Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Обобщенная формула Герона–Тарталья и некоторые ее следствия,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 10, 105–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:10:27

УДК 513.7

И. Х. Сабитов

Обобщенная формула Герона–Тарталья и некоторые ее следствия

Известная формула Герона для нахождения площади треугольника через его стороны обобщается на объемы многогранников следующим образом. Доказывается, что для многогранника (с треугольными гранями) с данным комбинаторным строением K и с данным набором (l) длин ребер существует многочлен такой, что объем многогранника является его корнем, причем коэффициенты многочлена зависят только от K и (l) и не зависят от конкретной конфигурации самого многогранника. Как следствие, решается ряд задач метрической теории многогранников.

Библиография: 31 название.

§ 1. Введение

Хотя первый серьезный результат в теории изгибаний многогранников был получен еще в 1813 году (знаменитая теорема Коши о неизгибаемости выпуклых многогранников), тем не менее первый пример вложенного изгибаемого многогранника был построен только в 1977 году американским математиком Р. Коннелли [1] и, по-видимому, почти сразу же было замечено, что объем этого и других позже построенных изгибаемых многогранников в ходе изгибания остается постоянным. Это дало Коннелли основание со ссылкой на Д. Сулливана сформулировать на Международном конгрессе математиков в Хельсинки в 1978 году гипотезу об инвариантности объема любого изгибаемого многогранника [2], которая в наглядной интерпретации равносильна утверждению, что из изгибаемых многогранников с отверстием на грани нельзя изготовить математически идеальные кузнечные меха – в них в ходе изгибания в силу закона Бойля–Мариотта давление будет оставаться постоянным и поэтому не будет потока воздуха.¹ В этой работе мы приведем положительное решение этой проблемы, причем оно получается как простое следствие более общего утверждения (см. теорему 1), имеющего, как нам кажется, фундаментальное значение для всей метрической теории многогранников. Вообще

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00836).

¹ Вообще история появления этой задачи остается невыясненной до конца несмотря на то, что почти все ее участники живы и продолжают активно работать. Кроме Коннелли, эту задачу в [3] сформулировал и ныне покойный Н. Кейпер, не упоминая при этом никакой фамилии и не ссылаясь ни на какую работу. Единственное, что можно утверждать точно, сказал Коннелли в своем докладе на 3-м геометрическом фестивале в Будапеште летом 1996 года, это то, что за термин “кузнечные меха” ответствен он сам, а кто первый сформулировал саму проблему, на это он затруднился ответить.

эта теорема о возможности обобщения формулы Герона для площади треугольника на объемы многогранников уже опубликована в [4], но в данной работе мы приводим более развернутое ее изложение в модифицированном варианте. Изложение доказательства несколько изменено также по сравнению с английским вариантом, принятым к публикации в журнале “Discrete and Computational Geometry”. В частности, дан новый вывод уравнения Кэли–Менгера. Доказательство основной леммы ведется по тексту диссертации [5]. Кроме того, наряду с новыми историческими и математическими комментариями даны также некоторые новые результаты, полученные совсем недавно, главным образом как результат компьютерных вычислений.

§ 2. Основные понятия и определения

Начнем с определений основных понятий, связанных с многогранниками в трехмерном пространстве. Всякий многогранник в $\mathbb{R}^3$ характеризуется своим *комбинаторным строением* или *комбинаторной схемой* и *геометрической реализацией* этой схемы в пространстве. Мы будем рассматривать многогранники только с треугольными гранями, поэтому за основу комбинаторной модели многогранника берем комбинаторную схему некоторого двумерного симплициального комплекса K . Многогранник с *комбинаторным строением* K , или *геометрическую реализацию* симплициального комплекса K в $\mathbb{R}^3$, можно получить двумя способами.

Пусть K сначала задан как двумерный *абстрактный* симплициальный комплекс с n нульмерными симплексами, совокупность которых обозначим как некоторое множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Любое отображение $P: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *многогранником в $\mathbb{R}^3$ с комбинаторным строением (структурой, схемой и т. п.) K* , при этом

- 1) образы нульмерных симплексов комплекса K называются *вершинами* многогранника P ;
- 2) одномерные симплексы, реализованные как прямолинейные отрезки, соединяющие образы соответствующих им пар нульмерных симплексов, называются *ребрами* многогранника;
- 3) *гранями* многогранника называются плоские треугольники, естественным образом соответствующие по отображению P двумерным симплексам комплекса K (конечно, построения ребер и граней можно реально и не проводить, а только договориться, что мы будем понимать под *вершинами*, *ребрами* и *гранями* многогранника P с комбинаторным строением K).

Второй способ определения многогранника предполагает, что K задан как *геометрический* симплициальный комплекс, т.е. его симплексы заданы как точки, отрезки и двумерные треугольники с указанием соответствующего закона отождествления. Пусть $|K|$ обозначает *тело комплекса K* , понимаемое как теоретико-множественное объединение геометрических симплексов из K с учетом закона их отождествления (иногда $|K|$ называется *полиэдром комплекса K*) и с соответствующей топологией. Тогда *многогранником в $\mathbb{R}^3$ с комбинаторным строением K* называется всякое отображение $P: |K| \rightarrow \mathbb{R}^3$, непрерывное в целом и

линейное на каждом симплексе, а образ $P(|K|)$ называется *геометрическим многогранником с комбинаторным строением* K .

Так как линейное отображение любого симплекса полностью определяется значением отображения в его нульмерных симплексах, то очевидно, что оба определения многогранника эквивалентны. При работе с многогранниками на компьютере предпочтительно иметь дело с первым определением, а второе определение более приспособлено для определения по аналогии многогранников с нетрехугольными гранями как образами клеток.

Чтобы не уточнять каждый раз, каким способом – первым или вторым – задано отображение, определяющее рассматриваемый многогранник, мы будем обозначать его всегда как $P: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ (из этой записи видно, что речь идет о многограннике в $\mathbb{R}^3$ с комбинаторным строением K).

Оба (равносильных) определения многогранника P таковы, что его геометрический образ в $\mathbb{R}^3$ может иметь самые разные особенности – вырождения ребер и граней, самопересечения и т. д., – поэтому для такой многогранной поверхности нужно дать специальное определение понятия объема “ограниченной” ею пространственной области. Для этого мы в общем определении многогранника *дополнительно предположим*, что исходный геометрически заданный симплициальный комплекс K гомеоморфен некоторому ориентируемому многообразию² топологического рода $g \geq 0$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что K уже сам представлен как триангулированное многообразие с прямолинейными симплексами в триангуляции (это то, что в топологической литературе обычно называют *полиэдральным* или *кусочно-линейным* многообразием). Пусть на K задана некоторая ориентация. Перенесем эту ориентацию на все грани $P(K)$, указав на них соответствующий порядок обхода вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенным объемом $V(P)$ ориентированного геометрического многогранника $P(K)$ называется сумма согласованно ориентированных объемов тетраэдров с общей вершиной в некоторой точке $O \in \mathbb{R}^3$ и с основаниями на соответственно ориентированных гранях геометрического многогранника $P(K)$.*

Напомним, что если вершины p ориентированной грани $G \subset P(K)$ выписаны по нужному порядку обхода, скажем, в виде p_i, p_j, p_k , то ориентированный объем $V(T)$ тетраэдра T с вершиной в точке A и с основанием на грани G вычисляется как одна шестая смешанного произведения векторов, идущих от A к вершинам грани G и взятых в порядке следования этих вершин. Отсюда легко вывести, что значение обобщенного объема многогранника не зависит от выбора точки O и что для вложенного в $\mathbb{R}^3$ многогранника его обобщенный объем совпадает с обычным ориентированным объемом. Если в $\mathbb{R}^3$ введена некоторая система декартовых координат с началом в точке O , то взяв в определении обобщенного объема в качестве

²В этом случае комбинаторная схема комплекса K устроена так, что каждый одномерный симплекс является общим ребром ровно двух двумерных симплексов (граней) и все грани, инцидентные одной вершине a , можно расположить в циклическом порядке так, что каждые две соседние грани имеют общее ребро (конечно, исходящее из вершины a); такие многогранники часто называют *полиэдральной* или *многогранной поверхностью*.

точки O начало координат, получаем следующее очевидное, но важное заключение: *обобщенный объем многогранника является однородным многочленом от координат вершин многогранника.*

§ 3. Уравнения для объема многогранников с малым числом вершин

Прежде чем сформулировать основную теорему, мы приведем те наводящие соображения, которые легли в основу предлагаемого подхода к проблеме “кузнечных мехов”.

Объем тетраэдра. Напомним, что если у тетраэдра (рис. 1) длины ребер равны $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$, то для его объема V верна формула³

$$V^2 = \frac{1}{144} \left(l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2 \right). \quad (1)$$

Рис. 1

Рис. 2

Обобщенный объем V четырехугольной пирамиды (рис. 2) с триангулированным основанием можно вычислить как алгебраическую сумму объемов V_1 тетраэдра $\langle Ap_1p_2p_3 \rangle$ и объема V_2 тетраэдра $\langle Ap_1p_3p_4 \rangle$:

$$V = V_1 \pm V_2 \Rightarrow V^4 - 2(V_1^2 + V_2^2)V^2 + (V_1^2 - V_2^2)^2 = 0,$$

³ Согласно итальянской энциклопедии [6] еще Н. Тарталья умел вычислять объем тетраэдра через его ребра, поэтому, на наш взгляд, формулу (1) исторически справедливо было бы называть формулой Герона–Тарталья, что мы и отразили в заголовке статьи.

и так как V_1^2 и V_2^2 выражаются по предыдущей формуле (1) через квадраты длин соответствующих ребер, то для обобщенного объема V четырехугольной пирамиды имеем полиномиальное уравнение вида

$$R(V) = V^4 + a_1(l)V^2 + a_2(l) = 0. \quad (2)$$

Мы хотим подчеркнуть, что объем *любого* многогранника с 5 вершинами и с данным комбинаторным строением (которое при метрически заданной звезде вершины A можно изменить только одним способом – считая, что в качестве ребра задана диагональ $\langle p_2 p_4 \rangle$, и получая тем самым новую комбинаторную структуру, изоморфную, однако, первоначальной) является корнем *одного и того же* уравнения (2), которое выписывается независимо от конфигурации вершин или положения многогранника в пространстве, и определяется *только* заданным комбинаторным строением и метрикой многогранника. Рассмотрим несколько примеров.

1) $V_1 = V_2 \neq 0$. Тогда мы имеем $R(V) = V^4 - 4V_1^2 V^2 = 0$. Следовательно, $V = \pm 2V_1$ (если вершины p_2 и p_4 расположены по разные стороны от плоскости, проходящей через вершины A, p_1 и p_3) и $V = 0$ (если вершины p_2 и p_4 находятся по одну сторону от плоскости, проходящей через вершины p_1, p_3 и A), так что для обоих возможных положений многогранника P в $\mathbb{R}^3$ их объемы являются корнем одного и того же уравнения (2).

2) $V_2 = 0, V_1 \neq 0$. Тогда $R(V) = (V^2 - V_1^2)^2 = 0 \Rightarrow V = \pm V_1$.

