Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбачевич, О группах Ли, транзитивных на $S^1 \times S^{2m}$, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 43–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:18:46

УДК 512.816.3

В. В. Горбачевич

О группах Ли, транзитивных на $S^1 \times S^{2m}$

В статье описывается строение групп Ли, транзитивных на прямом произведении окружности и четномерной сферы. Для произведений двух сфер размерности > 1 подобная задача уже была решена ранее другими авторами. Указаны также минимальные среди групп Ли, транзитивных на S^1 и S^{2m} .

В качестве приложения полученных результатов рассматривается строение группы автоморфизмов одного класса геометрических структур – обобщенных прямоугольников (частного случая билдингов Титса). Также доказывается справедливость предположения, выдвинутого Л. Крамером: в группе автоморфизмов связного обобщенного прямоугольника типа $(1, 2m)$ всегда существует транзитивная подгруппа, являющаяся прямым произведением компактной простой группы Ли и одномерной группы Ли.

Библиография: 16 названий.

В этой статье описывается строение групп Ли, транзитивных на многообразиях вида $S^1 \times S^{2m}$ – прямых произведениях одномерной и четномерной сфер. Более общая задача – описание строения групп Ли, транзитивных на прямом произведении двух произвольных сфер, – уже давно привлекала к себе внимание. Для большинства случаев эта задача была решена довольно давно. Д. Монтгомери и Х. Самельсон еще в 1954 г. [1] получили классификацию всех компактных полупростых групп Ли, транзитивных на сферах. Классификацию всех полупростых групп Ли, транзитивных на сферах, получил А. Л. Онищик в 1964 г. (им описаны и транзитивные действия на сферах произвольных односвязных групп Ли). Он же частично описал и транзитивные действия полупростых групп Ли на прямых произведениях двух сфер размерности ≥ 2 (т.е. на прямых произведениях односвязных сфер, ибо только одна сфера – окружность S^1 – не является односвязной); подробности см. в книге [2].

Полную классификацию транзитивных действий компактных полупростых групп Ли на тех же произведениях сфер получил Б. Камерих [3], затем подобные результаты получил Л. Крамер [4] (описав транзитивные действия компактных групп Ли на односвязных многообразиях, гомотопически эквивалентных некоторым произведениям двух односвязных сфер, это описание дополнил его ученик М. Вольфром). А совсем недавно ученик Крамера О. Блетц-Зиберт описал в [5] действия компактных групп Ли (не обязательно полупростых) на прямых произведениях вида $S^1 \times S^n$. В настоящей работе в § 2 дается описание строения произвольных односвязных групп Ли, транзитивных на $S^1 \times S^{2m}$ (теорема 2). Оказывается, что это описание очень несложно и формально похоже на описание (полученное А. Л. Онищиком) групп Ли, транзитивных на нечетномерных сферах S^{2m+1} . Что касается транзитивных действий групп Ли на многообразиях вида $S^1 \times S^{2m+1}$ (произведениях окружности на нечетномерные сферы), то их описание можно получить методами, которые использованы

в настоящей статье; но подробная классификация получается весьма громоздкой и поэтому здесь до конца проводиться не будет (хотя будут указаны некоторые частичные результаты о транзитивных группах Ли, действующих на всех многообразиях вида $S^1 \times S^n$). В частности, тут радикал транзитивной группы Ли не обязательно абелев.

В качестве приложения полученных результатов в § 3 рассмотрены однородные обобщенные четырехугольники; в одном важном частном случае тут возникают именно транзитивные действия групп Ли на многообразиях вида $S^1 \times S^n$. Рассмотрено одно естественное предположение о строении таких групп Ли (см. [4], [5]).

Дело в том, что во всех известных до сих пор примерах однородных компактных связных обобщенных прямоугольников (generalized quadrangles) в группе автоморфизмов всегда существовала компактная транзитивная подгруппа. Было не ясно, верно ли это всегда или же существуют однородные обобщенные прямоугольники принципиально иного типа. В данной статье показано, что, скорее всего, такого рода иных примеров просто нет; по крайней мере (в силу предложения 4) их нет для половины возможных случаев (для компактных связных однородных прямоугольников типа $(1, 2m)$). Есть основания полагать, что для оставшегося нерассмотренным в этой статье случая $(1, 2m+1)$ ситуация аналогична.

