Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Б.-В. Шульц, Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 10, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:35:51

УДК 517.9

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Б.-В. Шульце

Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений

Строится теория общих краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов, символы которых не обязательно удовлетворяют условиям Атья–Ботта обращения в нуль соответствующего препятствия. Вводится условие эллиптичности краевой задачи и доказывается соответствующая теорема конечности (фредгольмовости).

Библиография: 29 названий.

Введение

Теория краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в пространствах Соболева в настоящее время хорошо известна (см., например, [1], [2]). Основная теорема, касающаяся этих задач, состоит в том, что при некоторых алгебраических условиях (*условиях Шапиро–Лопатинского*) соответствующие операторы являются фредгольмовыми. При этом одной из важных характерных черт этой теории является то, что не любой эллиптический оператор на многообразии с краем допускает краевые условия указанного выше типа. Более того, было найдено (см. [3]), что препятствие к существованию (псевдодифференциальных) фредгольмовых задач в пространствах Соболева имеет топологический характер, и поэтому данный эллиптический оператор допускает краевую задачу типа Фредгольма тогда и только тогда, когда соответствующее препятствие исчезает [4], [5].

К сожалению, это препятствие не исчезает для некоторых важных геометрических операторов, таких, например, как оператор Хирцебруха (сигнатуры) или оператор Дирака. Отсюда, в частности, следует, что общая формула для индекса эллиптических операторов для многообразия с краем (см., например, [4], [6]) не может быть применена к этим операторам.

Попытка найти формулу для сигнатуры в случае многообразия с краем привела Атью–Патоди–Зингера [7] к рассмотрению краевых задач для оператора Хирцебруха (и Дирака) в пространстве L_2 . Более точно, эти операторы представляются как неограниченные операторы в пространстве L_2 с областью определения, связанной с однородными краевыми условиями специального вида. В этой ситуации упомянутые выше операторы являются фредгольмовыми и, например, индекс оператора Хирцебруха на многообразии с краем выражается в терминах L -рода, т.е.

Работа выполнена при финансовой поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00703 и № 97-02-16722а).

интеграла от полинома Хирцебруха от классов Понтрягина [8] и некоторого добавочного члена, называемого η -инвариантом [7]. Итак, возникают два совершенно различных случая: в то время как для эллиптического дифференциального оператора с краевыми условиями типа Шапиро–Лопатинского можно рассматривать общую краевую задачу саму по себе или рассматривать этот же оператор как неограниченный оператор в L_2 , соответствующий однородным граничным условиям, для операторов, не допускающих условия Шапиро–Лопатинского, имеется лишь вторая возможность. В связи с этим возникает следующий вопрос: *возможно ли построить фредгольмову теорию общих неоднородных краевых задач для произвольных эллиптических операторов (которая, разумеется, включала бы классические операторы, т.е. удовлетворяющие условию Шапиро–Лопатинского)?* В частности, такая теория должна включать в себя и неоднородные краевые задачи для оператора Хирцебруха и Дирака. В настоящей статье мы и предлагаем такую теорию.

Сначала кратко сформулируем основную идею, которая была использована в данной работе. Простые примеры для уравнения Коши–Римана и Бицадзе [9], а также и для других уравнений подобного типа показывают, что хотя они и не обладают свойством фредгольмовости в пространствах Соболева, однако корректные (фредгольмовы) краевые задачи могут быть поставлены, если правые части в краевых условиях принадлежат более тонкому пространству, чем пространство Соболева. Например, для уравнений Коши–Римана – это пространство типа Харди [10], [11]). В действительности, эти пространства суть (замкнутые) подпространства некоторых пространств Соболева, что позволяет высказать предположение, что в общем случае нужно брать правые части в краевых условиях не из всего пространства Соболева, а из некоторого его подпространства. Эта идея и является ключевой. Более точно, рассматривается $(m - 1)$ -й джет решений однородного дифференциального уравнения порядка m , взятый в точке границы. Это пространство является подпространством соболевского пространства сечений соответствующего расслоения над краем, что дает тривиальный пример краевой задачи для произвольного эллиптического оператора. В классической теории краевых задач граничный оператор может быть рассмотрен как изоморфное (или почти изоморфное, т.е. фредгольмово) отображение этого подпространства на соболевское пространство сечений некоторого другого расслоения многообразия над краем. В неклассической (общей) теории краевых задач коранг такого рода отображения может быть бесконечномерным. С топологической точки зрения препятствие к существованию классической краевой задачи эквивалентно несуществованию изоморфизма некоторого векторного расслоения над $T_0^*X = T^*X \setminus \{0\}$, где X – край, обратному образу некоторого расслоения над X . С аналитической точки зрения препятствие состоит в несуществовании псевдодифференциального почти изоморфизма между определенным подпространством соболевского пространства джетов на границе и пространством Соболева сечений векторного расслоения над X . Легко проверить, что последнее условие является “квантованием” первой (топологической) версии.

Статья состоит из двух параграфов. Первый параграф содержит основные результаты. Именно, в п. 1.1 вводится и обсуждается понятие общих краевых задач; в п. 1.2 дается критерий фредгольмовости; в п. 1.3 описывается псевдодифферен-

специальная постановка общих краевых задач и доказывается соответствующая теорема конечности. Наконец, в п. 1.4 обсуждается, что означают в этом контексте условия Шапиро–Лопатинского.

