Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 12, 59–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 03:58:52

УДК 517.9+519.24

Н. Б. Енгибарян

Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений

Рассматривается система интегральных уравнений восстановления

$$\varphi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_0^x u_{ij}(x-t) \varphi_j(t) dt, \quad i = 1, \dots, m,$$

где матрица-функция $u = (u_{ij})$ удовлетворяет условиям консервативности $0 \leq u_{ij} \in L_1^+ \equiv L_1(0; \infty)$, матрица $A = \int_0^\infty u(x) dx$ неразложимая и ее спектральный радиус равен 1.

Доказано существование предела в $+\infty$ решения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T$ в случае, когда вектор-функция $g = (g_1, \dots, g_m)^T \in L_1^m$ ограничена и $g(+\infty) = 0$. Вычислен этот предел. Найдена структура φ при $g \in L_1^m$: $\varphi(x) = \mu + \rho_0(x) + \psi(x)$, где $\rho_0 \in C_0^m$, $\psi \in L_1^m$. Получена аналогичная формула для резольвентной матрицы-функции.

Библиография: 15 названий.

Введение

В теории вероятностей и в математической физике важную роль играют скалярные и векторные интегральные *Уравнения Восстановления* (УВ) (см. [1]–[11]):

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x u(x-t) \varphi(t) dt. \quad (0.1)$$

В скалярном случае u является плотностью распределения неотрицательной случайной величины:

$$0 \leq u \in L_1 \equiv L_1(0; \infty), \quad \int_0^\infty u(x) dx = 1. \quad (0.2)$$

В векторном случае (0.1) представляет собой векторно-матричную запись следующей системы УВ:

$$\varphi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_0^x u_{ij}(x-t) \varphi_j(t) dt, \quad i = 1, \dots, m. \quad (0.3)$$

Естественным аналогом условий (0.2) в случае системы (0.3) являются следующие условия критичности или консервативности (см. [2]–[11]):

$$u = (u_{ij}) \geq 0 \quad (\text{покомпонентно}), \quad A \equiv \int_0^\infty u(x) dx \in P_N, \quad \lambda = 1. \quad (0.4)$$

Здесь P_N – класс неотрицательных неразложимых (неприводимых) $(m \times m)$ -матриц, $\lambda = r(A)$ – спектральный радиус матрицы A (см. [12]). В теории вероятностей уравнения (0.3) называют *уравнениями многомерного восстановления* (УМВ). Важным частным случаем УМВ являются уравнения марковского восстановления (тогда матрица A является стохастической). УМВ возникают в теории массового обслуживания, теории надежности, исследовании операций, теории ветвящихся процессов и др. (см. [4]–[6]). УМВ, кроме их самостоятельного значения, представляют интерес также как результат факторизации систем интегральных уравнений Винера–Хопфа (см. [8]–[10]).

Существование и единственность решения скалярного и векторного уравнения (0.1) в классе локальных интегрируемых на $[0; \infty)$ функций хорошо известна (см. [2], [10]). Вопрос асимптотического поведения решения φ УВ в критическом случае относится к главным задачам теории УВ. Одной из основных задач классической теории восстановления (в теории вероятностей) является вопрос существования и вычисления усредненного или обычного предела φ в $+\infty$ в случае скалярного УВ (см. [1], [2]). Решение этой задачи дается теоремами восстановления Блекуэлла, Смита и их различными обобщениями. Эта задача в настоящее время достаточно хорошо изучена (см. [1], [2], [6], [13]). Теория восстановления для УМВ развита менее полно (см. [2]–[11]).

Приведем некоторые известные результаты по асимптотическим свойствам решения УМВ.

В работе З.Б. Цалюка [3] рассмотрена система (0.3), (0.4) в случае, когда $\int_0^x u(t) dt < A \quad \forall x < +\infty$ (следовательно, A – строго положительна), g и u непрерывны на $[0; \infty)$ и $\int_0^x tu(t) dt = (C + o(1))x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Доказано, что тогда из существования предела $g(+\infty)$ следует существование предела $x^{-\alpha}\varphi(x)$ в $+\infty$. Вычислен этот предел. В работе Б.А. Севастьянова и В.П. Чистякова [4] изучены асимптотические свойства решения критического УМВ в предположении конечности второго или третьего моментов матрицы-функции u . В [5] приведены две теоремы восстановления для одного частного случая критического УМВ. Предполагается, что рассматриваемое уравнение порождается неприводимым возвратным полумарковским процессом. Об этих теоремах речь пойдет в конце настоящей работы.

Данная работа посвящена новым теоремам восстановления для УМВ в критическом случае (0.4). Развиваемый подход основан на результатах работы [13] и на гауссовской треугольной факторизации матричной структуры уравнения (0.3) методом работы автора [14].