3) Длины $l_{A1} = l_{A3}, l_{13} = 0$, где нижние индексы соответствуют обозначениям вершин на рис. 2. Тогда $V_1 = 0, V_2 = 0 \Rightarrow R(V) = V^4 = 0 \Rightarrow V = 0$. Отметим, что в этом случае многогранник P допускает нетривиальные изгибания. Действительно, при указанных длинах ребер вершина p_1 совпадает с вершиной p_3 , поэтому грань $\langle Ap_1 p_2 \rangle$ совпадает с гранью $\langle Ap_3 p_2 \rangle$, а грань $\langle Ap_3 p_4 \rangle$ – с гранью $\langle Ap_1 p_4 \rangle$, и тогда три грани $\langle Ap_1 p_2 \rangle, \langle Ap_2 p_3 \rangle$ и $\langle p_1 p_2 p_3 \rangle$ (последняя грань является вырожденной) можно вращать вокруг оси $\langle Ap_1 \rangle = \langle Ap_3 \rangle$. Однако значение объема остается корнем одного и того же уравнения $R(V) = V^4 = 0$.

Из этих рассмотрений мы приходим к выводу, что в простейших случаях объемы многогранников являются корнями некоторого полиномиального уравнения с коэффициентами, не зависящими от расположения вершин многогранника в пространстве, а являющимися многочленами от квадратов длин ребер многогранника, причем *числовые* коэффициенты этих многочленов определяются комбинаторным строением многогранника.

§ 4. Изометричные многогранники как алгебраические многообразия и гипотеза “кузнечных мехов”

Пусть вершины многогранника P с n вершинами пронумерованы в каком-либо порядке и пусть (x_i, y_i, z_i) , $1 \leq i \leq n$, – их координаты. Тогда этому многограннику можно сопоставить точку $M(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ пространства $\mathbb{R}^{3n}$; обратно, каждой точке $M \in \mathbb{R}^{3n}$ очевидным образом можно сопоставить точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $1 \leq i \leq n$, пространства $\mathbb{R}^3$ и по ним, зная комбинаторную структуру K , построить соответствующий многогранник $P: K \rightarrow \mathbb{R}^3$. Следовательно, между множеством многогранников данного комбинаторного типа с n вершинами

и множеством точек пространства $\mathbb{R}^{3n}$ существует взаимно однозначное соответствие $P \leftrightarrow M$, которое в соответствующей топологии можно считать гомеоморфизмом.

Пусть e — число ребер комплекса K и пусть они пронумерованы так, что каждой паре вершин i и j , соединенных ребром, соответствует ребро с некоторым номером $k = k(i, j) = k(j, i)$. Пусть l_k — длина соответствующего ребра многогранника $P: K \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда имеем уравнения

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = l_k^2, \quad 1 \leq k = k(i, j) \leq e. \quad (3)$$

При данных фиксированных длинах ребер l_k все решения уравнения (3) определяют (по отображению $M \rightarrow P$) множество всех многогранников в $\mathbb{R}^3$, имеющих одинаковое комбинаторное строение и *изометричных* между собой. Среди этих многогранников есть такие, которые получаются друг из друга движениями в $\mathbb{R}^3$ как твердых тел. Чтобы исключить такие решения, добавим к системе (3) уравнения

$$\sum_i x_i = 0, \quad \sum_i y_i = 0, \quad \sum_i z_i = 0, \quad (4)$$

исключающие параллельный перенос многогранника. Вращения исключить сложнее. Дело в том, что не существует уравнений (по крайней мере, нам они неизвестны), пригодных к исключению вращения всех многогранников данного комбинаторного типа во *всех* случаях независимо от положения многогранника и значений длин его ребер (если речь идет об исключении непрерывных вращений одного *данного* многогранника, то такие уравнения известны (см. [3])). Например, уравнения

$$\sum_i x_i y_i = 0, \quad \sum_i y_i z_i = 0, \quad \sum_i x_i z_i = 0 \quad (5)$$

исключают вращение, *только если* $\sum_i x_i^2 \neq \sum_i y_i^2 \neq \sum_i z_i^2$ (т.е. когда эллипсоид инерции множества вершин многогранника не является эллипсоидом вращения). Вместо введения уравнений (5) можно считать, что одна грань многогранника занимает определенное фиксированное положение, исключаяющее возможность поворота многогранника. Например, если есть грань $\langle 1, 2, 3 \rangle$ и она невырождена, то к системе (3)–(4) можем добавить уравнения

$$y_2 = y_1, \quad z_1 = z_2 = z_3.$$

Но эти уравнения не исключают вращения, если выбранная грань окажется вырожденной при некотором наборе значений длин ребер, т.е. мы не можем выбрать *одну* конкретную грань, фиксация положения которой устраняет вращение многогранника при *всех* допустимых (по неравенству треугольника) значениях длин ребер⁴. Тем не менее, при данных длинах ребер, предполагая не все грани метрического комплекса K вырожденными, мы можем считать, что у нас, так или иначе, есть три уравнения, запрещающие непрерывные вращения многогранника.

⁴Таким образом, задачу исключения непрерывных вращений можно формулировать как задачу замены операции факторизации решений системы (3) по наложимости их друг на друга посредством непрерывного вращения добавлением трех уравнений, как это сделано для факторизации по параллельному переносу добавлением трех уравнений (4); иначе говоря, нужно уметь находить какое-либо *сечение* траекторий решений системы (3), получаемых под действием на них группы вращения пространства.

Напомним, что множество многогранников в $\mathbb{R}^3$, имеющих одинаковое комбинаторное строение и изометричных между собой, называется *конфигурационным пространством* любого из этих многогранников. Учитывая интерпретацию каждого многогранника в $\mathbb{R}^3$ как точки в $\mathbb{R}^{3n}$, получаем, что конфигурационное пространство любого данного многогранника P в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфно вещественному алгебраическому многообразию A в $\mathbb{R}^{3n}$, определяемому системой (3)–(4) с добавлением уравнений (5) или какого-либо их аналога. Уже для системы (3)–(4) легко показать, что при фиксированных значениях длин ребер *все* ее решения $(x_1, \dots, z_n)$ расположены в $\mathbb{R}^{3n}$ в шаре B_r : $x_1^2 + \dots + z_n^2 < r^2$, где радиус $r = r(K, l)$ зависит от комбинаторного строения K и метрики l многогранника. Действительно, пусть x_p – положительная x -координата в каком-либо решении системы (3)–(4); тогда в силу первого уравнения (4) должна быть некоторая координата x_q с отрицательным значением. Пусть вершины с номерами p и q соединены цепочкой ребер, последовательные вершины которых суть точки $M_p, M_{i_1}, \dots, M_{i_s}, M_q$. В силу (3) имеем

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - x_{i_1}| + |x_{i_2} - x_{i_3}| + \dots + |x_{i_s} - x_q| < L = \sum_k l_k, \quad 1 \leq k \leq e.$$

Так как $x_p - x_q = |x_p - x_q|$, то $x_p < L$. Значит, для всех координат имеем неравенства $|x_i| < L, |y_i| < L, |z_i| < L$, что и утверждалось.

Так как компактное алгебраическое многообразие может иметь лишь конечное число компонент связности, то конфигурационное пространство любого многогранника состоит из конечного числа компактных связных компонент, каждая из которых соответствует многогранникам, наложенным друг на друга некоторым нетривиальным изгибанием. Из них нульмерные (одноточечные) компоненты соответствуют неизгибаемым многогранникам, а компоненты размерности один и выше состоят из точек, соответствующих изометричным многогранникам, получаемым друг из друга изгибанием. Значит, если гипотеза “кузнечных мехов” верна, то многогранники из одной компоненты связности в A имеют одно и то же значение объема, а так как компонент конечное число, то отсюда заключаем, что если гипотеза “кузнечных мехов” верна, то множество значений объемов всех многогранников, имеющих данное комбинаторное строение и данный набор длин ребер, должно быть конечным.

§ 5. Основная теорема и ее следствия

На основании этих наблюдений естественно было предположить, что путь решения проблемы “кузнечных мехов” надо искать не в узких условиях самой задачи, когда математически очень трудно выразить и, тем более, использовать свойство изгибаемости исследуемого многогранника, а надо попытаться установить “конечнозначную зависимость” объема любого многогранника от его метрики и комбинаторного строения. Такое предложение было впервые высказано в [7], а затем уточнено в § 8 работы [8], написанном автором настоящей статьи. В окончательном виде основная теорема об объеме многогранников формулируется так.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $[P]$ – множество всех многогранников в $\mathbb{R}^3$, имеющих один и тот же комбинаторный тип K и один и тот же данный набор

длин ребер $(l_1, \dots, l_e)$, где e – число ребер. Тогда можно указать некоторый многочлен

$$R(V) = V^{2N} + r_1 V^{2N-2} + \dots + r_N \quad (6)$$

такой, что обобщенный объем каждого многогранника из $[P]$ является корнем многочлена (6), в котором коэффициенты r_i , $1 \leq i \leq N$, сами являются многочленами от квадратов длин ребер многогранника с числовыми коэффициентами, зависящими от комбинаторного строения многогранника.

Из этой теоремы вытекают два очевидных следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество значений обобщенных объемов всех изометричных между собой многогранников с одинаковым комбинаторным строением конечно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Обобщенный объем изгибаемого многогранника в ходе изгибания остается постоянным.

Действительно, объем в ходе изгибания многогранника должен изменяться непрерывно, а непрерывная функция, принимающая конечное число значений, должна быть постоянной. Таким образом, утверждение гипотезы “кузнечных мехов” оказалось простым следствием основной теоремы, которую естественно интерпретировать как обобщение формулы Герона–Тарталья на многогранники.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, стоит, по-видимому, привести некоторые сведения по истории ее появления. Более десяти лет после появления гипотезы “кузнечных мехов” на эту тему не было ни одной публикации, хотя проблема всеми специалистами признавалась как необыкновенно притягательная по красоте и естественности постановки. Затем появились две работы В. А. Александрова [9] и [10], в которых автор пришел к отрицательным результатам в том смысле, что примененные им подходы, хотя и дали очень интересные результаты, но не привели ни к подтверждению, ни к опровержению гипотезы (в частности, как признавался автор, в работе [10] он специально искал новые примеры изгибаемых многогранников с целью опровержения этой гипотезы). Первый положительный результат с использованием нашей идеи исключения неизвестных был получен О. В. Павловой в [11] для подвесок с произвольным числом звеньев экватора (еще ранее в 1991 году в своей дипломной работе она получила аналогичный результат для октаэдров, которые являются подвесками с четырехзвенным экватором). Хотя из этого ее результата не получалось никакого формального продвижения в решении проблемы “кузнечных мехов” (так как постоянство – с равенством нулю – объема изгибаемой подвески было установлено Коннелли в 1974 году в работе [12]), но он давал первое подтверждение перспективности предложенного нами подхода к решению этой проблемы. В 1995 году в работе [13] мы получили теорему, дающую как следствие решение проблемы “кузнечных мехов” для довольно широкого класса многогранников, в частности, для всех гомеоморфных сфере многогранников с числом вершин меньше 12 (этот результат опубликован также в [14]). Результат для всех многогранников типа сферы был анонсирован в [15], затем в [16] была изложена схема доказательства для многогранников рода не больше 4, а общий случай был темой доклада в мае 1996 года на конференции в МГУ в честь 175-летия со дня

рождения П. Л. Чебышёва (краткое изложение доклада см. в [17]); полное доказательство, полученное в конце февраля–начале марта 1996 года, опубликовано в [4] (расширенный вариант его будет опубликован в журнале “Discrete and Computational Geometry”). Несколько позже американскими математиками Р. Коннелли и А. Вальц было получено другое доказательство теоремы 1. В геометрической своей части оно основано на тех же идеях, что и в [13], но для их реализации используется другой алгебраический аппарат. Это доказательство опубликовано в статье [18], первоначальным вариантом которой было предложенное нами для публикации в том же журнале подробное изложение метода и результатов упомянутой выше работы [13]. Доказательство в [18] существенно короче, чем в [4], однако, оно дает только утверждение о существовании требуемого многочлена, между тем как в [4] существование такого многочлена доказывается конструктивно путем применения конечного алгоритма для его построения.

