Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Солынин, Гармоническая мера радиальных отрезков и симметризация, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 11, 121–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:24:15

УДК 517.54

А. Ю. Сольнин

Гармоническая мера радиальных отрезков и симметризация

Пусть $l_k = \{z : \arg z = \alpha_k, r_1 \leq |z| \leq r_2\}$, $k = 1, \dots, n$; $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $0 < r_1 < r_2 \leq 1$, $E = \bigcup_{k=1}^n l_k$, $E^* = \{z : \arg z^n = 0, r_1 \leq |z| \leq r_2\}$, и пусть $\omega_E(z)$ – гармоническая мера E относительно области $\{z : |z| < 1\} \setminus E$. В работе доказывается неравенство

$$\omega_E(0) \leq \omega_{E^*}(0),$$

дающее решение обобщенной задачи А. А. Гончара о гармонической мере радиальных разрезов. Доказательство основано на методе диссимметризации В. Н. Дубинина и на методе экстремальной метрики в форме задачи об экстремальном разбиении на неналегающие области.

Библиография: 20 названий.

Введение

Пусть D – область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, E – борелевское подмножество ∂D , $\chi_E(\zeta)$ – характеристическая функция E относительно ∂D , т.е. $\chi_E(\zeta) = 1$ при $\zeta \in E$ и $\chi_E(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \partial D \setminus E$. Под *гармонической мерой E относительно D* понимается функция

$$\omega(z, E, D) = \sup \left\{ u(z) : u - \text{субгармоническая в } D \text{ и} \right. \\ \left. \limsup_{D \ni z \rightarrow \zeta} u(z) \leq \chi_E(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D \right\}.$$

Если D – фиксированная область и E – борелевское подмножество в $\overline{D}$, то под *гармонической мерой $\omega_E(z) = \omega(z, E, D)$* будем понимать гармоническую меру множества $E \cap \partial(D \setminus E)$ относительно связной компоненты $D(E)$ множества $D \setminus E$, содержащей точку z .

Популярность гармонической меры в современных исследованиях связана с многочисленными приложениями в теории аналитических и мероморфных функций и в теории конформных и более общих отображений. Эффективные оценки гармонической меры, полученные методами экстремальной метрики и симметризации, используемыми в настоящей статье, даны в работах Дженкинса, Карлесона, Гайера, Бернштейна и др. Точные оценки в некоторых задачах этого направления получены в работе [1]. Решение одной из красивых экстремальных задач

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00259).

о гармонической мере, поставленной А. А. Гончаром [2; задача 7.45], было найдено В. Н. Дубининым [3], который на пути решения этой задачи впервые применил новый тип преобразований – диссимметризацию. Обобщенная постановка задачи А. А. Гончара состоит в отыскании конфигураций, реализующих максимум величины $\omega_E(0) = \omega(0, E, \Delta)$, где $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, в семействе $\mathcal{E}(K)$ всех компактов вида $E = \bigcup_{j=1}^n \{e_j K\}$, K – фиксированный компакт на $(0, 1]$, $e_j \in \mathbb{T} = \partial\Delta$, n – фиксированное натуральное число. В оригинальной постановке этой задачи предполагалось, что $K = K_\rho := [\rho, 1]$, $0 < \rho < 1$. В этом случае В. Н. Дубинин дал полное решение, показав, что $\omega_E(0) < \omega_{E_\rho}(0)$ для всех $E \in \mathcal{E}(K_\rho)$, если $E \neq e^{i\alpha} E_\rho$, где $E_\rho = \bigcup_{k=1}^n \{e^{2\pi i(k-1)/n} K_\rho\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. В доказательстве указанного неравенства в [3] существенным образом используется односвязность области $\Delta(E) := \Delta \setminus E$. В случае произвольного K решение задачи Гончара известно только при $n = 2, 3$ (см. [4], [5]). А. Бернштейн, впервые опубликовавший постановку обобщенной задачи [5], рассматривал также задачу об оценке интегральных средних гармонической меры $\omega_E(z)$ по окружностям $\{z : |z| = r\}$, $0 < r < 1$.

Основным результатом настоящей работы является приводимая ниже теорема А, дающая решение задачи Гончара в семействе $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r_1, r_2)$, соответствующем в указанном выше смысле отрезку $K_0 = [r_1, r_2]$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. На этот случай задачи наше внимание 10 лет назад обратил В. Н. Дубинин.

ТЕОРЕМА А. Если $E \in \mathcal{E}(r_1, r_2)$, то

$$\omega_E(0) \leq \omega_{E^*}(0), \quad (1)$$

где $E^* = \bigcup_{k=1}^n \{e^{2\pi i(k-1)/n} K_0\}$. Равенство в (1) имеет место лишь для компактов $E = e^{i\alpha} E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для доказательства теоремы А мы применим метод экстремальной метрики в форме задачи об экстремальном разбиении на неналегающие области и метод диссимметризации. В §1 изучаются задача об экстремальном разбиении круга Δ на две неналегающие области, огибающие препятствие, которая рассматривалась ранее в нашей работе [6], и задача о разбиении $\Delta(E)$ по линиям уровня линейной комбинации функции Грина и гармонической меры. Полученные в §1 результаты позволяют свести задачу о гармонической мере радиальных разрезов к аналогичной задаче для круговых разрезов, лежащих на границе специальной бесконечнолистной римановой поверхности $\mathcal{R}$ над единичным кругом Δ . В §3 мы определим диссимметризацию таких римановых поверхностей и приведем утверждения об изменении при этой диссимметризации изучаемых в работе характеристик. Указанное выше диссимметризационное преобразование близко по своей конструкции к диссимметризации римановой поверхности из работы [7]. В §4 мы найдем явное выражение для приведенного модуля специального кругового треугольника и докажем лемму 4.1 о монотонности по параметру отношения тета-функций, что дает необходимое далее свойство приведенного модуля. В §5, предполагая, что теорема А не верна, и используя результаты §§1–3, получим неравенство для приведенных модулей треугольников, которое противоречит утверждению леммы 4.1 о монотонности. Тем самым мы докажем теорему А.

В работе используются следующие обозначения: $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$, $\Delta = \Delta_1$, $\mathbb{T}_r = \partial\Delta_r$, $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$, $K(r_1, r_2) = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$; $\text{cap } D$ – емкость конденсатора D ; $\text{mod } D = (\text{cap } D)^{-1}$; в частности, $\text{mod } D$ – модуль двусвязной области D

относительно семейства кривых, разделяющих ее граничные компоненты; $R(D, z_0)$ – внутренний радиус области D относительно точки $z_0 \in D$. Если D односвязна, то внутренний радиус области равен ее конформному радиусу. Величину

$$m(D, z_0) = \frac{1}{2\pi} \log R(D, z_0)$$

называем приведенным модулем D . Определения и свойства указанных характеристик можно найти, например, в [8], [9].

§ 1. Задачи об экстремальном разбиении

Пусть E – компактное подмножество проколотого круга $\Delta \setminus \{0\}$. Рассмотрим следующую задачу о максимуме суммы модулей:

$$\text{mod } D_1 + m(D_2, 0) \rightarrow \max \quad (1.1)$$

в семействе пар неналегающих областей $D_1, D_2 \subset \Delta(E)$, где $D_2 \ni 0$ – односвязная область, а D_1 – двусвязная область, отделяющая окружность $\mathbb{T}$ от множества $E \cup \overline{D_2}$. Из общих результатов теории Дженкинса [10] следует, что существует единственная пара областей $D_1(E), D_2(E)$, реализующая максимум в задаче (1.1). Области $D_1(E), D_2(E)$ являются кольцевой и круговой областями для квадратичного дифференциала

$$Q_E(z) dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} z^{-2} (1 + a_1 z + \dots) dz^2. \quad (1.2)$$

При этом $\Delta \setminus (E \cup \overline{D_1(E)} \cup \overline{D_2(E)}) = \emptyset$ и $|\mathbb{T}|_{Q_E} = 1$, где через $|\gamma|_Q$ обозначается длина кривой γ в метрике соответствующего квадратичного дифференциала $Q(z) dz^2$.

