Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Гомотопический тип и A_∞ -групповая структура, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 10, 135–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:39:11

УДК 513.83

В. А. Смирнов

Гомотопический тип и A_∞ -групповая структура

Настоящая работа посвящена определению и изучению алгебраических операций, тесно связанных с групповой структурой на гомотопических группах топологических пространств. Такие алгебраические операции представляют собой некоторые многоместные операции на гомотопических группах. Их совокупность образует структуру на гомотопических группах, которую мы назвали A_∞ -групповой структурой, по аналогии с A_∞ -структурами, введенными Дж. Сташеффом.

Библиография: 7 названий.

Проблемы выяснения алгебраической структуры на гомотопических группах и гомотопической классификации непрерывных отображений топологических пространств — одни из старейших в алгебраической топологии. Большой вклад в постановку и разработку методов их решения внесли работы Л. С. Понтрягина [1]–[3] и др. Использование введенных им алгебраических операций позволило в некоторых случаях решить проблему гомотопической классификации непрерывных отображений комплексав сферу и в том числе вычислить соответствующие гомотопические группы сфер. В общем же случае эти проблемы остаются до сих пор нерешенными, требующими привлечения новых алгебраических операций, дающих все более полную систему гомотопических инвариантов топологических пространств.

Напомним, что A_∞ -алгеброй называется цепной комплекс X , для которого заданы операции $\pi_n: X^{\otimes n+2} \rightarrow X$, повышающие размерность на $n \geq 0$ и удовлетворяющие условиям

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{(n+1)(k+1)+ik} \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам k , на которых может стоять π_{n-i} [4].

Задание структуры A_∞ -алгебры на цепном комплексе X равносильно заданию дифференциала в B -конструкции BX , а задание отображения A_∞ -алгебр равносильно заданию отображения их B -конструкций.

Один из основных результатов, касающийся A_∞ -алгебр, состоит в том, что если X — односвязное топологическое пространство, то на его когомологиях $H^*(X; Q)$ с коэффициентами в поле рациональных чисел имеется структура A_∞ -алгебры, которая определяет рациональный гомотопический тип этого пространства. В случае же произвольного поля коэффициентов слабый гомотопический тип односвязного топологического пространства определяется структурой E_∞ -алгебры на когомологиях этого пространства [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Английского Королевского Общества.

От групп когомологий перейдем теперь к гомотопическим группам. Мы покажем, что на гомотопических группах $\pi_*(X)$ топологического пространства X существует единственная, с точностью до некоторого отношения эквивалентности, A_∞ -групповая структура, которая определяет гомотопический тип пространства X . Причем задание такой структуры равносильно заданию нового оператора граней d_0 на произведении пространств Эйленберга–Маклейна $K(\pi_n, n)$. Более того, имеет место взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами топологических пространств и эквивалентными классами A_∞ -групповых структур.

Этот результат уточняет теорию k -инвариантов М. М. Постникова [6] и позволяет свести задачу описания гомотопического типа топологических пространств к чисто алгебраической задаче изучения A_∞ -групповых структур на их гомотопических группах.

Начнем с рассмотрения некоторых симплициальных конструкций [7]. Пусть n и m – натуральные числа. Через Δ_m^n обозначим множество возрастающих отображений

$$\mu: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\},$$

сопоставляющих каждому натуральному числу i , $1 \leq i \leq m$, натуральное число $\mu(i) = n_i$, $1 \leq n_i \leq n$, так, что $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_m \leq n$.

Если при этом существует хотя бы одно натуральное число i такое, что $n_i = n_{i+1}$, то соответствующий элемент μ будем называть *вырожденным*.

Отметим, что имеется композиционное умножение

$$\gamma: \Delta_m^n \times \Delta_k^m \rightarrow \Delta_k^n,$$

сопоставляющее отображениям $\mu \in \Delta_m^n$, $\nu \in \Delta_k^m$ их композицию $\mu \circ \nu \in \Delta_k^n$.