Сделаем теперь несколько замечаний, уточняющих полученный результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема верна и для многогранников с нетреугольными гранями в том смысле, что объем всякого многогранника определяется как корень некоторого многочлена, в котором коэффициенты зависят от комбинаторного строения многогранника и его метрики. Действительно, по определению изометричных многогранников грани в них предполагаются твердыми, поэтому каждую нетреугольную грань можно разбить на треугольники некоторой системой диагоналей, сохраняющих свою длину при изгибаниях и вообще при изометриях. Так как метрика многогранника определяется метрикой его граней (конечно, с учетом комбинаторного строения многогранника), то длины проведенных диагоналей граней зависят только от метрики, а объем *данного* многогранника от выбора этих диагоналей не зависит, поэтому рассматривая его объем как объем многогранника, полученного после триангуляции граней, мы получаем справедливость утверждения замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как будет видно из доказательства теоремы, для многогранника данного комбинаторного типа можно указать много (но конечное число) многочленов Q_i , для которых объем многогранника является их общим корнем. Мы не можем сказать, являются ли эти многочлены разными или же они, имея разное “происхождение”, на самом деле имеют одни и те же коэффициенты. Поэтому мы не можем утверждать, что тот многочлен $R(V)$, о котором идет речь в теореме, зависит *только* от метрики и от комбинаторного строения многогранника – он еще, вообще говоря, зависит и от способа перехода к данному многограннику от многогранников с меньшим числом вершин. Мы можем предложить в качестве многочлена, зависящего только от метрики и комбинаторного строения, многочлен, являющийся наибольшим общим делителем всех этих многочленов $R_i(V)$, но будет ли он заведомо наименьшей степени, мы не знаем. Тем самым мы пока не умеем получать своего рода *канонический* многочлен наименьшей степени, среди корней которого находится весь тот конечный набор значений объемов, которые могут иметь все многогранники, являющиеся изометрическими реализациями данного симплициального комплекса с данной многогранной метрикой. Но в работе [19] для октаэдров такой многочлен вида (6) найден – он имеет степень 16 и эта степень является наименьшей, так как можно указать октаэдр, имеющий 8 реализаций с 8 разными

объемами (их число надо еще умножить на 2, так как возможны два выбора ориентации). Конкретный вид этого многочлена для некоторых октаэдров приведен в конце статьи.

Для доказательства теоремы нам потребуются вспомогательные утверждения, которые будут доказаны в §§ 6–8.

§ 6. Уравнение Кэли–Менгера

Известно, что 10 расстояний между 5 точками в пространстве не могут быть заданы произвольно, а они должны удовлетворять уравнению Кэли–Менгера (см., например, [20], [21]). Для подробной записи и исследования уравнения Кэли–Менгера мы воспользуемся рис. 3, на котором схематически изображены 5 точек и 10 отрезков между ними. Обозначим через l с двумя индексами внизу квадраты длин соответствующих отрезков; тогда уравнение Кэли–Менгера можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{A1}^2 & l_{A2}^2 & l_{A3}^2 & l_{A4}^2 \\ 1 & l_{1A}^2 & 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ 1 & l_{2A}^2 & l_{21}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ 1 & l_{3A}^2 & l_{31}^2 & l_{32}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ 1 & l_{4A}^2 & l_{41}^2 & l_{42}^2 & l_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Рис. 3

Положив $x = l_{13}^2$, $y = l_{24}^2$, мы могли бы раскрыть этот определитель 6-го порядка и найти его вид как многочлена относительно x и y , как это сделано в [4]. Мы, однако, для нахождения подробной записи уравнения Кэли–Менгера воспользуемся его геометрическим смыслом, состоящим в том, что оно выражает принадлежность трехмерному пространству четырех векторов, идущих от одной из пяти точек к остальным четырем точкам. А это означает, что равен нулю определитель Грама, составленный из этих четырех векторов. Пусть на рис. 3 векторы, идущие из вершины A к вершинам p_i , обозначены как $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда выполнение уравнения Кэли–Менгера равносильно выполнению уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{p}_1^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3^2 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Выразим в этом определителе скалярные произведения через расстояния. Получим

$$\begin{vmatrix} l_{A1}^2 & \frac{l_{A1}^2 + l_{A2}^2 - p}{2} & \frac{l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x}{2} & \frac{l_{A1}^2 + l_{A4}^2 - q}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A2}^2 - p}{2} & l_{A2}^2 & \frac{l_{A2}^2 + l_{A3}^2 - l_{23}^2}{2} & \frac{l_{A2}^2 + l_{A4}^2 - y}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x}{2} & \frac{l_{A3}^2 + l_{A2}^2 - l_{23}^2}{2} & l_{A3}^2 & \frac{l_{A3}^2 + l_{A4}^2 - l_{34}^2}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A4}^2 - q}{2} & \frac{l_{A2}^2 + l_{A4}^2 - y}{2} & \frac{l_{A3}^2 + l_{A4}^2 - l_{34}^2}{2} & l_{A4}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $x = l_{13}^2$, $y = l_{24}^2$, $p = l_{12}^2$, $q = l_{14}^2$.

Обозначим для краткости совокупность квадратов длин $(l_{1A}^2, l_{2A}^2, l_{3A}^2, l_{4A}^2, l_{23}^2, l_{34}^2)$ через (l) (в приложениях эти величины всегда будут известны как квадраты длин ребер многогранника) и будем раскрывать этот определитель по правилу Лапласа, вычеркнув в нем первую и третью строку и рассматривая его как многочлен относительно переменных x, y, p, q с коэффициентами, зависящими от (l) . Среди коэффициентов есть такие, которые не обращаются в нуль в тех случаях, когда никакие три точки из пяти точек A, p_1, p_2, p_3, p_4 не лежат на одной прямой; такие коэффициенты мы будем обозначать как $a(l)$ с некоторыми индексами; например, таковыми будут коэффициенты при p^2 и q^2 . Те же из коэффициентов, которые могут равняться нулю при некоторых конкретных значениях переменных (l) , мы обозначим как $b(l)$ с некоторым индексом; например, таковыми являются коэффициенты⁵ при x и y . При такой договоренности в обозначениях после раскрытия определителя и умножения его на -8 получим уравнение следующего вида (с выделением переменной x как основной):

$$\begin{aligned} & x^2(y^2 + a_1(l)y + b_1(l)) \\ & + x(a_2(l)y^2 + b_2(l)py + b_3(l)qy + b_4(l)p + b_5(l)q + b_6(l)y + b_7(l)) \\ & + (a_3(l)p^2 + a_4(l)q^2 + b_8(l)y^2 + b_9(l)pqy + b_{10}(l)pq \\ & + b_{11}(l)py + b_{12}(l)qy + b_{13}(l)p + b_{14}(l)q + b_{15}(l)y + b_{16}(l)) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Возможны еще случаи, когда нам нужно будет интерпретировать уравнение Кэли–Менгера как полиномиальное уравнение относительно переменных p или q и поэтому полезно иметь это представление, скажем, для p :

$$\begin{aligned} & ap^2 + (aqy + bxy + bq + bx + by + b)p \\ & + (x^2y^2 + axy^2 + ayx^2 + aq^2 + bx^2 + by^2 \\ & + bqxy + bq x + bq y + bxy + bq + bx + by + b) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(мы не пишем индексов, так как самое важное здесь – это не значения коэффициентов, а распределение степеней переменных x, y, q в коэффициентах для p^2, p и p^0).

⁵ В действительности для многогранника P в общем положении все коэффициенты в уравнении Кэли–Менгера не равны нулю; таким образом, в частных случаях мы различаем их по равенству или неравенству нулю по наиболее простому условию отсутствия в P трех вершин, не лежащих на одной прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существенно отметить, что весь коэффициент $(y^2 + a(l)y + b(l))$ при x^2 равен

$$l_{34}^4 + l_{2A}^4 + l_{4A}^4 - 2l_{2A}^2 l_{4A}^2 - 2l_{34}^2 l_{4A}^2 - 2l_{2A}^2 l_{34}^2 = -16S_{\langle Ap_1p_2 \rangle}^2,$$

где $S_{\langle Ap_1p_2 \rangle}$ — площадь треугольника $\langle Ap_1p_2 \rangle$, так что он не обращается в нуль для любого многогранника в общем положении.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Существует способ получения уравнения (7), опирающийся на уравнение (2) и не использующий уравнение Кэли–Менгера как известное свойство 10 расстояний. Для этого поступим следующим образом. Вычислим сначала объем V четырехугольной пирамиды из рис. 2 другим способом, не обращаясь к уравнению (2). Пусть начало координат расположено в вершине A и пусть координаты вершины p_i обозначены как (x_i, y_i, z_i) , $1 \leq i \leq 4$. Тогда ориентированный объем четырехугольной пирамиды $\langle Ap_1p_2p_3p_4 \rangle$ можно представить как сумму ориентированных объемов V_1 и V_2 тетраэдров $\langle Ap_1p_2p_3 \rangle$ и $\langle Ap_1p_3p_4 \rangle$ с согласованной ориентацией их оснований $\langle p_1p_2p_3 \rangle$ и $\langle p_1p_3p_4 \rangle$. А эти объемы мы можем представить через смешанные произведения векторов, идущих из вершины A в вершины p_i . Таким образом, имеем

$$6V = 6V_1 + 6V_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Возведем теперь это равенство в квадрат, причем при умножении определителей второй сомножитель представим в виде определителя соответствующей транспонированной матрицы. Тогда, обозначив векторы $\overrightarrow{Ap_i}$ через $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, получим

$$\begin{aligned} 36V^2 = & \begin{vmatrix} \mathbf{p}_1^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{p}_1^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3^2 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4^2 \end{vmatrix} \\ & + 2 \begin{vmatrix} \mathbf{p}_1^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3^2 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В каждом из этих определителей скалярные произведения выразим через расстояния и получим представление объема четырехугольной пирамиды через расстоя-

ния между всеми ее вершинами:

$$\begin{aligned}
 36V^2 = & \begin{vmatrix} l_{A1}^2 & \frac{1}{2}(l_{A1}^2 + l_{A2}^2 - p) & \frac{1}{2}(l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x) \\ \frac{1}{2}(l_{A1}^2 + l_{A2}^2 - p) & l_{A2}^2 & \frac{1}{2}(l_{A2}^2 + l_{A3}^2 - l_{23}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x) & \frac{1}{2}(l_{A2}^2 + l_{A3}^2 - l_{23}^2) & l_{A3}^2 \end{vmatrix} \\
 & + \begin{vmatrix} l_{A1}^2 & \frac{l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x}{2} & \frac{l_{A1}^2 + l_{A4}^2 - q}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x}{2} & l_{A3}^2 & \frac{l_{A3}^2 + l_{A4}^2 - l_{34}^2}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A4}^2 - q}{2} & \frac{l_{A3}^2 + l_{A4}^2 - l_{34}^2}{2} & l_{A4}^2 \end{vmatrix} \\
 & + 2 \begin{vmatrix} l_{A1}^2 & \frac{l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x}{2} & \frac{l_{A1}^2 + l_{A4}^2 - q}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A2}^2 - p}{2} & \frac{l_{A2}^2 + l_{A3}^2 - l_{23}^2}{2} & \frac{l_{A2}^2 + l_{A4}^2 - y}{2} \\ \frac{l_{A1}^2 + l_{A3}^2 - x}{2} & l_{A3}^2 & \frac{l_{A3}^2 + l_{A4}^2 - l_{34}^2}{2} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Далее выражаем $36V^2$ как многочлен относительно x и y и подставляем это выражение в уравнение (2). После этого трудоемкими, но очевидными преобразованиями можно показать, что это уравнение приводится к виду (7).