Полезно отметить, что классификации групп Ли, транзитивных на сферах четной и нечетной размерности, существенно различны. На S^{2m} транзитивная (и локально эффективная, что мы всегда здесь будем предполагать) группа Ли обязательно полупроста (и число таких групп Ли конечно при данном m), а вот на S^{2m+1} могут быть транзитивны и неполупростые группы Ли (при этом их радикал будет обязательно абелев), причем сколь угодно большой размерности (при фиксированном m). Особенностью четномерных сфер является и то, что только одна компактная группа Ли действует транзитивно и эффективно на каждой такой сфере – это $SO(2m+1)$ (при $m=3$ есть еще транзитивное действие на S^6 исключительной группы Ли G_2), причем стационарная подалгебра $so(2m) \subset so(2m+1)$ для этого действия является максимальной подалгеброй в $so(2m+1)$ (максимальность препятствует существованию других групп Ли, транзитивных на S^{2m}).

Об обозначениях в данной статье. Через $N_G(H)$ обозначается нормализатор подгруппы H в группе G , а через H_0 – связная компонента единицы группы H (предполагаемой тут группой Ли). Все многообразия в этой статье предполагаются гладкими, а все расслоения – гладкими и локально тривиальными.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство некоторой группы Ли G (которую мы всегда будем предполагать связной и, как правило, односвязной). Транзитивное действие группы Ли G на M мы всегда будем предполагать локально эффективным (такое действие можно получить из произвольного транзитивного действия группы Ли G , профакторизовав исходную группу Ли G по всему ядру неэффективности этого действия или же только по связной компоненте единицы этого ядра). В этой статье будет использован

подход к описанию компактных однородных пространств, ранее в общем случае разработанный автором. Для компактного однородного пространства M (а точнее, для некоторого однородного многообразия M' , его конечнолистно накрывающего) имеется натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$ (гладкое, локально тривиальное), база M_a которого асферична (т.е. гомотопические группы $\pi_k(M_a)$ тривиальны при всех $k \geq 2$), а слой M_c есть компактное однородное пространство некоторой полупростой компактной группы Ли K (в качестве которой можно взять максимальную компактную подгруппу в группе Ли G , предполагаемой нами односвязной). Более подробные сведения о натуральном расслоении (в частности, о его строении и о его структурной группе) можно найти, например, в [6], [7].

В этой статье мы рассмотрим случай, формально более общий, чем указано в заглавии статьи, т.е. компактные однородные пространства, база M_a которых одномерна, а слой M_c гомотопически эквивалентен четномерной сфере. На самом деле окажется, что все такие M диффеоморфны прямым произведениям $S^1 \times S^{2m}$, о которых говорится в заглавии статьи, или же ими двулистно или четырехлистно накрываются. Отметим также, что $\dim M_a$ всегда равна $\text{vcd}(\pi_1(M))$ – виртуальной когомологической размерности фундаментальной группы $\pi_1(M)$ компактного однородного пространства M (это число не меняется при переходе от M к многообразию M' , его конечнолистно накрывающему; подробнее см. [7]). Некоторые свойства компактного однородного пространства M , эквивалентные одномерности базы M_a его натурального расслоения, суммированы в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для компактного однородного пространства M следующие свойства эквивалентны:*

- 1) $\dim M_a = 1$;
- 2) *многообразие M_a диффеоморфно S^1 ;*
- 3) $\text{vcd}(\pi_1(M)) = 1$;
- 4) *группа $\pi_1(M)$ слабо соизмерима с $\mathbb{Z}$.*

Доказательства этих утверждений приведены в [6] (хотя там не используется в явном виде понятие слабой соизмеримости групп; см. также [7], где, в частности, дано определение понятия слабой соизмеримости групп и виртуальной когомологической размерности vcd). Отметим, что $\text{vcd}(\pi_1(M)) = 1$ не только для $\mathbb{Z}$, но и для любой группы, содержащей $\mathbb{Z}$ в качестве подгруппы конечного индекса (т.е. соизмеримой с $\mathbb{Z}$). Например, $\text{vcd}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = 1$, ибо, как известно, свободное произведение $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ двух циклических групп второго порядка содержит подгруппу индекса 2, изоморфную $\mathbb{Z}$.