Параметр $r_0 = r_0(E)$, определяемый равенством

$$\text{mod } D_1(E) = -\frac{1}{2\pi} \log r_0,$$

назовем *разделяющим значением* задачи (1.1); смысл этого названия будет ясен из дальнейшего изложения. Из теории квадратичных дифференциалов известно [9], что функции f_1 и f_2 , отображающие соответственно области $D_1(E)$ и $D_2(E)$ на кольцо $K(r_0, 1)$ и круг Δ_{r_0} так, что $f_1(1) = 1$, $f_2(0) = 0$, представляются в виде $f_k(z) = e^{i\alpha_k} f_E(z)$, где $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, и

$$f_E(z) = \exp \left\{ 2\pi i \int_1^z [Q_E(z)]^{1/2} dz \right\} \quad (1.3)$$

при подходящем выборе ветви квадратного корня.

Задача (1.1) изучалась в нашей работе [6], где, в частности, доказано следующее важное для нас утверждение о свободной границе $L(E) = \Delta \setminus (E \cup D_1(E) \cup D_2(E))$, разделяющей области $D_1(E)$ и $D_2(E)$.

ЛЕММА А [6]. Пусть $0 < r_1 < r_2 < 1$. Если $E \subset \overline{K(r_1, r_2)}$, то $L(E) \subset \overline{K(r_1, r_2)}$.

Далее мы установим некоторые свойства разбиений, осуществляемых по линиям уровня функции $g(z) - k\omega(z)$, где $g(z)$ — функция Грина области $\Delta(E)$ с полюсом $z = 0$, $\omega(z) = 1 - \omega_E(z)$, $k > 0$. Дополним $g(z)$ и $\omega(z)$ до многозначных аналитических функций $p(z) = g(z) + i g^*(z)$ и $w(z) = \omega(z) + i \omega^*(z)$. Как известно [11], функции $p'(z)$ и $w'(z)$ однозначны в $\Delta(E)$. Рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q_k(z) dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} [p'(z) - kw'(z)]^2 dz^2, \quad (1.4)$$

регулярный в $\Delta(E)$, за исключением двойного полюса $z = 0$, в окрестности которого

$$Q_k(z) = -\frac{1}{4\pi^2} z^{-2} (1 + b_1 z + \dots).$$

Пусть $\gamma(z_0, z)$ — дуга траектории $Q_k(z) dz^2$; так как $\operatorname{Im}\{Q_k^{1/2}(z) dz\} = 0$ на $\gamma(z_0, z)$, то

$$0 = \operatorname{Im} \int_{\gamma(z_0, z)} Q_k^{1/2}(z) dz = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} (p(z) - kw(z)) \Big|_{z_0}^z \right\}.$$

Отсюда следует, что траекториями квадратичного дифференциала (1.4) являются кривые $L_c = \{z : g(z) - k\omega(z) = c\}$, $c = \text{const}$. Из свойств линий уровня гармонических функций и принципа максимума вытекает, что L_0 разбивает область $\Delta(E)$ на две связные компоненты, одна из которых, пусть $\Omega_1(k)$, имеет на границе окружность $\mathbb{T}$, а вторая, пусть $\Omega_2(k)$, содержит точку $z = 0$. При этом функция $G_k(z) \equiv g(z) - k\omega(z)$ является функцией Грина области $\Omega_2(k)$, а функция $\nu(z) = \omega(z) - k^{-1}g(z)$ — гармонической мерой $\mathbb{T}$ относительно $\Omega_1(k)$. Кроме того, из принципа максимума также вытекает, что или L_0 является замкнутой аналитической жордановой кривой в $\Delta(E)$, или $L_0 \setminus E$ состоит из аналитических дуг, каждая из которых имеет концы в точках множества E .

Найдем Q_k -длину окружности $\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}|_{Q_k} &= \int_{\mathbb{T}} Q_k^{1/2}(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} [p'(z) - kw'(z)] dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial g}{\partial n} ds - \frac{k}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \omega(0) + \frac{k}{2\pi} \operatorname{cap} \Delta(E), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где n — внутренняя нормаль к $\mathbb{T}$, а через $\operatorname{cap} \Delta(E)$ обозначена емкость конденсатора с пластинами $\mathbb{T}$ и E .

Чтобы сравнить квадратичные дифференциалы $Q_k(z) dz^2$ и $Q_E(z) dz^2$, определим значение k_0 параметра k , при котором $|\mathbb{T}|_{Q_k} = 1$. Из (1.5) получаем

$$k_0 = \frac{2\pi \omega_E(0)}{\operatorname{cap} \Delta(E)} = 2\pi \omega_E(0) \bmod \Delta(E). \quad (1.6)$$

Пусть $\Omega_j(E) := \Omega_j(k_0)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\operatorname{cap} \Omega_1(E) = - \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial \nu(z)}{\partial n} ds = \operatorname{cap} \Delta(E) + 2\pi k_0^{-1} \omega(0),$$

откуда

$$\text{cap } \Delta(E) = \omega_E(0) \text{ cap } \Omega_1(E). \quad (1.7)$$

Далее, так как G_{k_0} — функция Грина области $\Omega_2(E)$, то

$$m(\Omega_2(E), 0) = m(\Delta(E), 0) - \omega_E(0)(1 - \omega_E(0)) \bmod \Delta(E). \quad (1.8)$$

Равенства (1.7) и (1.8) играют важную роль в нашем доказательстве теоремы А.

§ 2. Риманова поверхность $\mathcal{R}_E$

Далее всюду предполагаем, что $E \subset \mathcal{E}(r_1, r_2)$, т.е. E состоит из n радиальных разрезов $l_1, \dots, l_n$, занумерованных в порядке возрастания аргументов их точек. В этом случае из леммы А вытекает, что свободная граница $L(E)$ задачи (1.1) состоит из критических траекторий $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ квадратичного дифференциала (1.2) таких, что $\gamma_k \subset \overline{K(r_1, r_2)}$ и соединяет разрезы l_k и l_{k+1} . Как обычно при циклических перестановках, мы будем полагать $l_{n+1} = l_1$ и т.п.

Функция $z \mapsto f_E(z)$ многозначна в области $\Delta(E)$ и отображает ее конформно на бесконечнолистную риманову поверхность $\mathcal{R}_E$, лежащую над кругом Δ . Пусть главная ветвь $f_0(z)$ функции $f_E(z)$ в области $D_1(E)$ определяется условием $f_0(1) = 1$, а в области $D_2(E)$ — аналитическим продолжением из области $D_1(E)$ вдоль произвольного радиуса, лежащего между отрезками l_1 и l_2 . Тогда $f_0(z)$ отображает $D_1(E)$ на кольцо $K(r_0, 1)$, при этом траектории γ_k отображаются на круговые дуги $s_{k,1} \subset T_{r_0}$. Множество $K'(r_0, 1) = K(r_0, 1) \cup (\bigcup_{k=1}^n s_{k,1})$ будем называть *фундаментальным кольцом* поверхности $\mathcal{R}_E$. Аналогично, $f_0(z)$ отображает множество $D_2(E) \cup L(E)$ на *фундаментальный круг* $\Delta'_{r_0} = \Delta_{r_0} \cup (\bigcup_{k=1}^n s_{k,2})$, где $s_{k,2} = f_0(\gamma_k)$. При этом существуют числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$ такие, что $s_{k,2} = e^{i\alpha_k} s_{k,1}$. Поверхность $\mathcal{R}_E$ устроена следующим образом. К кольцу $K'(r_0, 1)$ вдоль каждой из дуг $s_{k,1}$ подклеивается круг Δ'_{r_0} , повернутый на угол $-\alpha_k$. На границе каждого из n подклеенных таким образом кругов имеется $n-1$ отмеченная дуга. К каждой такой дуге вдоль соответствующих граничных дуг подклеим кольца $K'(r_0, 1)$, повернутые на подходящий угол. Продолжая процесс подклеивания кругов и колец до бесконечности, получим поверхность $\mathcal{R}_E$.

Многозначность функции f_E имеет очень простой характер: если f_1 и f_2 — ветви f_E , отображающие область $D_1(E)$ на кольцо $K(r_0, 1)$ или область $D_2(E)$ на круг Δ_{r_0} , то

$$f_2 \equiv e^{i\alpha} f_1 \quad (2.1)$$

при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$; при этом на дугах γ_k соотношению (2.1) удовлетворяют и соответствующие функции f_1 и f_2 , где f_j определена в области $D_j(E)$, $j = 1, 2$.

