получаем, что

$$a_1' = -\langle e^{-1/u^2}, \phi_1 \rangle \equiv -\langle e^{-1/(a_1^2 \phi_1^2 + \dots)}, \phi_1 \rangle \quad (5.3)$$

для $t \gg 1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает внутреннее произведение в $L^2(\Omega)$. Обозначая

$$\rho_1 = \max \phi_1(x) > 0, \quad \rho_2 = \int \phi_1 > 0,$$

получаем обыкновенное дифференциальное неравенство

$$a_1' \geq -\rho_2 e^{-1/(4\rho_1^2 a_1^2)}, \quad (5.4)$$

так что $a_1(t) \geq \bar{a}_1(t)$, где $\bar{a}_1$ – решение соответствующего ОДУ со знаком равенства в (5.4). Окончательно мы получаем следующую оценку:

$$a_1(t) \geq \frac{1}{3\rho_1 \sqrt{\ln t}} \quad \text{для } t \gg 1 \quad (5.5)$$

для стабилизации решения на центральном многообразии. Очевидно, это соответствует $\theta = 0$ в (1.14), так что рациональный алгебраический модуль $|\cdot|^{1-\theta}$ в (1.12) не может быть применен к таким C^∞ -нелинейностям. Можно ввести подходящий модуль, для которого поведение (5.5) является допустимым. Например, для слегка модифицированной функции

$$V(u) = \frac{1}{2} e^{-1/u^2} \implies V'(u) = \frac{1}{u^3} e^{-1/u^2}$$

мы имеем *обобщенное градиентное неравенство* при $\psi = 0$ для $u \approx 0$ (фактически, это равенство)

$$\tilde{\omega}(V(u)) \leq |V'(u)| \quad \text{с модулем } \tilde{\omega}(s) = 2|s| |\ln(2s)|^{3/2},$$

который является “почти” линейной строго вогнутой функцией при $s \rightarrow 0$.

Легко построить и другие класса C^∞ неаналитические нелинейности, генерирующие медленную скорость сходимости. Напомним, что в соответствии с результатами в § 3 каждая такая медленная сходимость соответствует изолированной точке равновесия.

Замечание о кубической нелинейности. При наличии нетривиального ядра полное асимптотическое разложение решений может быть трудной проблемой даже в аналитическом кубическом случае:

$$u_t = \Delta u + u - u^3. \quad (5.6)$$

Как было показано в [32], при том же предположении о ядре

$$\dim \ker(\Delta + I) = 1 \quad (5.7)$$

существуют решения со следующим логарифмически возмущенным убыванием при $t \rightarrow \infty$:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^n t^{-1/2-k} \sum_{j=0}^k \varphi_{kj}(x) (\ln t)^j + O(t^{-3/2-n})$$

с некоторым целым $n > 0$, где φ_{kj} являются решениями регулярной эллиптической задачи. Это соответствует специальному случаю поведения на центральном многообразии, когда главный член сходимости к $\psi = 0$ имеет порядок $O(t^{-1/2})$ и не содержит сомножитель $\ln t$. Легко видеть, почему в этом случае невозможно ветвление равновесия от нуля. Действительно, если бы такое произошло, то ввиду (5.7) по теории ветвления [22] ветвь точек равновесия должна была бы иметь представление $\psi = \mu\varphi_0 + \dots$, где μ является параметром ветвления и φ_0 является собственной функцией оператора Δ с $\lambda = -1$. Подставляя это разложение в стационарное уравнение $\Delta\psi + \psi - \psi^3 = 0$ и умножая на φ_0 , получаем $\int_{\Omega} \varphi_0^4 = 0$, противоречие. Итак, $\psi = 0$ является изолированной точкой покоя.

5.2. Нелокальное полулинейное параболическое уравнение. Вычисления, как обычно, упрощаются для полулинейных нелокальных параболических потоков вида

$$u_t = \Delta u + \mu u - g' \left(\int_{\Omega} u^2 \right) u, \quad (5.8)$$

где $g'(s)$ – заданная класса C^∞ неаналитическая функция. Здесь потенциал –

$$V(u(t)) = -\frac{1}{2} \int |Du(t)|^2 + \frac{\mu}{2} \int u^2 - g \left(\int u^2 \right). \quad (5.9)$$

Предполагая снова, что $\mu = \lambda_1$ – первое собственное число оператора Δ в $L^2(\Omega)$, мы получаем, что поведение на центральном многообразии (5.2) описывается при помощи ОДУ

$$a_1' = -g'(a_1^2 + \dots) \quad \text{для } t \gg 1. \quad (5.10)$$

Выбирая неаналитическую C^∞ -функцию g , например

$$g(s) = s^{3/2} e^{-1/s} \quad \text{для } s > 0,$$

и интегрируя (5.10), получаем асимптотическое неалгебраическое убывание

$$a_1(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\ln 2t}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Отметим, что кроме демонстрации медленного убывания рассматриваемая “менее нелинейная” модель (5.8) является подходящей моделью для обнаружения “чистых” эволюционных свойств орбит описываемых стабилизационных явлений.