§ 7. Некоторые определения и формулировка основной леммы

Для формулировки основной леммы нам надо условиться о некоторой терминологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если известно, что для некоторого многогранника верна теорема 1, то будем говорить, что этот многогранник *обладает свойством R*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если трехзвенный цикл, образованный тремя ребрами многогранника, не является границей никакой грани, то такой цикл будем называть *пустым*.

Примером пустого цикла является цикл $\langle Ap_1p_3 \rangle$ на рис. 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что многогранник имеет *комбинаторное строение типа K_0* , если в нем есть хотя бы одна вершина, не инцидентная никакому пустому циклу, т.е. через которую не проходит ни один пустой цикл.

Примером такого многогранника является октаэдр. Контрпримером является многогранник типа тора, имеющий 7 вершин, — этот многогранник не имеет диагоналей и на границе звезды любой его вершины каждая пара вершин соединена ребром, так что через каждую вершину многогранника проходит 9 пустых циклов.

Отметим, что если в многограннике есть вершина степени 3, то такой многогранник имеет комбинаторный тип K_0 .

Теперь мы можем сформулировать основную лемму.

ЛЕММА 1. Если все многогранники фиксированного топологического рода $g \geq 0$ с n вершинами обладают свойством R , то многогранники того же топологического рода и комбинаторного типа K_0 с $n + 1$ вершинами тоже обладают свойством R .

§ 8. Доказательство леммы

Сначала мы предположим, что рассматриваемый многогранник P с $n + 1$ вершинами и комбинаторного типа K_0 находится в общем положении, т.е. координаты его вершин алгебраически независимы. Доказательство будем вести индукцией по степени m некоторой вершины, неинцидентной никакому пустому 3-циклу. Если P имеет некоторую вершину A степени $m = 3$, то лемма очевидна. Прежде чем делать общий индукционный шаг “от m к $m + 1$ ” с произвольным m мы рассмотрим отдельно переход от $m = 3$ к $m = 4$, потому что он нам поможет понять ту идею, которая будет использована для общего перехода “от m к $m + 1$ ”.

Рис. 4

Итак, пусть A – некоторая вершина степени 4, неинцидентная никакому пустому 3-циклу. Обозначим через $\text{St } A$ звезду вершины A . Перенумеруем вершины края $\text{St } A$, начав с произвольной вершины, в некотором циклическом порядке как p_1, p_2, p_3, p_4 . На основе P мы теперь построим два новых многогранника P_1 и P_2 , имеющие некоторую вершину степени 3. Именно, удалим сначала открытую звезду вершины A , получим многогранник P' с четырехугольным отверстием. Затем заклеим это отверстие двумя способами. Первый раз добавим к P' грань $\langle p_1p_2p_3 \rangle$ и боковые грани тетраэдра $\langle Ap_1p_3p_4 \rangle$; получим многогранник P_1 . Для построения второго многогранника добавим к P' грань $\langle p_2p_3p_4 \rangle$ и боковые грани тетраэдра $\langle Ap_1p_2p_4 \rangle$; получим многогранник P_2 . Эти построения возможны, так как диагонали $\langle p_1p_3 \rangle$ и $\langle p_2p_4 \rangle$ не являются ребрами многогранника P ; поэтому в новых многогранниках P_1 и P_2 каждая из них инцидентна точно двум новым добавленным

граням. В многогранниках P_1 и P_2 вершина A имеет степень 3. Обозначим длины диагоналей $\langle p_1p_3 \rangle$ и $\langle p_2p_4 \rangle$, соответственно, D_1 и D_2 . По базе индукции объемы $V_1 = \text{vol}(P_1)$ и $V_2 = \text{vol}(P_2)$ являются корнями некоторых полиномиальных уравнений вида

$$Q_i = V_i^{2N_i} + a_1^{(i)}(l, D_i^2) V_i^{2N_i-2} + \dots = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9_i)$$

Пусть V_{0i} – объем тетраэдра $\langle Ap_i p_{i+1} p_{i+2} \rangle$, $i = 1, 2$, дополняющего P_i до P . Тогда для объема $V(P)$ мы имеем

$$V_i = V - \varepsilon V_{0i}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad i = 1, 2. \quad (10_i)$$

Подставляя значение V_i из (10_i) в (9_i) и используя равенства

$$V_i^{2m} = \sum_{k=1}^{m-1} C_{2m}^{2k} V^{2k} V_{0i}^{2(n-k)} - \varepsilon V V_{0i} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{2k+1} V^{2k} V_{0i}^{2(m-k-1)},$$

мы после очевидных преобразований получаем уравнения вида

$$V^{4N_i} + A_1^{(i)}(l, D_i^2, V_{0i}^2) V^{4N_i-2} + \dots + A_{2N_i}^{(i)}(l, D_i^2, V_{0i}^2) V^0 = 0 \quad (11_i)$$

уже без ε . Это означает, что полученные уравнения не зависят от конкретной позиции $\text{St } A$ относительно оставшейся части P . Теперь подставив в (11_i) значение V_{0i}^2 согласно (1) как функции от (l, D_i^2) , мы приходим к уравнениям

$$V^{4N_i} + B_1^{(i)}(l, D_i^2) V^{4N_i-2} + \dots + B_{2N_i}^{(i)}(l, D_i^2) V^0 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (12_i)$$

Мы можем рассматривать (12_i) как полиномиальные уравнения относительно D_i^2 . Для этого представим (12_i) в виде

$$C_0^{(i)}(l, V^2) D_i^{2K_i} + \dots + C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (13_i)$$

где через $2K_i \leq 12N_i$ обозначена наибольшая степень D_i в полиномиальном уравнении (12_i), когда $(l) = (l_1^2, \dots, l_e^2)$ считаются как независимые переменные (или “буквенные величины”). Если для одного из значений $i = 1$ или 2 имеем $K_i = 0$, то соответствующее уравнение (13_i) принимает вид $C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = V^{4N_i} + \dots = 0$, так что для V мы имеем как раз требуемое уравнение $R(V) = V^{2N} + \dots = 0$. Пусть $K_i > 0$, $i = 1, 2$. Подставим в $C_j^{(i)}(l, V^2)$, $0 \leq j < K_i$, значения $(l) = (l_1^2, \dots, l_e^2)$ и V как полиномиальных функций от $(x_1, \dots, z_n)$. Если все полученные после этой операции функции будут тождественно равны нулю, то мы снова получаем искомое уравнение $R(V) = C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = V^{4N_i} + \dots = 0$. Если же, по крайней мере, одна из этих функций не обращается в тождественный нуль, то для рассматриваемого P коэффициент при соответствующей степени D_i вообще не равен нулю, так как P по предположению находится в общем положении. Для краткости обозначений предположим, что первый такой коэффициент совпадает с $C_0^{(i)}(l, V^2)$, так что мы имеем уравнения (13_i) с $C_0^{(i)}(l, V^2) \neq 0$.

Теперь вспомним, что 10 расстояний между 5 точками A, p_1, p_2, p_3, p_4 удовлетворяют уравнению Кэли–Менгера (7). В нашем случае $x = D_1^2, y = D_2^2$, а остальные расстояния известны как длины соответствующих ребер P , так что мы можем обозначить все их как (l) . Тогда соответствующее уравнение Кэли–Менгера может быть записано в виде

$$\overline{D}_1^2(\overline{D}_2^2 + a\overline{D}_2 + b) + \overline{D}_1(a\overline{D}_2^2 + b\overline{D}_2 + b) + (b\overline{D}_2^2 + b\overline{D}_2 + b) = 0, \quad (14)$$

где $\overline{D}_1 = D_1^2, \overline{D}_2 = D_2^2$ (мы не пишем переменные p и q , так как они в рассматриваемом случае известны как длины ребер $\langle p_1 p_2 \rangle$ и $\langle p_1 p_4 \rangle$); кроме этого, для краткости записи мы не стали писать у коэффициентов индексы. Так как старшие коэффициенты в (13₁) и (14) отличны от нуля, мы можем исключить $\overline{D}_1$, используя для этого результат уравнений (13₁) и (14), что нам дает уравнение

$$\begin{vmatrix} (\overline{D}_2^2 + \dots) & (a\overline{D}_2^2 + \dots) & (b\overline{D}_2^2 + \dots) & * & \dots & 0 \\ 0 & (\overline{D}_2^2 + \dots) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & (\overline{D}_2^2 + \dots) & \dots & \dots & * \\ C_0^{(1)}(l, V^2) & C_1^{(1)}(l, V^2) & \dots & (V^{4N_1} + \dots) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & C_0^{(1)}(l, V^2) & \dots & \dots & (V^{4N_1} + \dots) \end{vmatrix} = 0$$

(где значком “*” мы обозначили коэффициент при $\overline{D}_1^0$ в уравнении (14)). Напомним, что в коэффициентах $C_j^{(1)}, j < K_1$, степени V меньше чем $4N_1$, так что после раскрытия этого определителя размера $(K_1 + 2) \times (K_1 + 2)$ мы получаем уравнение вида

$$(V^{8N_1} + \dots) + \overline{D}_2^{2K_1-1}(aV^{8N_1} + \dots) + \overline{D}_2^{2K_1-2}(bV^{8N_1} + \dots) + \dots + \overline{D}_2^0(bV^{8N_1} + \dots) = 0. \quad (15)$$

Теперь мы исключаем $\overline{D}_2$ из (15) и (13₂), переписанного для $\overline{D}_2 = D_2^2$. Легко видеть, что соответствующий результат дает уравнение

$$\begin{vmatrix} V^{8N_1} + \dots & aV^{8N_1} + \dots & \dots & * & \dots & 0 \\ 0 & V^{8N_1} + \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V^{8N_1} + \dots & \dots & \dots & * \\ C_0^{(2)}(l, V^2) & C_1^{(2)}(l, V^2) & \dots & V^{4N_2} + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & C_0^{(2)}(l, V^2) & \dots & \dots & V^{4N_2} + \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем, что наибольшая степень при V равна $2N = 8K_2N_1 + 8K_1N_2$ (так как степени V в коэффициентах $C_i^{(2)}$ меньше чем $4N_2$), причем старший коэффициент равен 1, т.е. мы получили уравнение искомого вида $R(V) = V^{2N} + \dots = 0$, где степень $2N$ многочлена $R(V)$ допускает оценку $2N \leq 96N_1N_2$ (эта очень грубая оценка может быть существенно улучшена, но для доказательства леммы и, соответственно, теоремы это не имеет принципиального значения). Для случая, когда степень вершины A равна 4, индукционный шаг сделан.