Используя отображение f_E , пересадим функцию Грина $g(z)$ и гармоническую меру $\omega_E(z)$ на поверхность $\mathcal{R}_E$. Полученные в результате функции обозначаем через $G_{\mathcal{R}_E}$ и $\omega_{\mathcal{R}_E}$ соответственно. Тогда $G_{\mathcal{R}_E}$ — гармоническая в $\mathcal{R}_E$, за исключением логарифмических особенностей во всех точках $\mathcal{R}_E$ с аффиксом 0, и равна нулю на $\partial\mathcal{R}_E$, а $\omega_{\mathcal{R}_E}$ является гармонической мерой системы дуг $S = f_E(E)$ относительно $\mathcal{R}_E$. В качестве локального параметра на $\mathcal{R}_E$ будем использовать аффикс z точки $p \in \mathcal{R}_E$.

Имеет место равенство

$$G_{\mathcal{R}_E}(p) = -\log |z| + \omega_{\mathcal{R}_E}(p) \log r_0 \quad \forall p \in \mathcal{R}_E, \quad (2.2)$$

обобщающее хорошо известное соотношение, связывающее функцию Грина и гармоническую меру круговой области с концентрическими разрезами [11], [12]. Тожество (2.2) вытекает из того факта, что разность левой и правой частей (2.2) — гармоническая на $\mathcal{R}_E$ функция, равная нулю на $\partial\mathcal{R}_E$. Соотношение (2.2) позволяет установить тождественность квадратичных дифференциалов (1.2) и (1.4) в рассматриваемом случае.

ЛЕММА 1. Если $E \subset \mathcal{E}(r_1, r_2)$, то

$$Q_E(z) dz^2 \equiv Q_{k_0}(z) dz^2,$$

где k_0 определяется равенством (1.6). При этом

$$k_0 = -\log r_0, \quad (2.3)$$

$D_j(E) = \Omega_j(E)$, $j = 1, 2$, и, следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi} \log r_0 = \text{mod } D_1(E) = \omega_E(0) \text{ mod } \Delta(E), \quad (2.4)$$

$$m(\Delta(E), 0) = m(D_2(E), 0) - \frac{1 - \omega_E(0)}{2\pi} \log r_0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.2) и конформной инвариантности гармонических функций вытекает соотношение

$$-\log |f_E(z)| = g(z) - \omega_E(z) \log r_0.$$

Отсюда, учитывая (1.3), получаем

$$Q_E(z) dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} [p'(z) + w'(z) \log r_0^{-1}]^2 dz^2,$$

т.е. квадратичный дифференциал $Q_E(z) dz^2$ имеет вид (1.4). Так как при этом $|\mathbb{T}|_{Q_E} = 1$, то $\log r_0^{-1} = k_0$ и тождество (2.2) доказано. Отсюда и из (1.7), (1.8) следуют остальные утверждения леммы.

Мы будем использовать также понятия аффиксного внутреннего радиуса поверхности и емкости конденсатора, которые задаются модификациями стандартных определений этих характеристик. Под *аффиксным внутренним радиусом* поверхности $\mathcal{R}_E$ в точке $z = 0$ понимаем величину $R_a(\mathcal{R}_E, 0)$, определяемую равенством

$$\log R_a(\mathcal{R}_E, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \{G_{\mathcal{R}_E}(p) + \log |z|\}; \quad (2.6)$$

величину

$$m_a(\mathcal{R}_E, 0) := \frac{1}{2\pi} \log R_a(\mathcal{R}_E, 0)$$

естественно называть *аффиксным приведенным модулем*. Из (2.2) и (2.6) получаем

$$m_a(\mathcal{R}_E, 0) = \frac{\omega_{\mathcal{R}_E}(0)}{2\pi} \log r_0 = \frac{\omega_E(0)}{2\pi} \log r_0. \quad (2.7)$$

Из определений аффиксного внутреннего радиуса и функции $G_{\mathcal{R}_E}$ следует равенство

$$R_a(\mathcal{R}_E, 0) = R(\Delta(E), 0) |f'_E(0)|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Рассмотрим конденсатор $C(\varepsilon)$ на $\mathcal{R}_E$, пластинами которого служат граница $\partial\mathcal{R}_E$ и множество F_ε , состоящее из кругов $\overline{\Delta_\varepsilon}$ на каждом листе поверхности $\mathcal{R}_E$. Емкость конденсатора $C(\varepsilon)$ равна $+\infty$, вместо нее мы будем использовать аффиксную емкость, т.е. величину

$$\text{cap}_a C(\varepsilon) = \inf \iint_{\Delta} |\nabla v|^2 dx dy.$$

Здесь и далее в аналогичных случаях переменной интегрирования является аффикс $z = x + iy$ точки $p \in \mathcal{R}_E$, а инфимум берется по всем допустимым (в смысле стандартного определения емкости) для конденсатора $C(\varepsilon)$ функциям v , которые, кроме того, инвариантны относительно перестановки листов поверхности $\mathcal{R}_E$. Такие функции имеют вид $v(p) = u(f_E^{-1}(p))$, где функция $u(z)$ допустима в обычном смысле для конденсатора $\tilde{C}(\varepsilon)$, имеющего пластинами множества $f_E^{-1}(\Delta_\varepsilon)$ и $\partial\Delta(E)$. Очевидно, что $\text{cap}_a C(\varepsilon) = \text{cap} \tilde{C}(\varepsilon)$. Отметим также, что аффиксная емкость конденсатора равна интегралу Дирихле его потенциальной функции, взятому по фундаментальной области римановой поверхности $\mathcal{R}_E$.

Используя указанные выше свойства, нетрудно показать, что при стягивании пластины F_ε в точку имеет место обычное предельное соотношение, ср. [8; п. 4.8.2],

$$m_a(\mathcal{R}_E, 0) = (\text{cap}_a C(\varepsilon))^{-1} + \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon + o(1),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§3. Диссимметризация многолистной поверхности

Далее используется преобразование диссимметризации В. Н. Дубинина [3]. Для удобства читателей и для того, чтобы сделать наше изложение независимым, приведем необходимые определения и результаты в нужной нам форме.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leq \pi/n$, $L_k^* = \{z : \arg z = 2\pi(k-1)/n\}$, $S_k^*(\theta) = \{z : |\arg z - 2\pi(k-1)/n| \leq \theta\}$, $k = 1, \dots, n$, $S^*(\theta) = \bigcup_{k=1}^n S_k^*(\theta)$, и пусть Φ — группа симметрий множества $S^*(\theta)$ (и всей плоскости), состоящая из суперпозиций отражений относительно прямых $\tau_k = \{z : \text{Im}\{z \exp(\pi i(k-1)/n)\} = 0\}$, $k = 1, \dots, n$. Под *симметричной структурой* на $S^*(\theta)$ понимаем конечный набор замкнутых углов $P_k = \{z : \theta_{k1} \leq \arg z \leq \theta_{k2}\}$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условиям:

- (a) $\bigcup_{k=1}^N P_k = S^*(\theta)$;
- (b) $\text{Int}(P_k \cap P_l) = \emptyset$ при $k \neq l$;
- (c) $\{\varphi(P_k)\}_{k=1}^N = \{P_k\}_{k=1}^N$ для любой изометрии $\varphi \in \Phi$.

Пусть $L_{\pm k} = \{z : \arg z = \theta_{\pm k}\}$, $k = 1, \dots, m$, $m \leq n$, где

$$\theta_{-1} \leq \theta_1 \leq \theta_{-2} \leq \dots \leq \theta_{-m} \leq \theta_m \leq \theta_{-(m+1)} := \theta_{-1} + 2\pi$$

и $\sum_{k=1}^m (\theta_k - \theta_{-k}) = 2\theta n$. Пусть также $S_k = \{z : \theta_{-k} < \arg z < \theta_k\}$, $S(\theta) = \bigcup_{k=1}^m S_k$, $L_{\pm k}(\theta) = L_k^* \exp\{\pm i\theta\}$.