При этом, если в предложении 1 дополнительно предположить, что $\pi_1(M)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ или же просто что группа $\pi_1(M)$ не имеет кручения (эти условия тут будут эквивалентны), то уже для самого однородного многообразия M (а не только для подходящего M' , его конечнолистно накрывающего) существует натуральное расслоение. Это для случая транзитивного действия на M компактной группы Ли (не обязательно полупростой) было фактически доказано в [5]. Точнее, там было доказано, что все орбиты максимальной компактной полупростой подгруппы в G на M – орбиты одного орбитного типа, что и приводит к существованию натурального расслоения для M . Но можно на основе доказательства из [8] в рассматриваемом нами здесь случае дать и более прямое доказательство существования натурального расслоения (более

простое, чем в [5]). В [8] существование натурального расслоения доказано для тех M , у которых фундаментальная группа не имеет кручения; при $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}$ это доказательство резко упрощается.

Что касается слоев натуральных расслоений для интересующих нас компактных однородных пространств, то некоторые их свойства суммированы в виде предложения 2. Напомним, что M_c – однородное пространство некоторой полупростой компактной группы Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – односвязное компактное однородное пространство некоторой полупростой компактной группы Ли. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- 1) многообразие M рационально гомотопически эквивалентно S^{2m} ;
- 2) M гомотопически эквивалентно сфере S^{2m} ;
- 3) M диффеоморфно S^{2m} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $3) \implies 2) \implies 1)$. Утверждение же $1) \implies 3)$ вытекает, например, из результатов А. Л. Онищика (см. [2], где описаны гомотопические свойства односвязных однородных пространств и нужные нам здесь связи между ними).

Отметим, что эквивалентные аналоги свойств 2) и 3) в предложении 2 справедливы и для случая произвольных сфер (а не только четномерных), а вот эквивалентность аналогов свойств 1) и 2) для нечетномерных сфер не имеет места; например, многообразие Штифеля $V_{n,2}$ рационально гомотопически эквивалентно сфере S^{4n-1} , но ей не диффеоморфно (и даже не будет гомотопически эквивалентно ей). В силу общих свойств компактных однородных пространств (в частности, в силу того, что универсальное накрывающее многообразие для компактного однородного пространства гомотопически эквивалентно универсальному накрывающему для слоя натурального расслоения; см., например, обзор [7]) мы получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для компактного однородного пространства M следующие условия эквивалентны:

- 1) универсально накрывающее его многообразие $\tilde{M}$ рационально гомотопически эквивалентно S^{2m} ;
- 2) универсально накрывающее его многообразие $\tilde{M}$ гомотопически эквивалентно S^{2m} ;
- 3) универсально накрывающее слоя натурального расслоения M_c для многообразия $\tilde{M}_c$ диффеоморфно S^{2m} .

Нам также понадобится описание всех компактных групп Ли, транзитивных на четномерных сферах (см., например, [2] или [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть K – односвязная компактная группа Ли (такая группа Ли автоматически полупроста), транзитивно и локально эффективно действующая на сфере S^{2m} . Тогда K изоморфна $\text{Spin}(2m+1)$ (группе Ли, двулистно накрывающей ортогональную группу $\text{SO}(2m+1)$) или же (при $m=3$, т.е. для сферы S^6) исключительной группе G_2 .

Более того, само транзитивное действие группы Ли K в предложении 3 единственно при $m \neq 3$ (с точностью до естественно понятого изоморфизма транзитивных действий; см. [2]). Опишем его более подробно. Имеем $S^{2m} =$

$SO(2m+1)/SO(2m)$, причем подгруппа $SO(2m)$ в $SO(2m+1)$ почти максимальна (она в качестве подгруппы индекса 2 содержится в подгруппе $S(O(1) \times O(2m))$, максимальной в $SO(2m+1)$). Для спинорной группы $Spin(2m+1)$, двулистно накрывающей ортогональную группу $SO(2m+1)$, ситуация аналогична. Далее, $S^6 = G_2/SU(3)$, 14-мерная компактная исключительная группа Ли G_2 есть подгруппа в $SO(7)$ (тоже, конечно, транзитивной на S^6), а стационарная подгруппа $SU(3)$ – 8-мерная максимальная подгруппа в G_2 .

В силу предложений 1 и 2 вместо формально более общего случая (когда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ слабо соизмерима с $\mathbb{Z}$ и M_c рационально гомотопически эквивалентно S^{2m}) мы имеем основания рассматривать только те компактные однородные пространства M , для которых $M_a = S^1$, $M_c = S^{2m}$.