В §1 существенно используются так называемые проекторы Кальдерона–Сили (часто называемые проекторами Кальдерона) [12]–[14]. Их конструкция включает оператор, обратный к эллиптическому оператору, определяемому на дубле начального многообразия. Использование такого рода оператора несколько неудобно, поскольку интуитивно ясно, что все, что касается краевых условий, должно в большей степени определяться поведением оператора вблизи края (или даже на крае!), чем на всем многообразии (не говоря уже о проблеме продолжения оператора на дубль). Это обстоятельство явилось причиной, по которой мы предпочли доказательство теоремы конечности с помощью явного построения параметрикса.

Параграф 2 содержит два простых и известных, но важных в геометрическом отношении примера, один из которых не допускает классических краевых задач (оператор Коши–Римана, п. 2.1), в то время как другой (оператор Эйлера, п. 2.2), как известно, обладает классическими краевыми задачами.

Предварительная версия этой работы вышла в 1997 году в Германии [15]. Она была рассказана на конференции по дифференциальным уравнениям в Потсдаме (осень 1997 года), а также на семинарах профессора А. С. Мищенко и профессора А. Т. Фоменко в Московском государственном университете (зима 1998 года).

Авторы выражают благодарность В. Е. Назайкинскому, за внимательное прочтение настоящего текста и за сделанные им полезные замечания и улучшения.

§1. Основные результаты

1.1. Определение общих краевых задач. Пусть M – компактное гладкое многообразие с гладкой границей $\partial M = X$ и пусть

$$\widehat{D}: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F), \quad (1)$$

где E и F – векторные расслоения над M , V – эллиптический дифференциальный оператор порядка m на M . Мы дадим абстрактное понятие *общих краевых задач* (BVP) для оператора (1) (которое включает классические краевые задачи в качестве специального случая), введем специальную конструкцию общих краевых задач и покажем, что эта конструкция всегда определяет нам фредгольмову краевую задачу в подходящих функциональных пространствах. В качестве побочного результата мы получим хорошо известное условие существования классических краевых задач – условие Шапиро–Лопатинского.

Как обычно, в эллиптической теории оператор (1) рассматривается в соболевских пространствах

$$\widehat{D}: H^s(M, E) \rightarrow H^{s-m}(M, F). \quad (2)$$

Здесь для простоты число s предполагается целым. Краевые условия могут быть наложены на $(m-1)$ -й джет $j_X^{m-1}(u)$ решения $u \in H^s(M, E)$ в точках границы.

При этом предполагается, что воротниковая окрестность U края X в M отождествляется с произведением $X \times [0, 1]$ (это может быть сделано, например, посредством введения римановой метрики на M , при этом $(x, t) \in X \times [0, 1]$ идентифицируется с точкой, расположенной на расстоянии t от X вдоль геодезической, исходящей из $x \in X$ в направлении внутренней нормали). По теореме о следах мы имеем непрерывное отображение

$$j_X^{m-1}: H^s(M, E) \rightarrow \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) \equiv \bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{s-1/2-j}(X, i^*E),$$

которое сопоставляет каждому сечению $u \in H^s(M, E)$ джет $(m-1)$ -го порядка

$$j_X^{m-1}(u) = \left(u|_X, -i \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_X, \dots, \left(\left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right)^m u \right) \Big|_X \right)$$

в точках края (i^*E – обратный образ расслоения E при вложении $i: X \hookrightarrow M$, ограничение $\varphi|_X$ определяется следующим образом:

$$\varphi|_X = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \varphi|_{t=\tau},$$

причем предел берется в соответствующем соболевском пространстве на X). Далее для краткости будем писать E вместо i^*E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Общей краевой задачей оператора (2)* мы называем задачу вида

$$\begin{cases} \hat{D}u = f \in H^{s-m}(M, F), \\ \hat{B}(j_X^{m-1}(u)) = g \in \mathcal{L} \end{cases} \quad (3)$$

для неизвестной функции $u \in H^s(M, E)$, где $\mathcal{L}$ – банахово пространство, а

$$\hat{B}: \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) \rightarrow \mathcal{L} \quad (4)$$

– непрерывный линейный оператор.

Другими словами, общая краевая задача есть оператор вида

$$(\hat{D}, \hat{B} \circ j_X^{m-1}): H^s(M, E) \rightarrow H^{s-m}(X, E) \oplus \mathcal{L}, \quad (5)$$

где $\hat{D}$ и $\hat{B}$ – операторы вида (2) и (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Классическая* краевая задача является специальным случаем задачи (3), в котором $\mathcal{L}$ – пространство Соболева сечений некоторого расслоения X , а $\hat{B}$ – псевдодифференциальный оператор.

Основной причиной для введения понятия общих BVP является то, что для данного оператора $\hat{D}$ мы можем всегда найти задачу (3), обладающую свойством фредгольмовости (которая однако *не есть* классическая BVP). Как вскоре будет видно, это утверждение следует из результатов Сили [13], [14], который, однако, не дошел до важного окончательного шага. Именно, для операторов $\hat{D}$, для которых не существует классических BVP, он рассмотрел только задачу с *однородными* краевыми условиями ($g = 0$) и с псевдодифференциальным оператором $\hat{B}$. Мы отметим также, что работы Сили существенно используют и развивают идеи Кальдерона ([12], см. также [16]), который первым ввел проекторы данного типа для изучения краевых задач. Близкие результаты получены также Буте де Монвелем [17] и Хёрмандером [18]. Проекторы Кальдерона нашли также свое применение в дифференциальных уравнениях и математической физике (см. [1], [18]–[22]).