Совокупность отображений $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ вида $\lambda_k(z) = z \exp(i\theta_k)$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, называется *диссимметризацией* структуры $\{P_k\}_{k=1}^N$ на множество $S(\theta)$, если выполняются условия:

- 1) $\bigcup_{k=1}^N \lambda_k(P_k) = S(\theta)$;
- 2) если пересечение $R_{k,l} = \lambda_k(P_k) \cap \lambda_l(P_l)$, $k \neq l$, не пусто, то существует изометрия $\varphi \in \Phi$ такая, что $\varphi(\lambda_k^{-1}(R_{k,l})) = \lambda_l^{-1}(R_{k,l})$;
- 3) если луч L_{+k} (или L_{-k}) лежит на границе угла $\lambda_l(P_l)$, то $\lambda_l^{-1}(L_{+k}) \in \{L_{\pm k}(\theta)\}_{k=1}^n$ (или $\lambda_l^{-1}(L_{-k}) \in \{L_{\pm k}(\theta)\}_{k=1}^n$).

Если симметричная структура $\{P_k\}_{k=1}^N$ и ее диссимметризация $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ уже определены, то диссимметризация Dis множеств $M \subset S^*(\theta)$ и функций $v: S^*(\theta) \rightarrow \mathbb{R}$, автоморфных относительно группы Φ , определяется естественным образом:

$$\text{Dis } M = \bigcup_{k=1}^N \lambda_k(M \cap P_k); \quad \text{Dis } v(z) = v(\lambda_k^{-1}(z)) \quad \text{при } z \in \lambda_k(P_k). \quad (3.1)$$

ЛЕММА 2 (см. [3], [13]). *Для любой системы углов $S(\theta)$ существуют симметричная структура на $S^*(\theta)$ и ее диссимметризация $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ на множество $S(\theta)$.*

Пусть $\mathcal{R}$ – произвольная бесконечнолистная риманова поверхность над кругом Δ , построенная по типу поверхности $\mathcal{R}_E$ предыдущего параграфа (здесь мы отвлекаемся от связи между римановой поверхностью и породившей ее функцией f_E). Пусть $K'(r_0, 1)$ и Δ'_{r_0} по-прежнему обозначают фундаментальное кольцо и фундаментальный круг поверхности $\mathcal{R}$; $s_{k,1}$ и $s_{k,2}$ – соответствующие дуги $K'(r_0, 1)$ и Δ'_{r_0} , лежащие на $\mathbb{T}_{r_0}$. Пусть суммарная угловая мера каждого из множеств таких дуг равна $2\theta n$, $0 < \theta < \pi/n$. Через $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*(r_0, \theta)$ будем обозначать риманову поверхность указанного выше типа, для которой $s_{q,j}^*$ ($= s_{q,j}$) $= \{z \in \mathbb{T}_{r_0} : |\arg z - 2\pi(k-1)/n| < \theta\}$, $q = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$. Символом “*” будем помечать объекты, соответствующие такой *правильной* поверхности.

Диссимметризация поверхности $\mathcal{R}^*$ на поверхность $\mathcal{R}$ конструируется на основе диссимметризации системы углов. Сначала мы диссимметризуем фундаментальные множества $K'^*(r_0, 1)$ и $\Delta'^*_{r_0}$, каждое из которых разобьем на два подмножества: A_1^* , B_1^* и A_2^* , B_2^* соответственно. К множествам A_1^* и A_2^* отнесем соответственно секторы кольца $K'^*(r_0, 1)$ и круга $\Delta'^*_{r_0}$, опирающиеся на дуги $s_{q,1}^*$ ($= s_{q,2}^*$); к множествам B_1^* и B_2^* отнесем оставшиеся секторы множеств $K'^*(r_0, 1)$ и $\Delta'^*_{r_0}$. Через A_1 , B_1 и A_2 , B_2 обозначим аналогичные разбиения каждого из множеств $K'(r_0, 1)$ и Δ'_{r_0} .

Пусть секторы множества B_j “высекаются” из углов $S_{k,j}$, $k = 1, \dots, n$, и пусть $\{P_{qj}\}_{q=1}^{N_j}$ и $\{\lambda_{qj}\}_{q=1}^{N_j}$ – симметричная структура на $e^{i\pi/n} S^*(1-\theta)$ (т.е. структура, полученная из структуры на $S^*(1-\theta)$ поворотом на угол π/n) и ее диссимметризация на множество $S^j(\theta) = \bigcup_{k=1}^{N_j} S_{k,j}$, $j = 1, 2$. Пусть $B_{qj}^* = B_j^* \cap P_{qj}$.

Пусть секторы множества A_1 высекаются из углов S_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда секторы множества A_2 лежат в углах $e^{i\alpha_k} S_k$, где α_k – подходящее вещественное число; при этом углы $e^{i\alpha_k} S_k$, как и углы S_k , следуют друг за другом в порядке их нумерации. Пусть $\{P_r\}_{r=1}^N$ и $\{\lambda_r\}_{r=1}^N$ – симметричная система на $S^*(\theta)$ и ее

диссимметризация на множество $S(\theta) = \bigcup_{k=1}^n S_k$. Пусть $A_{rj}^* = A_j^* \cap P_r$. Множествам A_{r1}^* сопоставим отображения $\mu_{r1} = \lambda_r$, а множествам A_{r2}^* таким, что $\lambda_r(A_{r2}^*) \subset S_k$, — отображения $\mu_{r2} = e^{i\alpha_k} \lambda_r$.

Совокупность описанных выше множеств A_{r1}^* , A_{r2}^* , B_{q1}^* и B_{q2}^* назовем *симметричной структурой* фундаментальной области поверхности $\mathcal{R}^*$, а совокупность соответствующих поворотов μ_{r1} , μ_{r2} , λ_{q1} и λ_{q2} — *диссимметризацией* этой структуры на фундаментальную область поверхности $\mathcal{R}$. Как следует из леммы 2, описанная выше симметричная структура и ее диссимметризация существуют для любой поверхности $\mathcal{R}$ рассматриваемого вида.

Симметричная структура фундаментальной области естественным образом порождает симметричную структуру на всей поверхности $\mathcal{R}^*$. Соответственно и диссимметризация указанной структуры на фундаментальную область порождает диссимметризацию симметричной структуры поверхности $\mathcal{R}^*$ на поверхность $\mathcal{R}$ — *диссимметризацию $\mathcal{R}^*$ на $\mathcal{R}$* . Теперь каждому элементу M разбиения $\mathcal{R}^*$ соответствует отображение вида $e^{i\alpha} \nu$, где ν — принадлежащее из отображений μ_{rj} или λ_{qj} , а дополнительный поворот на угол α соответствует переходу на подходящий лист поверхности $\mathcal{R}$.

Пусть множество M , функция v и конденсатор C на $\mathcal{R}^*$ инвариантны относительно преобразований группы Φ и относительно перестановки листов поверхности $\mathcal{R}^*$. Тогда диссимметризации $\text{Dis}_{\mathcal{R}} M$, $\text{Dis}_{\mathcal{R}} v$ и $\text{Dis}_{\mathcal{R}} C$ определяются равенствами, аналогичными соотношениям (3.1). Простые аргументы, использованные В. Н. Дубининым при доказательстве диссимметризационных результатов в [3], показывают, что выполняется следующая

ЛЕММА 3. Пусть функция v , конденсатор C и область $D \ni 0$ на $\mathcal{R}^*$ инвариантны в указанном выше смысле. Тогда

$$\iint_{\Delta} |\nabla \text{Dis}_{\mathcal{R}} v|^2 dx dy = \iint_{\Delta} |\nabla v|^2 dx dy,$$

$$\text{cap}_a(\text{Dis}_{\mathcal{R}} C) \leq \text{cap}_a C, \quad (3.2)$$

$$R_a(\text{Dis}_{\mathcal{R}} D, 0) \geq R_a(D, 0) \quad (3.3)$$

в предположении, что рассматриваемые величины определены.