§ 6. О приложении к гладким градиентным системам в гильбертовых пространствах

Такое развитие является непосредственным, так как в доказательстве теоремы 1.1 в § 2 мы минимально использовали специфические свойства рассматриваемых эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\| \cdot \|$ внутреннее произведение и индуцированную норму в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Рассмотрим гладкий градиентный поток в H

$$u_t = V'(u) \quad \text{для } t > 0, \quad (6.1)$$

где оператор V' с плотной компактно вложенной областью определения $H^2 = D(V') \subset H$ является производной Фреше C^2 -гладкого функционала $V: H^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что $V''(u): H^2 \rightarrow H$ является фредгольмовым оператором индекса нуль, допускающим подходящее самосопряженное расширение с дискретным спектром, компактной резольвентой и подмножеством собственных функций, являющимся полным и замкнутым в H . Необходимое условие коэрцитивности V' налагается для того, чтобы гарантировать существование глобальных орбит $\{u(t)\}$ при произвольной начальной функции $u_0 \in H^2$, которые

являются достаточно регулярными, чтобы удовлетворять градиентному тождеству (ср. (2.10))

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) = \|u_t\|^2 \geq 0. \quad (6.2)$$

Мы предполагаем выполненным условие (H_R) и будем проверять, используя схему доказательства из § 2, какие условия нужны, чтобы гарантировать справедливость п. (i) и, следовательно, п. (iii) теоремы 1.1.

Шаги 1–3. Конструкция остается той же самой, и (2.2), (2.5) и (2.7) гарантируются предположением хороших спектральных свойств линейаризованного самосопряженного оператора $V''(\psi_\mu)$ для любого $\psi_\mu \in S_k$ равномерно по $\mu \approx 0$.

Шаг 4. Оценка (2.9) справедлива для достаточно гладкого оператора V' в H^2 .

Шаг 5. Здесь нам нужна оценка (2.12), которая в действительности есть формула Лагранжа для гладкого функционала V в H^2 .

Шаг 6. Предложение 2.1 остается справедливым в топологии H .

Шаг 7 остается неизменным.

Следовательно, п. (i) и п. (iii) теоремы 1.1 справедливы для произвольного гладкого градиентного потока при наличии резонансного ветвления. Отсюда вытекает, что результат о сходимости (эволюционная полнота) имеет место для уравнения (1.16) порядка $2m$ и для других гладких градиентных параболических потоков, управляемых операторами высокого порядка.

§ 7. Неавтономные возмущения градиентных систем

Доказательство результата о сходимости в п. (i) теоремы 1.1 для неавтономных возмущений уравнения (6.1) требует несколько большей модификации нашего подхода. Основные черты этого нашего анализа хорошо иллюстрируются следующим примером:

$$u_t = V'(u) + h(t)W'(u) \quad \text{для } t > 0, \quad (7.1)$$

где $W(u): H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является C^1 -функционалом. Без ограничения общности и для упрощения будущих вычислений мы предположим, что убывание возмущения $h \in C^2$ удовлетворяет условию

$$h(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad h(t) > 0, \quad h'(t) < 0 \quad \text{для } t \geq 0, \quad (7.2)$$

так что, в частности, $h' \in L^1(\mathbb{R}_+)$. С другой стороны, для немонотонных и меняющих знак возмущений мы можем использовать оценки сверху и снизу функциями $h_\pm(t)$, удовлетворяющими необходимым предположениям.

Фактически нам понадобится более ограничительное условие на характер убывания:

$$\sqrt{h} \in L^1(\mathbb{R}_+). \quad (7.3)$$

Представляется важным использование неэкспоненциально малых возмущений, таких как

$$h(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha} \quad \text{с любым } \alpha > 2, \quad (7.4)$$

для которых (7.3) выполняется. Для будущих целей интегрирования обыкновенных дифференциальных неравенств мы характеризуем класс таких медленно убывающих функций следующим образом: для произвольной постоянной $\beta > 0$

$$\int_0^t h(s)e^{\beta s} = \frac{1}{\beta} h(t)e^{\beta t}(1 + o(1)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (7.5)$$

или, эквивалентно, по правилу Лопиталя

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \rightarrow 0^- \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

Так как (7.1) не является градиентной системой в том смысле, что в общем случае не существует монотонной функции Ляпунова, мы должны, во-первых, доказать, что остается справедливой ключевая характеристика (1.6) ω -предельного множества. Так что мы должны начать следующим образом.