1.2. Теорема конечности (абстрактный случай). Покажем, как идеи Сили могут быть использованы в наших целях. Для прояснения основной идеи сначала приведем интуитивные соображения, а затем обсудим их более подробно. Итак, прежде всего отметим, что оператор $\widehat{D}$ может быть распространен до эллиптического псевдодифференциального оператора на дубле $2M$ многообразия M (заметим, что $2M$ является замкнутым компактным многообразием). Для любой функции $f \in H^{s-m}(M, F)$ определим непрерывный оператор продолжения на дубль $2M$ с сохранением $(s-m)$ -гладкости. Поскольку оператор $\widehat{D}$ является эллиптическим, то, как хорошо известно (с точностью до конечномерного дефекта, которым можно пренебречь во фредгольмовой теории), можно использовать правый почти обратный к оператору $\widehat{D}$ для того, чтобы редуцировать задачу (3) к задаче того же самого вида, однако уже с $f = 0$ (и с некоторым сечением g , вообще говоря, отличным от первоначального):

$$\begin{cases} \widehat{D}u = 0, \\ \widehat{B}(j_X^{m-1}(u)) = g, \end{cases} \quad u \in H^s(M, E).$$

Через

$$N(\widehat{D}, s) = \{u \in H^s(M, E) : \widehat{D}u = 0\}$$

обозначим ядро оператора (2). Введем линейное многообразие

$$R_0(\widehat{D}, s) = j_X^{m-1}(N(\widehat{D}, s)) \subset \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E),$$

т.е. пространство граничных данных для решений из $H^s(M, E)$ однородного уравнения. Если $R_0(\widehat{D}, s)$ является подпространством, т.е. замкнуто, то мы можем надеяться, что любой оператор $\widehat{B}$ такой, что (см. (4))

$$\widehat{B}|_{R_0(\widehat{D}, s)} : R_0(\widehat{D}, s) \rightarrow \mathcal{L}, \quad (6)$$

является изоморфизмом или, по крайней мере, фредгольмовым оператором и приводит к фредгольмовой BVP (3). В частности, если $\mathcal{L} = R_0(\widehat{D}, s)$ а $\widehat{B}$ – непрерывный проектор на $\mathcal{L}$, то мы получаем простейший пример BVP. Сформулируем теперь точное утверждение. Введем следующее обозначение:

$$N_0(\widehat{D}) = \{u \in C^\infty(M) : \widehat{D}u = 0, j_X^{m-1}(u) = 0\}. \quad (7)$$

Тогда $N_0(\widehat{D})$ является конечномерным пространством.

Сили доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 [13], [14]. *Существует оператор*

$$\widehat{S} : (C^\infty(X, E))^m \rightarrow C^\infty(M, E)$$

такой, что

- i) *для любого s оператор $\widehat{S}$ продолжается до непрерывного отображения*

$$\widehat{S} : \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) \rightarrow N(\widehat{D}, s) \subset H^s(M, E);$$

- ii) пространство $N(\widehat{D}, s)$ есть прямая сумма пространств $N_0(\widehat{D})$ и $\widehat{S}(\mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E))$, т. е.

$$N(\widehat{D}, s) = N_0(\widehat{D}) \oplus \widehat{S}(\mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E)); \quad (8)$$

- iii) оператор

$$\widehat{P}^+ = j_X^{m-1} \circ \widehat{S}: \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) \rightarrow \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E)$$

является непрерывным проектором на $R_0(\widehat{D}, s)$; более того, $\widehat{P}^+$ есть псевдодифференциальный оператор, чей главный символ $\sigma(\widehat{P}^+)(x, \xi)$ осуществляет проекцию на пространство $L^-(x, \xi)$ начальных данных решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sigma(\widehat{D}) \left(x, 0, \xi, -i \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(t) = 0 \quad (9)$$

таких, что $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедливо следующее: $R_0(\widehat{D}, s) = \text{Im } \widehat{P}^+$ замкнуто.

Далее, для каждого s Сили строит ограниченный оператор

$$\widehat{C}: H^{s-m}(M, E) \rightarrow H^s(M, E)$$

такой, что

$$\widehat{D}\widehat{C}f = f \quad (10)$$

для любого $f \in H^{s-m}(M, E)$, ортогонального¹ к конечномерному пространству $N_0(\widehat{D}^*)$. Другими словами, оператор $\widehat{C}$ есть правый обратный к оператору $\widehat{D}$ с точностью до конечномерных операторов.

Теперь мы можем сформулировать теорему, касающуюся общих BVP.

ТЕОРЕМА 2. *Общая краевая задача (3) (или, что то же самое, оператор (5)) является фредгольмовой, если и только если таковым является оператор ограничения (6):*

$$\widehat{B}|_{\text{Im } \widehat{P}^+}: \text{Im } \widehat{P}^+ \rightarrow \mathcal{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сведем наше утверждение к случаю, когда правая часть f равна нулю.