Равенство в каждом из соотношений (3.2), (3.3) имеет место только в случае $\mathcal{R} = e^{i\alpha} \mathcal{R}^*$, $\alpha \in \mathcal{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если поверхностям $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$ соответствуют одинаковые параметры r_0 и θ , то

$$m_a(\mathcal{R}, 0) \geq m_a(\mathcal{R}^*, 0), \quad (3.4)$$

следовательно (в силу (2.7))

$$\omega_{\mathcal{R}}(0) \leq \omega_{\mathcal{R}^*}(0). \quad (3.5)$$

Равенство в каждом из соотношений (3.4), (3.5) имеет место только в случае $\mathcal{R} = e^{i\alpha} \mathcal{R}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (3.5) распространяет на случай римановой поверхности $\mathcal{R}$ результат К. Халисте [14] о гармонической мере n круговых разрезов, лежащих на окружности $\mathbb{T}_r$. Этот результат был доказан также в докладе автора на семинаре по геометрической теории функций Кубанского ГУ (руководитель семинара – профессор И. П. Митюк), прочитанном осенью 1984 года, однако этот доклад не был опубликован.

Диссимметризация позволяет также сравнивать модули специальных семейств кривых, лежащих в фундаментальных областях поверхностей $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}$. Пусть $K(\rho, r_0, \theta) = K(\rho, 1) \setminus \{z : |z| = r_0, |\arg z^n - \pi| < n\theta\}$, $T(\rho, r_0, \theta) = K(\rho, r_0, \theta) \cap \{z : 0 < \arg z < \pi/n\}$, $0 \leq \rho < r_0 < 1$, $T_n(r_0, \theta) = T(0, r_0, \theta)$, и пусть Γ_ρ^* – семейство жордановых дуг в $K(\rho, r_0, 1)$, соединяющих окружности $\mathbb{T}_\rho$ и $\mathbb{T}$. Пусть Γ_ρ – семейство “составных” кривых на $K(\rho, 1) \cap (K'(r_0, 1) \cup \Delta'_{r_0})$, соединяющих окружности $\mathbb{T}_\rho$ и $\mathbb{T}$. Здесь под *составной кривой* $\gamma \subset K(\rho, 1) \cap (K'(r_0, 1) \cup \Delta'_{r_0})$ мы понимаем совокупность конечного числа дуг $\gamma_{2k-1} \subset K'(r_0, 1)$ и дуг $\gamma_{2k} \subset \Delta'_{r_0} \setminus \overline{\Delta}_\rho$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условиям:

- (а) γ_1 имеет начало на $\mathbb{T}$ и конец на множестве $s_1 = \bigcup_{k=1}^n s_{k,1}$; γ_{2N} имеет начало на $s_2 = \bigcup_{k=1}^n s_{k,2}$ и конец на окружности $\mathbb{T}_\rho$;
- (б) при $k > 1$ дуга γ_{2k-1} имеет концевые точки на s_1 ; при $k < N$ дуга γ_{2k} имеет концевые точки на s_2 ;
- (с) если γ_{2k-1} оканчивается в точке $r_0 e^{i\theta} \in s_{k,1}$, то γ_{2k} начинается в точке $r_0 e^{i(\theta+\alpha_k)} \in s_{k,2}$; если γ_{2k} оканчивается в точке $r_0 e^{i\theta} \in s_{k,2}$, то γ_{2k+1} начинается в точке $r_0 e^{i(\theta-\alpha_k)}$, где угол α_k определяется условием $s_{k,2} = e^{i\alpha_k} s_{k,1}$.

ЛЕММА 4. Пусть поверхности $\mathcal{R}$ соответствуют параметры r_0 и θ , и пусть Γ_ρ^* и Γ_ρ – описанные выше семейства кривых. Тогда

$$\text{mod } \Gamma_\rho \leq \text{mod } \Gamma_\rho^* = 2n \text{ mod } T(\rho, r_0, \theta), \quad (3.6)$$

где через $\text{mod } T(\rho, r_0, \theta)$ обозначен модуль четырехугольника $T(\rho, r_0, \theta)$ относительно семейства кривых, соединяющих его граничные дуги, лежащие на окружностях $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}_\rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство в (3.6) вытекает из единственности экстремальной метрики и хорошо известного принципа симметрии для модулей семейств кривых, см. [15; гл. 1, теорема 5], откуда также следует, что экстремальная метрика $\sigma^*(z)$ семейства Γ_ρ^* инвариантна относительно группы Φ .

Пусть $\mathcal{D} = \{A_{ri}^*, B_{qj}^*\}$ – симметричная структура на фундаментальной области поверхности $\mathcal{R}^*$ и $\{\mu_{ri}, \lambda_{qj}\}$ – диссимметризация этой структуры на фундаментальную область поверхности $\mathcal{R}$. Пусть $\sigma = \text{Dis } \sigma^*$ – соответствующая диссимметризация метрики σ^* . Покажем, что σ допустима для семейства Γ_ρ . Здесь допустимость метрики для семейства Γ_ρ понимается в смысле L -определения модуля и означает, что $\int_\gamma \sigma |dz| \geq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma_\rho$.

Пусть $\gamma \in \Gamma_\rho$, и пусть $\alpha_{ri} = \mu_{ri}^{-1}(\gamma \cap \mu_{ri}(A_{ri}^*)) \subset A_{ri}^*$, $\beta_{qj} = \lambda_{qj}^{-1}(\gamma \cap \lambda_{qj}(B_{qj}^*)) \subset B_{qj}^*$. Элементы A_{ri}^* , B_{qj}^* , для которых $\alpha_{ri} \neq \emptyset$ или $\beta_{qj} \neq \emptyset$, помечаем символом “ $\sim$ ”. Пусть $A_{ri}^0, B_{qj}^0 \subset T_n(r_0, \theta)$ – элементы структуры $\mathcal{D}$, эквивалентные

относительно группы Φ множеств $\alpha_{ri} \subset \tilde{A}_{ri}^*$ и $\beta_{qj} \subset \tilde{B}_{qj}^*$. Из условия (с) определения составной кривой вытекает, что множество $(\bigcup_{r,j} \alpha_{ri}^0) \cup (\bigcup_{q,j} \beta_{qj}^0)$ содержит непрерывную кривую $\tilde{\gamma} \subset \overline{T(\rho, r_0, \theta)}$, соединяющую дуги окружностей $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}_\rho$. Из инвариантности метрики σ^* относительно группы Φ и из определения диссимметризации функции следует неравенство

$$\int_{\gamma} \sigma |dz| \geq \int_{\tilde{\gamma}} \sigma^* |dz| \geq 1,$$

означающее допустимость метрики σ для семейства Γ_ρ .

Утверждение леммы вытекает теперь из очевидного равенства

$$\iint_{\Delta} (\sigma^*)^2 dx dy = \iint_{\Delta} \sigma^2 dx dy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Введенное выше понятие составной кривой может быть распространено на случай кривых, лежащих более чем в двух “фундаментальных” кольцах $K'(r_j, r_{j+1})$, $j = 1, \dots, J$, $0 < r_1 < \dots < r_J < \infty$, каждое из которых имеет на соответствующих граничных окружностях $\mathbb{T}_{r_j}$ и $\mathbb{T}_{r_{j+1}}$ подходящие системы дуг $s_{k,j}^1$ и $s_{k,j}^2$, $k = 1, \dots, n$, соответственно. Кроме того, вместо колец $K'(r_j, r_{j+1})$ можно рассматривать более общие “фундаментальные конфигурации”, согласованные в определенном смысле с группой Φ . Легко видеть, что утверждение, аналогичное лемме 4, выполняется и для семейств таких составных кривых.

§ 4. Приведенный модуль специальных треугольников

Под (топологическим) *треугольником* понимается односвязная область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, на границе которой отмечены три различных граничных элемента e_1, e_2, e_3 , называемых вершинами (пусть $e_1 = 0$). Пусть стороны e_1e_2 и e_1e_3 треугольника D образуют внутренний угол $\varphi > 0$ при вершине e_1 , и пусть при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пересечение $\mathbb{T}_\varepsilon \cap D$ состоит из одной дуги γ_ε . Множество $D[\varepsilon] = D \setminus \Delta_\varepsilon$ будем рассматривать как четырехугольник, имеющий дуги γ_ε и e_2e_3 в качестве сторон; $\text{mod } D[\varepsilon]$ – модуль $D[\varepsilon]$ относительно семейства кривых в $D[\varepsilon]$, разделяющих указанные дуги.