Рассмотрим для такого M его универсальное накрывающее пространство $\tilde{M}$ и покажем, что $\tilde{M}$ диффеоморфно $S^{2m} \times \mathbb{R}$. Для этого используем расслоение Мостова (см. [7]) для односвязного однородного пространства $\tilde{M}$; это векторное расслоение, которое в рассматриваемом нами случае имеет вид $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{M} \rightarrow S^{2m}$. Характеристический класс этого расслоения лежит в одномерной группе когомологий $H^1(S^{2m}, \mathbb{Z}_2)$, которая, очевидно, при любом m тривиальна. Но это означает, что указанное векторное расслоение тривиально, поэтому, в частности, $\tilde{M}$ диффеоморфно $S^{2m} \times \mathbb{R}$. Но на самом деле имеет место и намного более сильное утверждение (см. теорему 1 ниже). Сделаем предварительно одно замечание.

Рассмотрим связную сумму $\mathbb{R}P^n \# \mathbb{R}P^n$ двух экземпляров вещественного проективного пространства. В [9] доказано, что это компактное многообразие является однородным. При этом оказывается, что при $n \geq 3$ само оно натурального расслоения не имеет, а натуральное расслоение имеется только для многообразия M' , его двулистно накрывающего. Это натуральное расслоение имеет вид $S^n \rightarrow M' \rightarrow S^1$, в частности, его база одномерна и диффеоморфна S^1 . При $n \geq 3$ фундаментальная группа $\pi_1(M)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Именно переход от $\pi_1(M)$ к подгруппе индекса 2, изоморфной $\mathbb{Z}$, и соответствует указанному выше многообразию M' , двулистно накрывающему M . При этом многообразие M не диффеоморфно $S^1 \times S^n$. Мы видим, что группа $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ играет важную роль при рассмотрении компактных однородных пространств с одномерной базой натурального расслоения.

Следующий результат мы докажем в общности большей, чем нам необходимо для нужд последующего изложения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – компактное однородное пространство, для которого $\text{vcd}(\pi_1(M)) = 1$, а его универсальное накрывающее многообразие $\tilde{M}$ рационально гомотопически эквивалентно S^{2m} . Тогда M диффеоморфно многообразию $S^1 \times S^{2m}$ либо же им двулистно или четырехлистно накрывается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – односвязная группа Ли, транзитивная на M . Рассмотрим в ней максимальную компактную подгруппу K (она тоже односвязна и поэтому обязательно полупроста). При построении натурального расслоения определяющую роль играет естественное действие группы Ли K на M . Все орбиты этого действия – одинаковой размерности, хотя может, вообще говоря, оказаться, что эти орбиты – разных орбитных типов (см. [6], [7]).

Слой натурального расслоения для подходящего M' , конечнолистно покрывающего M , в условиях теоремы 1 будет диффеоморфен S^{2m} в силу предложения 2. Но тогда орбиты естественного действия K на M могут быть диффеоморфны либо S^{2m} , либо $\mathbb{R}P^{2m}$ (это вытекает из описания групп Ли, транзитивных на четномерных сферах – см. выше). Докажем, что на самом деле в нашем случае орбит, диффеоморфных $\mathbb{R}P^{2m}$, здесь не будет. Для этого воспользуемся рассуждениями, приведенными для сходной ситуации в работе [5]. Как и в [5], мы рассмотрим факторпространство M/K , которое будет гомеоморфно окружности S^1 или же отрезку $I = [0, 1]$. В последнем случае действие K на M имеет две исключительные орбиты (соответствующие граничным точкам отрезка), причем ясно, что эти орбиты будут диффеоморфны $\mathbb{R}P^{2m}$ (ибо тут есть только два типа орбит). При этом, как замечено в [5], фундаментальная группа $\pi_1(M)$ порождается образами фундаментальных групп слоев при гомоморфизмах, индуцированных вложениями этих слоев в M . Фундаментальные группы слоев изоморфны, очевидно, $\mathbb{Z}_2$, и поэтому существует эпиморфизм $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_1(M)$. Группа $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ имеет (как следует из ее описания, данного выше) только одну факторгруппу, для которой $\text{vcd} = 1$; это может быть только она сама. В частности, группа $\pi_1(M)$ имеет кручение, и это обязательно 2-кручение.

Если $\pi_1(M)$ не имеет 2-кручения, то мы получаем, что M/K должно быть гомеоморфно S^1 (так как $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}$). В частности, все орбиты естественного действия K на M тут будут одного орбитного типа, и естественное действие K на M порождает расслоение (это и будет натуральное расслоение), слой которого – K -орбита (единственная с точностью до изоморфизма), а база – S^1 . Слой (он же K -орбита) не может быть диффеоморфен $\mathbb{R}P^{2m}$, так как в этом случае $\pi_1(M)$ имеет 2-кручение (это вытекает из точной гомотопической последовательности этого расслоения), что по нашему предположению невозможно. Поэтому слой – это S^{2m} , и мы имеем натуральное расслоение $S^{2m} \rightarrow M \rightarrow S^1$.

