Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шишкин, Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 9, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:10:17

УДК 517.5

А. Б. Шишкин

Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности

Переходы от задач спектрального синтеза к эквивалентным задачам локального описания лежат в основе большинства известных работ по спектральному синтезу в комплексных областях. Эти переходы, как правило, осуществляются в рамках специальных условий и вызывают значительные трудности. В настоящей работе развивается общий метод, позволяющий убедиться в справедливости теоремы двойственности в условиях многих комплексных переменных, когда каждый из операторов $\pi_p(D)$, $p = 1, \dots, q$, действует лишь по одной переменной. Эти условия охватывают случай системы операторов частного дифференцирования. При этом двойственный переход разбивается на три отдельных шага. Два из них связаны с классическими задачами теории аналитических функций, и лишь один – с общей теорией двойственности. Это позволяет говорить о выделении аналитической составляющей в вопросах перехода от задач спектрального синтеза к эквивалентным задачам локального описания.

Библиография: 14 названий.

§ 0. Введение

Пусть Ω – область Рунге в $\mathbb{C}^n$; H – пространство функций, аналитических в Ω , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах; $\pi(z) = \{\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)\}$ – фиксированная система многочленов, каждый из которых зависит лишь от одной переменной; $\pi(D) = \{\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)\}$ – соответствующая система дифференциальных операторов. Подпространство $W \subseteq H$ называется *инвариантным*, если оно инвариантно относительно каждого из операторов системы $\pi(D)$, а именно, $f \in W \Rightarrow \pi_p(D)f \in W$, $p = 1, \dots, q$. *Корневым подпространством* системы операторов $\pi(D)$, соответствующим вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_p) \in \mathbb{C}^q$, называется подпространство H , состоящее из элементов, каждый из которых при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет системе уравнений

$$(\pi_p(D) - \lambda_p)^k f = 0, \quad p = 1, \dots, q.$$

Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство W *допускает спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов системы операторов $\pi(D)$, содержащихся в W .

Задача спектрального синтеза для системы операторов $\pi(D)$: *найти условия, при которых замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез.*

С другой стороны, пусть T – отображение, которое каждому линейному непрерывному функционалу $S \in H^*$ ставит в соответствие его характеристическую функцию $\varphi(\omega) = \langle S, \exp \langle \omega, z \rangle \rangle$, где $\langle \omega, z \rangle = \sum \omega_i z_i$. Когда S пробежит H^* ,

φ опишет некоторый класс P целых функций экспоненциального роста. Условие “ Ω – область Рунге” влечет взаимную однозначность отображения $T: H^* \rightarrow P$. P наделяется локально выпуклой топологией, индуцированной из H^* , и выдерживает умножение на многочлены, непрерывное в топологии P . Это позволяет рассматривать P как топологический модуль над любым подкольцом кольца многочленов $\mathbb{C}[z]$, например, как топологический $\mathbb{C}[\pi]$ -модуль, где $\mathbb{C}[\pi]$ – подкольцо $\mathbb{C}[z]$, порождаемое многочленами $\pi_1, \dots, \pi_q$. Поле $\mathbb{C}$ изоморфно вложено в $\mathbb{C}[\pi]$, следовательно, всякий $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в P является подпространством в P .

Пусть W – замкнутое инвариантное подпространство H ; W^0 – аннулятор W в H^* . Подпространство $I = T(W^0) \subseteq P$ обладает структурой замкнутого подмодуля в $\mathbb{C}[\pi]$ -модуле P . Соотношения $I = T(W^0)$, $W = T^{-1}(I)^0$, где $T^{-1}(I)^0$ – аннулятор $T^{-1}(I)$ в H , устанавливают взаимно однозначное соответствие между замкнутым инвариантным подпространством $W \subseteq H$ и замкнутым подмодулем $I \subseteq P$. Подпространство $I = T(W^0) \subseteq P$ принято называть *аннуляторным подмодулем* подпространства W .

Символом π обозначим отображение $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^q$, осуществляемое q -многочленом $(\pi_1, \dots, \pi_q)$. Введем обозначения: Λ – полный образ отображения π ; λ – элемент Λ ; $\tilde{\lambda}$ – π -слой $\pi^{-1}(\lambda)$; $O(\lambda)$ – кольцо ростков функций, аналитических в точке λ ; $O(\tilde{\lambda})$ – кольцо ростков функций, аналитических на π -слое $\tilde{\lambda}$; $O_\pi(\tilde{\lambda})$ – подкольцо $O(\tilde{\lambda})$, состоящее из композиций $u \circ \pi$, $u \in O(\lambda)$. $O(\tilde{\lambda})$ рассматриваем как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Для каждого λ модуль $I \subseteq P$ порождает подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ в $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуле $O(\tilde{\lambda})$, состоящий из всевозможных конечных сумм вида $\sum c_i f_i$, где $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $f_i \in I$. Подмодуль I называется *обильным*, если справедлива импликация:

$$f \in P, \quad f \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda \implies f \in I.$$

Задача локального описания для системы многочленов π : найти условия, при которых замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ является обильным.

Допустим, что отображение π имеет дискретные слои. В настоящей статье задача спектрального синтеза сводится к задаче локального описания, т.е. оказывается справедливой

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Для того чтобы замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы его аннуляторный подмодуль $I \subseteq P$ был обильным.*

В случае $n = 1$, когда система операторов $\pi(D)$ состоит из одного оператора дифференцирования D , эта теорема доказана И. Ф. Красичковым-Терновским [1] (случай $\Omega = \mathbb{C}$ неявно содержится в работе Л. Шварца [2]). Для оператора кратного дифференцирования D^m теорема двойственности доказана автором [3] (случай $\Omega = \mathbb{C}$ изучен ранее С. Г. Мерзляковым [4]). Для произвольного дифференциального оператора $D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_m D^0$ два различных доказательства теоремы двойственности даны И. Ф. Красичковым-Терновским [5]. В заметке [6] представлены результаты настоящей статьи для случая одной переменной.

В условиях многих переменных теорема двойственности ранее не была доказана. Однако следует отметить работы Л. Эренпрайса [7], Б. Мальгранжа [8], В. В. Напалкова [9], содержащие близкие по характеру предложения.

Теорема двойственности вскрывает двойственный характер задач спектрального синтеза и локального описания. Переход от первой задачи ко второй лежит в основе большинства известных работ по спектральному синтезу в комплексных

областях. Этот переход, как правило, осуществляется в рамках специальных условий и вызывает значительные трудности. В настоящей работе развивается общий метод, позволяющий убедиться в справедливости теоремы двойственности в условиях многих комплексных переменных, когда каждый из многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$ зависит лишь от одной переменной. Эти условия охватывают тот важный случай, когда система операторов $\pi(D)$ является системой операторов частного дифференцирования. При этом двойственный переход разбивается на три отдельных шага. Два из них связаны с классическими задачами теории аналитических функций, и лишь один — с общей теорией двойственности. Это позволяет говорить о выделении аналитической составляющей в вопросах перехода от задач спектрального синтеза к эквивалентным задачам локального описания.