Следуя работе [16], под *приведенным модулем треугольника D относительно вершины e_1* понимаем предел

$$m(D; e_1 | e_2, e_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \text{mod } D[\varepsilon] + \frac{1}{\varphi} \log \varepsilon \right\},$$

если он существует и конечен. Как показано в [17], если область D конформна в граничной точке e_1 , то соответствующий приведенный модуль существует.

Пересчет приведенных модулей при конформных отображениях производится по стандартной формуле [16]: если функция $f(z) = \zeta_1 + A(z - e_1)^\alpha(1 + o(1))$, где $\alpha > 0$, $A \neq 0$ и $o(1) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow e_1$, осуществляет конформное отображение треугольника D на треугольник Ω с вершинами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, то

$$m(\Omega; \zeta_1 | \zeta_2, \zeta_3) = m(D; e_1 | e_2, e_3) + \frac{1}{\alpha\varphi} \log |A|. \quad (4.1)$$

Пусть $T_n(r, \theta)$ – сектор с круговым разрезом, определенный в §3. Далее $T_n(r, \theta)$ будет рассматриваться как треугольник с вершинами $e_1 = 0$, $e_2 = 1$ и $e_3 = e^{i\pi/n}$. Пусть $m_n(r, \theta)$ – приведенный модуль $T_n(r, \theta)$ относительно точки $e_1 = 0$. Из (4.1) имеем равенство

$$m_n(r, \theta) = m_1(r^n, n\theta), \quad (4.2)$$

откуда следует, что при изучении свойств функции $m_n(r, \theta)$ достаточно ограничиться случаем стандартного треугольника $\tilde{T}(r, \theta) = \{z : -\bar{z} \in T_1(r, \theta)\}$, приведенный модуль которого обозначаем через $\tilde{m}(r, \theta)$.

Будем считать, что угол $\theta = \theta(\omega)$ зависит от параметра ω , где $\omega = \omega(0, E_r(\theta), \Delta)$ – гармоническая мера дуги $E_r(\theta) = \{z \in \mathbb{T}_r : |\arg z| \leq \theta\}$. Пусть $T(r, \omega) = \tilde{T}(r, \theta(\omega))$, $m(r, \omega) = \tilde{m}(r, \theta(\omega))$.

Для вычисления модуля $m(r, \omega)$ используем функцию $z = z(w)$, отображающую прямоугольник периодов $\Pi(\tau) = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1, 0 < \operatorname{Im} w < -i\tau/2\}$ на область $\Delta(E_r(\theta))$. Как известно, см. [18; 8.3, пример 2], искомое отображение осуществляется функцией

$$z = \frac{\theta_1(w - i\sigma | \tau)}{\theta_1(w + i\sigma | \tau)}, \quad z(i\sigma) = 0.$$

Здесь через $\theta_1(\cdot | \tau)$ обозначена 1-я тета-функция; далее будут использоваться и другие стандартные обозначения теории эллиптических функций, при этом мы придерживаемся обозначений, принятых в [19].

Параметры $\tau = i|\tau|$ и $\sigma > 0$ удовлетворяют соотношениям [18; 8.3, пример 2]

$$r = e^{-2\pi\sigma}, \quad \frac{2\sigma}{|\tau|} = \omega. \quad (4.3)$$

При отображении $z = z(w)$ прямоугольник $\Pi = \{z \in \Pi(\tau) : 0 < \operatorname{Re} w < 1/2\}$, рассматриваемый как треугольник с вершинами $e_1 = i\sigma$, $e_2 = 0$, $e_3 = 1/2$, переходит в треугольник $T(r, \omega)$. Используя формулу (4.1), из (4.2) находим

$$m(r, \omega) = m(\Pi; i\sigma | e_2, e_3) + \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{\theta'_1(0 | \tau)}{\theta_1(2i\sigma | \tau)} \right|. \quad (4.4)$$

Подставляя в (4.4) значение $\theta'_1(0 | \tau) = \pi \theta_2(0 | \tau) \theta_3(0 | \tau) \theta_4(0 | \tau)$ [19; п. 13.19, формула (22)], получаем

$$m(r, \omega) = m(\Pi; i\sigma | e_2, e_3) + \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{\pi \theta_2(0 | \tau) \theta_3(0 | \tau) \theta_4(0 | \tau)}{\theta_1(2i\sigma | \tau)} \right|. \quad (4.5)$$

Найдем $m(\Pi; i\sigma) = m(\Pi; i\sigma | e_2, e_3)$. Для этого с помощью функции

$$\zeta = \operatorname{sn}^{-2}(2\mathbf{K}z, k) \quad (4.6)$$

отобразим треугольник Π на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}_+ = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$, рассматриваемую как треугольник с вершинами $\zeta_1 = \operatorname{sn}^{-2}(2i\sigma\mathbf{K}, k)$, $\zeta_2 = \infty$,

$\zeta_3 = 1$. Здесь и далее через $\mathbf{K} = \mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{K}' = \mathbf{K}'(k)$ обозначаются полные эллиптические интегралы; параметр $0 < k < 1$ определяется из условия

$$\tau = i \frac{\mathbf{K}'(k)}{\mathbf{K}(k)}. \quad (4.7)$$

После простых вычислений находим:

$$m(\mathbb{H}_+; \zeta_1 | 1, \infty) = \frac{1}{\pi} \log(4(1 - \zeta_1)), \quad (4.8)$$

$$\zeta'(i\sigma) = \frac{-4\mathbf{K} \operatorname{cn}(2i\sigma\mathbf{K}, k) \operatorname{dn}(2i\sigma\mathbf{K}, k)}{\operatorname{sn}^3(2i\sigma\mathbf{K}, k)}. \quad (4.9)$$

Используя (4.1), из (4.8), (4.9) получаем

$$m(\Pi; i\sigma) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{\operatorname{sn}(2i\sigma\mathbf{K}, k) \operatorname{cn}(2i\sigma\mathbf{K}, k)}{\mathbf{K} \operatorname{dn}(2i\sigma\mathbf{K}, k)} \right|. \quad (4.10)$$

Подставляя в (4.10) выражения эллиптических функций через тета-функции [19; п. 13.20, формулы (11)–(13)], находим

$$m(\pi; i\sigma) = \frac{1}{\pi} \log \frac{2}{\pi} \left| \frac{\theta_1(i\sigma | \tau) \theta_2(i\sigma | \tau)}{\theta_3(i\sigma | \tau) \theta_4(i\sigma | \tau)} \frac{1}{\theta_2^2(0 | \tau)} \right|. \quad (4.11)$$

Из (4.5) и (4.11), используя формулу удвоения тета-функции [19; п. 13.23, формула (19)], имеем

$$m(r, \omega) = -\frac{2}{\pi} \log \left| \frac{\theta_3(i\sigma | \tau) \theta_4(i\sigma | \tau)}{\theta_3(0 | \tau) \theta_4(0 | \tau)} \right|. \quad (4.12)$$

Выполняя мнимое преобразование Якоби

$$\dot{v} = \frac{v}{\tau}, \quad \dot{\tau} = -\frac{1}{\tau} = i \frac{\mathbf{K}(k)}{\mathbf{K}'(k)}$$

и учитывая второе из соотношений (4.3), преобразуем (4.12) к виду

$$m(r, \omega) = -\frac{2}{\pi} \log \frac{\theta_2(\frac{\omega}{2} | \dot{\tau}) \theta_3(\frac{\omega}{2} | \dot{\tau})}{\theta_2(0 | \dot{\tau}) \theta_3(0 | \dot{\tau})} - 2\sigma\omega. \quad (4.13)$$

Используя формулы (17) в [19; п. 13.19], разложим логарифмическое выражение в (4.13) в тригонометрический ряд:

$$m(r, \omega) = -\frac{2}{\pi} \left\{ \log \cos \frac{\pi\omega}{2} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\dot{q}^m}{1 - \dot{q}^m} \frac{\sin^2 \frac{\pi\omega m}{2}}{m} \right\} - 2\sigma\omega, \quad (4.14)$$

где $\dot{q} = e^{i\pi\dot{\tau}} = \exp\{-\pi\mathbf{K}/\mathbf{K}'\}$. Из (4.14) получаем окончательное выражение для приведенного модуля:

$$m(r, \omega) = -\frac{2}{\pi} \log S\left(\omega, \frac{|\dot{\tau}|}{2\pi}\right) - 2\sigma\omega, \quad (4.15)$$

где

$$S(v, t) = \frac{\theta_2(\frac{1}{2}v | i\pi t)}{\theta_2(0 | i\pi t)}. \quad (4.16)$$

Докажем необходимую далее лемму о монотонности функции $S(v, t)$, которая, по нашему мнению, представляет интерес и в теории эллиптических функций. Возможно, такое свойство известно специалистам, но мы не смогли найти соответствующей ссылки в литературе.