Пусть теперь лемма доказана в случаях наличия в P вершин степени $\leq m$. Рассмотрим случай, когда вершина A имеет степень $m+1$. Заметим, что при рассмотрении случая $m = 4$ решающим моментом в процессе исключения было наличие соотношения (14) между диагоналями и ребрами $\text{St } A$. Поэтому, переходя к исследованию общего случая, мы тоже должны попытаться найти некоторое соотношение, связывающее диагонали и ребра $\text{St } A$, когда степень вершины A равна $m+1$. Однако сначала мы установим аналогии уравнений (12 _{i}) и (13 _{i}). Начнем с построения новых многогранников P_i , $1 \leq i \leq m-1$, в которых вершина A имеет степень m . Для этого пронумеруем вершины границы $\text{St } A$ в некотором циклическом порядке $p_0, p_1, \dots, p_m$ (начав нумерацию с произвольной вершины) и заменим грани, прилегающие к ребру Ap_i , новыми гранями $\langle p_{i-1}Ap_{i+1} \rangle$ и $\langle p_{i-1}p_ip_{i+1} \rangle$, инцидентными диагонали $\langle p_{i-1}p_{i+1} \rangle$. Обозначим длину этой диагонали через D_i . Тогда по индукционному предположению $\text{vol}(P_i) = V_i$ является корнем некоторого полиномиального уравнения вида

$$V_i^{2N_i} + a_1^{(i)}(l, D_i)V_i^{2N_i-2} + \dots = 0, \quad 0 \leq i \leq m. \quad (16_i)$$

Далее рассуждая, как и в случае вершины степени 4, мы получим, что $V(P)$ и D_i удовлетворяют уравнениям вида

$$V^{4N_i} + B_1^{(i)}(l, D_i^2)V^{4N_i-2} + \dots + B_{2N_i}^{(i)}(l, D_i^2)V^0 = 0, \quad 0 \leq i \leq m. \quad (17_i)$$

(Эти уравнения написаны для всех вершин в $\partial(\text{St } A)$, однако для построения P_i мы будем использовать только уравнения с номерами $1 \leq i \leq m-1$.)

Уравнения (17 _{i}) можно представить и как полиномиальные уравнения для D_i :

$$C_0^{(i)}(l, V^2)D_i^{2K_i} + \dots + C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = 0, \quad (18_i)$$

где $C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = V^{2N_i} + \dots$.

Если хотя бы одно из уравнений (18 _{i}) не зависит от D_i для некоторого i , то мы уже имеем требуемое уравнение для $V(P)$: $R(V) = C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = V^{2N_i} + \dots = 0$. Еще может быть, что коэффициенты при D_i становятся тождественными нулями, если (l) и V заменены их выражениями через координаты вершин $(x_1, \dots, z_n)$. В этом случае мы также имеем искомое уравнение для V : $C_{K_i}^{(i)}(l, V^2) = 0$. Значит, для дальнейшего исследования остается предположить, что все $K_i > 0$, следовательно, коэффициенты $C_0^{(i)}(l, V^2)$ вообще не обращаются в нуль, иначе многогранник P не был бы в общем положении.

Рис. 5

Рассмотрим теперь многоугольник $\partial(\text{St } A)$, являющийся пространственной границей звезды вершины A . Проведем в этом многоугольнике все диагонали из вершины p_0 , а также все диагонали, соединяющие вершины p_{i-1} и p_{i+1} , $1 \leq i \leq m$ (см. рис. 5).

Пусть d_i — длина диагонали от вершины p_0 до вершины p_i , $2 \leq i \leq m-1$, а D_i — длина диагонали, соединяющей вершины p_{i-1} и p_{i+1} , $1 \leq i \leq m$, $d_2 = D_1$, $d_{m-1} = D_m$. Для каждой 5 точек $(A, p_0, p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$, $2 \leq i \leq m-1$, рассмотрим соответствующее уравнение Кэли–Менгера

$$A_i \bar{d}_i^2 + B_i \bar{d}_i + C_i = 0, \quad (19_i)$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i должны быть выписаны согласно (7) с $x = \bar{d}_i, y = \bar{D}_i, p = \bar{d}_{i-1}, q = \bar{d}_{i+1}$ и $\bar{d}_i = d_i^2, \bar{D}_i = D_i^2$. В случаях, когда мы будем расписывать (8) как многочлен относительно q , будем использовать для обозначения коэффициентов буквы f, g, h с индексами, соответствующими номеру уравнения (19_i).

Мы хотим исключить из уравнений (19_i) последовательно переменные $\bar{d}_{m-1}, \bar{d}_{m-2}, \dots, \bar{d}_3$. Способов исключения неизвестных несколько (по крайней мере, два). Мы выберем способ, отличный от примененного в [4] и использованный в [5]. Начнем с исключения $\bar{d}_{m-1}$. Для этого рассмотрим два уравнения (19_{m-1}) и (19_{m-2}), выписанные в следующем виде:

$$\begin{aligned} & A_i \alpha_{m-1} \bar{d}_{m-1}^2 + \beta_{m-1} \bar{d}_{m-1} + \gamma_{m-1} \\ & := (\bar{D}_{m-1}^2 + a_1^{(m-1)} \bar{D}_{m-1} + b_1^{(m-1)}) \bar{d}_{m-1}^2 \\ & + (a_2^{(m-1)} \bar{D}_{m-1}^2 + b_2^{(m-1)} \bar{D}_{m-1} \bar{d}_{m-2} + b_3^{(m-1)} \bar{D}_{m-1}) \\ & + b_4^{(m-1)} \bar{d}_{m-2} + b_5^{(m-1)}) \bar{d}_{m-1} \\ & + (a_3^{(m-1)} \bar{d}_{m-2}^2 + b_6^{(m-1)} \bar{D}_{m-1}^2 + a_4^{(m-1)} \bar{D}_{m-1} \bar{d}_{m-2} \\ & + b_7^{(m-1)} \bar{d}_{m-2} + b_8^{(m-1)} \bar{D}_{m-1} + b_9^{(m-1)}) = 0 \end{aligned} \quad (19_{m-1})$$

(мы приняли во внимание, что в нашем случае $q = d_m$ известно как длина ребра $\langle p_0 p_m \rangle$),

$$\begin{aligned}
& f_{m-2} \bar{d}_{m-1}^2 + g_{m-2} \bar{d}_{m-1} + h_{m-2} \\
& := a_1^{(m-2)} \bar{d}_{m-1}^2 + (a_2^{(m-2)} \bar{D}_{m-2} d_{m-3} + b_1^{(m-2)} \bar{D}_{m-2} \bar{d}_{m-2} \\
& + b_2^{(m-2)} \bar{d}_{m-3} + b_3^{(m-2)} \bar{d}_{m-2} + b_4^{(m-2)} \bar{D}_{m-2} + b_5^{(m-2)}) \bar{d}_{m-1} \\
& + (\bar{d}_{m-2}^2 \bar{D}_{m-2}^2 + a_3^{(m-2)} \bar{d}_{m-2}^2 \bar{D}_{m-2} + a_4^{(m-2)} \bar{d}_{m-2} \bar{D}_{m-2}^2 \\
& + a_5^{(m-2)} \bar{d}_{m-3}^2 + b_6^{(m-2)} \bar{D}_{m-2}^2 + b_7^{(m-2)} \bar{d}_{m-2}^2 \\
& + \text{слагаемые без квадратов переменных}) = 0. \tag{19_{m-2}}
\end{aligned}$$

Результатом уравнений (19_{m-1}) и (19_{m-2}) является определитель размера (4×4)

$$\begin{vmatrix}
\bar{D}_{m-1}^2 + \dots & a \bar{D}_{m-1}^2 + \dots & a \bar{d}_{m-2}^2 + \dots & 0 \\
0 & \bar{D}_{m-1}^2 + \dots & a \bar{D}_{m-1}^2 + \dots & a \bar{d}_{m-2}^2 + \dots \\
a & g_{m-2} & \bar{d}_{m-2}^2 \bar{D}_{m-2}^2 + a \bar{d}_{m-3}^2 + \dots & 0 \\
0 & a & \bar{D}_{m-2} (a \bar{d}_{m-3} + b \bar{d}_{m-2}) + \dots & h_{m-2}
\end{vmatrix} = 0$$

(элемент g_{m-2} равен выписанному элементу a_{43} и h_{m-2} равен a_{33} в стандартных обозначениях элементов матриц).

Раскрывая этот определитель, мы получаем уравнение вида

$$c_{m-2}^{(0)} \bar{d}_{m-2}^4 + c_{m-2}^{(1)} \bar{d}_{m-2}^3 + \dots + c_{m-2}^{(4)} \bar{d}_{m-2}^0 = 0, \tag{20}$$

где c (с индексами) являются некоторыми многочленами от $\bar{d}_{m-3}, \bar{D}_{m-1}, \bar{D}_{m-2}$ с коэффициентами, зависящими от (l) .

Изучим структуру коэффициентов c более подробно. Общий i -й член R_i результата имеет вид

$$R_i = \pm (A_{m-1})^{\mu_0^{(i)}} (B_{m-1})^{\mu_1^{(i)}} (C_{m-1})^{\mu_2^{(i)}} (f_{m-2})^{\nu_0^{(i)}} (g_{m-2})^{\nu_1^{(i)}} (h_{m-2})^{\nu_2^{(i)}},$$

и согласно теореме о весе членов результата степени μ и ν связаны равенствами

$$\begin{aligned}
\mu_0^{(i)} + \mu_1^{(i)} + \mu_2^{(i)} &= 2, & \nu_0^{(i)} + \nu_1^{(i)} + \nu_2^{(i)} &= 2, \\
\mu_1^{(i)} + 2\mu_2^{(i)} + \nu_1^{(i)} + 2\nu_2^{(i)} &= 4.
\end{aligned}$$

Подставим в R_i значения $\alpha_{m-1}, \dots, h_{m-2}$. Получаем, что

$$\begin{aligned}
R_i &= \pm a^{\nu_0} (\bar{D}_{m-1}^2 + a \bar{D}_{m-1} + b)^{\mu_0} (a \bar{D}_{m-1}^2 + b \bar{D}_{m-1} \bar{d}_{m-2} + \dots)^{\mu_1} \\
&\times (a \bar{d}_{m-2}^2 + b \bar{D}_{m-1} \bar{d}_{m-2} + b \bar{D}_{m-1}^2)^{\mu_2} \\
&\times (a \bar{D}_{m-2} \bar{d}_{m-3} + b \bar{D}_{m-2} \bar{d}_{m-2} + \dots)^{\nu_1} (\bar{D}_{m-2}^2 \bar{d}_{m-2}^2 + a \bar{d}_{m-3}^2 + \dots)^{\nu_2},
\end{aligned}$$

где для краткости записи мы не стали писать у μ и ν их верхний индекс (i) , а также пропустили индексы коэффициентов a и b ; кроме того, в каждой скобке мы выписали только старшие степени соответствующих переменных.