Пусть W — замкнутое инвариантное подпространство в H . Выберем $\lambda = (\lambda_p) \in \mathbb{C}^q$ и обозначим через $E(\lambda)$ совокупность экспоненциальных полиномов вида:

$$\sum r_k(z) \exp\langle \omega^{(k)}, z \rangle, \quad \omega^{(k)} \in \bigcap_{p=1}^q \pi_p^{-1}(\lambda_p),$$

где r_k — многочлены. Легко проверить, что такие экспоненциальные полиномы являются корневыми элементами системы операторов $\pi(D)$, соответствующими вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_p) \in \mathbb{C}^q$. В том случае, когда объединение $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E(\lambda)$ совпадает с запасом всех корневых элементов системы операторов $\pi(D)$, задача спектрального синтеза равносильна так называемой задаче *индуктивного описания*: *найти условия, при которых замкнутое инвариантное подпространство W совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на множество*

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^q} (W \cap E(\lambda)) = W \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^q} E(\lambda) \right).$$

С другой стороны, задача локального описания не предполагает топологизации локальных модулей $O(\tilde{\lambda})$. Отступим от этого правила и будем считать, что локальный модуль $O(\tilde{\lambda})$, $\lambda \in \Lambda$, наделен локально выпуклой топологией, в которой он как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$ является топологическим. Получаем возможность говорить о замкнутых подмодулях в $O(\tilde{\lambda})$. Обозначим через $\overline{I(\tilde{\lambda})}$ минимальный замкнутый подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\overline{O(\tilde{\lambda})}$, содержащий подмодуль $I \subseteq P$. Так как $O(\tilde{\lambda})$ — топологический модуль, то $\overline{I(\tilde{\lambda})}$ совпадает с замыканием $I(\tilde{\lambda})$ в топологии $O(\tilde{\lambda})$. Возникает новая задача — задача *проективного описания*: *найти условия, при которых оказывается справедливой импликация:*

$$f \in P, \quad f \in \overline{I(\tilde{\lambda})} \quad \forall \lambda \in \Lambda \implies f \in I.$$

Может случиться так, что все подмодули в $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модулях $O(\tilde{\lambda})$ будут замкнуты. Тогда задача проективного описания ничем не отличается от задачи локального описания.

Постановка задач индуктивного и проективного описания приводит к разбиению двойственного перехода на три отдельные части:

- 1) от спектрального синтеза к индуктивному описанию;
- 2) от индуктивного описания к проективному описанию;
- 3) от проективного описания к локальному описанию.

Переход 1) связан с изучением корневых подпространств систем дифференциальных операторов (§2). Переход 2) осуществляется в рамках теории двойственности и требует лишь общих сведений о локально выпуклых пространствах (§1). Переход 3) использует замкнутость подмодулей в топологизированных локальных модулях и основан на предложении типа леммы Круля (§3).

§1. Схема двойственности

Сведение задачи спектрального синтеза к эквивалентной задаче локального описания опирается на два предложения – *принцип двойственности* и *схему двойственности*. Эти предложения носят общий характер и допускают формулировку в терминах абстрактных локально выпуклых пространств.

1. Принцип двойственности. Пусть H – отделимое полурефлексивное локально выпуклое пространство над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$); H^* – его сильное сопряженное пространство. Из теоремы о биполяре [10; теорема 8.1.5] вытекает

Принцип двойственности. *Между совокупностью $\{W\}$ замкнутых подпространств в H и совокупностью $\{V\}$ замкнутых подпространств в H^* можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности: $W^0 = V$, $V^0 = W$, где W^0 – аннулятор подпространства $W \subseteq H$ в пространстве H^* , V^0 – аннулятор подпространства $V \subseteq H^*$ в пространстве H .*

2. Индуктивное и проективное описания. Пусть M_λ , $\lambda \in \Lambda$, – отделимые полурефлексивные локально выпуклые пространства над полем $\mathbb{K}$; $m_\lambda: M_\lambda \rightarrow H$, $\lambda \in \Lambda$, – линейные непрерывные отображения. Выберем произвольное замкнутое подпространство $W \subseteq H$ и каждому $\lambda \in \Lambda$ сопоставим замкнутое подпространство

$$W_\lambda = m_\lambda^{-1}(W) \subseteq M_\lambda.$$

Очевидно, что W_λ – *максимальное замкнутое подпространство* M_λ , образ которого при отображении m_λ лежит в W .

Подпространство $W_\lambda \subseteq M_\lambda$ будем называть *индуктивным подпространством* W . Говорим, что W *допускает индуктивное описание* (относительно семейства отображений m_λ , $\lambda \in \Lambda$), если W совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на объединение

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda(W_\lambda).$$

Согласно принципу аппроксимации [10; теорема 3.3.1] для проверки того, что замкнутое подпространство W допускает индуктивное описание, достаточно убедиться в выполнимости включения:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (m_\lambda(W_\lambda))^0 \subseteq W^0. \quad (1)$$

Обозначим через N_λ , $\lambda \in \Lambda$, – сильные сопряженные пространства к M_λ ; $m'_\lambda: H^* \rightarrow N_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, – операторы, сопряженные к m_λ (отображения m'_λ , $\lambda \in \Lambda$, непрерывны [10; гл. 8]). Выберем произвольное замкнутое подпространство $V \subseteq H^*$ и каждому $\lambda \in \Lambda$ сопоставим замкнутое подпространство $V_\lambda \subseteq N_\lambda$,

совпадающее с замыканием подпространства N_λ , натянутого на $m'_\lambda(V)$. Тогда V_λ – минимальное замкнутое подпространство N_λ , включающее множество $m'_\lambda(V)$.

Подпространство $V_\lambda \subseteq N_\lambda$ будем называть *проективным подпространством* V . Говорим, что V *допускает проективное описание* (относительно семейства отображений $m'_\lambda, \lambda \in \Lambda$), если V совпадает с пересечением

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda^{-1}(V_\lambda).$$

Для проверки того, что замкнутое подпространство $V \subseteq H^*$ допускает проективное описание, достаточно убедиться в справедливости импликации:

$$S \in H^*, \quad m'_\lambda(S) \in V_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \implies S \in V. \quad (2)$$

3. Схема двойственности. Зафиксируем замкнутое подпространство $W \subseteq H$ и его аннулятор $V \subseteq H^*$. В силу принципа двойственности V – замкнутое подпространство в H^* . Основой для двойственного перехода от задачи спектрального синтеза к эквивалентной задаче локального описания служит

СХЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Для того чтобы замкнутое подпространство $W \subseteq H$ допускало индуктивное описание, необходимо и достаточно, чтобы его аннулятор $V \subseteq H^*$ допускал проективное описание.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим индуктивное подпространство $W_\lambda \subseteq M_\lambda$ замкнутого подпространства $W \subseteq H$ и проективное подпространство $V_\lambda \subseteq N_\lambda$ замкнутого подпространства $V \subseteq H^*$. Из определений W_λ и V_λ вытекают включения:

$$m_\lambda(W_\lambda) \subseteq W, \quad m'_\lambda(V) \subseteq V_\lambda.$$

Согласно свойствам сопряженных отображений [10; гл. 8, 8.6]

$$m'_\lambda(W^0) \subseteq (W_\lambda)^0, \quad m''_\lambda((V_\lambda)^0) \subseteq V^0,$$

где второе сопряженное отображение m''_λ совпадает с m_λ и по теореме о биполяре $W^0 = (V^0)^0 = V$, $V^0 = (W^0)^0 = W$. Значит,

$$m'_\lambda(V) \subseteq (W_\lambda)^0, \quad m_\lambda((V_\lambda)^0) \subseteq W.$$

Первое из последних включений и свойство минимальности V_λ дают включение $V_\lambda \subseteq (W_\lambda)^0$, т.е. $W_\lambda \subseteq (V_\lambda)^0$. Второе включение и свойство максимальности W_λ влекут включение $(V_\lambda)^0 \subseteq W_\lambda$. Таким образом,

$$W_\lambda = (V_\lambda)^0, \quad (W_\lambda)^0 = V_\lambda.$$

Другими словами, индуктивные подпространства W_λ замкнутого подпространства $W \subseteq H$ и проективные подпространства V_λ его аннулятора $V \subseteq H^*$, как и сами подпространства W и V , связаны правилом ортогональности.

Пусть замкнутое подпространство $W \subseteq H$ допускает индуктивное описание. Нужно показать, что замкнутое подпространство $V \subseteq H^*$ допускает проективное описание. Для этого достаточно доказать справедливость импликации (2). Пусть

$S \in H^*$, $m'_\lambda(S) \in V_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$. По доказанному выше $V_\lambda = (W_\lambda)^0$, значит, $m'_\lambda(S) \in (W_\lambda)^0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть $a \in W_\lambda$, тогда

$$\langle S, m_\lambda(a) \rangle = \langle m'_\lambda(S), a \rangle = 0.$$

Следовательно, $S \in (m_\lambda(W_\lambda))^0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. По предположению подпространство W допускает индуктивное описание. Поэтому W совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на объединение

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda(W_\lambda).$$

Следовательно, S аннулирует W , т.е. $S \in V$. Тем самым, справедливость импликации (2) доказана.