Обозначим через $\delta^i \in \Delta_{n-1}^n$, $1 \leq i \leq n$, отображение, не принимающее значение i ,

$$\delta^i(j) = \begin{cases} j, & j < i, \\ j+1, & j \geq i. \end{cases}$$

Ограничение композиционного умножения $\gamma: \Delta_{n-1}^n \times \Delta_m^{n-1} \rightarrow \Delta_m^n$ на элемент $\delta^i \in \Delta_{n-1}^n$ даст отображение, которое мы будем обозначать

$$\delta^i: \Delta_m^{n-1} \rightarrow \Delta_m^n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Аналогично, обозначим через $\sigma^i \in \Delta_{n+1}^n$, $1 \leq i \leq n$, отображение, принимающее дважды значение i ,

$$\sigma^i(j) = \begin{cases} j, & j \leq i, \\ j-1, & j > i. \end{cases}$$

Ограничение композиционного умножения $\gamma: \Delta_{n+1}^n \times \Delta_m^{n+1} \rightarrow \Delta_m^n$ на элемент $\sigma^i \in \Delta_{n+1}^n$ даст отображение, которое мы будем обозначать

$$\sigma^i: \Delta_m^{n+1} \rightarrow \Delta_m^n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Семейство $\{\Delta_m^n\}_{m \geq 0}$ будет обозначаться Δ^n , а соответствующие семейства отображений через

$$\delta^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n, \quad \sigma^i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ясно, что для композиционного умножения имеют место равенства

$$\delta^i \gamma = \gamma(\delta^i \times 1), \quad \sigma^i \gamma = \gamma(\sigma^i \times 1).$$

Пусть теперь $G = \{G_m\}_{m \geq 1}$ — семейство множеств G_m с отмеченными точками $*$ $\in G_m$. Рассмотрим семейства $x: \Delta^n \rightarrow G$ отображений $x_m: \Delta_m^n \rightarrow G_m$, для которых x_m отображает вырожденные элементы в Δ_m^n в отмеченную точку $*$ $\in G_m$. Эти отображения $x_m: \Delta_m^n \rightarrow G_m$ мы будем обозначать также через

$$x^n(n_1, \dots, n_m), \quad 1 \leq n_1 < \dots < n_m \leq n,$$

множество таких отображений обозначим $W_m^n(G)$. Заметим, что $W_m^n(G)$ может быть рассмотрено как произведение множества G_m самого на себя $\binom{n}{m}$ раз. Например,

$$W_m^m(G) = G_m, \quad W_m^{m+1}(G) = \underbrace{G_m \times \dots \times G_m}_{(m+1) \text{ раз}}$$

и так далее.

Семейство отображений $x: \Delta^n \rightarrow G$ обозначим $W^n(G) = \{W_m^n(G)\}_{m \geq 1}$. Отображения δ^i и σ^i индуцируют отображения

$$d_i: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G), \quad s_i: W^n(G) \rightarrow W^{n+1}(G), \quad 1 \leq i \leq n,$$

которые называются *операторами граней* и *вырождения*. В приведенных выше обозначениях они задаются формулами

$$(d_i x)(n_1, \dots, n_m) = x(n_1, \dots, n_k, n_{k+1} + 1, \dots, n_m + 1),$$

где $n_k < i$, $n_{k+1} \geq i$, $1 \leq i \leq n$;

$$(s_i x)(n_1, \dots, n_m) = x(n_1, \dots, n_k, n_{k+1} - 1, \dots, n_m - 1),$$

где $n_k \leq i$, $n_{k+1} > i$, $1 \leq i \leq n$.