Принимая во внимание равенства, связывающие $\mu_0, \dots, \nu_2$, мы из вида общего члена R_i результата можем сделать следующие заключения:

- 1) в каждом R_i старшая степень переменной $\bar{d}_{m-2}$ равна 4 (как это и написано в (20);
- 2) старшая степень $\bar{d}_{m-3}$ равна 4;
- 3) старшая суммарная степень переменных $\bar{d}_{m-2}$ и $\bar{d}_{m-3}$ равна 4 (действительно, суммарная степень $\bar{d}_{m-2}$ и $\bar{d}_{m-3}$ в R_i равна $\mu_1 + 2\mu_2 + \nu_1 + 2\nu_2 = 4$);
- 4) старшая степень $\bar{D}_{m-1}$ в R_i равна $2\mu_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 = 2(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2) = 4$;
- 5) старшая степень $\bar{D}_{m-2}$ также равна 4;
- 6) старшая суммарная степень $\bar{D}_{m-1}$ и $\bar{D}_{m-2}$ равна 8;
- 7) коэффициент $c_{m-2}^{(0)}$ при $\bar{d}_{m-2}^4$ в (20) содержит моном $\bar{D}_{m-1}^4 \bar{D}_{m-2}^4$ с коэффициентом 1.

Значит, мы можем представить полиномиальное уравнение (20) в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \bar{d}_{m-2}^4 (\bar{D}_{m-2}^4 \bar{D}_{m-1}^4 + \dots (\text{здесь нет никакой степени } \bar{d}_{m-3})) \\ & + \bar{d}_{m-2}^3 (b_1 \bar{D}_{m-2}^4 \bar{D}_{m-1}^4 + \dots (\text{могут быть слагаемые с первой степенью } \bar{d}_{m-3})) \\ & + \dots + \bar{d}_{m-2}^0 (\bar{d}_{m-3}^4 (b_4 \bar{D}_{m-2}^4 \bar{D}_{m-1}^4 + \dots) + \dots) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь мы можем из уравнений (21) и (19_{m-3}) исключить $\bar{d}_{m-2}$ и т. д. Допустим как индукционное предположение, что после $(k-1)$ исключений мы получили уравнение вида

$$\begin{aligned} & \bar{d}_{m-k}^{T(k)} (\bar{D}_{m-k}^{T(k)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(k)} + \dots) \\ & + \dots + \bar{d}_{m-k}^0 (\bar{d}_{m-(k+1)}^{T(k)} (b \bar{D}_{m-k}^{T(k)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(k)} + \dots) + \dots) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $T(k) = 2^k$, старшие степени $\bar{d}_{m-k}$ и $\bar{d}_{m-(k+1)}$ равны $T(k)$, их суммарная старшая степень тоже равна $T(k)$, старшая степень каждой переменной $\bar{D}_i$, $m-k \leq i \leq m-1$, равна $T(k)$, старшая суммарная степень переменных $\bar{D}_i$, $m-k \leq i \leq m-1$, равна $kT(k)$ и, наконец, в коэффициенте при $\bar{d}_{m-k}^{T(k)}$ моном $\bar{D}_{m-k}^{T(k)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(k)}$ имеет коэффициент 1. Покажем, что после исключения из (22) и $(19_{m-(k+1)})$ переменной $\bar{d}_{m-k}$ мы получим полиномиальное уравнение для $\bar{d}_{m-(k+1)}$ и $\bar{d}_{m-(k+2)}$ со свойствами, аналогичными свойствам уравнения (22). Действительно, перепишем

уравнения (22) и $(19_{m-(k+1)})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
& c_0 \bar{d}_{m-k}^{T(k)} + c_1 \bar{d}_{m-k}^{T(k)-1} + \dots + c_{T(k)} \bar{d}_{m-k}^0 = 0, \\
& f_{m-k-1} \bar{d}_{m-k}^2 + g_{m-k-1} \bar{d}_{m-k} + h_{m-k-1} \\
& := a_1^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-k}^2 + (a_2^{(m-k-1)} \bar{D}_{m-(k+1)} \bar{d}_{m-(k+2)} \\
& + b_1^{(m-k-1)} \bar{D}_{m-(k+1)} \bar{d}_{m-(k+1)} + b_2^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-(k+2)} \\
& + b_3^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-(k+1)} + b_4^{(m-k-1)} \bar{D}_{m-(k+1)} + b_5^{(m-k-1)}) \bar{d}_{m-k} \\
& + (\bar{d}_{m-(k+1)}^2 \bar{D}_{m-(k+1)}^2 + a_3^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-(k+1)}^2 \bar{D}_{m-(k+1)} \\
& + a_4^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-(k+1)} \bar{D}_{m-(k+1)}^2 + a_5^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-(k+2)}^2 \\
& + b_6^{(m-k-1)} \bar{D}_{m-(k+1)}^2 + b_7^{(m-k-1)} \bar{d}_{m-(k+1)}^2 \\
& + \text{слагаемые без квадратов переменных}) = 0.
\end{aligned}$$

Общий i -й член результата этих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \pm c_0^{\mu_0} c_1^{\mu_1} \dots c_{T(k)}^{\mu_{T(k)}} a^{\nu_0} (a \bar{D}_{m-(k+1)} \bar{d}_{m-(k+2)} + b \bar{D}_{m-(k+1)} \bar{d}_{m-(k+1)} + \dots)^{\nu_1} \\
& \times (\bar{d}_{m-(k+1)}^2 \bar{D}_{m-(k+1)}^2 + a \bar{d}_{m-(k+1)}^2 \bar{D}_{m-(k+1)} + a \bar{d}_{m-(k+1)} \bar{D}_{m-(k+1)}^2 \\
& + a \bar{d}_{m-(k+2)}^2 + b \bar{D}_{m-(k+1)}^2 + b \bar{d}_{m-(k+1)}^2 + \dots)^{\nu_2}, \tag{23}
\end{aligned}$$

где для краткости записи мы не стали писать у μ и ν их верхний индекс (i), а также пропустили индексы коэффициентов a и b ; кроме того, в каждой скобке мы выписали только старшие степени соответствующих переменных. Показатели μ и ν удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{T(k)} &= 2, \quad \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = T(k), \\
\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + T(k)\mu_{T(k)} + \nu_1 + 2\nu_2 &= 2T(k).
\end{aligned}$$

Используя (23) и эти уравнения, мы можем легко проверить, что старшая степень $\bar{d}_{m-(k+1)}$ в результате равна

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + T(k)\mu_{T(k)} + \nu_1 + 2\nu_2 = 2T(k) = T(k+1);$$

степень переменной $\bar{d}_{m-(k+2)}$ равна $\nu_1 + 2\nu_2 \leq 2T(k)$, причем равенство выполняется только в случае $\nu_0 = 0, \nu_1 = 0, \nu_2 = T(k)$, так что старшая степень $\bar{d}_{m-(k+2)}$ тоже равна $2T(k) = T(k+1)$. Эта же величина является старшей суммарной степенью для $\bar{d}_{m-(k+1)}$ и $\bar{d}_{m-(k+2)}$. Далее, очевидно, что сомножитель $\bar{D}_{m-(k+1)}^{2T(k)}$ получается только в произведении $h_{m-k-1} \cdot \dots \cdot h_{m-k-1} = h_{m-k-1}^{T(k)}$, так что в коэффициенте при $\bar{d}_{m-(k+1)}^{T(k+1)}$ моном $\bar{D}_{m-(k+1)}^{T(k+1)} \bar{D}_{m-k}^{T(k+1)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(k+1)}$ имеет числовой коэффициент 1. Таким образом, можно утверждать, что в конце процесса исключения по доказанному индукционному переходу мы после $(m-3)$ шагов придем к уравнению вида

$$\begin{aligned}
& \bar{d}_2^{T(m-2)} (\bar{D}_2^{T(m-2)} \bar{D}_3^{T(m-2)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(m-2)} + \dots) \\
& + \dots + \bar{d}_2^0 a(l, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_{m-1}) = 0, \tag{24}
\end{aligned}$$

где нет переменной $\bar{d}_1$, потому что $\bar{d}_1$ равно расстоянию между p_0 и p_1 , т.е. известной длине ребра $\langle p_0 p_1 \rangle$, и поэтому в (24) все коэффициенты зависят только от $\bar{D}_i$, $2 \leq i \leq m-1$, и (l) , включая последний коэффициент a при $\bar{d}_2^0$. Так как $\bar{d}_2 = \bar{D}_1$, то мы можем представить (24) как уравнение для $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_{m-1}$:

$$\begin{aligned} & \bar{D}_1^{T(m-2)} (\bar{D}_2^{T(m-2)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(m-2)} + \dots) \\ & + \bar{D}_1^{T(m-2)-1} (b \bar{D}_2^{T(m-2)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(m-2)} + \dots) \\ & + \dots + \bar{D}_1^0 (b \bar{D}_2^{T(m-2)} \dots \bar{D}_{m-1}^{T(m-2)} + \dots) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где через b мы обозначили некоторые коэффициенты (в общем случае, конечно, различные), зависящие только от длин ребер. Уравнение (25) является аналогом уравнения (14) для вершины степени 4, и оно отражает тот факт, что $(m+1)$ -гранный угол имеет $m-2$ степеней свободы.

Теперь мы используем уравнение (25) для последовательного исключения переменных $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_{m-1}$. Сделаем первый шаг. Рассмотрим уравнение (18_i) для $i=1$ как полиномиальное уравнение для $\bar{D}_1$

$$\bar{D}_1^{K_1} (a_1(l) V^{2M_1} + \dots) + \dots + \bar{D}_1^0 (V^{4N_1} + \dots) = 0, \quad (18'_1)$$

где $2M_1 < 4N_1$. Результат уравнений (25) и $(18'_1)$ дает нам уравнение вида

$$\begin{vmatrix} \bar{D}_2^T \dots \bar{D}_{m-1}^T + \dots & b \bar{D}_2^T \dots \bar{D}_{m-1}^T + \dots & \dots & * & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{D}_2^T \dots \bar{D}_{m-1}^T + \dots & \dots & \dots & * \\ a_1(l) V^{2M_1} + \dots & \dots & \dots & V^{4N_1} + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_1(l) V^{2M_1} + \dots & \dots & \dots & V^{4N_1} + \dots \end{vmatrix} = 0,$$

которое может быть переписано следующим образом (напомним, что в результате первые K_1 строк состоят из коэффициентов уравнения (25), а последние $T = T(m-2)$ строк взяты из $(18'_1)$):

$$\begin{aligned} & \bar{D}_2^{L_1} (\bar{D}_3^{L_1} \dots \bar{D}_{m-1}^{L_1} (V^{S_1} + \dots) + \dots) \\ & + \bar{D}_2^{L_1-1} (\bar{D}_3^{L_1} \dots \bar{D}_{m-1}^{L_1} (b V^{S_1} + \dots) + \dots) + \dots + \bar{D}_2^0 (\dots) = 0, \end{aligned} \quad (26_1)$$

где $L_1 = T(m-2)K_1$ и $S_1 = 4T(m-2)N_1$ являются старшими степенями, соответственно, для $\bar{D}_i$, $2 \leq i \leq m-1$, и V . Теперь мы можем исключить $\bar{D}_2$, используя для этого уравнение $(18'_2)$ (которое получено из (18_2) , переписанного для $\bar{D}_2 = D_2^2$) и (26_1) . Получим некоторое уравнение, которое обозначим (26_2) . Продолжая исключение $\bar{D}_i$, $i=3, 4, \dots$, по аналогичной процедуре, мы получаем для $\bar{D}_i$ каждый раз, кроме $(18'_i)$, еще уравнение, аналогичное (26_1) , со старшим членом вида

$$\bar{D}_i^{L_{i-1}} \bar{D}_{i+1}^{L_{i-1}} \dots \bar{D}_{m-1}^{L_{i-1}} V^{S_{i-1}},$$