Обратно, пусть замкнутое подпространство $V = W^0$ допускает проективное описание. Нужно показать, что W допускает индуктивное описание. Для этого достаточно доказать выполнимость включения (1). Пусть $S \in (m_\lambda(W_\lambda))^0$ при некотором $\lambda \in \Lambda$ и $a \in W_\lambda \subseteq M_\lambda$. Тогда

$$\langle m'_\lambda(S), a \rangle = \langle S, m_\lambda(a) \rangle = 0.$$

Значит, $m'_\lambda(S) \in (W_\lambda)^0$. Но подпространства W_λ, V_λ связаны правилом ортогональности, следовательно, $m'_\lambda(S) \in V_\lambda$. Если включение $S \in (m_\lambda(W_\lambda))^0$ имеет место при всяком $\lambda \in \Lambda$, то и включение $m'_\lambda(S) \in V_\lambda$ будет выполнено при всяком $\lambda \in \Lambda$. Так как по предположению подпространство V допускает проективное описание, то в последнем случае будет выполнено включение $S \in V$. Что и доказывает справедливость включения (1).

Дальнейшие усилия посвятим реализации схемы двойственности для подпространств аналитических функций, инвариантных относительно линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

§ 2. Спектральный синтез и индуктивное описание

1. Выбор системы многочленов и сопутствующие обозначения.

Пусть π – отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^q$, осуществляемое фиксированным q -многочленом $(\pi_1, \dots, \pi_q)$. Считаем, что каждый многочлен π_p , $p = 1, \dots, q$, имеет степень ≥ 1 , зависит лишь от одной переменной и отображение π имеет дискретные слои. В этом случае систему многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$ можно разбить на подсистемы

$$\{\pi_1^{(i)}, \dots, \pi_{q(i)}^{(i)}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad q = \sum q(i),$$

объединив в них многочлены, зависящие от одинаковых переменных. Предположение о том, что отображение π имеет дискретные слои, означает, что все подсистемы $\pi^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, не пусты. Запись многочлена π_p , $p = 1, \dots, q$, в виде $\pi_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, q(i)$, означает, что π_p зависит от переменной z_i . Обозначим через $\pi^{(i)}$ отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^{q(i)}$, осуществляемое $q(i)$ -многочленом $(\pi_1^{(i)}, \dots, \pi_{q(i)}^{(i)})$. Пусть $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^q$ – полный образ отображения π , $\Lambda^{(i)} \subseteq \mathbb{C}^{q(i)}$ – полный образ отображения $\pi^{(i)}$. Ясно, что Λ совпадает с декартовым произведением

$\Lambda^{(1)} \times \dots \times \Lambda^{(n)}$. Если хотя бы одно из $q(i)$ больше 1, то Λ – собственное подмножество $\mathbb{C}^q$.

Для векторов $\lambda \in \mathbb{C}^q$ будем использовать обозначение $\lambda = (\lambda_p)$, $p = 1, \dots, q$, а для векторов $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{C}^q$ – обозначение $\lambda = (\lambda^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$, где $\lambda^{(i)} = (\lambda_t^{(i)}) \in \Lambda^{(i)}$, $t = 1, \dots, q(i)$. Непустые π -слои $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, совпадают с декартовыми произведениями $\tilde{\lambda}^{(1)} \times \dots \times \tilde{\lambda}^{(n)}$, $\tilde{\lambda}^{(i)} = (\pi^{(i)})^{-1}(\lambda^{(i)})$. При этом $\pi^{(i)}$ -слои $\tilde{\lambda}^{(i)}$ совпадают с пересечениями $\bigcap_{t=1}^{q(i)} (\pi_t^{(i)})^{-1}(\lambda_t^{(i)})$ и являются конечными множествами.

Пусть $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел; $\mathbb{Z}_+^n$ – декартово произведение n копий $\mathbb{Z}_+$. Выберем $\lambda \in \Lambda$ и обозначим Z_λ – декартово произведение $\mathbb{Z}_+^n \times \tilde{\lambda}$, а $\mathbb{Z}_\lambda$ – декартово произведение $\mathbb{Z}_+^n \times \tilde{\lambda} \times \{1, \dots, \nu\}$. Множества Z_λ и $\mathbb{Z}_\lambda$ наделим дискретными топологиями. Для упрощения записей договоримся использовать знаки неравенств “<” и “≤” для элементов из $\mathbb{Z}_+^n$ в тех случаях, когда они верны для их составляющих.

2. Задача спектрального синтеза. Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_\nu\}$ – некоторая система областей Рунге в $\mathbb{C}^n$; $H_j = O(\Omega_j)$ – пространство функций, голоморфных в Ω_j , с топологией компактной сходимости; $\mathbb{H}$ – топологическое произведение $H_1, \dots, H_\nu$; $D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial z_n}$ – операторы частного дифференцирования, действующие в $\mathbb{H}$ покомпонентно; $D = (D_1, \dots, D_n)$; $\pi(D) = \{\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)\}$ – система дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, где $\pi_1, \dots, \pi_q$ – система многочленов, рассматриваемая в п. 1.

Вектором собственных значений системы операторов $\pi(D)$ назовем вектор $\lambda = (\lambda_p) \in \mathbb{C}^q$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(\pi_p(D) - \lambda_p)f = 0, \quad p = 1, \dots, q,$$

при каком-либо ненулевом $f = (f_j) \in \mathbb{H}$.

Алгебраический спектр системы операторов $\pi(D)$ – это совокупность всех векторов собственных значений.

Корневое подпространство системы операторов $\pi(D)$, соответствующее вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_p) \in \mathbb{C}^q$, – это подпространство $\mathbb{H}$, состоящее из элементов, каждый из которых при некотором натуральном k удовлетворяет системе уравнений

$$(\pi_p(D) - \lambda_p)^k f = 0, \quad p = 1, \dots, q.$$

Пусть $\pi_p(D) = \pi_t^{(i)}(D_i) \in \pi(D)$, $p = 1, \dots, q$. Выберем

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \lambda = (\lambda^{(i)}) \in \Lambda, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \tilde{\lambda}.$$

Тогда $\pi_t^{(i)}(\omega_i) - \lambda_t^{(i)} = 0$. Поэтому для достаточно большого k будем иметь

$$\begin{aligned} & (\pi_p(D) - \lambda_p)^k z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle \\ &= z^\alpha \cdot z_i^{-\alpha_i} \exp_j \langle \omega, z \rangle \cdot \exp(-\omega_i z_i) (\pi_t^{(i)}(D_i) - \lambda_t^{(i)})^k z_i^{\alpha_i} \exp\{\omega_i z_i\} = 0, \end{aligned}$$

где

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \times \dots \times z_n^{\alpha_n}, \quad \exp_j \langle \omega, z \rangle = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, \exp \langle \omega, z \rangle, \underbrace{0, \dots, 0}_{\nu-j} \right).$$

Значит, элементы вида

$$z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle, \quad (\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda,$$

являются корневыми элементами системы операторов $\pi(D)$. Кроме того, полагая $\alpha = (0, \dots, 0)$, $k = 1$, видим, что алгебраический спектр системы операторов $\pi(D)$ содержит множество Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Алгебраический спектр системы операторов $\pi(D)$ совпадает с Λ . Корневое подпространство системы операторов $\pi(D)$, соответствующее вектору собственных значений $\lambda \in \Lambda$, совпадает с подпространством $\mathfrak{E}(\lambda) \subseteq \mathbb{H}$, натянутым на множество элементов вида*

$$z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle, \quad (\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя специальный вид системы операторов

$$\pi(D) = \{\pi_1^{(1)}(D_1), \dots, \pi_{q(1)}^{(1)}(D_1), \dots, \pi_1^{(n)}(D_n), \dots, \pi_{q(n)}^{(n)}(D_n)\},$$

убедимся в справедливости доказываемого предложения непосредственным решением, основанным на индукции по n , системы уравнений

$$(\pi_t^{(i)}(D_t) - \lambda_t^{(i)})^k f = 0, \quad t = 1, \dots, q(i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