Если же группа $\pi_1(M)$ имеет кручение, то, как следует из сказанного выше, она изоморфна $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ и имеет подгруппу индекса 2, изоморфную $\mathbb{Z}$. Накрытие, соответствующее этой подгруппе, двулистно, и для пространства M' этого накрытия (которое тоже компактно и однородно) фундаментальная группа изоморфна $\mathbb{Z}$. В частности, по уже доказанному выше для этого M' имеется натуральное расслоение со слоем S^{2m} .

Структурная группа натурального расслоения – это группа $Q = N_K(L)/L$, где L – стационарная подгруппа группы K . В нашем случае $Q = \mathbb{Z}_2$, как следует из описания транзитивных действий компактных групп Ли на S^{2m} . Расслоение над S^1 определяется некоторым диффеоморфизмом слоя: он в нашем случае или тривиален, или имеет порядок 2. Отсюда и вытекает, что либо M диффеоморфно $S^1 \times S^{2m}$, либо двулистно или четырехлистно (при наличии у $\pi_1(M)$ кручения – см. выше) накрывается этим многообразием.

Из теоремы 1 и из ее доказательства легко выводится

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если компактное однородное пространство гомотопически эквивалентно многообразию $S^1 \times S^{2m}$, то оно ему и диффеоморфно.*

Можно предложить и еще один подход к доказательству утверждений, сходных с теоремой 1. Если предположить, что группа $\pi_1(M)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ (а именно к такому изоморфизму мы пришли в одном из возможных случаев при

доказательстве теоремы 1 выше), то, как следует из [8], само однородное пространство M имеет натуральное расслоение, т.е. тут нет необходимости переходить к конечнолистному накрытию. Доказательство в [8] использует в основном алгебраические методы (и рассуждение, которое там является более общим, для случая $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ можно сделать весьма несложными), в отличие от использованного в [5], основанного на топологических методах.

§ 2. Строение транзитивных групп Ли

Основываясь на результатах предыдущего параграфа, мы в дальнейшем будем рассматривать только многообразия, диффеоморфные многообразиям $M = S^1 \times S^{2m}$, и изучать группы Ли, транзитивные на них. Наша задача – описать строение групп Ли, транзитивных на таких многообразиях. В более общей ситуации, когда M конечнолистно покрывается многообразием $S^1 \times S^{2m}$, строение транзитивных групп практически то же (это вытекает из описания транзитивных групп Ли, данного в теореме 2 ниже).

Итак, пусть $G/H = S^1 \times S^{2m}$, где G – односвязная группа Ли, транзитивно и локально эффективно действующая на многообразии $M = S^1 \times S^{2m}$. Тогда натуральное расслоение для однородного пространства G/H существует (ибо $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}$ – группа без кручения) и имеет вид $S^{2m} \rightarrow G/H \rightarrow S^1$. Мы часто будем использовать разложение Леви для односвязной группы Ли G , т.е. представление ее в виде полупрямого произведения $G = S \cdot R$ радикала R и полупростой части (фактора Леви) S . Следующая теорема дает описание строения групп Ли, транзитивных на $S^1 \times S^{2m}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – односвязная группа Ли, транзитивно и локально эффективно действующая на многообразии $S^1 \times S^{2m}$. Тогда либо $G = S \cdot \mathbb{R}^n$ – полупрямое произведение простой группы Ли S и абелева радикала $\mathbb{R}^n$ (при некотором $n \geq 0$), либо $G = S \times \mathcal{A}$ (где группа Ли $\mathcal{A}$ – универсальная накрывающая группы Ли $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$), причем простая группа S – это универсальная накрывающая одной из следующих простых групп Ли: $\mathrm{SO}(2m+1)$, $\mathrm{SO}(2m+1, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(2m+1, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(1, 2m+1)$, или же она – компактная исключительная группа Ли G_2 (при $m = 3$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение Леви $G = S \cdot R$ для группы Ли G (где R – радикал, S – полупростая часть). Докажем вначале, что радикал R абелев.