Шаг 0: $\omega(u_0) \subseteq \Phi$. Умножая (7.1) на u_t , в H вместо (6.2) мы получаем

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) + \frac{d}{dt} (h(t)W(u)) - h'(t)W(u) = \|u_t\|^2 \geq 0. \quad (7.7)$$

Интегрируя в пределах (t, ∞) и используя, что $h' \in L^1(\mathbb{R}_+)$, получаем сходимость

$$\int_t^\infty \|u_t(s)\|^2 < \infty. \quad (7.8)$$

Следовательно, задавая последовательность $\{t_k\} \rightarrow \infty$ так, что $u(t_k) \rightarrow \psi \in \omega(u_0)$, мы получаем в силу неравенства Гёльдера, что для сколь угодно большого $t > 0$

$$\|u(t_k + t) - u(t_k)\|^2 \leq t \int_{t_k}^\infty \|u_t\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (7.9)$$

Переходя к пределу при $t_k + t \rightarrow \infty$ в (7.1), мы заключаем, что $u(t_k + t)$ сходится в H к решению $u(t)$ предельного автономного уравнения (6.1), которое не зависит от t , так что имеется точка покоя $\psi \in \Phi$.

Возвратимся теперь к семи шагам доказательства из § 2.

Шаги 1–3 остаются без изменений.

Шаг 4. Ввиду наличия дополнительного члена в (7.1), вместо (2.8) будем иметь

$$g = u_t + g_1(u) + h(t)W'(u). \quad (7.10)$$

Поэтому, используя (7.2), вместо (2.9) получаем оценку

$$\|u(t) - \psi_{\mu(t)}\|_{H^2} \leq C_4(\|u_t\| + h(t)). \quad (7.11)$$

Шаг 5. Из (7.7) следует, что сходимость (2.11) имеет место. Тогда вместо (2.13) имеем

$$\frac{d}{dt} [B - V(u(t))] = -\|u_t\|^2 + \langle h(t)W'(u), u_t \rangle \leq -C_7[B - V(u(t))] + C_7h(t). \quad (7.12)$$

Интегрируя это неравенство с использованием предположений (7.5), (7.6) о медленном убывании, мы заключаем, что вместо экспоненциальной оценки (2.14) на больших ограниченных интервалах $t \in [t_k, t_k + T]$ при $k \rightarrow \infty$ с $T \gg 1$ и $t \gg 1$

$$B - V(u(t)) \leq 2h(t_k + t). \quad (7.13)$$

Шаг 6 нуждается в большей модификации, так как предложение 2.1 применимо только к экспоненциально убывающим оценкам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Предположим, что (7.2) и (7.3) выполняются и для всех $t > 0$*

$$\int_t^\infty \|u_t(s)\|^2 \leq h(t). \quad (7.14)$$

Тогда существует постоянная $\tau > 0$ такая, что

$$\|u(t) - u(\tau)\| \leq \int_{t-1}^\infty \sqrt{h(s)} \quad \text{для всех } 0 < t \leq \tau < \infty. \quad (7.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно, если $|t - \tau| \leq 1$, при этом в силу неравенства Гёльдера

$$\|u(t) - u(\tau)\| \leq \sqrt{\tau - t} \sqrt{\int_t^\tau \|u_t(s)\|^2} \leq \sqrt{\tau - t} \sqrt{h(t)}.$$

Для больших интервалов $\tau - t > 1$ мы осуществляем разбиение на временные шаги $\{\Delta_i, i = 0, 1, \dots, K\}$, так что вместо (2.17) получаем

$$\|u(t) - u(\tau)\| \leq \sum_{i=0}^K \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\int_{t_i}^\infty \|u_t(s)\|^2} = \sum_{i=0}^K \sqrt{\Delta_i} \sqrt{h(t_i)}, \quad (7.16)$$

где $t_{i+1} = t_i + \Delta_i$. Полагая $\Delta_i = 1$ для $i = 0, 1, \dots, K-1$ и $\Delta_K \leq 1$, по интегральному признаку сходимости рядов получаем (7.15).

Шаг 7 остается тем же самым, при этом мы заменяем “экспоненциально малый” в (а) и (b) на “малый относительно $\sqrt{h(t)}$ ”.

Второй и третий авторы благодарят математический факультет Университета г. Бат (Англия) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] М. А. Krasnosel'skii, П. П. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **263**, Springer-Verlag, Berlin, 1984; пер. с русс.: М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975.