При этом можно ограничиться скалярным случаем ($\nu = 1$) и считать, что $\Omega = \Omega_1 = U_1 \times \dots \times U_n$ — поликруг. Для $n = 1$ доказываемое утверждение очевидно. Предположим, что оно верно в случае $n = N$, и покажем, что из этого предположения следует справедливость доказываемого утверждения для $n = N + 1$. Из того, что f принадлежит $O(U_1 \times \dots \times U_{N+1})$ и удовлетворяет системе уравнений

$$(\pi_t^{(N+1)}(D_{N+1}) - \lambda_t^{(N+1)})^k f = 0, \quad t = 1, \dots, q(N+1),$$

вытекает возможность представления f в поликруге $U_1 \times \dots \times U_{N+1}$ в виде

$$f(z', z_{N+1}) = \sum_{j=1}^m c_j(z') \varepsilon_j(z_{N+1}), \quad z' = (z_1, \dots, z_N),$$

где $\varepsilon_j(z_{N+1})$ — экспоненциальные одночлены вида

$$z_{N+1}^\alpha \exp\{\omega z_{N+1}\}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad \omega \in \tilde{\lambda}^{(N+1)}.$$

С другой стороны, из предположения индукции вытекает возможность представления f в поликруге $U_1 \times \dots \times U_{N+1}$ в виде конечной суммы

$$f(z', z_{N+1}) = \sum c_{\alpha', \omega'}(z_{N+1}) (z')^{\alpha'} \exp\langle \omega', z' \rangle,$$

где $\alpha' \in \mathbb{Z}_+^N$, $\omega' \in \tilde{\lambda}^{(1)} \times \dots \times \tilde{\lambda}^{(N)}$. Выберем $\zeta_i \in U_{N+1}$, $i = 1, \dots, m$, используя следующую процедуру. Точка ζ_1 отлична от нуля, точка ζ_2 выбрана из условия, что определитель $\det(\varepsilon_j(\zeta_i))$, $i, j = 1, 2$, отличен от нуля, и т.д., точка ζ_m выбрана из условия, что определитель $\det(\varepsilon_j(\zeta_i))$, $i, j = 1, \dots, m$, отличен от нуля. Так

как система элементов $\varepsilon_j \in O(U_{N+1})$, $j = 1, \dots, m$, линейно независима, то такой выбор возможен. Придавая переменной z_{N+1} значения $\zeta_1, \dots, \zeta_m$, приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^m c_j(z') \varepsilon_j(\zeta_i) = \sum c_{\alpha', \omega'}(\zeta_i) (z')^{\alpha'} \exp\langle \omega', z' \rangle, \quad i = 1, \dots, m,$$

из которой следует, что коэффициенты c_j представляют собой экспоненциальные полиномы вида $\sum r_{\omega'}(z') \exp\langle \omega', z' \rangle$, f — экспоненциальный полином вида

$$\sum r_{\omega}(z) \exp\langle \omega, z \rangle,$$

где $z = (z', z_{N+1})$, $\omega = (\omega', \omega_{N+1}) \in \tilde{\lambda}^{(1)} \times \dots \times \tilde{\lambda}^{(N)} \times \tilde{\lambda}^{(N+1)}$. Таким образом, всякое решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\sum_{\omega \in \tilde{\lambda}} r_{\omega}(z) \exp\langle \omega, z \rangle.$$

Это значит, в частности, что при условии $\lambda \in \mathbb{C}^q \setminus \Lambda$ (в этом случае $\tilde{\lambda} = \emptyset$) система уравнений (3) не имеет решений. Значит, алгебраический спектр системы операторов $\pi(D)$ совпадает с множеством Λ . Предложение доказано.

Подпространство $W \subseteq \mathbb{H}$ называем *инвариантным*, если оно инвариантно относительно каждого из операторов системы $\pi(D)$, т.е. $\pi_p(D)W \subseteq W$, $p = 1, \dots, q$. Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbb{H}$ *допускает спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в $\mathbb{H}$ линейной оболочки корневых элементов системы операторов $\pi(D)$, содержащихся в W .

Задача спектрального синтеза для системы операторов $\pi(D)$: найти условия, при которых замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbb{H}$ допускает спектральный синтез.

3. Пространства $\mathbb{M}_{\lambda}$ и $\mathbb{N}_{\lambda}$. Выберем $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через $\mathbb{M}_{\lambda}$ множество всех комплексных функций на $\mathbb{Z}_{\lambda}$ с компактными носителями. Пусть $\{d_{\lambda, k}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность компактов в $\mathbb{Z}_{\lambda}$ со свойствами:

$$d_{\lambda, 1} \subset d_{\lambda, 2} \subset \dots \subset \mathbb{Z}_{\lambda}, \quad d_{\lambda, 1} \cup d_{\lambda, 2} \cup \dots = \mathbb{Z}_{\lambda};$$

$\mathbb{M}_{\lambda, k}$ — множество всех комплексных функций на $\mathbb{Z}_{\lambda}$, носители которых лежат в $d_{\lambda, k}$. Наделяем $\mathbb{M}_{\lambda, k}$ топологией, порождаемой обычной $\sup$ -нормой, а $\mathbb{M}_{\lambda}$ — топологией индуктивного предела пространств $\mathbb{M}_{\lambda, k}$ относительно вполне непрерывных вложений $\mathbb{M}_{\lambda, k} \rightarrow \mathbb{M}_{\lambda, k+1}$.

Как строгий индуктивный предел банаховых пространств $\mathbb{M}_{\lambda}$ — полное [11; гл. VII, предложение 3], бочечное [11; гл. V, предложение 6] и борнологическое [11; гл. V, предложение 8, следствие]. Кроме того, каждое ограниченное множество в $\mathbb{M}_{\lambda}$ является предкомпактным [11; приложение 2, предложения 1, 2], следовательно, $\mathbb{M}_{\lambda}$ — монтелевское пространство и, значит, рефлексивное.

Обратимся к пространству $\mathbb{N}_{\lambda}$, сильному сопряженному к $\mathbb{M}_{\lambda}$. Пусть $\mathbb{N}_{\lambda, k}$ — пространство всех комплексных функций на $d_{\lambda, k}$. Если наделять $\mathbb{N}_{\lambda, k}$ топологией, порождаемой $\sup$ -нормой, то $\mathbb{N}_{\lambda, k}$ можно отождествить с сильным сопряженным к $\mathbb{M}_{\lambda, k}$ [10; теорема 4.2.1]. Значит, пространство $\mathbb{N}_{\lambda}$ может быть отождествлено с

проективным пределом пространств $\mathbb{N}_{\lambda,k}$ относительно сужений $\mathbb{N}_{\lambda,k+1} \rightarrow \mathbb{N}_{\lambda,k}$ [11; гл. V, предложение 15]. По запасу элементов пространство $\mathbb{N}_{\lambda}$ совпадает с пространством всех комплексных функций на $\mathbb{Z}_{\lambda}$. Топология $\mathbb{N}_{\lambda}$ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах и порождается счетным набором полунорм

$$a \rightarrow |a(\alpha, \omega, j)|, \quad (\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_{\lambda}.$$

Билинейная форма, приводящая пространства $\mathbb{M}_{\lambda}$ и $\mathbb{N}_{\lambda}$ в двойственность, имеет вид

$$\langle a, b \rangle = \sum_{(\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_{\lambda}} a(\alpha, \omega, j) b(\alpha, \omega, j), \quad a \in \mathbb{N}_{\lambda}, \quad b \in \mathbb{M}_{\lambda}.$$

4. Спектральный синтез и индуктивное описание. Выберем произвольное $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим отображение $m_{\lambda}: \mathbb{M}_{\lambda} \rightarrow \mathbb{H}$, которое каждому элементу $a = a(\alpha, \omega, j) \in \mathbb{M}_{\lambda}$ ставит в соответствие корневой элемент системы операторов $\pi(D)$:

$$\sum_{(\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_{\lambda}} a(\alpha, \omega, j) \frac{1}{\alpha!} z^{\alpha} \exp_j \langle \omega, z \rangle,$$

где $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \times \dots \times z_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = (\alpha_1)! \times \dots \times (\alpha_n)!$. Это отображение взаимно однозначно и непрерывно.