Рассмотрим нормализатор $N_G(H_0)$ связной компоненты единицы H_0 стационарной подгруппы H в G . Так как многообразие G/H по условию компактно, то этот нормализатор является t -подгруппой, т.е. содержит некоторую максимальную треугольную подгруппу группы Ли G (подробности см. в [6], [7]). Через P обозначим подгруппу в G , порожденную H и $(N_G(H_0))_0$ (эта подгруппа замкнута, тоже является t -подгруппой и содержит H). Положив $F = P_0/H_0$, мы получим связную группу Ли, причем $P/H = F/\Gamma$, где $\Gamma = H/H_0$ – решетка в F (т.е. дискретная подгруппа с компактным факторпространством).

Рассмотрим расслоение (гладкое, локально тривиальное)

$$P/H \rightarrow M = G/H \rightarrow G/P.$$

Пусть K – максимальная компактная подгруппа в группе Ли G . Так как группа Ли G по условию односвязна, то компактная группа Ли K полупроста. Рассмотрим естественное действие группы Ли K на базе G/P введенного выше расслоения.

Если L – стационарная подгруппа для некоторой точки $m \in M$ относительно естественного действия K на G/H , то, как уже отмечалось раньше, $K/L = S^{2m}$. Подгруппа L , как было сказано выше, почти максимальна в K и, очевидно, содержится в стационарной подгруппе действия K на G/P (ибо $H \subset P$). Но тогда орбиты естественного действия K на G/P либо являются точками (что возможно, только если $K \subset P$), либо они диффеоморфны S^{2m} или же $\mathbb{R}P^{2m}$. Рассмотрим эти два возможных случая.

Если орбита точки $m \in M$ относительно естественного действия K на G/P – точка, то $K \subset P$ и $\dim(P/H) \geq 2m$ (ибо $\dim(P/H) \geq \dim(K/L) = 2m$). Но тогда будет $\dim(G/P) \leq 1$. Если $\dim(G/P) = 0$, то H_0 нормальна в G , и поэтому в силу локальной эффективности действия G на $S^1 \times S^{2m}$ подгруппа H_0 будет тривиальна, т.е. подгруппа H дискретна. Но тогда многообразие G/H , очевидно, будет параллелезуемо, но это невозможно, так как многообразие $S^1 \times S^{2m}$ параллелезуемым не является (например, потому что его универсальное накрытие имеет положительную эйлерову характеристику). Поэтому должно быть $\dim(G/P) = 1$, тогда $G/P = S^1$ и, как нетрудно понять, $P/H = S^{2m}$. Но $P/H = F/\Gamma$ (где Γ – дискретная подгруппа) и поэтому многообразие P/H параллелезуемо (нам на самом деле важно лишь, что его эйлерова характеристика равна нулю). Многообразие P/H не может быть диффеоморфно S^{2m} (четномерная сфера не параллелезуема, более того, ее эйлерова характеристика ненулевая). Полученное противоречие показывает, что орбиты действия K на G/P не могут быть точками. Но тогда они будут диффеоморфны S^{2m} или $\mathbb{R}P^{2m}$. В этом случае либо $G/P = S^{2m}$, либо $G/P = \mathbb{R}P^{2m}$, либо $G/P = G/H$.

Если $G/P = G/H$, то $H = P$. Но тогда H является t -подгруппой, и с помощью стандартного рассуждения (использованного еще А. Л. Онищиком в [10], [11]) получаем, что группа Ли G полупроста. В частности, ее радикал тривиален. Ниже мы продолжим изучение строения группы Ли G для этого случая. А пока переходим к рассмотрению случая, когда $G/P = S^{2m}$ или $G/P = \mathbb{R}P^{2m}$; здесь $P/H = S^1$. Действие G на G/P может оказаться неэффективным. На S^{2m} эффективно может действовать только полупростая группа, это впервые доказал еще Р. Херман (см. [10], [11]). Поэтому радикал группы Ли G содержится в P . Так как H_0 нормальна в P_0 , то $P_0/H_0 = \mathbb{R}$ – одномерная абелева группа Ли. Поэтому $[P, P] \subset H_0$ и $[R, R] \subset H_0$. В силу локальной эффективности должно быть $[R, R] = \{e\}$, т.е. радикал R группы Ли G абелев.

Итак, радикал R абелев, и потому разложение Леви группы Ли G имеет вид $G = S \cdot_{\phi} \mathbb{R}^n$, где $\phi: S \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – некоторое линейное представление полупростой группы Ли S . Изучим теперь поподробнее группу Ли S .