ЛЕММА 1. *Задача (3) является фредгольмовой одновременно с задачей*

$$\begin{cases} \widehat{D}u = 0, \\ \widehat{B}(j_X^{m-1}(u)) = g \in \mathcal{L}. \end{cases} \quad (11)$$

Другими словами, оператор (5) является фредгольмовым, если и только если таковым является оператор

$$\widehat{B} \circ j_X^{m-1}: N(\widehat{D}, s) \rightarrow \mathcal{L}. \quad (12)$$

¹Предполагается, что на M выбрана некоторая мера, а также выбрана и зафиксирована некоторая эрмитова метрика в рассматриваемом расслоении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Очевидно, ядра операторов (5) и (12) совпадают. Изучим коядра. Утверждается, что коядро оператора (5) изоморфно коядру оператора (12) плюс (прямая сумма) $N_0(\widehat{D}^*)$. Действительно, пусть f ортогонально к $N_0(\widehat{D}^*)$. Тогда в силу (10) подстановка

$$u = \widehat{C}f + \widetilde{u}$$

сводит задачу (3) к задаче (11) для $\widetilde{u}$ и g , замененной на

$$\widetilde{g} = g - \widehat{B}j_X^{m-1}\widehat{C}f.$$

Поскольку $\dim N_0(\widehat{D}^*) < \infty$, то отсюда легко следует требуемое утверждение.

Теперь мы имеем разложение

$$\widehat{B} \circ j_X^{m-1}: N(\widehat{D}, s) \xrightarrow{j_X^{m-1}} R_0(\widehat{D}, s) = \text{Im } \widehat{P}^+ \xrightarrow{\widehat{B}} \mathcal{L},$$

и утверждение теоремы 2 может быть немедленно получено из леммы 1 и следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Оператор*

$$j_X^{m-1}: N(\widehat{D}, s) \rightarrow R_0(\widehat{D}, s) \quad (13)$$

является фредгольмовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. По определению пространства $R_0(\widehat{D}, s)$ оператор (13) является эпиморфизмом. Теперь в силу (7) ядро оператора (13) есть в точности $N_0(\widehat{D})$, которое конечномерно. Это завершает доказательство леммы 2.

1.3. Теорема конечности (псевдодифференциальный случай). В применении часто бывает важным описать пространство $\mathcal{L}$ и краевой оператор $\widehat{B}$ в явных терминах. Вид “простейшей” фредгольмовой BVP, в которой $\widehat{B} = \widehat{P}^+$ и $\mathcal{L} = \text{Im } \widehat{P}^+$, дает следующее описание: $\widehat{B}$ должен быть псевдодифференциальным оператором, действующим в сечении векторных расслоений над X ,

$$\widehat{B}: \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) \rightarrow H^\sigma(X, G),$$

а подпространство $\mathcal{L} \subset H^\sigma(X, G)$ должно быть описано как образ некоторого псевдодифференциального оператора

$$\widehat{P}: H^\sigma(X, G) \rightarrow H^\sigma(X, G)$$

(для простоты предполагается, что оператор $\widehat{P}$ является псевдодифференциальным оператором порядка нуль). Более того, предполагается также, что главный символ $\sigma(\widehat{P})(x, \xi)$ является оператором проектирования в $(\pi^*G)_{(x, \xi)}$, $(x, \xi) \in T_0^*X$, где

$$\pi: T_0^*X \rightarrow X$$

— естественная проекция, образ оператора $\widehat{P}$ замкнут и $\text{Im } \widehat{B} \subset \text{Im } \widehat{P}$. Образ $\text{Im } \widehat{P}$ наделим структурой гильбертова пространства, индуцированной из $H^\sigma(X, G)$.

Рассмотрим общую краевую задачу для эллиптического оператора $\widehat{D}$

$$\begin{cases} \widehat{D}u = f \in H^{s-m}(M, F), \\ \widehat{B}(j_X^{m-1}u) = g \in \text{Im } \widehat{P} \subset H^\sigma(X, G) \end{cases} \quad (14)$$

с неизвестной функцией $u \in H^s(M, E)$.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что выполнено следующее условие.*

(GSL) *Для любой точки $(x, \xi) \in T_0^*X$ главный символ $\sigma(\hat{B})(x, \xi)$ оператора $\hat{B}$ индуцирует изоморфизм между пространствами² $L^-(x, \xi)$ и $\text{Im } \sigma(\hat{P})(x, \xi)$.*

Тогда задача (14) является фредгольмовой. Другими словами, оператор

$$(\hat{D}, \hat{B} \circ j_X^{m-1}): H^s(M, E) \rightarrow H^{s-m}(M, F) \oplus \text{Im } \hat{P} \quad (15)$$

является фредгольмовым оператором.