§ 1. Вспомогательные предложения

1.1. Пусть $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_m$ – пространства вещественных m -мерных вектор-столбцов и вектор-строк, соответственно; $\mathbb{R}^{m \times m}$ – алгебра $(m \times m)$ -матриц с единицей I . Через A^T обозначается матрица или вектор, транспонированный к A . Записи $A > 0$ и $A \geq 0$ означают, что все элементы A положительны или неотрицательны, $A \succ B$ означает, что $A \geq B$ и $A \neq B$. Пусть $P_N \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ – класс неотрицательных неразложимых матриц (см. [12]). Через $r(A)$ обозначается спектраль-

ный радиус матрицы A , т.е. модуль наибольшего по модулю собственного значения $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

ТЕОРЕМА Перрона–Фробениуса (см. [12; теорема 9.2.1]). *Если $A \in P_N$, то A имеет положительное собственное значение λ , равное спектральному радиусу $r(A)$. Существует положительный правый собственный вектор η , соответствующий собственному значению λ . Собственное значение λ имеет алгебраическую кратность 1.*

Так как из $A \in P_N$ следует $A^T \in P_N$, то собственному значению λ соответствует также левый собственный вектор $\zeta \in \mathbb{R}_m$.

Поэтому имеют место равенства

$$A\eta = \lambda\eta, \quad \zeta A = \lambda\zeta,$$

где

$$\lambda = r(A), \quad \eta \in \mathbb{R}^m, \quad \eta > 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}_m, \quad \zeta > 0.$$

1.2. Функциональные пространства. введем в рассмотрение следующие банаховы пространства (БП) определенных на $[0; \infty)$ функций: L_p , $1 \leq p < +\infty$, M , M_u , M_0 , C_M , C_u , C_0 . Здесь M – пространство ограниченных в существенном функций, $C_M \subset M$ – пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций, $M_u \subset M$ и $C_u \subset C_M$ состоят из функций f , имеющих конечный предел $f(+\infty)$ в $+\infty$. Если $f \in M_0 \subset M_u$ или $f \in C_0 \subset C_u$, то $f(+\infty) = 0$. Пусть E – одно из банаховых пространств, перечисленных выше.

Обозначим через E^m пространство m -мерных вектор-столбцов с элементами из E , через $E^{m \times m}$ – пространство $(m \times m)$ -матриц-функций с элементами из E . Пространство $L_1^{m \times m}$ является сверточной банаховой алгеброй с умножением

$$(u * v)(x) = \int_0^x u(x-t)v(t) dt, \quad u, v \in L_1^{m \times m}. \quad (1.1)$$

Хорошо известные свойства свертки мы здесь не приводим, используемые свойства операторов свертки сформулируем в тексте изложения.

1.3. Результаты [13] по скалярным УВ (0.1), (0.2) приведем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА А. а) Пусть в системе (0.1), (0.2) $g \in L_1 \cap M_0$. Тогда $\varphi \in M_u$ и

$$\varphi(+\infty) \equiv \mu = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx, \quad \nu^{-1} \geq 0, \quad (1.2)$$

где

$$\nu = \int_0^\infty xu(x) dx \leq +\infty.$$

б) Если $g \in L_1$, то

$$\varphi(x) = \mu + \rho(x) + \psi(x), \quad (1.3)$$

где $\rho \in C_0$, $\psi \in L_1$.

Теорема восстановления (альтернативная форма [1, гл. XI, § I]) утверждает выполнение предельного соотношения (1.2) в случае, когда функция g непосредственно интегрируема по Риману на $\mathbb{R}^+$ (ясно, что тогда $g \in L_1 \cap M_0$).

§ 2. Факторизация матрицы $I - A$

Изучение системы (0.3), (0.4) связано с рассмотрением вспомогательной задачи треугольной факторизации необратимой матрицы $I - A$, где A — матрица, фигурирующая в (0.4).

Введем подалгебры G^+ и G^- алгебры $\mathbb{R}^{m \times m}$:

если $B = (b_{ij}) \in G^+$, то $b_{ij} = 0$ при $j \geq i$;

если $C = (c_{ij}) \in G^-$, то $c_{ij} = 0$ при $j < i$.

Имеем $\mathbb{R}^{m \times m} = G^+ \oplus G^-$. Пусть P_+ и P_- — проекторы, отображающие $\mathbb{R}^{m \times m}$ в G^+ и G^- , соответственно.

Рассмотрим задачу построения факторизации

$$I - A = (I - B)(I - C), \quad (2.1)$$

где $B \in G^+$ и $C \in G^-$ — искомые матрицы. Из (2.1) имеем $B + C = A + BC$, откуда

$$\begin{aligned} B &= A^+ + P_+(BC), \\ C &= A^- + P_-(BC), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $A^\pm = P_\pm A$, $A^+ + A^- = A$.

Соотношения (2.2) в раскрытом виде представляют собой хорошо известные уравнения, возникающие при факторизационной трактовке метода последовательных исключений Гаусса в линейной алгебре. Методом работы [8] не только доказывается существование факторизации (2.1) необратимой матрицы $I - A$, но и получается нужная для дальнейшего изложения информация о свойствах матриц B и C .