ЛЕММА 5. При фиксированном v , $0 < v < 1$, функция $S(v, t)$ возрастает на промежутке $0 < t < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [19; п. 13.19], функция $\theta_2(\frac{1}{2}x \mid i\pi t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Из (4.16), (4.17) следует, что для доказательства леммы достаточно доказать неравенство

$$4 \frac{\partial}{\partial t} \log S(v, t) = \frac{\theta_2''(\frac{1}{2}v \mid i\pi t)}{\theta_2(\frac{1}{2}v \mid i\pi t)} - \frac{\theta_2''(0 \mid i\pi t)}{\theta_2(0 \mid i\pi t)} > 0. \quad (4.18)$$

Далее в обозначениях тета-функций опускаем параметр, который считаем фиксированным и равным $\tau = i\pi t$.

Покажем, что функция $\theta_2''(v)/\theta_2(v)$ возрастает при $0 < v < 1/2$. Функция $\theta_2'(v)/\theta_2(v)$ имеет вещественный период 1 и мнимый квазипериод τ [19; п. 13.19], т.е.

$$\frac{\theta_2'(v + \tau)}{\theta_2(v + \tau)} = -2\pi i + \frac{\theta_2'(v)}{\theta_2(v)}.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\frac{\theta_2''(v + \tau)\theta_2(v + \tau) - \theta_2'^2(v + \tau)}{\theta_2^2(v + \tau)} = \frac{\theta_2''(v)\theta_2(v) - \theta_2'^2(v)}{\theta_2^2(v)} := P(v). \quad (4.19)$$

Из предыдущего вытекает, что функция $P(v)$ является эллиптической функцией с периодами 1 и τ , которая в прямоугольнике периодов имеет единственный полюс второго порядка $v = \frac{1}{2}$. Кроме того, в окрестности точки $v = \frac{1}{2}$ имеет место разложение

$$\frac{\theta_2''(v)\theta_2(v) - \theta_2'^2(v)}{\theta_2^2(v)} = -\frac{1}{(v - 1/2)^2} + o(v - 1/2).$$

Указанные выше свойства однозначно определяют $\wp$ -функцию Вейерштрасса от $v - \frac{1}{2}$ с периодами 1 и τ . Следовательно,

$$P(v) = -\wp\left(v - \frac{1}{2}\right). \quad (4.20)$$

Из (4.19), (4.20) находим

$$\frac{\theta_2''(v)}{\theta_2(v)} = \left(\frac{\theta_2'(v)}{\theta_2(v)}\right)^2 - \wp\left(v - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\theta_2''(v)}{\theta_2(v)}\right)' = -2 \frac{\theta_2'(v)}{\theta_2(v)} \wp\left(v - \frac{1}{2}\right) - \wp'\left(v - \frac{1}{2}\right). \quad (4.21)$$

Так как $\wp(v - 1/2) > 0$ при $0 < v < 1/2$, то неравенство $(\theta_2''(v)/\theta_2(v))' > 0$ эквивалентно неравенству

$$F := 2 \frac{\theta_2'(v)}{\theta_2(v)} + \frac{\wp'(v - \frac{1}{2})}{\wp(v - \frac{1}{2})} < 0. \quad (4.22)$$

Используя известные соотношения $\theta'_2(0) = 0$, $\wp'(1/2) = 0$ и разложения функций θ'_2/θ_2 , $\wp$ и $\wp'$, см. [19; п. 13.12, формулы (16), (17) и п. 13.19, формула (18)], найдем значения F на концах промежутка:

$$F(0) = F(1/2) = 0. \quad (4.23)$$

Исследуем функцию F на монотонность. Имеем

$$F'(v) = -2\wp(v - 1/2) + \frac{\wp''(v - 1/2)\wp(v - 1/2) - \wp'^2(v - 1/2)}{\wp^2(v - 1/2)}.$$

В силу четности функции $\wp$ уравнение $F'(v) = 0$ эквивалентно соотношению

$$\wp''(v)\wp(v) - \wp'^2(v) - 2\wp^3(v) = 0. \quad (4.24)$$

Так как $\wp$ -функция удовлетворяет соотношениям

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad \wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

где g_2 и g_3 — инварианты $\wp$ -функции [19; п. 13.13], то (4.24) эквивалентно уравнению

$$g_2\wp(v) + 2g_3 = 0. \quad (4.25)$$

Так как $\wp$ -функция монотонна на интервале $0 < v < 1/2$, то уравнение (4.25) имеет не более одного решения при $0 < v < 1/2$. Так как $\wp(v - 1/2) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow 1/2$, то $F'(v) > 0$ при v достаточно близких к $1/2$. Отсюда, учитывая (4.23), заключаем, что

$$F(v) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < v < 1/2.$$

Следовательно, функция $\theta'_2(v)/\theta_2(v)$ монотонна. Таким образом, (4.18), а значит, и утверждение леммы доказаны.

§5. Доказательство теоремы А

Допустим, что для компакта $E \in \mathcal{E}(r_1, r_2)$, $E \neq e^{i\alpha}E^*$ при $\alpha \in \mathbb{R}$, теорема не верна. Тогда

$$\omega_E(0) \geq \omega_{E^*}(0). \quad (5.1)$$

Функция $f^* := f_{E^*}$ отображает треугольник $T_0 = \{z \in \Delta : 0 < \arg z < \pi/n\}$, имеющий вершины в точках $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = e^{i\pi/n}$, конформно на треугольник $T_n(r^*, \theta^*)$ при подходящих значениях r^* и θ^* . Из принципа симметрии следует, что f^* является однозначной в области $\Delta(E^*)$ функцией, отображающей $\Delta(E^*)$ конформно на область $\Delta(F^*)$, где $F^* = f^*(E) = \{z : |z| = r^*, |\arg z^n - \pi| \leq n\theta^*\}$. В силу конформной инвариантности гармонической меры

$$\omega_{E^*}(0) = \omega_{F^*}(0). \quad (5.2)$$

Из равенства $m(T_0; 0 | 1, e^{i\pi/n}) = 0$, вытекающего из определения приведенного модуля треугольника, и соотношения (4.1) имеем

$$m_n(r^*, \theta^*) = \frac{n}{\pi} \log |f^{*'}(0)|. \quad (5.3)$$

Чтобы получить аналогичное соотношение для функции f_E , отображающей $\Delta(E)$ на соответствующую риманову поверхность $\mathcal{R}_E = \mathcal{R}_E(r, \theta)$, зафиксируем малое $\rho > 0$ и рассмотрим семейство Γ_ρ , состоящее из радиальных отрезков $[\rho e^{i\theta}, e^{i\theta}]$, лежащих в $\Delta(E)$. Как хорошо известно,

$$\text{mod } \Gamma_\rho = -\frac{2\pi}{\log \rho}. \quad (5.4)$$

Если $\gamma \in \Gamma_\rho$, то каждое из множеств $\gamma^j = \gamma \cap D_j(E)$, $j = 1, 2$, состоит из конечного числа промежутков. Пусть $\alpha^j = f_0(\gamma^j)$, где f_0 — главная ветвь функции f_E ; $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, $\Gamma''_\rho = \{\alpha\}$. В силу конформной инвариантности модуля семейства кривых