Варируя $\lambda \in \Lambda$, получаем семейство отображений $m_{\lambda}: \mathbb{M}_{\lambda} \rightarrow \mathbb{H}$, $\lambda \in \Lambda$. Непрерывность этих отображений позволяет говорить об индуктивном описании замкнутых инвариантных подпространств в $\mathbb{H}$. При этом согласно определению замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbb{H}$ допускает индуктивное описание, если оно совпадает с замыканием в $\mathbb{H}$ подпространства, натянутого на объединение

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} m_{\lambda}(W_{\lambda}),$$

где $W_{\lambda} = m_{\lambda}^{-1}(W)$ – индуктивное подпространство W в $\mathbb{M}_{\lambda}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbb{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда оно допускает индуктивное описание.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1 полный образ $m_{\lambda}(W_{\lambda})$ отображения m_{λ} совпадает с корневым подпространством $\mathfrak{E}(\lambda)$ системы операторов $\pi(D)$, соответствующим вектору собственных значений $\lambda \in \Lambda$. Так как отображение m_{λ} взаимно однозначно, то

$$m_{\lambda}(W_{\lambda}) = m_{\lambda} \circ m_{\lambda}^{-1}(W) = W \cap \mathfrak{E}(\lambda).$$

Таким образом, согласно определению замкнутое инвариантное подпространство W допускает индуктивное описание тогда и только тогда, когда W совпадает с замыканием в $\mathbb{H}$ подпространства, натянутого на множество

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W \cap \mathfrak{E}(\lambda)) = W \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{E}(\lambda) \right),$$

т.е. совпадает с замыканием в $\mathbb{H}$ линейной оболочки корневых элементов системы операторов $\pi(D)$, содержащихся в W . Тем самым, предложение доказано.

Предложение 2 сводит задачу спектрального синтеза к вопросу допустимости индуктивного описания замкнутым инвариантным подпространством в $\mathbb{H}$.

§3. Проективное и локальное описания

1. $\mathbb{C}[\pi]$ -модуль $\mathbb{P}$. Пусть $(H_j)^*$ – сильные сопряженные к пространствам $H_j = O(\Omega_j)$, $j = 1, \dots, \nu$; $\mathbb{H}^* = (H_1)^* \times \dots \times (H_\nu)^*$ – сильное сопряженное к $\mathbb{H}$. Обозначим через T_j преобразование, которое каждому функционалу $S \in (H_j)^*$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального роста $\varphi(z) = \langle S, \exp(z, \zeta) \rangle$, а P_j – полный образ отображения T_j . Так как Ω_j является областью Рунге в $\mathbb{C}^n$, то отображение $T_j: (H_j)^* \rightarrow P_j$ – взаимно однозначно [9]; оно индуцирует в P_j отделимую локально выпуклую топологию.

Обозначим через $\mathbb{P}$ топологическое произведение $P_1 \times \dots \times P_\nu$; $\mathbb{T}: \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}$ – отображение, которое каждому функционалу $S = (S_j) \in (H_j)^*$ ставит в соответствие ν -функцию $\varphi = (\varphi_j)$, $\varphi_j = T_j(S_j)$. Отображение $\mathbb{T}: \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}$ является топологическим изоморфизмом, значит, $\mathbb{P}$ – отделимое рефлексивное локально выпуклое пространство. Кроме того, $\mathbb{P}$ выдерживает покомпонентное умножение на многочлены, и это умножение непрерывно в топологии $\mathbb{P}$ [9; теорема 14.2]. Поэтому можно рассматривать $\mathbb{P}$ как топологический модуль над кольцом $\mathbb{C}[\pi] = \mathbb{C}[\pi_1, \dots, \pi_q]$ многочленов от $\pi_1, \dots, \pi_q$.

2. Локальное описание замкнутых подмодулей в $\mathbb{P}$. Множество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ будем называть π -симметричным, если найдется $U' \subseteq \mathbb{C}^q$ такое, что $U = \pi^{-1}(U')$. Функция φ , определенная на π -симметричном множестве $U \subseteq \mathbb{C}^n$, π -симметрична, если найдется локально голоморфная на $\pi(U)$ функция Φ такая, что φ представляется в виде $\Phi \circ \pi$.

Открытые π -симметричные множества в $\mathbb{C}^n$ образуют топологию τ_π . Пусть $U \in \tau_\pi$; $O(U)$ – кольцо голоморфных на U функций; $\mathbb{O}(U)$ – декартово произведение ν копий $O(U)$; $O_\pi(U)$ – множество всех π -симметричных на U функций. Очевидно, что $\mathbb{O}(U)$ – модуль над кольцом $O(U)$, а $O_\pi(U)$ – подкольцо $O(U)$. Рассматриваем $\mathbb{O}(U)$ как модуль над кольцом $O_\pi(U)$.

Совокупность $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\rho_{U,U'}: O_\pi(U') \rightarrow O_\pi(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок колец над $(\mathbb{C}^n, \tau_\pi)$. Аналогично, совокупность $\{\mathbb{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\sigma_{U,U'}: \mathbb{O}(U') \rightarrow \mathbb{O}(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок абелевых групп над $(\mathbb{C}^n, \tau_\pi)$ [12; гл. IV, А]. Легко убедиться, что отображение $\sigma_{U,U'}, U \subseteq U'$, является гомоморфизмом $O_\pi(U')$ -модуля $\mathbb{O}_\pi(U')$ в $O_\pi(U)$ -модуль $\mathbb{O}(U)$, следовательно, предпучок абелевых групп $\{\mathbb{O}_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, является предпучком модулей над предпучком колец $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$.

Выберем $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Слой предпучка $\{\mathbb{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$ (индуктивный предел групп $\mathbb{O}(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\sigma_{U,U'}, U \subseteq U'$), обозначим символом $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$. Аналогично, слой предпучка $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$ (индуктивный предел колец $O_\pi(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\rho_{U,U'}, U \subseteq U'$), обозначим символом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Слой $O_\pi(\tilde{\lambda})$ обладает структурой кольца, а слой $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ – структурой модуля над этим кольцом (и векторного пространства над полем $\mathbb{C}$). Элементы $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ называются ростками ν -функций, голоморфных в окрестностях $\tilde{\lambda}$, а элементы $O_\pi(\tilde{\lambda})$ – ростками π -симметричных функций, голоморфных в π -симметричных окрестностях $\tilde{\lambda}$.

Пусть I – замкнутый подмодуль в $\mathbb{P}$. Обозначим через $I(\tilde{\lambda})$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$, включающий I . Ясно, что $I(\tilde{\lambda})$ состоит из всевозможных конечных сумм $\sum c_i \varphi_i$, где $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $\varphi_i \in I$. Подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ называется *локальным подмодулем I , ассоциированным с π -слоем $\tilde{\lambda}$* . Подмодуль I допус-

кает локальное описание, если справедлива импликация:

$$\varphi \in \mathbb{P}, \quad \varphi \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda \implies \varphi \in I. \quad (4)$$

Задача локального описания: найти условия, при которых замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathbb{P}$ допускает локальное описание.

Отметим, что импликация (4) была введена впервые И. Ф. Красичковым-Терновским в [13]. Замкнутые подмодули, удовлетворяющие этой импликации, названы им *обильными*. Таким образом, обильные подмодули в $\mathbb{P}$ и только они допускают локальное описание.

3. Проективное описание замкнутых подмодулей в $\mathbb{P}$. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим отображение $n_\lambda: \mathbb{P} \rightarrow (\mathbb{M}_\lambda)^* = \mathbb{N}_\lambda$, которое каждому элементу $\varphi = (\varphi_i) \in \mathbb{P}$ ставит в соответствие элемент

$$\left(\frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi_j(\omega) \right) = \left(\frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \varphi_j \Big|_{z=\omega} \right), \quad (\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_\lambda.$$

Так как отображение вложения $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{O}(\mathbb{C})$ непрерывно и взаимно однозначно, то и отображение n_λ непрерывно и взаимно однозначно. Непрерывность отображений n_λ , $\lambda \in \Lambda$, дает возможность говорить о проективном описании замкнутых подмодулей в $\mathbb{P}$.