Пусть $\eta \in \mathbb{R}^m$, $\eta > 0$ и $\zeta \in \mathbb{R}_m$, $\zeta > 0$ суть правосторонний и левосторонний неподвижные векторы матрицы A , соответственно. Их существование следует из (0.4) и теоремы Перрона–Фробениуса (см. § 1). Имеем

$$A\eta = \eta, \quad \eta > 0, \quad \zeta A = \zeta, \quad \zeta > 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим следующие последовательные приближения для (2.2):

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= A^+ + P_+(B_n C_n), & C_{n+1} &= A^- + P_-(B_n C_n), \\ B_0 &= C_0 = 0, & n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Индукцией по n легко проверяется, что соотношения (2.4) определяют последовательности неотрицательных матриц $B_n = (b_{ij}^{(n)})$ и $C_n = (c_{ij}^{(n)})$, которые покомпонентно монотонно возрастают по n . Из (2.4) имеем

$$B_{n+1}\eta = A^+\eta + P_+(B_n C_n)\eta, \quad C_{n+1}\eta = A^-\eta + P_-(B_n C_n)\eta,$$

складывая которые с учетом $A\eta = \eta$ получаем

$$B_{n+1}\eta + C_{n+1}\eta = \eta + B_n C_n \eta. \quad (2.5)$$

Докажем индукцией по n неравенство (для $n = 0$ оно тривиально)

$$C_n \eta \leq \eta. \quad (2.6)$$

Пусть (2.6) выполняется для некоторого $n \geq 0$. Из (2.5) имеем

$$C_{n+1} \eta = \eta - (B_{n+1} - B_n) \eta - B_n (\eta - C_n \eta).$$

Так как $B_{n+1} \geq B_n$ и $\eta - C_n \eta \geq 0$, получаем $C_{n+1} \eta \leq \eta$.

Аналогично доказывается неравенство

$$\zeta B_n \leq \zeta. \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следуют оценки для элементов матриц B_n и C_n :

$$b_{ij}^{(n)} \leq \frac{\zeta_j}{\zeta_i}, \quad c_{ij}^{(n)} \leq \frac{\eta_i}{\eta_j}.$$

Последовательности $(b_{ij}^{(n)})_{n=0}^\infty$ и $(c_{ij}^{(n)})_{n=0}^\infty$ монотонно возрастают и ограничены сверху, поэтому они сходятся, т.е. существуют матрицы $B \in G^+$ и $C \in G^-$ такие, что $B_n \uparrow B$ и $C_n \uparrow C$ покомпонентно. Совершая в (2.4), (2.6) и (2.7) предельный переход при $n \rightarrow +\infty$ получаем, что (B, C) удовлетворяет соотношениям (2.2) и имеют место неравенства

$$C \eta \leq \eta, \quad \zeta B \leq \zeta. \quad (2.8)$$

Нами доказано существование факторизации (2.1). Рассмотрим теперь следующий вопрос: в каком из неравенств (2.8) имеет место равенство? Так как диагональные элементы треугольной матрицы B равны 0, то $B^m = 0$, т.е. B – нильпотентная матрица с индексом $\leq m - 1$ (см. [15]). Поэтому матрица $I - B$ обладает положительной обратной вида $(I - B)^{-1} = I + \tilde{B}$, $\tilde{B} = B + \dots + B^{m-1} \in G^+$, $\zeta - \zeta B \succ 0$. Из равенства $A \eta = \eta$ с учетом факторизации (2.1) и обратимости $I - B$ имеем $C \eta = \eta$.

Рассмотрим диагональные элементы матрицы C . Перепишем равенство $C \eta = \eta$ в раскрытом виде:

$$\eta_i = \sum_{j=i}^m c_{ij} \eta_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

При $i = m$ получаем $\eta_m = c_{mm} \eta_m$. Так как $\eta_m > 0$, то $c_{mm} = 1$. Покажем, что $c_{kk} < 1$ при $k < m$, т.е. c_{mm} – единственный диагональный элемент матрицы C , равный 1. Из равенств (2.9) имеем $(1 - c_{kk}) \eta_k = \sum_{j=k+1}^m c_{kj} \eta_j \geq 0$. Поэтому $c_{kk} \leq 1$. Пусть $c_{kk} = 1$ при некотором $k < m$. Будем считать, что k – наименьший из номеров i , при котором $c_{ii} = 1$. Рассмотрим однородное уравнение $C \tau = \tau$. В силу $c_{kk} = 1$ и $c_{ii} < 1$ при $i < k$ это уравнение имеет нетривиальное решение вида $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)^T$, где $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ определяются из следующей треугольной системы с обратимой матрицей:

$$\tau_i = c_{ik} + \sum_{j=i}^{k-1} c_{ij} \tau_j, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Из $(I - C)\tau = 0$ в силу (2.1) имеем $(I - A)\tau = 0$. Мы получили, что матрица $A \in P_N$ обладает вторым неподвижным вектором $\tau \in \mathbb{R}^m$, линейно не зависящим от η , что противоречит теореме Перрона–Фробениуса (см. §1). Поэтому $c_{kk} < 1$ при $k < m$.