Условие (GSL) назовем *условием коэрцитивности* или *обобщенным условием Шапиро–Лопатинского*. В случае $\hat{P} = 1$ приходим к обычному условию Шапиро–Лопатинского (см., например, [1]). Это будет обсуждено в п. 1.4. Преимущество общего краевого условия состоит в том, что краевая задача, удовлетворяющая этому условию, может быть поставлена для произвольного эллиптического оператора $\hat{D}$ (достаточно взять³ $\hat{B} = \hat{P} = \hat{P}^+$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу теоремы 2 достаточно доказать, что оператор

$$\hat{B}: \text{Im } \hat{P}^+ \rightarrow \text{Im } \hat{P} \quad (16)$$

является фредгольмовым оператором. Сделаем сначала техническое замечание. Оператор $\hat{P}^+$ действует в пространстве

$$\mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) = \bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{s-1/2-j}(X, E) \quad (17)$$

и имеет в этом пространстве порядок нуль; поэтому порядки матриц, входящих в оператор $\hat{P}^+$, меняются в соответствии с порядками прямых слагаемых в разложении (17), и главный символ оператора $\hat{P}^+$, о котором мы говорили выше, должен быть определен как главный символ в смысле Дуглиса–Ниренберга [23]. Разумеется, более удобно было бы иметь дело с обычными (однородными) главными символами. Чтобы этого достичь, возьмем обратимый эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка $\hat{\Lambda}$ в $C^\infty(X, E)$ и используем изоморфизм

$$\hat{U} = \text{diag}(\hat{\Lambda}^{m-1}, \hat{\Lambda}^{m-2}, \dots, \hat{\Lambda}^0): \mathcal{H}_m^{s-1/2}(X, E) \rightarrow (H^{s-m+1/2}(X, E))^m.$$

Таким образом, мы заменим $\hat{P}^+$ на $\hat{U}\hat{P}^+\hat{U}^{-1}$ и $\hat{B}$ на $\hat{B}\hat{U}^{-1}$ и обозначим новые полученные операторы теми же самыми буквами.

Теперь оператор $\hat{P}^+$ имеет порядок 0, оператор $\hat{B}$ имеет порядок $s - m + \frac{1}{2} - \sigma$, а главный символ $\sigma(\hat{B})$ оператора $\hat{B}$ осуществляет изоморфизм образов символов $\sigma(\hat{P}^+)$ и $\sigma(\hat{P})$. Ниже мы будем иногда писать A вместо $\sigma(\hat{A})$ для главного символа любого псевдодифференциального оператора $\hat{A}$.

²Напомним, что пространство $L^-(x, \xi)$ строится с помощью главного символа оператора $\hat{D}$ как пространство решений уравнения (9), убывающих при $t \rightarrow +\infty$.

³Более точно, необходимо редуцировать порядок, поскольку оператор $\hat{P}$ является оператором нулевого порядка.

Поскольку любая короткая последовательность векторных расслоений расщепляется, то легко найти символы

$$R_1, R_2 \in \text{Hom}(\pi^* G, \pi^* E^m), \quad \pi: T_0^* X \rightarrow X,$$

однородные порядка $\sigma + m - s - \frac{1}{2}$, такие, что

$$\begin{aligned} P^+ R_i &= R_i, \quad i = 1, 2, \\ R_1 B &= P^+, \quad B R_2 = P. \end{aligned}$$

Пусть

$$\widehat{\mathcal{R}}_i = \widehat{P}^+ \widehat{R}_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\widehat{\mathcal{R}}_i(\text{Im } \widehat{P}) \subset \text{Im } \widehat{P}^+$$

и

$$\widehat{\mathcal{R}}_1 \widehat{B} = \widehat{P}^+ + \widehat{Q}_1, \quad (18)$$

$$\widehat{B} \widehat{\mathcal{R}}_2 = \widehat{P} + \widehat{Q}_2, \quad (19)$$

где $\widehat{Q}_i, i = 1, 2$, — псевдодифференциальные операторы порядка -1 на X (и, следовательно, компактные операторы) и, более того,

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_1 \text{Im}(\widehat{P}^+) &\subset \text{Im}(\widehat{P}^+), \\ \widehat{Q}_2 \text{Im}(\widehat{P}) &\subset \text{Im}(\widehat{P}) \end{aligned}$$

(последнее включение имеет место в силу того, что $\text{Im } \widehat{B} \subset \text{Im } \widehat{P}$). Теперь, ограничивая (18) и (19) на $\text{Im } \widehat{P}^+$ и $\text{Im } \widehat{P}$, соответственно, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_1 \widehat{B} &= 1_{\text{Im } \widehat{P}^+} + \widehat{Q}_1, \\ \widehat{B} \widehat{\mathcal{R}}_2 &= 1_{\text{Im } \widehat{P}} + \widehat{Q}_2 + (\widehat{P} - 1)|_{\text{Im } \widehat{P}}. \end{aligned} \quad (20)$$

ЛЕММА 3. Оператор $(\widehat{P} - 1)|_{\text{Im } \widehat{P}}$ является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть S — единичная сфера в пространстве $\text{Im } \widehat{P}$. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\widetilde{P}: H^\sigma(X, G)/\text{Ker } \widehat{P} \rightarrow \text{Im } \widehat{P},$$

индуцированный оператором $\widehat{P}$. Этот оператор является взаимно однозначным, и поэтому пространство $\text{Im } \widehat{P}$ замкнуто. Из теоремы Банаха следует, что оператор $\widetilde{P}^{-1}$ ограничен и, таким образом, $\widetilde{P}^{-1}(S)$ является ограниченным множеством в $H^\sigma(X, G)/\text{Ker } \widehat{P}$. Следовательно, существует такое ограниченное множество $\widetilde{S} \subset H^\sigma(X, G)$, что $S = \widehat{P}(\widetilde{S})$. Теперь

$$(\widehat{P} - 1)(S) = (\widehat{P}^2 - \widehat{P})(\widetilde{S})$$

– относительно компактное подмножество в пространстве $H^\sigma(X, G)$, поскольку $\widehat{P}^2 - \widehat{P}$ является оператором порядка -1 (напомним, что $P^2 = P$). Лемма 3 доказана.