Определим еще один оператор вырождения $s_0: W^n(G) \rightarrow W^{n+1}(G)$, полагая

$$(s_0 x)(n_1, \dots, n_m) = \begin{cases} x(n_1 - 1, \dots, n_m - 1), & n_1 > 1, \\ *, & n_1 = 1. \end{cases}$$

Операторы

$$d_i: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G), \quad 1 \leq i \leq n,$$

и

$$s_i: W^n(G) \rightarrow W^{n+1}(G), \quad 0 \leq i \leq n,$$

удовлетворяют симплициальным соотношениям

$$\begin{aligned} d_j d_i &= d_{i-1} d_j, & i > j, \\ s_j s_i &= s_i s_{j-1}, & i < j, \\ d_j s_i &= \begin{cases} s_i d_{j-1}, & j > i+1, \\ \text{Id}, & j = i, i+1, \\ s_{i-1} d_j, & j < i. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что для полного задания на $W(G) = \{W^n(G)\}$ симплициальной структуры необходим еще один оператор граней $d_0: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G)$.

Если $G = \{G_m\}$ – семейство групп (при $m \geq 2$ будем предполагать G_m абелевыми), то оператор d_0 определяется стандартным образом. А именно, обозначим для краткости элемент $x^m(1, \dots, i-1, i+1, \dots, m+1)$ через x_i и положим

$$d_0(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_1 - x_2 + \dots + (-1)^m x_{m+1}.$$

На остальных элементах оператор d_0 будет задаваться формулой

$$\begin{aligned} (d_0 x)(n_1, \dots, n_m) &= x^n(n_1 + 1, \dots, n_m + 1) - x^n(1, n_2 + 1, \dots, n_m + 1) \\ &\quad + \dots + (-1)^m x^n(1, n_1 + 1, \dots, n_{m-1} + 1). \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются требуемые соотношения.

Заметим, что симплициальные множества $W_m(G)$ в этом случае являются пространствами Эйленберга–Маклейна $K(G_m, m)$. В частности, если семейство G состоит только из одной группы G_1 , то $W^n(G)$ есть произведение $G_1^{\times n}$, элементы которого обозначаются $[x_1, \dots, x_n]$ и операторы граней и вырождения задаются формулами

$$\begin{aligned} d_i[x_1, \dots, x_n] &= [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n], & 1 \leq i \leq n, \\ s_i[x_1, \dots, x_n] &= [x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_n], & 1 \leq i \leq n, \\ s_0[x_1, \dots, x_n] &= [* , x_1, \dots, x_n], \\ d_0[x_1, \dots, x_n] &= [x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1]. \end{aligned}$$

Отметим, что задание оператора d_0 в этом случае равносильно заданию групповой структуры на G_1 . Действительно, по групповой структуре на G_1 мы определили оператор d_0 . Обратно, если задан оператор d_0 , то определим операцию $x_2 - x_1$ в G_1 , полагая $x_2 - x_1 = d_0[x_1, x_2]$.

Из симплициального соотношения $d_0 s_0[x] = [x]$ следует $x - * = x$.

Из соотношения $d_0 s_1[x] = [*]$ следует $x - x = *$.

Наконец, из соотношения $d_0 d_1[x_1, x_2, x_3] = d_0 d_0[x_1, x_2, x_3]$ следует соотношение $(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) = x_3 - x_2$.

Таким образом, для операции $x_2 - x_1$ выполняются следующие соотношения:

- 1) $x - * = x$;
- 2) $x - x = *$;
- 3) $(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) = x_3 - x_2$.

Покажем, что задание такой операции эквивалентно заданию групповой структуры. Действительно, пусть на множестве G заданы операция $x - y$, $x, y \in G$, и элемент $*$ $\in G$, для которых выполняются соотношения 1)–3). Определим на G групповую структуру, считая элемент $*$ $\in G$ нейтральным элементом; элемент $* - y$ обратным элементом к y , который мы будем обозначать просто $-y$; и операцию сложения определим формулой $x + y = x - (-y)$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} * + x &= * - (-x) = (x - x) - (* - x) = x - * = x, \\ (-x) + x &= (-x) - (-x) = *. \end{aligned}$$

Покажем, что для любых элементов $x, y, z \in G$ справедливо

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

или, что то же самое, $(x + y) - z = x + (y - z)$. Для этого обозначим $z - y$ через u . Тогда

$$\begin{aligned} u + y &= (z - y) - (* - y) = z, \\ -u &= -(z - y) = (y - y) - (z - y) = y - z. \end{aligned}$$