Рассмотрим вектор-строку $\gamma = \zeta(I - B) \succ 0$. Из равенства $\zeta(I - A) = 0$ и факторизации (2.1) следует $\gamma(I - C) = 0$. В силу треугольности матрицы C и выполнения неравенств $c_{kk} < 1$ при $k < m$ имеем $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{m-1} = 0$. Из равенства $\gamma = \zeta(I - B)$ и $B \in G^+$ легко следует $\gamma_m = \zeta_m$. Поэтому

$$\gamma \equiv \zeta - \zeta B = (0, 0, \dots, 0, \zeta_m). \quad (2.10)$$

Нами доказана

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ удовлетворяет условиям

$$A \in P_N, \quad r(A) = 1. \quad (2.11)$$

Тогда имеет место факторизация (2.1), где треугольные матрицы $0 \leq B \in G^+$, $0 \leq C \in G^-$ обладают следующими свойствами (η и ζ удовлетворяют (2.3)): $c_{mm} = 1$, $c_{kk} < 1$ при $k < m$, $C\eta = \eta$, $\zeta - \zeta B = (0, \dots, 0, \zeta_m)$.

§3. Факторизация уравнения (0.3) с условием (0.4)

В настоящем параграфе факторизация (2.1) будет использована для факторизации матричной структуры системы (0.3), (0.4). Перепишем векторное уравнение (0.1), т.е. уравнение (0.3), в операторном виде:

$$(J - U)\varphi = g. \quad (3.1)$$

Здесь J – единичный оператор, действующий в пространстве E^m , а U – интегральный оператор, ограниченный в E^m (см. [13], [10]),

$$(U\varphi)(x) = \int_0^x u(x-t)\varphi(t) dt, \quad u \in L_1^{m \times m}. \quad (3.2)$$

Пусть Ω – алгебра матричных интегральных операторов вида (3.2). Обозначим через Ω^+ и Ω^- следующие подалгебры Ω :

если $V \in \Omega^+$, то $v_{ij}(x) = 0$, $j \geq i$;
если $W \in \Omega^-$, то $w_{ij}(x) = 0$, $j < i$.

Имеем $\Omega = \Omega^+ \oplus \Omega^-$.

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для $U \in \Omega$ найти $V \in \Omega^+$ и $W \in \Omega^-$ такие, что

$$J - U = (J - V)(J - W). \quad (3.3)$$

Из (3.3) получаем следующее соотношение между ядрами:

$$v(x) + w(x) = u(x) + \int_0^x v(x-t)w(t) dt. \quad (3.4)$$

Применяя к (3.4) проекторы P_+ и P_- получаем

$$\begin{aligned} v(x) &= u_+(x) + P_+ \left(\int_0^x v(x-t)w(t) dt \right), \\ w(x) &= u_-(x) + P_- \left(\int_0^x v(x-t)w(t) dt \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $u_{\pm}(x) = P_{\pm}(u(x))$.

Соотношения (3.5) представляют собой уравнения треугольной факторизации в рамках метода Гаусса в том случае, когда элементами матриц служат элементы сверточной алгебры $L_1^{m \times m}$.

Для изучения нелинейной системы (3.5) аналогично § 2 рассмотрим последовательные приближения:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= u_+(x) + P_+ \left(\int_0^x v_n(x-t)w_n(t) dt \right), \\ w_{n+1}(x) &= u_-(x) + P_- \left(\int_0^x v_n(x-t)w_n(t) dt \right), \\ v_0 &= w_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ясно, что соотношения (3.6) определяют последовательности матриц-функций $v_n \in \Omega^+$ и $w_n \in \Omega^-$ с неотрицательными элементами из L_1 $v_n = (v_{ij}^{(n)})$, $w_n = (w_{ij}^{(n)})$, причем $v_{ij}^{(n)}$ и $w_{ij}^{(n)}$ возрастают по n .