$$\text{mod } \Gamma_\rho = \text{mod } \Gamma''_\rho. \quad (5.5)$$

Так как отображение f_E конформно в точке $z = 0$, то $f_E(\mathbb{T}_\rho) \subset \Delta_{\rho'}$ при некотором $\rho' = \rho |f'_E(0)|(1 + o(1))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Пусть $\alpha' = \alpha \setminus \overline{\Delta}_{\rho'}$. Так как семейство $\Gamma'_\rho = \{\alpha'\}$ короче семейства Γ''_ρ , то, см. [15; гл. 1, теорема 2],

$$\text{mod } \Gamma''_\rho \leq \text{mod } \Gamma'_\rho. \quad (5.6)$$

Соотношение (2.1) показывает, что Γ'_ρ является подсемейством семейства составных кривых $\Gamma_{\rho'}$, лежащих в фундаментальных областях $K'(r, 1)$ и Δ'_r , соответствующих поверхности $\mathcal{R}_E$, поэтому

$$\text{mod } \Gamma'_\rho \leq \text{mod } \Gamma_{\rho'}. \quad (5.7)$$

Пусть $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}^*(r, \theta)$ — правильная поверхность, построенная для тех же значений параметров r и θ , что и поверхность $\mathcal{R}_E$. Из соотношений (5.4)–(5.7) и леммы 4 вытекает неравенство

$$-\frac{\pi}{\log \rho} \leq n \text{ mod } T(\rho', r, \theta),$$

откуда получаем

$$m_n(r, \theta) = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left\{ \text{mod}^{-1} T(\rho', r, \theta) + \frac{n}{\pi} \log \rho' \right\} \leq \frac{n}{\pi} \log |f'_E(0)|. \quad (5.8)$$

Предположение (5.1), равенство $\omega_E(0) = \omega_{\mathcal{R}}(0)$ и соотношения (5.2) и (3.5) приводят к неравенству

$$\omega_{F^*}(0) \leq \omega_{\mathcal{R}_0}(0),$$

из которого следует, что существует значение θ' , $0 < \theta' \leq \theta$, такое, что

$$\omega(0, f(r, \theta'), \Delta(F(r, \theta'))) = \omega_{F^*}(0) = \omega_{E^*}(0) := \omega.$$

Из (5.8) и свойства монотонности приведенного модуля как функции области получаем

$$m_n(r, \theta') \leq \frac{n}{\pi} \log |f'_E(0)|. \quad (5.9)$$

Так как f_E отображает $D_2(E)$ на круг Δ_r , то

$$m(D_2(E), 0) = \frac{1}{2\pi} \log r - \frac{1}{2\pi} \log |f'_E(0)|.$$

Отсюда и из (2.5) следует, что

$$m(\Delta(E), 0) = -\frac{1}{2\pi} \log |f'_E(0)| + \frac{\omega}{2\pi} \log r. \quad (5.10)$$

Далее мы применим неравенства

$$m(\Delta(E), 0) > m(\Delta(E^*), 0), \quad \text{mod } \Delta(E) > \text{mod } \Delta(E^*), \quad (5.11)$$

которые были доказаны В. Н. Дубининым [3] при решении задачи А. А. Гончара для семейства компактов $\mathcal{E}(r, 1)$; их использование является одним из ключевых моментов и нашего доказательства. Применяя (5.10) и первое неравенство из (5.11), получаем неравенство

$$\omega \log \frac{r}{r^*} \geq \log \left| \frac{f'_E(0)}{f'^*(0)} \right|,$$

которое вместе с (5.3) и (5.9) приводит к соотношению

$$m_n(r, \theta') - \frac{\omega n}{\pi} \log r \leq m_n(r^*, \theta^*) - \frac{\omega n}{\pi} \log r^*. \quad (5.12)$$

Гармоническая мера компактов $F(r, \theta)$ инвариантна при отображении $z \mapsto z^n$, поэтому, используя (4.2) и обозначение $m(r, \omega)$ из § 4, можем записать (5.12) в следующем виде:

$$m(\rho, \omega) - \frac{\omega}{\pi} \log \rho \leq m(\rho^*, \omega) - \frac{\omega}{\pi} \log \rho^*, \quad (5.13)$$

где $\rho = r^n$, $\rho^* = (r^*)^n$. Из второго неравенства в (5.11), равенства (2.4) и предположения (5.1) получаем соотношение, связывающее параметры ρ и ρ^* :

$$\rho < \rho^*. \quad (5.14)$$

Подставляя в (5.13) явные выражения модулей $m(\rho, \omega)$ и $m(\rho^*, \omega)$ по формуле (4.15), в которой σ определяется равенствами (4.3), получаем эквивалентное неравенство

$$S(\omega, t^*) \leq S(\omega, t), \quad (5.15)$$

где

$$t = \frac{2\sigma}{\pi\omega} = -\frac{1}{\pi^2\omega} \log \rho, \quad t^* = -\frac{1}{\pi^2\omega} \log \rho^*.$$

В силу (5.14) $t > t^*$ и, следовательно, неравенство (5.15) противоречит утверждению леммы 5 о возрастании функции $S(\omega, t)$. Таким образом, предположение (5.1) не выполняется и теорема А полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представляется, что некоторые ключевые моменты нашего доказательства, например введение функции $g(z) - k_0\omega(z)$, применение соотношений (1.7) и (1.8) и, конечно, использование, вслед за В. Н. Дубининым, диссимметричных преобразований, будут полезными и при решении задачи А. А. Гончара для семейства $\mathcal{E}(K)$ при произвольном $K \subset (0, 1]$. Отметим, что лемма А – также один из ключевых моментов доказательства – первоначально была доказана автором именно в связи с поиском доказательства теоремы А; затем она нашла применение и в некоторых других задачах, см. [20].

Список литературы

1. *Solynin A. Yu.* Extremal problems on conformal moduli and estimates for harmonic measures // *J. Anal. Math.* 1998. V. 74. P. 1–49.
2. *Campbell D. M., Clunie J. G., Hayman W. K.* Research problems in complex analysis // *Aspects of contemporary complex analysis.* London: Academic Press, 1980. P. 527–571.
3. *Дубинин В. Н.* Об изменении гармонической меры при симметризации // *Матем. сб.* 1984. Т. 124. № 2. С. 272–279.
4. *Haliste K.* A note on extremal configurations for harmonic measure // *Report. Dept. Math. Univ. Umea*, 1991, № 1.
5. *Baernstein A. II* On the harmonic measure of slit domains // *Complex Variables Theory Appl.* 1987. V. 9. P. 131–142.
6. *Солынин А. Ю.* Геометрические свойства экстремальных разбиений и оценки модулей семейств кривых в круговом кольце // *Аналитическая теория чисел и теория функций.* 11. Зап. научн. семин. ПОМИ. Т. 204. С.-Петербург: ПОМИ, 1993. С. 93–114.
7. *Solynin A. Yu.* Some extremal problems on the hyperbolic polygons // *Complex Variables Theory Appl.* 1998. V. 36. № 3–4.
8. *Хейман В. К.* Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960.
9. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М.: ИЛ, 1962.
10. *Jenkins J. A.* On the existence of certain general extremal metrics // *Ann. of Math.* 1957. V. 66. P. 440–453.
11. *Шиффер М.* Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // Приложение к книге Р. Куранта “Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности”. М.: ИЛ, 1953.
12. *Митюк И. П.* Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1980.
13. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // *УМН.* 1994. Т. 49. № 1. С. 3–76.
14. *Haliste K.* On an extremal configuration for capacity // *Ark. Mat.* 1989. V. 27. P. 97–104.
15. *Альфорт Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1962.
16. *Солынин А. Ю.* Решение одной изопериметрической задачи Поля-Сегё // *Аналитическая теория чисел и теория функций.* 9. Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 168. Л.: ЛОМИ, 1988. С. 140–153.
17. *Солынин А. Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // *Препринт ПОМИ 3/1997.* С.-Петербург: ПОМИ, 1997.
18. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: ИЛ, 1963.
19. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. М.: Наука, 1967.
20. *Солынин А. Ю.* Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций // *Аналитическая теория чисел и теория функций.* 11. Зап. научн. семин. ПОМИ. Т. 204. С.-Петербург: ПОМИ, 1993. С. 115–142.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Санкт-Петербург
E-mail: solynin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию
 18.11.1997