Подставляя вместо z выражение $u + y$, будем иметь

$$\begin{aligned} (x + y) - z &= (x + y) - (u + y) = (x - (-y)) - (u - (-y)) \\ &= x - u = x + (-u) = x + (y - z). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, определение группы может быть переформулировано на языке симплициальных множеств. На этом же языке может быть сформулировано и понятие абелевой группы. Покажем, что оператор d_0 является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда G_1 является абелевой группой. Действительно, если G_1 — абелева группа, то

$$\begin{aligned} d_0[x_1 - y_1, x_2 - y_2] &= (x_2 - y_2) - (x_1 - y_1) = (x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \\ &= d_0[x_1, x_2] - d_0[y_1, y_2]. \end{aligned}$$

Ясно, что верно и обратное.

Таким образом, задание на G структуры абелевой группы равносильно заданию на $W(G)$ структуры симплициальной группы.

Вернемся теперь к рассмотрению семейства $G = \{G_m\}$ множеств с отмеченными точками и $W(G) = \{W^n(G)\}$ с определенными выше операторами граней

$$d_i: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G), \quad 1 \leq i \leq n,$$

и вырождения

$$s_i: W^n(G) \rightarrow W^{n+1}(G), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Как уже говорилось выше, для задания на $W(G)$ структуры симплициального множества требуется задать оператор $d_0: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G)$, удовлетворяющий симплициальным соотношениям. Примером такого оператора является рассмотренный выше оператор $d_0: W_m^n(G) \rightarrow W_m^{n-1}(G)$, сохраняющий нижнюю градуировку.

Рассмотрим произвольные симплициальные операторы

$$d_0: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G),$$

которые вместе с остальными операторами грани и вырождения превращают $W(G)$ в симплициальное множество.

Из симплициальных соотношений следует, что для задания таких операторов достаточно задать их значения в $W_{n-1}^{n-1}(G) = G_{n-1}$. Действительно, пусть

$$x \in W^n(G), \quad d_0(x) = \{y^{n-1}(n_1, \dots, n_m)\}, \quad 1 \leq n_1 < \dots < n_m \leq n-1.$$

Предположим, что среди элементов $n_1, \dots, n_m$ в значении $y^{n-1}(n_1, \dots, n_m)$ нет i . Обозначим n_k наибольший элемент, для которого $n_k < i$. Тогда имеет место равенство

$$(d_i y^{n-1})(n_1, \dots, n_k, n_{k+1} - 1, \dots, n_m - 1) = y^{n-1}(n_1, \dots, n_m).$$

Из симплициального соотношения $d_i d_0 = d_0 d_{i+1}$ следует, что значение $y^{n-1}(n_1, \dots, n_m)$ определяется значением оператора d_0 на элементе $d_{i+1}(x)$. Таким образом, понижая размерность, мы приходим к ситуации, когда среди элементов $n_1, \dots, n_m$ участвуют все элементы от 1 до $n-1$. В этом случае

$$y^{n-1}(n_1, \dots, n_m) = y^{n-1}(1, \dots, n-1) \in G_{n-1}.$$

Пусть $p_n: W^n(G) \rightarrow G_n$ — проектирование на G_n , $\varphi_n = p_{n-1} d_0: W^n(G) \rightarrow G_{n-1}$. Операторы φ_n можно рассматривать как некоторые операции на семействе $G = \{G_n\}$. Выясним, какие соотношения должны выполняться для семейства операций $\varphi = \{\varphi_n\}$ для того, чтобы для соответствующего оператора d_0 выполнялись требуемые симплициальные соотношения.

Заметим, что соотношения $d_0 d_i = d_{i-1} d_0$, $i \geq 2$, уже использовались, когда мы сводили задание оператора d_0 к заданию операций φ_n .