Обозначим

$$B_n = \int_0^\infty v_n(x) dx, \quad C_n = \int_0^\infty w_n(x) dx.$$

Интегрируя соотношения (3.6) по x от 0 до $+\infty$, приходим к соотношениям (2.4). Из свойств итераций (2.4), установленных в § 2, следует, что возрастающие последовательности неотрицательных функций $v_{ij}^{(n)}$ и $w_{ij}^{(n)}$ ограничены по норме пространства L_1 числами b_{ij} и c_{ij} , соответственно. Поэтому согласно теореме Леви [11] эти функциональные последовательности сходятся в L_1 :

$$v_{ij}^{(n)} \uparrow v_{ij} \in L_1, \quad w_{ij}^{(n)} \uparrow w_{ij} \in L_1.$$

Пусть $v = (v_{ij})$, $w = (w_{ij})$. Имеем

$$v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \int_0^\infty v(x) dx = B \equiv (b_{ij}), \quad \int_0^\infty w(x) dx = C \equiv (c_{ij}). \quad (3.7)$$

Законность предельного перехода в соотношениях (3.6) следует из непрерывной зависимости свертки (1.1) от u и v . Справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. *В консервативном случае (0.4) оператор $J - U$ допускает факторизацию (3.3), где $V \in \Omega^+$, $W \in \Omega^-$. Имеют место равенства (3.7), V и C обладают свойствами, перечисленными в теореме 2.1.*

§ 4. Существование предела $\varphi(+\infty)$ в векторном случае

В качестве применения факторизации (3.3) мы будем рассматривать вопрос существования и вычисления предела $\varphi(+\infty)$ в случае векторного уравнения (0.1) с условием (0.4).

С учетом (3.3) уравнение (0.1) можно переписать в виде

$$(J - V)(J - W)\varphi = g. \quad (4.1)$$

Обозначим

$$(J - W)\varphi = f, \quad (4.2)$$

f удовлетворяет уравнению

$$(J - V)f = g. \quad (4.3)$$

Так как матричное ядро v принимает значения из G^+ , то оператор V — нильпотентный с индексом $\leq m - 1$. Поэтому

$$(J - V)^{-1} = J + \tilde{V}, \quad \text{где } \tilde{V} = V + V^2 + \dots + V^{m-1} \in \Omega^+. \quad (4.4)$$

Согласно (4.4) решение уравнения (4.3) имеет вид

$$f = g + \tilde{V}g, \quad \tilde{V} \in G^+, \quad \tilde{v} \geq 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5) видно, что

- а) если $g \in E^m$, то $f \in E^m$;
- б) если $g \geq 0$, то $f \geq 0$.

Рассмотрим теперь уравнение (4.2) относительно φ . Перепишем его в раскрытом виде

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=i}^m \int_0^x w_{ij}(x-t)\varphi_j(t) dt. \quad (4.6)$$

Рассмотрим последнее из уравнений (4.6) (когда $i = m$):

$$\varphi_m(x) = f_m(x) + \int_0^x w_{mm}(x-t)\varphi_m(t) dt. \quad (4.7)$$

Из (3.7) и (2.16) следует, что скалярное уравнение (4.7) удовлетворяет условиям консервативности (0.2). Поэтому для этого уравнения справедливы утверждения теоремы А из §1. Если $g \in L_1^m \cap M_0^m$, то $f \in L_1^m \cap M_0^m$ и $\varphi_m \in M_u$. Если же $g \in L_1^m$, то $f \in L_1^m$ и функция φ_m имеет вид $\varphi_m(x) = \rho_m(x) + \psi_m(x)$, где $\rho_m \in C_u$ и $\psi_m \in L_1$.

Подставляя найденную функцию φ_m в уравнение (4.6) при $i = 1, \dots, (m-1)$, получаем

$$\varphi_i(x) = F_i(x) + \sum_{j=i+1}^{m-1} \int_0^x w_{ij}(x-t)\varphi_j(t) dt + \int_0^x w_{ii}(x-t)\varphi_i(t) dt, \quad (4.8)$$

где

$$F_i(x) = f_i(x) + \int_0^x w_{im}(x-t)\varphi_m(t) dt. \quad (4.9)$$

Если $g \in L_1 \cap M_0$, то $f_i \in M_0$, $F_i \in M_u$. Из неравенств (2.16) следует, что все операторы W_{ii} с ядрами w_{ii} — сжимающие в E , так как $\|W_{ij}\|_E \leq \int_0^\infty |w_{ij}(x)| dx$. Поэтому операторы $J - W_{ii}$, $i = 1, \dots, (m-1)$, обладают положительными обратными. Тогда из уравнений (4.8) можно рекуррентно по k определить $\varphi_{m-k} \in M_u$, $k = 1, \dots, (m-1)$. В результате строится решение $\varphi \in M_u^m$ уравнения (4.2), а следовательно, — и решение исходной системы (0.1), (0.4). Аналогичным образом можно построить решение системы (4.8) в случае $g \in L_1^m$. Тогда будем иметь $\varphi_i = \rho_i + \psi_i$, где $\rho_i \in C_0$, $\psi_i \in L_1$, $i = 1, \dots, m$.

Нами доказана

ТЕОРЕМА 4.1. а) Пусть в системе (0.1), (0.4) $g \in L_1^m \cap M_0^m$. Тогда $\varphi \in M_u^m$.
б) Если $g \in L_1^m$, то решение (0.1), (0.4) имеет вид:

$$\varphi = \rho + \psi, \quad \rho \in C_u^m, \quad \psi \in L_1^m. \quad (4.10)$$

§ 5. Теоремы восстановления для уравнения (0.1) с условием (0.4)

Предел в $+\infty$ вектор-функции ρ , фигурирующей в представлении (4.10), может быть вычислен, исходя из формулы (2.1) для скалярного уравнения (4.7) и конструкций предыдущего параграфа. Однако этот путь достаточно трудоемкий и может быть заменен более простой процедурой, которая будет изложена ниже.