- [2] Л. Люстерник, “Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **3** (1938), 257–264.
- [3] L. Lusternik, L. Schnirelmann, “Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **189** (1929), 269–271.
- [4] L. Lusternik, L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. I. Pt. *Espaces à un nombre fini de dimensions*, Hermann, Paris, 1934; пер. с русс.: Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, МГУ, М., 1930.
- [5] D. Clark, “A variant of Lusternik–Schnirelman theory”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1973), 65–74.
- [6] С. И. Похожаев, “Об одном подходе к нелинейным уравнениям”, *Докл. АН СССР*, **247**:6 (1979), 1327–1331; англ. пер.: S. I. Pokhozhaev, “On an approach to nonlinear equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **20**:4 (1979), 912–916.
- [7] S. I. Pohozaev, “The fibering method in nonlinear variational problems”, *Topological and variational methods for nonlinear boundary value problems* (Proceedings of the 20th seminar in partial differential equations, Cholin, 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser., **365**, Longman, Harlow, 1997, 35–88.
- [8] A. Friedman, *Partial differential equations*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York–Montreal, QC–London, 1969.
- [9] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Math. Surveys Monogr., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [10] G. R. Sell, Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Appl. Math. Sci., **143**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [11] V. A. Galaktionov, “Evolution completeness of separable solutions of nonlinear diffusion equations in bounded domains”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27**:15 (2004), 1755–1770.
- [12] H. Kielhöfer, *Bifurcation theory. An introduction with applications to PDEs*, Appl. Math. Sci., **156**, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [13] Т. И. Зеленьяк, “О стабилизации решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной”, *Дифференц. уравнения*, **4** (1968), 34–45.
- [14] H. Matano, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:2 (1978), 221–227.
- [15] R. Chill, “On the Łojasiewicz–Simon gradient inequality”, *J. Funct. Anal.*, **201**:2 (2003), 572–601.
- [16] A. Haraux, M. A. Jendoubi, “Decay estimates to equilibrium for some evolution equations with an analytic nonlinearity”, *Asymptot. Anal.*, **26**:1 (2001), 21–36.
- [17] J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [18] P. Poláčik, F. Simondon, “Nonconvergent bounded solutions of semilinear heat equations on arbitrary domains”, *J. Differential Equations*, **186**:2 (2002), 586–610.
- [19] J. K. Hale, G. Raugel, “Convergence in gradient-like systems with applications to PDE”, **43**:1 (1992), 63–124.
- [20] J. Busca, M. A. Jendoubi, P. Poláčik, “Convergence to equilibrium for semilinear parabolic problems in $\mathbb{R}^N$ ”, *Comm. Partial Differential Equations*, **27**:9 (2002), 1793–1814.
- [21] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **5**, D. Reidel Publ., Dordrecht, 1987; пер. с русс.: М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980.
- [22] M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of branching of solutions of non-linear equations*, Noordhoff International Publ., Leyden, 1974; пер. с русс.: М. М. Вайнберг,

- В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969.
- [23] M. S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Lectures on nonlinear problems in mathematical analysis, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1977.
 - [24] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
 - [25] V. A. Galaktionov, J. L. Vázquez, *A stability technique for evolution partial differential equations.*, A dynamical systems approach, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **56**, Birkhäuser, Boston, MA, 2004.
 - [26] E. Feireisl, F. Issard-Roch, H. Petzeltová, “A non-smooth version of the Łojasiewicz–Simon theorem with applications to non-local phase-field systems”, *J. Differential Equations*, **199**:1 (2004), 1–21.
 - [27] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1981.
 - [28] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1992.
 - [29] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **16**, Birkhäuser, Basel, 1995.
 - [30] G. Simonett, “Center manifolds for quasilinear reaction-diffusion systems”, *Differential Integral Equations*, **8**:4 (1995), 753–796.
 - [31] J. Escher, G. Simonett, “A centre manifold analysis for the Mullins–Sekerka model”, *J. Differential Equations*, **143**:2 (1998), 267–292.
 - [32] Л. А. Багиров, В. А. Кондратьев, “Об асимптотических свойствах решений дифференциальных уравнений”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **22** (2002), 37–70; англ. пер.: L. A. Bagirov, V. A. Kondratiev, “On asymptotic properties of solutions of diffusion equations”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **114**:4 (2003), 1407–1428.

В. А. Галактионов (V. A. Galaktionov)

University of Bath

E-mail: vag@maths.bath.ac.uk

Поступила в редакцию

29.08.2006

С. И. Похожаев (S. I. Pohozaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

А. Е. Шишков (A. E. Shishkov)

Институт прикладной математики и механики НАН

Украины, г. Донецк

E-mail: shishkov@iamm.ac.donetsk.ua