Соотношения $d_0 s_0(x) = x$ и $d_0 s_i(x) = s_{i-1} d_0(x)$, $i \geq 1$, для операций φ_n означают, что $\varphi_n s_0(x) = p_{n-1}(x)$ и $\varphi_n s_i(x) = *$, если $x \in W^{n-1}(G)$ и $i \geq 1$.

Для выяснения смысла последнего соотношения $d_0 d_0 = d_0 d_1$ рассмотрим соответствие

$$G = \{G_m\} \mapsto W(G) = \{W^n(G)\},$$

которое определяет функтор в категории семейств множеств с отмеченными точками.

Композиционные умножения $\gamma: \Delta_m^n \circ \Delta_k^m \rightarrow \Delta_k^n$ индуцируют отображения

$$\nabla: W^n(G) \rightarrow W^n(W(G)).$$

Обозначим через $\sigma: \Delta_{m-1}^{n-1} \rightarrow \Delta_m^n$ отображения, задаваемые соответствиями

$$(n_1, \dots, n_{m-1}) \mapsto (1, n_1 + 1, \dots, n_{m-1} + 1).$$

Эти отображения индуцируют отображения $\sigma: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G)$. Из определения операций $\varphi = \{\varphi_n\}$ следует равенство

$$d_0 = (\sigma\varphi)\nabla: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G).$$

Определим $\cup$ -произведение, положив $\varphi \cup \varphi = \varphi(\sigma\varphi)\nabla$. Тогда выполнение соотношения $d_0 d_0 = d_0 d_1$ для операций φ означает выполнение соотношения $\varphi \cup \varphi = \varphi d_1$.

Дадим теперь основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. A_∞ -групповой структурой на семействе $G = \{G_m\}$ множеств с отмеченными точками будем называть семейство $\varphi = \{\varphi_n\}$ операций $\varphi_n: W^n(G) \rightarrow G_{n-1}$, удовлетворяющее соотношениям:

- 1) $\varphi_n s_0(x) = p_{n-1}(x)$ и $\varphi_n s_i(x) = *$, если $x \in W^{n-1}(G)$ и $i \geq 1$;
- 2) $\varphi d_1 = \varphi \cup \varphi$.

Из приведенных выше рассуждений следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Задание A_∞ -групповой структуры $\varphi = \{\varphi_n\}$ на семействе $G = \{G_m\}$ множеств с отмеченными точками равносильно заданию на $W(G) = \{W^n(G)\}$ симплициального оператора $d_0: W^n(G) \rightarrow W^{n-1}(G)$, который вместе с остальными операторами граней и вырождения задает на $W(G)$ структуру симплициального множества, которое мы обозначим $W_\varphi(G)$.

Пусть даны два A_∞ -групповых семейства (G', φ') , (G'', φ'') , и $W_{\varphi'} G'$, $W_{\varphi''} G''$ — соответствующие симплициальные множества. Рассмотрим симплициальное отображение $f: W_{\varphi'} G' \rightarrow W_{\varphi''} G''$. Так же, как и раньше, показывается, что для задания такого отображения достаточно задать его значения в $W_n^n G'' = G''_n$. Соответствующие отображения обозначим

$$\psi = \{\psi_n\}, \quad \psi_n: W^n G' \rightarrow G''_n.$$

Отображение f однозначно восстанавливается по ψ . А именно, $f = (1 \times \psi)\nabla$. При этом для того чтобы отображение f было симплициальным, необходимо и достаточно, чтобы для отображения ψ выполнялись равенства

$$\psi s_i = *, \quad \varphi' \cup \psi = \psi \cup \varphi'',$$

где $\varphi' \cup \psi = \varphi'(1 \times \psi)\nabla$, $\psi \cup \varphi'' = \psi(\sigma \times \varphi'')\nabla$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображением $\psi: (G' \varphi') \rightarrow (G'', \varphi'')$ будем называть семейство $\psi = \{\psi_n\}$ отображений $\psi_n: W^n(G') \rightarrow G''_n$, для которых выполняются соотношения:

- 1) $\psi s_i = *$;
- 2) $\varphi' \cup \psi = \psi \cup \varphi''$.