ЛЕММА 5.1. Вектор-функция $\rho \in C_u^m$, фигурирующая в (4.10), имеет следующий предел в $+\infty$:

$$\rho(+\infty) = \mu \equiv (\zeta \nu \eta)^{-1} \left(\zeta \int_0^\infty g(x) dx \right) \eta, \quad (5.1)$$

где $\eta \in \mathbb{R}^m$ и $\zeta \in \mathbb{R}_m$ суть положительные, правый и левый, неподвижные векторы матрицы A , а матрица ν — первый момент матрицы-функции u :

$$\nu = \int_0^\infty x u(x) dx. \quad (5.2)$$

Если $\nu < +\infty$ (покомпактно), то число $\kappa \equiv (\zeta \nu \eta)^{-1} > 0$. Если же хотя бы одна компонента ν равна $+\infty$, то $\kappa = 0$, $\mu = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu' = \rho(+\infty)$ и $\rho_0(x) = \rho(x) - \mu'$. Из (0.1) получаем

$$(I - A)\mu' = \sigma_1(x) + \sigma_2(x), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= g(x) + \int_0^x u(x-t)\psi(t) dt - \psi(x), \\ \sigma_2(x) &= -\rho_0(x) - \left(\int_x^\infty u(t) dt \right) \mu' + \int_0^x u(x-t)\rho_0(t) dt. \end{aligned}$$

Имеем $\sigma_1 \in L_1^m$, $\sigma_2 \in C_0^m$.

Равенство (5.3) возможно только лишь в том случае, когда $(I - A)\mu' = 0$. В силу $A \in P_N$, $r(A) = 1$ и $A\eta = \eta$ согласно теореме Перрона–Фробениуса имеем

$$\mu' = \lambda_0 \eta, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Остается найти значение числа λ_0 . Применяя к (0.1) преобразование Лапласа (ПЛ), получаем

$$(I - \bar{u}(s)) \left(\bar{\rho}_0(s) + \bar{\psi}(s) + \frac{\lambda_0}{s} \eta \right) = \bar{g}(s). \quad (5.5)$$

Через $\bar{f}(s)$ обозначается ПЛ (скалярной или матричной) функции f :

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx, \quad s > 0.$$

Умножая обе части (5.5) слева на вектор ζ , с учетом $\zeta = \zeta A$ приходим к равенству

$$\frac{1}{s} \zeta (A - \bar{u}(s)) (s \bar{\rho}_0(s) + s \bar{\psi}(s) + \lambda_0 \eta) = \bar{g}(s). \quad (5.6)$$

Из $\psi \in L_1^m$ следует ограниченность $\bar{\psi}(s)$ в окрестности $s = 0$. Поведение $s \bar{\rho}_0(s)$ в окрестности $s = 0$ определяется следующей элементарной теоремой Абелева типа: если $f \in M_0$, то $\bar{f}(s) = o(1/s)$ при $s \rightarrow 0+$. Из сказанного следует

$$s \bar{\rho}_0(s) + s \bar{\psi}(s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow 0+. \quad (5.7)$$

Так как $A = \bar{u}(0)$, то

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} (A - \bar{u}(s)) = \nu \equiv \int_0^\infty x u(x) dx. \quad (5.8)$$

Некоторые компоненты ν могут быть равны $+\infty$. Сначала рассмотрим случай $\nu < +\infty$. Совершая в (5.6) предельный переход при $s \rightarrow 0+$, с учетом (5.7) и (5.8) получаем

$$\lambda_0 \zeta \nu \eta = \zeta \bar{g}(0), \quad \lambda_0 = (\zeta \nu \eta)^{-1} \zeta \int_0^\infty g(x) dx,$$

откуда приходим к формуле (5.1).

Пусть теперь хотя бы одна компонента матрицы ν равна $+\infty$. Пусть $\nu_{kp} = +\infty$. Обозначим

$$Q(s) = \frac{1}{s}(A - \bar{u}(s)), \quad \omega(s) = \zeta Q(s) = (\omega_1(s), \dots, \omega_m(s)).$$

Имеем $Q_{ij}(s) \geq 0$, $\zeta > 0$ и $Q_{kp}(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow 0+$. Из неравенства $\omega_p(s) \geq \zeta_k Q_{kp}(s)$ следует

$$\omega_p(s) \rightarrow +\infty \text{ и } \omega(s)\eta \rightarrow +\infty \text{ при } s \rightarrow 0+. \quad (5.9)$$