Введем в $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ отделимую локально выпуклую топологию, порожденную счетным набором полунорм

$$u = (u_j) \rightarrow \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha u_j(\omega)|,$$

каждая из которых определяется выбором точки (α, ω, j) из декартова произведения $\mathbb{Z}_\lambda = \mathbb{Z}_+^n \times \tilde{\lambda} \times \{1, \dots, \nu\}$. Произведение элементов $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ на элементы кольца $O_\pi(\tilde{\lambda})$ непрерывно в этой топологии, следовательно, $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуль $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ является топологическим.

Пусть I – замкнутый подмодуль $\mathbb{C}[\pi]$ -модуля $\mathbb{P}$; $I(\tilde{\lambda})$ – локальный подмодуль I , ассоциированный с π -слоем $\tilde{\lambda}$; $\overline{I(\tilde{\lambda})}$ – его замыкание в топологии $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$.

ЛЕММА 1. *Множество $\overline{I(\tilde{\lambda})}$ совпадает с замыканием $\bar{I}$ множества I в топологии $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\bar{I} \subseteq \overline{I(\tilde{\lambda})}$ следует из включения $I \subseteq I(\tilde{\lambda})$. Чтобы доказать обратное включение, достаточно установить, что $I(\tilde{\lambda}) \subseteq \bar{I}$, ибо тогда в силу замкнутости $\bar{I}$ будет выполняться $\overline{I(\tilde{\lambda})} \subseteq \bar{I}$. Пусть $u \in I(\tilde{\lambda})$, т.е.

$$u = \sum c^{(p)} u^{(p)}, \quad u^{(p)} \in I, \quad c^{(p)} \in O_\pi(\tilde{\lambda}).$$

Ростки $c^{(p)}$ можно отождествить с функциями вида $c^{(p)} = C^{(p)} \circ \pi$, где $C^{(p)}$ – голоморфные функции в некоторой окрестности точки $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{C}^q$. Обозначим через $c_k^{(p)}$ композицию $C_k^{(p)} \circ \pi$, где $C_k^{(p)}(z) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^{(p)}(z - \lambda)^\alpha$ – частичная сумма разложения Тейлора функции $C^{(p)}$ в окрестности точки λ . Легко проверить, что последовательность

$$u_k = \sum c_k^{(p)} u^{(p)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходится к u в топологии $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$. Функции $c_k^{(p)}$ представляют собой многочлены из $\mathbb{C}[\pi]$. Так как I – подмодуль $\mathbb{C}[\pi]$ -модуля $\mathbb{P}$, то $u_k \in I$, а поскольку u_k сходятся к u в топологии $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$, заключаем, что $u \in \bar{I}$. Тем самым, установлено включение $I(\tilde{\lambda}) \subseteq \bar{I}$. Лемма доказана.

Напомним, что замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathbb{P}$ допускает проективное описание, если

$$I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} n_{\lambda}^{-1}(I_{\lambda}),$$

где $I_{\lambda} = \overline{n_{\lambda}(I)}$ – замыкание $n_{\lambda}(I)$ в топологии $\mathbb{N}_{\lambda}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathbb{P}$ допускает проективное описание тогда и только тогда, когда справедлива импликация:*

$$\varphi \in \mathbb{P}, \quad \varphi \in \overline{I(\tilde{\lambda})} \quad \forall \lambda \in \Lambda \implies \varphi \in I. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ_{λ} – отображение вложения $\mathbb{P}$ в $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$, $\tilde{n}_{\lambda}: \mathbb{O}(\tilde{\lambda}) \rightarrow \mathbb{N}_{\lambda}$ – естественное расширение отображения n_{λ} . Все отображения n_{λ} , $\tilde{n}_{\lambda}$, μ_{λ} являются взаимно однозначными, и кроме того, $\tilde{n}_{\lambda}$ есть топологический изоморфизм $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ на $\mathbb{N}'_{\lambda} = \tilde{n}_{\lambda}(\mathbb{O}(\tilde{\lambda}))$, где $\mathbb{N}'_{\lambda}$ наделяется топологией, индуцированной из $\mathbb{N}_{\lambda}$. Заметим, что множество $\{\varphi \in \mathbb{P}: \varphi \in \overline{I(\tilde{\lambda})}\}$ представляется в виде $\mu_{\lambda}^{-1}(\overline{I(\tilde{\lambda})})$. Поэтому импликация (5) равносильна соотношению

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mu_{\lambda}^{-1}(\overline{I(\tilde{\lambda})}) = I.$$

Далее, из очевидного соотношения $n_{\lambda} = \tilde{n}_{\lambda} \circ \mu_{\lambda}$ следует:

$$\mu_{\lambda} = \tilde{n}_{\lambda}^{-1} \circ n_{\lambda}, \quad \mu_{\lambda}^{-1} = n_{\lambda}^{-1} \circ \tilde{n}_{\lambda}.$$

Отсюда, используя лемму 1 и тот факт, что $\tilde{n}_{\lambda}$ – топологический изоморфизм $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ на $\mathbb{N}'_{\lambda}$, имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda}^{-1}(\overline{I(\tilde{\lambda})}) &= n_{\lambda}^{-1} \circ \tilde{n}_{\lambda}(\overline{I(\tilde{\lambda})}) = n_{\lambda}^{-1} \circ \tilde{n}_{\lambda}(\bar{I}) = n_{\lambda}^{-1}(\overline{\tilde{n}_{\lambda}(I)}) \\ &= n_{\lambda}^{-1}(\overline{\tilde{n}_{\lambda} \circ \mu_{\lambda}(I)}) = n_{\lambda}^{-1}(\overline{n_{\lambda}(I)}) = n_{\lambda}^{-1}(I_{\lambda}). \end{aligned}$$

Тем самым, предложение доказано.

4. От проективного описания к локальному описанию. Выберем в каждом из колец $\mathbb{C}[\pi^{(i)}]$, $i = 1, \dots, n$, многочлен $r^{(i)}$ и обозначим через r n -многочлен $(r^{(1)}, \dots, r^{(n)})$. Зафиксируем $\lambda = (\lambda^{(i)}) \in \Lambda$ и рассмотрим π -слой $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}^{(1)} \times \dots \times \tilde{\lambda}^{(n)}) \subset \mathbb{C}^n$, где $\tilde{\lambda}^{(i)} - \pi^{(i)}$ -слой $(\pi^{(i)})^{-1}(\lambda^{(i)})$. Так как $r^{(i)}$ принадлежит $\mathbb{C}[\pi^{(i)}]$, то на элементах из слоя $\tilde{\lambda}^{(i)}$ отображение $\mathbb{C}$ “на” $\mathbb{C}$, осуществляемое многочленом $r^{(i)}$, принимает одинаковое значение ξ_i . Значит, $\pi^{(i)}$ -слой $\tilde{\lambda}^{(i)}$ содержится в отдельном $r^{(i)}$ -слое $(r^{(i)})^{-1}(\xi_i) \subset \mathbb{C}$. Слои отображения $r^{(i)}$ конечны. Пусть U_i – окрестность слоя $\tilde{\lambda}^{(i)}$, удовлетворяющая условию: $U_i \cap (r^{(i)})^{-1}(\xi_i) = \tilde{\lambda}^{(i)}$. По предложению 2 из [12; гл. V, С] существует окрестность $g_i \subseteq U_i$ слоя $\tilde{\lambda}^{(i)}$ такая, что сужение $r_g^{(i)}$ отображения $r^{(i)}$ на множество g_i является собственным отображением “на” некоторое открытое множество $\Delta_i \subset \mathbb{C}$. Следовательно, тройка

$(g_i, r_g^{(i)}, \Delta_i)$ – аналитическое накрытие [12; гл. III, В, теорема 21]. При этом $\tilde{\lambda}^{(i)}$ совпадает с $r_g^{(i)}$ -слоем $(r_g^{(i)})^{-1}(\xi_i)$. Точка ξ_i может оказаться критической точкой накрытия $(g_i, r_g^{(i)}, \Delta_i)$, однако все другие точки $\zeta_i \in \Delta_i$ мы вправе считать простыми. Число точек в простых слоях накрытия $(g_i, r_g^{(i)}, \Delta_i)$ договоримся обозначать через β_i .