Из сказанного выше следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Задание отображения $\psi: (G', \varphi') \rightarrow (G'', \varphi'')$ равносильно заданию симплициального отображения $f: W_{\varphi'} G' \rightarrow W_{\varphi''} G''$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Два A_∞ -групповых семейства (G', φ') , (G'', φ'') будем называть эквивалентными и обозначать $(G', \varphi') \sim (G'', \varphi'')$, если существует отображение $\psi: (G', \varphi') \rightarrow (G'', \varphi'')$, для которого ограничения отображений $\psi_n: W^n G' \rightarrow G''_n$ на G'_n являются изоморфизмами.

Покажем, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Введенное отношение $(G', \varphi') \sim (G'', \varphi'')$ является отношением эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рефлексивность очевидна, так как в качестве отображения ψ мы можем взять такое, для которого $\psi_0 = \text{Id}$ и $\psi_k = 0$ при $k > 0$.

Покажем транзитивность. Пусть $(G', \varphi') \sim (G'', \varphi'')$, $(G'', \varphi'') \sim (G''', \varphi''')$ и ψ', ψ'' — соответствующие отображения. Непосредственная проверка показывает, что отображение $\psi = \psi'' \cup \psi'$ дает искомую эквивалентность

$$(G', \varphi') \sim (G''', \varphi'''),$$

причем $\psi = \psi'' \circ \psi': W_{\varphi'} G' \rightarrow W_{\varphi'''} G'''$.

Покажем симметричность. Пусть $(G', \varphi') \sim (G'', \varphi'')$ и ψ — соответствующее отображение. Определим отображение ψ' , дающее эквивалентность $(G'', \varphi'') \sim (G', \varphi')$, полагая $\psi'_0 = \psi_0^{-1}$, а остальные отображения ψ'_k при $k \geq 1$ определяются индуктивно с помощью соотношения

$$\sum_{i=0}^k \psi'_i \cup \psi_{k-i} = 0.$$

Непосредственная проверка показывает, что таким образом определенное отображение ψ' является искомым.

ТЕОРЕМА. Пусть X — топологическое пространство или симплициальное множество с отмеченной точкой. Тогда на семействе $\pi_* = \{\pi_m(X)\}$ его гомотопических групп имеется единственная, с точностью до эквивалентности, A_∞ -групповая структура, которая определяет слабый гомотопический тип X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — симплициальное множество с отмеченной точкой. Выберем для каждого элемента $x \in \pi_m(X)$ представитель $\xi(x) \in X_m$. Получим отображение

$$\xi: W_m^m(\pi_*) = \pi_m(X) \rightarrow X_m.$$

Определим отображение

$$\xi: W_m^{m+1}(\pi_*) \rightarrow X_{m+1},$$

которое вместе с предыдущим будет перестановочно с операторами граней и вырождения. Пусть

$$x \in W_m^{m+1}(\pi_*), \quad x: \Delta_m^{m+1} \rightarrow \pi_m(X).$$

Этот элемент представляет собой $(m+1)$ -набор элементов $x^1, \dots, x^{m+1}$ из $\pi_m(X)$. Представители $\xi(x^1), \dots, \xi(x^{m+1})$ определяют согласованные отображения граней $(m+1)$ -симплекса в X , за исключением одной грани, лежащей против нулевой вершины.

Зададим отображение этой грани, положив значение на ней равным

$$\xi(x^1 - \dots + (-1)^m x^{m+1}).$$

Определим оператор граней

$$d_0^0: W_m^{m+1}(\pi_*) \rightarrow W_m^m(\pi_*) = \pi_m(X),$$

положив $d_0^0(x) = x^1 - \dots + (-1)^m x^{m+1}$.