Из (20) следует, что $\widehat{\mathcal{R}}_1$ и $\widehat{\mathcal{R}}_2$ являются, соответственно, левым и правым регуляризаторами оператора $\widehat{B}$ (см. (16)). Таким образом, оператор (16) является фредгольмовым, что завершает доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 3 может быть также дано с помощью явного построения почти обратного оператора к оператору (15). Это построение может быть осуществлено в совершенно “классическом” духе: замораживание коэффициентов в произвольной точке края, преобразование Фурье по касательным переменным, рассмотрение семейства обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д. Читатель может найти полное доказательство в работе [15].

1.4. Условие Шапиро–Лопатинского. Если $\widehat{P}$ – тождественный оператор, $\widehat{P} = 1$, тогда задача (14) превращается в классическую краевую задачу для эллиптического оператора $\widehat{D}$ с краевыми условиями, определяемыми оператором $\widehat{B}$ (правая часть g в краевых условиях предполагается лежащей в образе *всего* пространства Соболева $H^\sigma(X, G)$). Заметим, что главный символ $P(x, \xi)$ оператора $\widehat{P}$

$$P(x, \xi): (\pi^*G)_{(x, \xi)} \equiv G_x \rightarrow (\pi^*G)_{(x, \xi)},$$

в этом случае является тождественным оператором и, следовательно,

$$\text{Im } P(x, \xi) = (\pi^*G)_{(x, \xi)}.$$

Поэтому условие (GSL) означает требование, чтобы символ оператора B определял изоморфизм

$$B: L^- \rightarrow \pi^*G \quad (21)$$

расслоений над многообразием X , где, разумеется,

$$L^- \rightarrow T_0^*X$$

есть расслоение со слоем $L^-(x, \xi)$ в любой точке $(x, \xi) \in T_0^*X$ и $\pi^*: T_0^*M \rightarrow M$ – естественная проекция.

Таким образом, это условие является обычным условием Шапиро–Лопатинского.

Мы видим, что *классические краевые задачи, удовлетворяющие условию Шапиро–Лопатинского, существуют, если и только если расслоение L^- изоморфно обратному образу при естественной проекции некоторого расслоения над X .*

Препятствие к существованию такого изоморфизма может быть описано следующим образом (см. [3], [4]). Заметим прежде всего, что достаточно рассматривать косферическое расслоение S^*X вместо T_0^*X . Для каждой точки $(x, \xi) \in S^*X$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор

$$\widehat{D}(x, \xi) \equiv \sigma(\widehat{D})\left(x, 0, \xi, -i\frac{\partial}{\partial t}\right): H^m(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$$

с постоянными коэффициентами (см. (9)). Поскольку коэффициент при $(\partial/\partial t)^m$ не равен нулю, отсюда следует, что $\{\widehat{D}(x, \xi)\}$ определяет семейство фредгольмовых операторов, параметризованных точками $(x, \xi) \in S^*X$, и следовательно, корректно определен K -теоретический индекс [24]

$$\text{index}\{\widehat{D}(x, \xi)\} \in K(S^*X).$$

Заметим, что

$$\text{index}\{\widehat{D}(x, \xi)\} = [L^-],$$

где $[L^-]$ – класс расслоения $L^-|_{S^*X}$ в группе $K(S^*X)$, поскольку имеет место изоморфизм

$$\text{Ker } \widehat{D}(x, \xi) = L^-(x, \xi)$$

и

$$\text{Coker } \widehat{D}(x, \xi) = \{0\}$$

(напомним, что $\widehat{D}(x, \xi)$ есть *дифференциальный* оператор). Теперь для существования изоморфизма (21) необходимо, чтобы

$$\text{index}\{\widehat{D}(x, \xi)\} \in \pi^*K(X),$$

где $\pi: S^*X \rightarrow X$ – каноническая проекция.

§ 2. Примеры

2.1. Оператор Коши–Римана. Рассмотрим оператор $\partial/\partial\bar{z}$ на комплексном многообразии M (комплексной) размерности 1. Очевидно, этот оператор является эллиптическим. Предположим, что граница X многообразия M является чисто вещественной, т.е. существуют координаты в окрестности края такие, что уравнение $z = x + iy$ многообразия X есть $\{y = 0\}$. В этих координатах мы имеем

$$\widehat{D} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Символ этого оператора есть

$$\widehat{D}(p, \xi) = \frac{i}{2}(p + \xi)$$

(переменная y играет роль координаты t в общих построениях). В качестве расслоения E возьмем одномерное тривиальное расслоение над X . Для каждой точки $x_0 \in X$ имеем, очевидно, $p_1(\xi) = -\xi$. Далее,

$$\begin{aligned} L^+(\xi) &= \mathbb{R}, \quad L^-(\xi) = \{0\}, & \xi < 0, \\ L^-(\xi) &= \mathbb{R}, \quad L^+(\xi) = \{0\}, & \xi > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P^+(\xi) = \theta(-\xi), \quad P^-(\xi) = \theta(\xi),$$

где θ – функция Хевисайда.