Пусть $g = g_1 \times \cdots \times g_n \subseteq \mathbb{C}^n$; $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \subseteq \mathbb{C}^n$; $r_g: g \rightarrow \Delta$ – прямое произведение отображений $r_g^{(1)}, \dots, r_g^{(n)}$; $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Для ψ из $O(g)$ и $\zeta_i \in \Delta_i$, $\zeta_i \neq \xi_i$, сформируем разделенные разности с узлами в точках $r_g^{(i)}$ -слоя $(r_g^{(i)})^{-1}(\zeta_i) = \{\omega_s^{(i)}\}$, $s = 0, \dots, \beta_i - 1$:

$$\begin{aligned} [\omega_0^{(i)}]\psi &= \psi(z_1, \dots, z_{t-1}, \omega_0^{(i)}, z_{t+1}, \dots, z_n), \\ [\omega_0^{(i)}, \omega_1^{(i)}]\psi &= \frac{[\omega_0^{(i)}]\psi - [\omega_1^{(i)}]\psi}{\omega_0^{(i)} - \omega_1^{(i)}}, \\ [\omega_0^{(i)}, \omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}]\psi &= \frac{[\omega_0^{(i)}, \omega_1^{(i)}]\psi - [\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}]\psi}{\omega_0^{(i)} - \omega_2^{(i)}}, \dots \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *Любой элемент $f \in O(g)$ единственным образом представляется в виде*

$$f = \sum_{\gamma < \beta} z^\gamma f_\gamma \circ r_g, \quad f_\gamma \in O(\Delta). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in O(g)$. На первом шаге с теми же рассуждениями, что и в статье [5; §2], доказываем возможность представления

$$f = \sum^{(1)} (z_1)^{\gamma_1} f_{\gamma_1} \circ \tilde{r}_g^{(1)}, \quad (7)$$

где суммирование $\sum^{(1)}$ ведется по индексу γ_1 от 0 до $\beta_1 - 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{r}_g^{(1)}(z) &= (r_g^{(1)}(z_1), z_2, \dots, z_n), \\ f_{\gamma_1} &\in O(\Delta_1 \times g_2 \times \cdots \times g_n). \end{aligned}$$

При этом $f_{\gamma_1}(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)$ совпадает с определителем $\det([\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_j^{(1)}]\psi_k^{(1)})$ порядка β_1 , где j – номер строки, k – номер столбца,

$$\psi_k^{(1)} = \begin{cases} f, & \text{если } k = \gamma_1, \\ z_1^k, & \text{если } k \neq \gamma_1. \end{cases}$$

На втором шаге повторим рассуждения, но уже по отношению к композициям $\psi_{\gamma_1} = f_{\gamma_1} \circ \tilde{r}_g^{(1)}$, $\gamma_1 = 0, \dots, \beta_1 - 1$. Получаем

$$\psi_{\gamma_1} = \sum^{(2)} (z_2)^{\gamma_2} f_{\gamma_1, \gamma_2} \circ \tilde{r}_g^{(2)}, \quad (8)$$

где суммирование $\sum^{(2)}$ ведется по индексу γ_2 от 0 до $\beta_2 - 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{r}_g^{(2)}(z) &= (r_g^{(1)}(z_1), r_g^{(2)}(z_2), z_3, \dots, z_n), \\ f_{\gamma_1, \gamma_2} &\in O(\Delta_1 \times \Delta_2 \times g_3 \times \cdots \times g_n). \end{aligned}$$

При этом $f_{\gamma_1, \gamma_2}(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)$ совпадает с $\det([\omega_0^{(2)}, \dots, \omega_j^{(2)}]\psi_k^{(2)})$ порядка β_2 , где

$$\psi_k^{(2)} = \begin{cases} \psi_{\gamma_1}, & \text{если } k = \gamma_2, \\ z_2^k, & \text{если } k \neq \gamma_2. \end{cases}$$

Из (7) и (8) получаем

$$f = \sum^{(1)} \sum^{(2)} z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} f_{\gamma_1, \gamma_2} \circ \tilde{r}_g^{(2)}.$$

Продолжая описанную процедуру, на n -ом шаге приходим к представлению (6), в котором $f_\gamma(\zeta) = f_\gamma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ совпадает с определителем $\det([\omega_0^{(n)}, \dots, \omega_j^{(n)}]\psi_k^{(n)})$ порядка β_n , где

$$\psi_k^{(n)} = \begin{cases} \psi_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}}, & \text{если } k = \gamma_n, \\ z_n^k, & \text{если } k \neq \gamma_n. \end{cases}$$

Осталось отметить, что единственность представления (6), как и в случае одной переменной [5; теорема 2.1], следует из правила Крамера. Лемма доказана.

Совокупность $\{U\}$ всех открытых r_g -симметричных множеств в g образует топологию τ_r , а совокупность $\{O_r(U)\}$ колец r_g -симметричных функций вместе с гомоморфизмами сужения образует предпучок колец над (g, τ_r) . Слой этого предпучка (ассоциированный с r_g -слоем $\tilde{\lambda}$) обозначим $O_r(\tilde{\lambda})$. Совокупность $\{g'\}$ r_g -симметричных полиобластей, $\tilde{\lambda} \subset g' \subseteq g$, образует фундаментальную систему окрестностей слоя $\tilde{\lambda}$ в топологии τ_r . Это позволяет сформулировать локальный вариант леммы 2.

ЛЕММА 3. *Любой элемент $u \in O(\tilde{\lambda})$ единственным образом представляется в виде*

$$u = \sum_{\gamma < \beta} z^\gamma u_\gamma, \quad u_\gamma \in O_r(\tilde{\lambda}).$$

Из леммы 3 вытекает, что любой элемент $u = (u_j) = \mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ единственным образом представляется в виде

$$u = \sum_{\gamma < \beta} z^\gamma u_\gamma, \quad u_\gamma = (u_{\gamma, j}) \in \mathbb{O}_r(\tilde{\lambda}), \quad (9)$$

где $\mathbb{O}_r(\tilde{\lambda})$ – декартово произведение ν копий $O_r(\tilde{\lambda})$.

Пусть $m = \beta_1 \times \dots \times \beta_n$ – число точек в r_g -слоях, отличных от $\tilde{\lambda}$; $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = r_g(\tilde{\lambda}) \in \mathbb{C}^n$; $O^m(\xi)$ – декартово произведение m копий $O(\xi)$; $O^{m\nu}(\xi)$ – декартово произведение ν копий $O^m(\xi)$. Топологизируем $O^{m\nu}(\xi)$ с помощью счетного набора полунорм

$$p(\alpha, \gamma, j): v = (v_{\gamma, j}) \rightarrow \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha v_{\gamma, j}(\xi)|,$$

каждая из которых определяется выбором точки (α, γ, j) из декартова произведения $\mathbb{Z}_+^n \times \{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n: \gamma < \beta\} \times \{1, \dots, \nu\}$, и рассматриваем $O^{m\nu}(\xi)$ как топологический модуль над локальным кольцом $O(\xi)$. Векторный вариант [14; теорема 6.3.5] леммы Круля [10] утверждает, что *всякий подмодуль топологического $O(\xi)$ -модуля $O^{m\nu}(\xi)$ замкнут*. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо и для топологического $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого $\lambda \in \Lambda$ всякий подмодуль топологического $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (9) задает отображение

$$\mathbb{O}(\tilde{\lambda}) \rightarrow O^{m\nu}(\xi), \quad u = (u_j) \rightarrow (v_{\gamma,j}), \quad (10)$$

где $v_{\gamma,j}$ определяется однозначно из соотношения $u_{\gamma,j} = v_{\gamma,j} \circ r_g$. Если рассматривать $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ как модуль над локальным кольцом $O_r(\tilde{\lambda})$, а $O^{m\nu}(\xi)$ — как модуль над локальным кольцом $O(\xi)$, то это отображение является модульным изоморфизмом. Используя правило для нахождения производной сложной функции (и предельный переход по $\zeta \rightarrow \xi$, если хотя бы одна из точек ξ_i является критической точкой накрытия $(g_i, r_g^{(i)}, \Delta_i)$), можно убедиться в том, что отображение (10) — топологический изоморфизм. В силу векторного варианта леммы Круля всякий подмодуль топологического $O_r(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ замкнут. С другой стороны, всякое r_g -симметричное открытое множество $U \subseteq g$ является π -симметричным, а всякая r_g -симметричная функция, определенная на U , является π -симметричной. Значит, справедливы включения:

$$O_r(U) \subseteq O_\pi(U), \quad O_r(\tilde{\lambda}) \subseteq O_\pi(\tilde{\lambda}).$$

Из этих включений вытекает, что всякий подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$ является подмодулем $O_r(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$. Тем самым, предложение доказано.