Таким образом, мы получили отображение границы $(m+1)$ -симплекса. При этом поскольку отображения

$$\xi(x^1 - \dots + (-1)^m x^{m+1}), \quad \xi(x^1) - \dots + (-1)^m \xi(x^{m+1})$$

гомотопны, то это отображение можно продолжить до отображения всего $(m+1)$ -симплекса $y: \Delta^{m+1} \rightarrow X$. Положим $\xi(x) = y$.

Предположим, что мы определили операторы граней

$$d_0^0: W_m^{m+k+1}(\pi_*) \rightarrow W_m^{m+k}(\pi_*), \dots, d_0^{k-1}: W_m^{m+k+1}(\pi_*) \rightarrow W_{m+k-1}^{m+k}(\pi_*)$$

и отображения $\xi: W_m^{m+i}(\pi_*) \rightarrow X$ для всех $i \leq k$. Определим оператор

$$d_0^k: W_m^{m+k+1}(\pi_*) \rightarrow W_{m+k}^{m+k}(\pi_*) = \pi_{m+k}(X)$$

и отображение $\xi: W_m^{m+k+1}(\pi_*) \rightarrow X$.

Пусть $x \in W_m^{m+k+1}(\pi_*)$. Элементы

$$\xi(d_0^0 x + \dots + d_0^{k-1} x), \quad \xi(d_1 x), \quad \dots, \quad \xi(d_{m+k+1} x)$$

будут составлять согласованное семейство отображений граней $(m+k+1)$ -симплекса $\Delta^{m+k+1} \rightarrow X$, гомотопический класс которого определяет элемент $z \in \pi_{m+k}(X)$. Положим $d_0^k(x) = z$. Тогда элементы

$$\xi(d_0^0 x + \dots + d_0^{k-1} x + d_0^k x), \quad \xi(d_1 x), \quad \dots, \quad \xi(d_{m+k+1} x)$$

будут составлять согласованное семейство отображений граней $(m+1)$ -симплекса, которое продолжается до отображения $(m+1)$ -симплекса $y: \Delta^{m+k+1} \rightarrow X$. Положим $\xi(x) = y$. Это завершает построение оператора

$$d_0: W^n(\pi_*) \rightarrow W^{n-1}(\pi_*)$$

и симплициального отображения $\xi: W_\varphi \pi_* \rightarrow X$. Данное отображение индуцирует изоморфизм гомотопических групп и поэтому является слабой гомотопической эквивалентностью. Более того, как не трудно видеть, $W_\varphi \pi_*$ является минимальным комплексом, а его построение есть уточнение построения минимального комплекса по данному симплициальному множеству. Поэтому если в качестве X взять минимальный комплекс K , то отображение $\xi: W_\varphi \pi_* \rightarrow K$ будет изоморфизмом.

Если d'_0, d''_0 — два таких оператора граней и

$$\xi': W_{\varphi'} \pi_* \rightarrow K, \quad \xi'': W_{\varphi''} \pi_* \rightarrow K$$

— соответствующие изоморфизмы с минимальным комплексом K , то изоморфизм

$$(\xi'')^{-1} \circ \xi': W_{\varphi'} \pi_* \rightarrow W_{\varphi''} \pi_*$$

будет задавать эквивалентность соответствующих A_∞ -групповых структур на семействе групп π_* .

Список литературы

1. *Понтрягин Л. С.* Классификация непрерывных отображений комплекса в сферу // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19. № 3. С. 147–149.
2. *Понтрягин Л. С.* Гомотопическая классификация отображений $(n + 2)$ -мерной сферы в n -мерную // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70. № 6. С. 957–959.
3. *Понтрягин Л. С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976.
4. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
5. *Смирнов В. А.* Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 6. С. 1103–1121.
6. *Постников М. М.* Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений // Труды МИАН. 1955. Т. XLVI.
7. *May J. P.* Simplicial objects in algebraic topology. D. van Nostrand Company: Princeton, NJ, 1968.

Московский педагогический
государственный университет
E-mail: `smirnov.matan@mpgu.msk.su`

Поступила в редакцию
06.03.1998