где $L_{i-1} = T(m-2)K_1 \cdots K_{i-1}$, $S_{i-1} = K_{i-1}S_{i-2} + 4N_{i-1}L_{i-2}$. Передпоследним исключением мы имеем $(18'_{m-1})$ и некоторое уравнение вида

$$\begin{aligned} & \overline{D}_{m-1}^{L_{m-2}}(V^{S_{m-2}} + \cdots) + \overline{D}_{m-1}^{L_{m-2}-1}(b_1 V^{S_{m-2}} + \cdots) \\ & + \cdots + D_{m-1}^0(b_{L_{m-2}} V^{S_{m-2}} + \cdots) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где S_{m-2} является старшей степенью V , а $b_{(\dots)}$ – некоторые коэффициенты, полиномиально зависящие от (l) . Отсюда следует, что результат уравнений $(18'_{m-1})$ и (27) дает искомое уравнение для V :

$$R(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + \cdots + a_N(l) = 0, \quad (28)$$

где $2N = S_{m-2}K_{m-1} + 4N_{m-1}L_{m-2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если мы начнем процесс исключения $\overline{d}_i$ с уравнения (18_{j-1}) с некоторым номером $j-1 < m-1$ для $i = j-1, j-2, \dots, 1$, то мы, во-первых, можем получить аналог уравнения (25), связывающий $D_1, \dots, D_j$ с d_{j-1} , во-вторых, проделав, как выше, исключение $\overline{D}_i$, мы получим уравнение, связывающее V и d_j .

Все эти рассуждения были справедливы в предположении, что рассматриваемый многогранник P находится в общем положении. Если это не так, то мы приведем P малым возмущением в общее положение и составим для близких многогранников P_ε уравнения $R_\varepsilon(V_\varepsilon) = 0$ вида (27), в которых функции-многочлены $r_i(l_\varepsilon)$ имеют некоторые числовые коэффициенты, не зависящие от ε (и зависящие только от комбинаторного строения P и от выбора вершины A). Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что R_ε непрерывно зависит от $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем, что $V(P)$ удовлетворяет тому же самому уравнению (28). Лемма доказана.

§9. Доказательство теоремы

Приступим теперь к доказательству теоремы. Пусть сначала род рассматриваемых многогранников равен нулю и пусть теорема доказана для таких многогранников с числом вершин n . Пусть многогранник P имеет $n+1$ вершину. Если в нем есть трехзвенный цикл, не ограничивающий никакую грань, то мы можем разрезать P по этому циклу. Он тогда распадется на две части, и у каждой число вершин будет меньше $n+1$. Заклеив треугольные отверстия гранью, мы превратим эти части в многогранники P_1 и P_2 , алгебраическая сумма объемов которых равна объему исходного многогранника. И так как для $V(P_1)$ и $V(P_2)$ есть, по индукционному предположению, свойство R , то оно есть и для P . Если же такого цикла нет, то P будет комбинаторного типа K_0 , поэтому можем применить лемму и получить существование требуемого полиномиального уравнения $R(V) = 0$.

Итак, для многогранников рода 0 теорема доказана. Пусть она теперь доказана для всех многогранников рода $\leq g-1$. Рассмотрим многогранники рода g . Пусть P_0 – многогранник рода g с наименьшим числом вершин. Тогда он обязательно имеет трехзвенный цикл, не ограничивающий грань. Действительно, возьмем в P любую вершину A . Если через A не проходит трехзвенный цикл требуемого вида, то можно убрать звезду вершины A и заклеить полученное отверстие треугольными гранями, сторонами которых могут служить исходящие из одной вершины

диагонали $\partial(\text{St } A)$. Тогда получим новый многогранник того же рода g , но с числом вершин меньше чем у P_0 , что противоречит определению P_0 . Значит, в P_0 есть трехзвенный цикл, не ограничивающий грань. Разрезав P_0 по этому циклу и заклеив образовавшиеся треугольные отверстия двумя гранями, получим или один, или два многогранника меньшего рода, а для них свойство R есть. Следовательно, для многогранников рода g база индукции есть — мы доказали, что для них многогранник с наименьшим числом вершин обладает свойством R . А дальше применяем индукцию с использованием основной леммы, а в случае невозможности ее применения (т.е. когда многогранник не комбинаторного типа K_0), разрезаем многогранник по имеющемуся трехзвенному циклу и сводим вопрос или к многограннику того же топологического рода, но с меньшим числом вершин, или же к многогранникам с большим числом вершин, но меньшего рода, для которых свойство R установлено. Теорема доказана.

§ 10. Некоторые замечания

ЗАМЕЧАНИЕ 6. И для доказательства, и для справедливости теоремы существенно, что рассматриваемые многогранники все имеют один и тот же комбинаторный тип с сохранением конгруэнтности одноименных граней. Если рассматривать изгибания или изометрические преобразования многогранников с сохранением комбинаторного типа, но без сохранения конгруэнтности граней, то существуют примеры непрерывно изгибаемых многогранников с “плавающими” ребрами, объем которых в ходе деформации изменяется [22]. Если же допускать изменение комбинаторного типа, то тоже можно указать примеры изометричных многогранников с непрерывно изменяющимися объемами [23], [24], в частности, даже тетраэдр можно изгибать так, что его объем будет увеличиваться (первый пример многогранника с объемом, больше чем объем изометричного ему выпуклого многогранника, был построен в [25]).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В. А. Александров в [26] показал, что в сферическом пространстве существуют изгибаемые многогранники, которые в ходе изгибания изменяют свой объем (изгибания происходят, как положено, при неизменном комбинаторном строении и с сохранением конгруэнтности соответствующих граней). Следовательно, теорема 1 является неустойчивой по отношению к изменению кривизны окружающего пространства, так как кривизну сферического пространства можно сделать сколь угодно близкой к нулю, т.е. к кривизне евклидова пространства. Что происходит с объемами изгибаемых многогранников в пространстве Лобачевского — мы пока не знаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Кроме объема, существует еще одна геометрическая характеристика многогранника, остающаяся инвариантной при изгибаниях, — это средняя кривизна H многогранника, определяемая как сумма $\sum (\pi - \alpha_i) l_i$, где l_i — длина i -го ребра, а α_i — величина двугранного угла при этом ребре (суммирование по всем ребрам) [27]. Чуть ниже мы покажем, что знание метрики и объема многогранника позволяет построить лишь конечное число многогранников (в общем положении) с этими числовыми данными. В связи с этим появляются два естественных вопроса: как зависят друг от друга объем и средняя кривизна и можно ли утверждать, что

знание метрики, объема и средней кривизны определяет многогранник однозначно?

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из уравнения $R(V) = 0$, где $R(V)$ – многочлен (6), вытекает, что если длины ребер многогранника являются алгебраическими числами, то и значение его объема является алгебраическим числом. Заметим, что для площадей плоских многоугольников это не так – получаемые при изгибании единичного квадрата ромбы могут иметь любую площадь от нуля до единицы. Это наблюдение интересно сопоставить с тем фактом, что на плоскости третья проблема Гильберта (о равноставленности равновеликих фигур) имеет положительное решение, а в пространстве решение отрицательное (см., например, [28]). Как это связано с тем, что в пространстве объем оказывается метрическим инвариантом, а на плоскости – нет, мы не знаем, но, несомненно, какая-то глубокая связь между этими фактами есть.

§ 11. Некоторые приложения

Знание такой глобальной информации, как объем многогранника, оказывается очень полезным для решения многих задач метрической теории многогранников. В полном объеме такие приложения еще не описаны в виде развернутых статей, поэтому мы упомянем их только в тезисном изложении.

11.1 Проблема изометрического погружения многогранной метрики. Пусть K – геометрический симплициальный комплекс, гомеоморфный некоторому многообразию и имеющий заданные длины ребер (по-другому – развертка). Есть два общих результата о возможности изометрического погружения такой развертки в $\mathbb{R}^3$ в виде некоторого многогранника. Первый результат – это знаменитая теорема Александрова [29], [30] о реализации любой выпуклой метрики в виде выпуклого многогранника и еще результат Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллера о существовании в $\mathbb{R}^3$ изометрической реализации любой многогранной метрики с достаточно мелкой дополнительной триангуляцией [25]. Однако в обоих случаях нет никакой гарантии, что комбинаторное строение развертки перенесется на комбинаторное строение многогранника. Между тем вопрос об изометрическом погружении можно ставить и так: отобразить метрический симплициальный комплекс K в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы отображение было изометрическим и чтобы комбинаторное строение K было *сохранено*, т.е. чтобы грани перешли в грани и т.д. В такой постановке задачи изометрического погружения нет ни одного результата – ни положительного, ни отрицательного. Теорема 1 позволяет сразу же получить одно необходимое условие возможности изометрического отображения K в $\mathbb{R}^3$ с сохранением метрики и комбинаторного строения. А именно, зная комбинаторное строение и метрику (длины ребер) симплициального комплекса K , мы можем по теореме 1 выписать соответствующий многочлен $R(V)$, и если изометрическое отображение комплекса K в $\mathbb{R}^3$ существует, то его образ должен иметь обобщенный объем, являющийся корнем этого многочлена $R(V)$. Следовательно, для существования изометрического отображения $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ *необходимо*, чтобы многочлен $R(V)$ имел неотрицательный корень V^2 , или, по-другому, если этот многочлен $R(V)$ имеет только от-

рицательные или комплексные корни, то изометрического отображения K в $\mathbb{R}^3$ не существует. Иллюстрирующий пример очень простой: если взять симплицеальный комплекс типа тетраэдра и задать длины ребер так, чтобы многочлен (1) на этих длинах имел отрицательное значение, то тетраэдра с такими длинами ребер в $\mathbb{R}^3$ не будет существовать.

Но это еще не все. Обратимся к уравнению вида (12_i) , в котором участвуют объем и длина D_i “малой” диагонали многогранника, соединяющей вершины двух граней, прилегающих к одному ребру. Объем многогранника нам известен в конечном числе вариантов как корень многочлена (6). Подставим в (12_i) одно из возможных значений объема, тогда (12_i) превратится в многочлен относительно D_i . Можно показать, что для многогранника в общем положении (точнее, для общего набора длин) этот многочлен относительно D_i не вырождается в тождественный нуль и поэтому мы можем найти *конечное* число возможных значений диагонали D_i . А это значит, что мы найдем конечное число значений величин двугранных углов. Тогда мы можем или построить соответствующий многогранник, или показать, что он не существует. Тем самым мы имеем конечный алгоритм для построения конечного числа многогранников по их развертке. Этот алгоритм, кратко изложенный в [31], пока реализован в программах лишь для многогранников с числом вершин меньше 7.