Поскольку размерность пространства $L^-(\xi)$ различна для $\xi < 0$ и $\xi > 0$, отсюда следует, что $L^-(\xi)$ *неизоморфна* обратному образу никакого расслоения над X .

Пусть теперь

$$\begin{cases} \widehat{D}u = f, \\ \widehat{B}u|_{y=0} = g \end{cases} \quad (22)$$

– краевая задача для оператора $\widehat{D}$. Очевидно, расслоение F (см. п.1.1), используемое в граничных условиях, должно быть одномерным, если мы хотим удовлетворить условию Шапиро–Лопатинского. Функция $B(x, \xi)$ в нашем случае – скалярная. Обобщенное условие Шапиро–Лопатинского дает изоморфизмы

$$\begin{aligned} B(x, \xi): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \xi > 0, \\ B(x, \xi): \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & \xi < 0, \end{aligned}$$

на некоторых подпространствах. Ясно, что условие удовлетворяется, если $B(x, \xi) \neq 0$ для $\xi > 0$, $B(x, \xi) = 0$ для $\xi < 0$, и проектор $P(x, \xi)$ совпадает с $P^-(\xi)$. При этих условиях задача (22) с

$$u \in H^s(M), \quad f \in H^{s-1}(M), \quad g \in \text{Im } \widehat{P}^-(\xi) \subset H^{s-1/2}(M)$$

является фредгольмовой. Отметим, что образ оператора $\widehat{P}^-(\xi)$ называется *пространством Харди* [10], [11].

2.2. Оператор Эйлера. Рассмотрим четномерное риманово многообразие M с краем $\partial M = X$. Предполагается, что вблизи края метрика является прямым произведением метрики на X и стандартной метрики dt^2 на $\mathbb{R}^1$. Пусть

$$d + \delta: \Lambda^{\text{ev}}(M) \rightarrow \Lambda^{\text{odd}}(M)$$

– оператор Эйлера (см. [25]–[28]) на M . В координатах (t, x) вблизи X этот оператор может быть переписан в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & (d_X + \delta_X)_{\text{odd}} \\ (d_X + \delta_X)_{\text{ev}} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} \Lambda^{\text{ev}}(X) \\ \Lambda^{\text{odd}}(X) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda^{\text{ev}}(X) \\ \Lambda^{\text{odd}}(X) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где d_X и δ_X – соответственно, внешний дифференциал на X и его метрический сопряженный. Для вычисления символа оператора Эйлера заметим, что

- i) символ оператора d_X есть внешнее умножение на $i\xi dx$;
- ii) символ оператора δ_X есть внутреннее умножение на $-iV_\xi$, где V_ξ – вектор, соответствующий ξdx относительно метрики g_X ;
- iii) имеет место соотношение

$$(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)^2 \omega = -((\xi dx \wedge)(V_\xi \rfloor) + (V_\xi \rfloor)(\xi dx \rfloor))\omega = -\xi^2 \omega,$$

где $\wedge$ и $\rfloor$ – операторы внешнего и внутреннего умножения, соответственно [29].

Символ оператора (23) имеет вид:

$$D(p, \xi) = \begin{pmatrix} p & i(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor) \\ i(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor) & p \end{pmatrix}.$$

Найдем спектральные точки и соответствующие подпространства операторного семейства.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} p & i(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor) \\ i(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor) & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{\text{ev}} \\ \omega^{\text{odd}} \end{pmatrix} = 0, \quad (24)$$

где (заметим, что, как это следует из общих рассуждений, $p \neq 0$ для $\xi \neq 0$)

$$p\omega^{\text{ev}} + i(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)\omega^{\text{odd}} = 0,$$

т. е.

$$\omega^{\text{ev}} = -\frac{i}{p}(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)\omega^{\text{odd}}$$

и

$$0 = i(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)\omega^{\text{ev}} + p\omega^{\text{odd}} = \frac{1}{p}(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)^2 \omega^{\text{odd}} + p\omega^{\text{odd}} = \frac{1}{p}(p^2 - |\xi|^2)\omega^{\text{odd}}.$$

Отсюда имеем

$$p(\xi) = p_\pm(\xi) = \pm|\xi|.$$

Следовательно, если $p = \pm|\xi|$,

$$\omega^{\text{ev}} = \mp \frac{i}{|\xi|}(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)\omega^{\text{odd}}, \quad (25)$$

и $\omega^{\text{odd}} \in \Lambda^{\text{odd}}(X)$ — произвольная форма, то уравнение (24) выполняется. Поэтому спектр $D(p, \xi)$ состоит из двух точек $p = \pm|\xi|$ для $\xi \neq 0$ и соответствующее собственное подпространство описывается соотношением (25), где ω^{odd} пробегает все пространство $\Lambda^{\text{odd}}(X)$. Аналогично мы можем доказать, что собственное пространство описывается формулой

$$\omega^{\text{odd}} = \mp \frac{i}{|\xi|}(\xi dx \wedge -V_\xi \rfloor)\omega^{\text{ev}}, \quad (26)$$

где ω^{ev} пробегает пространство $\Lambda^{\text{ev}}(X)$.