Докажем равенство $\lambda_0 = 0$ от противного. Пусть $\lambda_0 \neq 0$. Тогда из (5.6) будем иметь

$$\omega(s) \left(\eta - \frac{1}{\lambda_0} s \bar{\rho}(s) - \frac{1}{\lambda} s \bar{\psi}(s) \right) = -\frac{1}{\lambda_0} \zeta \bar{g}(s).$$

При $s \rightarrow 0+$ правая часть этого равенства имеет конечный предел, а левая часть стремится к $+\infty$. Из полученного противоречия следует $\lambda_0 = 0$. Так как $\zeta \nu \eta = +\infty$ при $\nu_{kp} = +\infty$, то равенство $\lambda_0 = 0$ означает, что формула (5.1) остается в силе, когда некоторые компоненты ν равны $+\infty$. Лемма доказана.

В условиях а) и б) теоремы 4.1 имеем $g \in L_1^m$ и существует решение системы (0.1), (0.4) в виде (4.10). Поэтому в условиях теоремы 4.1 может быть применена лемма 5.1. В результате мы приходим к следующей теореме восстановления.

ТЕОРЕМА 5.1 (теорема восстановления). а) Пусть в уравнении (0.1) с условием (0.4) $g \in L_1^m$. Тогда решение системы имеет вид:

$$\varphi(x) = \mu + \rho_0(x) + \psi(x), \quad (5.10)$$

где $\rho_0 \in C_0^m$, $\psi \in L_1^m$, а вектор $\mu \in \mathbb{R}^m$ определяется по (5.1).

б) Если $g \in L_1^m \cap M_0^m$, то $\psi \in L_1^m \cap M_0^m$ и

$$\varphi(+\infty) = (\zeta \nu \eta)^{-1} \left(\zeta \int_0^\infty g(x) dx \right) \eta, \quad (\zeta \nu \eta)^{-1} \geq 0. \quad (5.11)$$

§ 6. Основная теорема восстановления

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы восстановления для резольвентной матрицы-функции уравнения (0.1) с условием (0.4).

6.1. Пусть Φ резольвентная матрица-функция рассматриваемой системы уравнений. Она определяется из УВ

$$\Phi(x) = u(x) + \int_0^x u(x-t) \Phi(t) dt. \quad (6.1)$$

Решение уравнения (0.1) выражается через Φ по формуле (см. [4]):

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t) g(t) dt, \quad (6.2)$$

k -й столбец Φ_k матрицы-функции Φ удовлетворяет векторному уравнению

$$\Phi_k(x) = u_k(x) + \int_0^x u(x-t)\Phi_k(t) dt, \quad (6.3)$$

где u_k — k -й столбец u . Согласно теореме восстановления 5.1 имеем

$$\Phi_k(x) = \mu_k + \rho_k^0(x) + \psi_k(x), \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.4)$$

где $\rho_k^0 \in C_0^m$, $\psi_k \in L_1^m$. Для μ_k получается выражение

$$\mu_k = (\zeta \nu \eta)^{-1} (\zeta A_k) \eta. \quad (6.5)$$

Из равенства $\zeta A = \zeta$ получаем $\zeta A_k = \zeta_k$, где ζ_k — k -я компонента ζ . С учетом этого из (6.4) и (6.5) получаем

$$\Phi(x) = H + F(x) + \Psi(x), \quad (6.6)$$

где $H = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ — матрица, k -м столбцом которой служит μ_k ,

$$F = (\rho_1^0, \dots, \rho_m^0) \in C_0^{m \times m}, \quad \Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in L_1^{m \times m}.$$

Нетрудно проверить, что

$$H = (\zeta \nu \eta)^{-1} \eta \zeta, \quad (\zeta \nu \eta)^{-1} \geq 0. \quad (6.7)$$

Интегрируя (6.6) по x от t до $t+h$, где $t, h > 0$, получаем

$$\int_t^{t+h} \Phi(x) dx = hH + \int_t^{t+h} (F(x) + \Psi(x)) dx. \quad (6.8)$$

Из $F \in C_0^{m \times m}$ и $\Psi \in L_1^{m \times m}$ следует, что интеграл в правой части (6.8) стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Совершая в (6.8) предельный переход при $t \rightarrow +\infty$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+h} \Phi(x) dx = h \cdot H \quad \forall h > 0. \quad (6.9)$$

Нами доказана

ТЕОРЕМА 6.1 (теорема восстановления, основная форма). а) *Резольвентная матрица-функция Φ векторного уравнения (0.1) с условием (0.4) имеет структуру (6.6), где $F \in C_0^{m \times m}$, $\Psi \in L_1^{m \times m}$, а H определяется согласно (6.7).*

б) *Имеет место предельное соотношение (6.9).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (6.6) следует не только (6.9), но теорема 5.1.

6.2. В настоящем пункте будут сделаны некоторые замечания по полученным результатам и их возможным обобщениям.