Максимальная компактная подгруппа K группы Ли G на самом деле есть максимальная компактная подгруппа в S . Так как K односвязна, полупроста и транзитивна на S^{2m} , то из предложения 3 следует, что $K = \mathrm{Spin}(2m+1) \times K_2$ или же $K = G_2 \times K_2$ при $m = 3$ (где K_2 – некоторая компактная полупростая односвязная группа Ли). При этом $L \supset K_2$, поэтому действие подгруппы Ли K_2 , нормальной в K , на точки любой орбиты группы Ли K тривиально. Но тогда K_2 тривиально действует на многообразии M , поэтому в силу локаль-

ной эффективности действия G на M должно быть $K_2 = \{e\}$. Следовательно, $K = \text{Spin}(2m+1)$ или же $K = G_2$ (при $m = 3$), в частности K проста.

Так как мы доказали, что K проста, то $S = S_1 \times S_2$, где группа Ли S_1 проста и содержит K как максимальную компактную подгруппу, а в полупростой группе Ли S_2 максимальная компактная подгруппа тривиальна. Существует только одна простая односвязная группа Ли, у которой максимальная компактная подгруппа тривиальна: это трехмерная группа Ли $\mathcal{A}$ – универсальная накрывающая для группы Ли $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Поэтому группа Ли S_2 – прямое произведение нескольких экземпляров группы Ли $\mathcal{A}$. Далее, если $K = \text{Spin}(2m+1)$, то простая группа Ли S_1 , содержащая ее как максимальную компактную подгруппу, как следует из классификации, может быть локально изоморфна только одной из следующих: $\text{SO}(2m+1)$, $\text{SO}(2m+1, \mathbb{C})$, $\text{SL}(2m+1, \mathbb{R})$, $\text{SO}(1, 2m+1)$, $\text{SO}(2, 2m+1)$ или $F_4\Pi$ (при $m = 4$). Если $K = G_2$, то из той же классификации следует, что S_1 может быть изоморфна только компактной группе Ли G_2 или же ее комплексификации $G_2(\mathbb{C})$. В результате получаем пять бесконечных серий простых групп Ли (из них одна – компактная серия) и три исключительные группы Ли (из них две – компактные). Это именно те S , которые перечислены в утверждении теоремы 2, кроме $F_4\Pi$, $G_2(\mathbb{C})$, $\text{SO}(2, 2m+1)$ (ниже доказано, что в нашей ситуации они появиться не могут). Нам остается только выяснить, какова же на самом деле группа Ли S_2 .

Если $P = H$ (этот случай рассматривался выше), то покажем, что в этом случае группа $S_2 = \mathcal{A}$ или же она тривиальна. Тут G полупроста, и мы имеем разложение $G = S_1 \times S_2$ и $S_2 = \times_{i=1}^l \mathcal{A}_i$. Рассмотрим связную подгруппу $\hat{K} \subset G$, соответствующую некоторой максимальной компактной подалгебре в алгебре Ли группы Ли S . Так как максимальная компактная подалгебра в алгебре Ли группы Ли $\mathcal{A}$ одномерна и абелева, то $\hat{K} \simeq K \times \mathbb{R}^l$. Рассмотрим некоторую максимальную треугольную подгруппу Ли T в S . Имеем разложение Ивасава $S = \hat{K} \cdot T$. В нашем случае $P = H$, и потому H содержит некоторую треугольную подгруппу группы Ли G и, в частности, некоторую максимальную треугольную подгруппу группы Ли S (мы можем считать, что это – введенная выше T). Тогда $\hat{K} \cdot H = G$, и потому на многообразии G/H транзитивна подгруппа Ли $\hat{K}$. Но тогда в силу леммы 1, сформулированной и доказанной ниже, имеем $l \leq 1$. Тем самым при $P = H$ утверждение о строе-нии S из нашей теоремы доказано.

Если же $P \neq H$, то $G/P = S^{2m}$ или $G/P = \mathbb{R}P^{2m}$. Мы докажем, что в этом случае на самом деле $S_2 = \{e\}$. Так как G/P односвязно, то на нем транзитивна максимальная компактная подгруппа односвязной группы Ли G , а потому будет транзитивна и подгруппа S_1 (так как ее максимальная компактная подгруппа будет максимальной компактной подгруппой и в G). Но тогда получаем, что $S_2 \subset P$. Так как $P_0/H_0 = \mathbb{R}$ (см. выше), то $S_2 \subset H$, ибо группа Ли S_2 полупроста.