Уравнения (25) и (26) показывают, что проекторы

$$P_{\text{ev}}: \Lambda(X) = \Lambda^{\text{ev}}(X) \oplus \Lambda^{\text{odd}}(X) \rightarrow \Lambda^{\text{ev}}(X)$$

и

$$P_{\text{odd}}: \Lambda(X) = \Lambda^{\text{ev}}(X) \oplus \Lambda^{\text{odd}}(X) \rightarrow \Lambda^{\text{odd}}(X)$$

являются изоморфизмами пространства $L^-(\xi)$, отвечающего собственному значению $p_-(\xi) = -|\xi|$ на $\Lambda^{\text{ev}}(X)$ и $\Lambda^{\text{odd}}(X)$, соответственно. Следовательно, для оператора Эйлера мы имеем классические, т.е. удовлетворяющие условию Шапиро–Лопатинского, фредгольмовы краевые задачи

$$\begin{cases} \widehat{D}u = f, \\ P_{\text{ev}}u|_X = g_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \widehat{D}u = f, \\ P_{\text{odd}}u|_X = g_2, \end{cases}$$

где

$$\widehat{D} = d + \delta: H^s(M, \Lambda^{\text{ev}}(M)) \rightarrow H^{s-1}(M, \Lambda^{\text{odd}}(M))$$

— оператор Эйлера и элементы g_1 и g_2 принадлежат пространствам

$$H^{s-1/2}(X, \Lambda^{\text{ev}}(X)), \quad H^{s-1/2}(X, \Lambda^{\text{odd}}(X)),$$

соответственно.

Список литературы

1. *Agranovich M.* Elliptic boundary problems // Encyclopaedia of Mathematical Sciences / ed. M.S. Agranovich, Yu. V. Egorov, M. A. Shubin. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 1–144.
2. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
3. *Atiyah M. F., Bott R.* The index problem for manifolds with boundary // Bombay Colloquium on Differential Analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 1964. P. 175–186.
4. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index Theory of Elliptic Boundary Problems. Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
5. *Schulze B.-W.* Boundary value problems and edge pseudo-differential operators // Microlocal Analysis and Spectral Theory / ed. Luigi Rodino. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. P. 165–226.
6. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators // Acta Math. 1971. V. 126. P. 11–51.
7. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, II, III // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1975. V. 77. P. 43–69; 1976. V. 78. P. 405–432; 1976. V. 79. P. 315–330.
8. *Понтрягин Л. С.* Характеристические циклы дифференцируемых многообразий // Матем. сб. 1947. Т. 21. С. 233–284.
9. *Буцадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
10. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
11. *Brenner V. A., Shargorodsky E. M.* Boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators // Encyclopaedia of Mathematical Sciences / ed. M.S. Agranovich, Yu. V. Egorov, M. A. Shubin. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 145–215.
12. *Calderón A. P.* Boundary value problems for elliptic equations // Outlines of the Joint Soviet–American Symposium on Partial Differential Equations. Novosibirsk: Novosibirsk Univ., 1963. P. 303–304.
13. *Seeley R. T.* Singular integrals and boundary value problems // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 781–809.
14. *Seeley R. T.* Topics in pseudo-differential operators // Pseudo-Differential Operators / ed. L. Nirenberg. Roma. C.I.M.E. Conference on pseudo-differential operators, Stresa 1968, Roma: Cremonese, 1969. P. 167–305.
15. *Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* On General Boundary Value Problems for Elliptic Equations // Preprint №97/35. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, November 1997.

16. *Calderón A. P.* Lecture Notes on Pseudo-Differential Operators and Elliptic Boundary Value Problems, I. Buenos Aires: Instituto Argentino de Mathematica, 1976.
17. *Boutet de Monvel L.* Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord, I, II // *J. Anal. Math.* 1966. V. 17. P. 241–253; 255–304.
18. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems // *Ann. of Math.* (2) 1966. V. 83. P. 129–209.
19. *Grubb G.* Boundary value problems for systems of partial differential operators of mixed order // *J. Funct. Anal.* 1977. V. 26. № 2. P. 131–165.
20. *Grubb G., Seeley R.* Weakly parametric pseudo-differential operators and Atiyah–Patodi–Singer boundary problems // *Invent. Math.* 1995. V. 121. P. 481–529.
21. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
22. *Palais R. S.* Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1965.
23. *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1955. V. 8. P. 503–538.
24. *Atiyah M. F.* *K*-Theory. The Advanced Book Program. Cambridge: Addison-Wesley, 1989.
25. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators III // *Ann. of Math.* (2) 1968. V. 87. P. 546–604.
26. *Gilkey P. B.* The boundary integrand in the formula for the signature and Euler characteristic of Riemannian manifold with boundary // *Adv. Math.* 1975. V. 15. P. 334–360.
27. *Дезин А. А.* Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи // *Труды МИАН.* 1962. Т. 68.
28. *Дезин А. А.* Многомерный анализ и дискретные модели. М.: Наука, 1990.
29. *Sternberg S.* Lectures on Differential Geometry. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.

МГУ им. М. В. Ломоносова;
 МГУ им. М. В. Ломоносова;
 Потсдамский университет

Поступила в редакцию
 14.05.1998