Прежде всего сформулируем две теоремы восстановления, изложенные в §3 обзорной работы [5] (формулы (3.2) и (3.3)). Об этих теоремах шла речь во введении. В обозначениях, принятых в настоящей работе, эти теоремы в случае абсолютно непрерывного распределения могут быть сформулированы в следующем виде.

ТЕОРЕМА В (типа Блекуэлла). Если $\xi(t)$ – неприводимый возвратный полумарковский процесс (ПМП), то $\forall i, j, \forall h > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+h} \Phi_{ij}(x) dx = \frac{h}{\mu_{jj}}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (6.10)$$

ТЕОРЕМА С (типа Смита). Пусть $g_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, непосредственно интегрируемая по Риману функция. Тогда если $\xi(t)$ – неприводимый возвратный ПМП, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \Phi_{ij}(x) g_j(t-x) dx = \frac{1}{\mu_{jj}} \int_0^\infty g_j(x) dx. \quad (6.11)$$

В обеих теоремах фигурирует неприводимый невозвратный ПМП ξ , порождающий систему (0.3), (0.4) со стохастической матрицей A . Через μ_{jj} обозначено среднее время возвращения в j -е состояние. В [5] значения μ_{jj} не указаны.

Основная новизна результатов настоящей работы по сравнению с теоремами В, С и приведенными во введении результатами работ [3], [4] заключается в следующем:

- а) доказано существование пределов $\varphi(+\infty)$ и (6.9) при более слабых ограничениях на g или u ;
- б) найдены компактные формулы для указанных пределов;
- в) выведены принципиально новые, структурные, формулы (4.10) и (6.9).

В конце работы укажем на некоторые возможные обобщения результатов настоящей работы.

В условиях критичности (0.4) фигурирует требование $A \in P_N$ и $\lambda = 1$. Неразложимость матрицы A означает, что система (0.3) не содержит изолированную подсистему. Отказ от этого требования не приводит к принципиальному усложнению задачи. Тогда можно использовать нормальную форму разложимой матрицы A (см. [15]) и соответствующую нормальную форму системы (0.3). При этом можно последовательно рассматривать подсистемы, соответствующие клеткам нормальной формы, и подсистемы, возникающие в результате подстановки решений предыдущих подсистем. Эти решения будут фигурировать в выражениях свободных членов новых подсистем. Каждая из указанных подсистем является либо докритической (с $\lambda < 1$), либо критической. Можно убедиться, что в результате получится решение всей системы, имеющее степенной рост в $+\infty$.

Теоремы 4.1, 5.1 и 6.1 могут быть использованы при изучении системы (0.3) в надкритическом случае (НКС) $\lambda > 1$. С помощью известного простого преобразования НКС легко сводится к критическому случаю. Нетрудно убедиться, что при $\lambda > 1$ существует число $p > 0$ такое, что $r(A_p) = 1$, где $A_p = \int_0^\infty e^{-px} u(x) dx$. Умножая обе части (0.1) (в матричном случае) на e^{-px} , получаем

$$\varphi_p(x) = g_p(x) + \int_0^x u_p(x-t) \varphi_p(t) dt.$$

Индекс p означает умножение функции на e^{-px} , например, $\varphi_p(x) = e^{-px}\varphi(x)$. Нам остается использовать асимптотические свойства решения φ_p полученного критического уравнения.

Автор выражает благодарность рецензенту настоящей работы за ценную информацию и полезные замечания.

Список литературы

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. Цалюк З. Б. Об асимптотике решений уравнения восстановления // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. №6. С. 1112–1114.
4. Севастьянов Б. А. Теория восстановления // Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теор. кибернетика. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1974. С. 98–128.
5. Королук В. С., Броди С. М., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их применение // Итоги науки и техники, Теория вероятностей, матем. статистика, теор. кибернетика. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1974. С. 47–97.
6. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Уравнение многомерного восстановления и моментыветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее прим. 1971. Т. 16. №2. С. 207–217.
7. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники, матем. анализ. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1977. С. 131–198.
8. Енгибарян Н. Б. Факторизация матриц-функций и нелинейные интегральные уравнения // Изв. АН Арм.ССР. Сер. матем. 1980. Т. 15. №3. С. 233–244.
9. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа и нелинейные уравнения факторизации // Матем. сб. 1984. Т. 124. №2. С. 189–216.
10. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 175–244.
11. Арабаджян Л. Г. О системах интегральных уравнений восстановления // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. №6. С. 1050–1055.
12. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
13. Геворкян Г. Г., Енгибарян Н. Б. О существовании предела в бесконечности решения уравнения восстановления // Изв. НАН РА. Сер. матем. 1997. Т. 32. №1. С. 5–20.
14. Енгибарян Н. Б. О нелинейных уравнениях факторизации операторов // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Ереван: Изд-во ЕРГУ, 1982. С. 123–128.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Бюраканская астрофизическая обсерватория НАН РА

Поступила в редакцию
02.04.1997 и 23.10.1997