11.2. Объемы изгибаемых многогранников. Оказывается, что построенные для доказательства основной теоремы многочлены $R(V)$ обладают следующим интересным свойством: если многогранник изгибаемый, то его объем является *кратным* корнем некоторого многочлена $R(V)$. Действительно, в ходе изгибания хотя бы одна малая диагональ D_i должна изменяться непрерывно. Следовательно, для соответствующего значения объема и длин ребер коэффициенты многочлена (27) относительно D_i должны обратиться в нуль, иначе D_i будет иметь только дискретное число значений. Аналогично, должны обратиться в нуль и коэффициенты многочлена $(18'_{m-1})$. Отсюда нетрудно вывести, что результат этих многочленов состоит из нулевых элементов. Поэтому дифференцирование результата по V как определителя приводит к обращающемуся в нуль (при данных значениях длин и объема) многочлену, а это и означает, что объем является кратным корнем соответствующего многочлена $R(V)$. *Нерешенные* здесь вопросы:

- 1) доказать свойство кратности корня как объема изгибаемого многогранника для *любого* многочлена $R(V)$, в том числе для гипотетического (пока неизвестного) канонического многочлена наименьшей степени;
- 2) дать объяснение порядку кратности такого корня.

11.3. Проблема проверки изгибаемости многогранника. Эта проблема тоже допускает алгоритмическое решение. Во-первых, тождественное обращение в нуль вышеуказанного многочлена для D_i является *необходимым* условием изгибаемости многогранника. Во-вторых, идею работы с многочленом вида (12_i) можно применить и для проверки изгибаемости. Для этого мы проводим построение, как при доказательстве основной леммы. Получаем многогранник P_i , у которого вершина A имеет степень на 1 меньше, чем в P , и есть новая сторона D_i . Вычисляем объем этого многогранника и по методике, изложенной в п. 11.1, находим все остальные “малые” диагонали. Если это удалось сделать, значит, мно-

гогранник определяется заданием метрики и диагонали D_i , т.е. при вариации D_i он допускает однопараметрические изгибания. Если дискретное восстановление многогранника по значению D_i не удалось – а это бывает только по причине тождественного обращения в нуль некоторого многочлена типа (12_i) – то для определения очередной “малой” диагонали D с каким-нибудь номером j мы снова фиксируем эту диагональ D_j и вычисляем дальше другие диагонали уже как функции от D_i и D_j и т.д. Таким путем мы в конце-концов узнаем, значения каких диагоналей определяют положение многогранника и тем самым узнаем его изгибаемость в зависимости от длин этих диагоналей.

Подводя итог, можно сказать, что сейчас по аналогии с главой геометрии, называемой “Решение треугольников”, есть надежда на появление (конечно, в компьютерном исполнении) новой главы “Решение многогранников”.

В заключение приведем пример многочлена $R(V)$ минимальной степени для вычисления возможных значений объема многогранника комбинаторного типа октаэдра при некоторых специальных соотношениях между длинами его ребер (в общем случае этот многочлен содержит несколько миллионов мономов). Первый из этих многочленов приведен в [19], а второй получен студентом МГУ С. Михалевым по описанной в [19] процедуре с использованием системы MAPLE на персональном компьютере “Pentium”.

Рис. 6

Пусть на изображенной на рис. 6 комбинаторной схеме октаэдра длины противоположных ребер равны. Обозначим

$$\begin{aligned} |A_1 B_1|^2 &= |A_2 B_2|^2 = a, & |A_1 B_2|^2 &= |A_2 B_1|^2 = b, \\ |C_1 B_1|^2 &= |C_2 B_2|^2 = c, & |C_2 B_1|^2 &= |C_1 B_2|^2 = d, \\ |A_1 C_1|^2 &= |A_2 C_2|^2 = e, & |A_1 C_2|^2 &= |A_2 C_1|^2 = f. \end{aligned}$$

Тогда многочлен $R(\mathbf{v})$ для вычисления объема V имеет следующий вид

$$\begin{aligned} R(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}^8 - 4(ab(c+d+e+f-a-b) + cd(a+b+e+f-c-d) \\ &\quad + ef(a+b+c+d-e-f) - eac - fad - fbc - ebd)\mathbf{v}^7 \end{aligned}$$

(здесь и ниже $\mathbf{v} = 36V^2$).

Пусть теперь рассматривается октаэдр со сторонами

$$\begin{aligned} |A_1B_1|^2 &= |A_2B_2|^2 = a, & |A_1B_2|^2 &= |A_2B_1|^2 = b, \\ |C_1B_1|^2 &= |C_1B_2|^2 = c, & |C_2B_1|^2 &= |C_2B_2|^2 = d, \\ |A_2C_1|^2 &= |A_1C_1|^2 = e, & |A_1C_2|^2 &= |A_2C_2|^2 = f. \end{aligned}$$

Тогда многочлен для объема имеет вид:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{v}) = & \mathbf{v}^8 + (4fbc + 4fac + 4ebd + 4ead - 4fab - 4eab - 4adc \\ & - 4bdc - 8edc - 8fdc - 4afe - 4bfe - 8cfe - 8dfe \\ & - 4cba - 4dba + 4cd^2 + 4dc^2 + 4ed^2 + 4fc^2 + 4cf^2 + 4de^2 \\ & + 4ef^2 + 4fe^2 + 4ab^2 + 4ba^2)\mathbf{v}^7 \\ & + (16e^2bd^3 + 16e^2ad^3 + 16f^2bc^3 + 16f^2ac^3 + 16e^3bd^2 \\ & + 16e^3ad^2 + 16fc^4d - 16c^2baed - 64c^2baf^2 + 32cbadf^2 \\ & + 32cbade^2 + 32cbaef^2 + 32cbaed^2 + 32c^2baf^2 - 16cbaf^2d \\ & - 16cbaf^2e^2 + 32c^2baf^2d - 32e^2bd^2c - 32e^2ad^2c - 32f^2bc^2d \\ & - 32f^2ac^2d - 32ef^2bc^2 - 32ef^2ac^2 + 16fb^2c^2a + 16fb^2c^2a^2 \\ & - 16fb^2c^3d - 16ebd^3c - 16ead^3c + 16eb^2d^2a + 16ebd^2a^2 \\ & - 32fe^2bd^2 - 32fe^2ad^2 + 16f^3bc^2 + 16f^3ac^2 - 16fac^3d + 16ed^4c \\ & + 16fb^2da^2 - 16fb^2ca^2 + 16eb^2ca^2 + 32ead^2bf - 64e^2ad^2b \\ & - 16eb^2da^2 + 16e^2a^2bd + 16f^2a^2bc + 16e^2b^2ad + 16f^2b^2ac \\ & - 16e^3fbd - 16e^3fad - 16f^3ebc - 16f^3eac + 16cf^4e - 16dbae f^2 \\ & + 32dbaf^2e^2 + 16de^4f - 16fc^3d^2 + 32d^2e^3f - 16ab^2cfe + 32d^3e^2c \\ & - 16d^3e^3 + 32c^2f^3e + 32f^2c^3d - 16de^3f^2 - 16cf^3e^2 - 16c^3f^3 \\ & - 16ab^2edc - 16ab^2fdc - 16ab^2dfe - 16ed^3c^2 - 16c^3baf \\ & - 16e^3abd + 64df^2e^2c + 64fd^2c^2e - 80f^2c^2de - 80d^2e^2fc \\ & - 16f^3abc - 64cf^3de - 16d^3bae - 64fc^3ed + 16fc^2ead \\ & + 16fc^2ebd + 16d^2feac + 16cf^2e^2a + 16cf^2e^2b + 96c^2fe^2d \\ & + 16df^2e^2b + 16d^2feb^2c + 16ed^2c^2a + 16ed^2c^2b + 16de^2fbc \\ & - 64de^3cf + 16de^2fac + 16cf^2ead - 64ed^3fc + 16cf^2ebb \\ & - 16cba^2ed - 16ba^2fdc - 16ba^2dfe - 16ba^2cfe + 16df^2e^2a \\ & + 16fd^2c^2b + 16fd^2c^2a + 96f^2d^2ce)\mathbf{v}^6. \end{aligned}$$

У этих октаэдров есть реализации в виде октаэдров Брикара, когда они изгибаются, и нулевой (кратный!) корень $\mathbf{v} = 0$ соответствует объему именно таких октаэдров (как уже было упомянуто в § 5, изгибаемые подвески все имеют нулевой объем).

Список литературы

1. *Connolly R.* A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1978. V. 47. P. 333–338.
2. *Коннелли Р.* Нерешенные вопросы теории изгибаемых поверхностей // Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 18. Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир. С. 228–238.
3. *Кёйнер Н.* Изгибаемые полиэдральные сферы в E^3 , по Роберту Коннелли // Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 18. Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир. С. 210–227.
4. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция его метрики // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 4. С. 1235–1246.
5. *Сабитов И. Х.* Изометрические отображения, изгибания и объемы в метрической теории поверхностей и многогранников // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1997.
6. *Biggiogero G.* La geometria del tetraedro // Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi. V. II, p. I. Milano: Editore Ulrico Hoepli, 1950. P. 219–252.
7. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибаний поверхностей // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 48. М.: ВИНТИ, 1989. С. 196–270.
8. *Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х.* Изгибание поверхностей. II // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1995. С. 108–167.
9. *Александров В. А.* Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании поверхности // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 5. С. 16–24.
10. *Александров В. А.* Новый пример изгибаемого многогранника // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 36. № 6. С. 1215–1224.
11. *Павлова О. В.* Объем подвески как функция длин ее ребер // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 165–166.
12. *Коннелли Р.* Об одном подходе к проблеме неизгибаемости // Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 18. Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир. Р. 164–209.
13. *Сабитов И. Х.* К проблеме об инвариантности объема изгибаемого многогранника // УМН. 1995. Т. 50. № 2. С. 223–224.
14. *Sabitov I. Kh.* Some results in the bending theory of polyhedra // Symmetry Cult. Sci. 1995. V. 6. № 3. P. 462–464.
15. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция длин его ребер // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 1. С. 305–307.
16. *Сабитов И. Х.* Доказательство гипотезы “кузнечных мехов” для многогранников малого топологического рода // Докл. АН. 1998. Т. 358. № 6. С. 743–746.
17. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция длин его ребер // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 6. С. 89–91.
18. *Connolly R., Sabitov I., Walz A.* The Bellows conjecture // Beiträge Algebra Geom. 1997. V. 38. № 1. P. 1–10.
19. *Астрелин А. В., Сабитов И. Х.* Минимальный по степени многочлен для определения объема октаэдра по его метрике // УМН. 1995. Т. 50. № 5. С. 245–246.
20. *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.
21. *Blumental L. M.* Theory and Applications of Distance Geometry. New York: Chelsea, 1970.
22. *Banchoff T.* Nonrigidity theorem for tight polyhedra // Arch. Math. (Basel) 1970. V. 21. № 4. P. 416–423.
23. *Милка А. Д.* Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников // Матем. физика, анализ, геом. 1994. Т. 1. № 1. С. 116–130.
24. *Bleecker D.* Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra // J. Differential Geom. 1996. V. 43. P. 505–526.

25. *Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А.* Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с полиэдральной метрикой в $\mathbb{R}^3$ // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 3. С. 76–95.
26. *Alexandrov V.* An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space // Beiträge Algebra Geom. 1997. V. 38. № 1. P. 11–18.
27. *Alexander R.* Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 288. № 2. P. 661–678.
28. *Болтянский В. Г.* Третья проблема Гильберта. М.: Наука, 1977.
29. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.–Л.: Гостехиздат, 1946.
30. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
31. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция его метрики и решение основных проблем метрической теории многогранников // Межд. школа-семинар памяти Н. В. Ефимова. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: НПП Коралл-микро, 1996. С. 64–65.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
07.05.1998