Это предложение устанавливает эквивалентность задач локального и проективного описаний. Точнее, пусть I — замкнутый подмодуль $\mathbb{P}$, $I(\tilde{\lambda})$ — его локальный подмодуль, ассоциированный со слоем $\tilde{\lambda}$. Так как $I(\tilde{\lambda})$ — подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$, то по предложению 4 $I(\tilde{\lambda})$ совпадает со своим замыканием в топологии $\mathbb{O}(\tilde{\lambda})$, следовательно, импликации (4) и (5) эквивалентны. Значит, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathbb{P}$ является обильным тогда и только тогда, когда он допускает проективное описание.

§4. Теорема двойственности

Рассмотрим отображение $m'_\lambda: \mathbb{H}^* \rightarrow (\mathbb{M}_\lambda)^* = \mathbb{N}_\lambda$, сопряженное к отображению m_λ , $\lambda \in \Lambda$. Оно взаимно однозначно и непрерывно. Выберем произвольные элементы $S \in \mathbb{H}^*$ и $a = a(\alpha, \omega, j) \in \mathbb{M}_\lambda$. Из соотношений

$$\begin{aligned} \langle S, m_\lambda(a) \rangle &= \left\langle S, \sum_{(\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_\lambda} a(\alpha, \omega, j) \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle \right\rangle \\ &= \sum_{(\alpha, \omega, j) \in \mathbb{Z}_\lambda} a(\alpha, \omega, j) \left\langle S, \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle \right\rangle = \langle m'_\lambda(S), a \rangle \end{aligned}$$

вытекает, что отображение m'_λ ставит в соответствие функционалу $S \in \mathbb{H}^*$ элемент

$$\left(\left\langle S, \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle \right\rangle \right) \in \mathbb{N}_\lambda.$$

Пусть $\varphi = (\varphi_j) = \mathbb{T}(S) \in \mathbb{P}$, где $\varphi_j(\omega) = \langle S, \exp_j \langle \omega, z \rangle \rangle$. Тогда

$$m'_\lambda(S) = \left(\left\langle S, \frac{1}{\alpha!} z^\alpha \exp_j \langle \omega, z \rangle \right\rangle \right) = \left(\frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi_j(\omega) \right) = n_\lambda(\varphi) = \mathbb{T}(S),$$

т.е. $m'_\lambda = n_\lambda \circ \mathbb{T}$. Взаимная однозначность рассматриваемых отображений влечет равенства

$$n_\lambda = m'_\lambda \circ \mathbb{T}^{-1}, \quad (n_\lambda)^{-1} = \mathbb{T} \circ (m'_\lambda)^{-1}. \quad (11)$$

Пусть V – замкнутое подпространство $\mathbb{H}^*$; $I = \mathbb{T}(V)$; $V_\lambda = \overline{m'_\lambda(V)}$ – проективное подпространство V в $\mathbb{N}_\lambda$. Согласно определению V допускает проективное описание относительно семейства отображений m'_λ , $\lambda \in \Lambda$, если оно совпадает с пересечением

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для того чтобы V допускало проективное описание относительно семейства отображений m'_λ , $\lambda \in \Lambda$, необходимо и достаточно, чтобы $I = \mathbb{T}(V)$ допускало проективное описание относительно семейства отображений n_λ , $\lambda \in \Lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование $\mathbb{T}: \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{P}$ является взаимно однозначным, значит, соотношение

$$V = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) \quad (12)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $I = \mathbb{T}(V)$ совпадает с множеством

$$\mathbb{T}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda)\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{T} \circ (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda).$$

Учитывая равенства (11), имеем

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \overline{n_\lambda(I)} = \overline{m'_\lambda \circ \mathbb{T}^{-1}(I)} = \overline{m'_\lambda(V)} = V_\lambda, \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{T} \circ (m'_\lambda)^{-1}(V_\lambda) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (n_\lambda)^{-1}(V_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (n_\lambda)^{-1}(I_\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (12) имеет место тогда и только тогда, когда справедливо соотношение $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (n_\lambda)^{-1}(I_\lambda)$. Тем самым, предложение доказано.

Теперь мы можем доказать основной результат статьи.

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq \mathbb{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $I \subseteq \mathbb{P}$ является обильным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – замкнутое подпространство в $\mathbb{H}$, инвариантное относительно системы операторов $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$. В силу полурефлексивности $\mathbb{H}$ подпространство $V = W^0$ является замкнутым в $\mathbb{H}^*$. Легко проверить, что V инвариантно относительно отображений $\pi_1(D)', \dots, \pi_q(D)'$, сопряженных $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$. Пусть $I = \mathbb{T}(V)$ – аннуляторное подпространство W . В силу того, что $\mathbb{T}$ – топологический изоморфизм $\mathbb{H}^*$ на $\mathbb{P}$, подпространство I замкнуто в $\mathbb{P}$. Стандартным образом (см., например, [5]) проверяется, что инвариантность V относительно $\pi_1(D)', \dots, \pi_q(D)'$ влечет инвариантность I относительно умножений на многочлены $\pi_1, \dots, \pi_q$. Таким образом, I обладает структурой замкнутого подмодуля $\mathbb{C}[\pi]$ -модуля $\mathbb{P}$. Согласно предложению 2 W допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда W допускает индуктивное описание относительно

системы отображений m_λ , $\lambda \in \Lambda$. По схеме двойственности (§1, п. 3) индуктивное описание W относительно системы отображений m_λ , $\lambda \in \Lambda$, равносильно проективному описанию V относительно системы сопряженных отображений m'_λ , $\lambda \in \Lambda$. По предложению 6 последнее равносильно проективному описанию аннуляторного подмодуля I относительно системы отображений n_λ , $\lambda \in \Lambda$. Наконец, в силу предложения 5 проективное описание подмодуля I относительно системы отображений n_λ , $\lambda \in \Lambda$, эквивалентно локальному описанию этого подмодуля. Теорема двойственности доказана.

Автор выражает глубокую благодарность И. Ф. Красичкову-Терновскому, контакты с которым позволили значительно улучшить как содержание, так и форму настоящей статьи.

Список литературы

1. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. 1. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129). С. 459–482.
2. Schwartz L. Theorie generale des fonctions moyenne-periodiques // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. P. 857–929.
3. Шишкин А. Б. Вопросы двойственности, связанные с задачей спектрального синтеза для оператора D // Совр. проблемы матем. анализа.: ВИНТИ, 1987. С. 117–133.
4. Мерзляков С. Г. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 635–639.
5. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. 1. Теорема двойственности // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 11. С. 1559–1588.
6. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Докл. АН. 1997. Т. 355. № 1. С. 28–30.
7. Ehrenpreis L. Mean periodic functions // Amer. J. Math. 1955. V. 77. № 2. P. 293–326.
8. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des equations aux derivees partielles et des equations de convolution // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955–1956. V. 6. P. 271–355.
9. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
11. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
12. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
13. Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
14. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.

Армавирский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
5.07.1996 и 8.05.1998