Рассмотрим подгруппу $U = S_2 \cdot R$ в G . Так как радикал R абелев, то $P \subset U$. Но P_0/H_0 абелева, и потому $[U, U] \subset H$. Так как U , очевидно, нормальна в G , то $[U, U]$ тоже нормальна в G . Но она лежит в H , и потому в силу локальной эффективности должно быть $[U, U] = \{e\}$. Однако S_2 содержится в $[U, U]$, и потому получаем, что $S_2 = \{e\}$.

Теперь покажем, что случаи $S_1 = F_4\Pi$, $G_2(\mathbb{C})$, $\text{SO}(2, 2m+1)$ невозможны. Для этого прежде всего заметим, что если S_1 изоморфна одной из этих групп,

то S_1 будет транзитивна на $S^1 \times S^{2m}$ (при соответствующем m). Максимальная компактная подгруппа K в S_1 транзитивна на S^{2m} , но сама S_1 не может транзитивно действовать на сфере (это вытекает из классификации всех транзитивных полупростых групп Ли, транзитивных на сферах; см. выше). Поэтому орбиты S_1 имеют размерность $2m + 1$ и являются открытыми. Но тогда любая из этих орбит совпадает с $S^1 \times S^{2m}$ и действие группы Ли S_1 на M – транзитивно. Остается доказать, что ни одна из трех указанных выше групп Ли не может транзитивно действовать на $S^1 \times S^{2m}$ (ни при каком m). Для этого используем результаты А. Л. Онищика [10], [11]. Там показано, что подгруппа P , введенная нами выше, является t -подгруппой, и дано описание строения t -подгрупп в полупростых группах Ли. В частности, для $S_1 = F_4\Pi$ максимальная компактная подгруппа K изоморфна $\text{Spin}(9)$, а максимальная компактная подгруппа в любой нетривиальной t -подгруппе изоморфна $\text{Spin}(7)$ (так как имеется только один белый корень в схеме Сатаке для алгебры Ли $F_4\Pi$). Но тогда ясно, что естественное действие группы K на M не может иметь орбитами сферы S^8 . Аналогично показывается и невозможность в нашей ситуации случаев $S_1 = G_2(\mathbb{C})$, $\text{SO}(2, 2m + 1)$.

Этим доказательство теоремы 2 завершено.

Утверждение теоремы 2 можно переформулировать и следующим образом: полупростая часть S группы Ли G – это либо одна из групп Ли, транзитивных на четномерных сферах, либо же сама G полупроста и имеет вид $S_1 \times \mathcal{A}$. Убедимся, что все возможные из указанных выше группы S действительно могут транзитивно действовать на $S^1 \times S^{2m}$. Если простая группа Ли S транзитивно действует на некоторой четномерной сфере, то для группы Ли $S \times \mathbb{R}$, очевидно, существует транзитивное действие на прямом произведении этой сферы на окружность $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Далее, так как группа Ли $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ может транзитивно действовать на S^1 (стационарная подгруппа тут – максимальная треугольная подгруппа), а S_1 – на некоторой четномерной сфере, то ясно, что $S_1 \times \mathcal{A}$ имеет транзитивное действие на прямом произведении окружности и этой четномерной сферы.

Теперь мы докажем одно утверждение, которое уже было использовано выше при доказательстве теоремы 2. Оно также позволяет усилить основное утверждение работы [5], где рассматривался только случай, когда $l = 1$ (а теперь получается, что это – излишнее предположение).

ЛЕММА 1. Пусть на многообразии $M = S^1 \times S^n$ транзитивно и локально эффективно действует группа Ли вида $G = K \times \mathbb{R}^l$, где K – некоторая компактная односвязная (и потому полупростая) группа Ли. Тогда $l \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в работе [5], нетрудно доказать, что орбиты естественного действия подгруппы Ли $K \subset G$ диффеоморфны S^n , в частности они имеют коразмерность 1 в M .

Рассмотрим теперь пересечение $H_0 \cap \mathbb{R}^l$ подгруппы H_0 с радикалом группы Ли G . Если $l \geq 1$ (т.е. радикал группы Ли G нетривиален), то это пересечение не может совпадать с радикалом (в силу локальной эффективности действия G на M). Но тогда это пересечение – связный нормальный делитель в G . Его коразмерность равна 1, так как орбиты радикала не могут иметь размерность больше чем 1 (ибо $\dim K \setminus G/H = \dim M_a = 1$; здесь M_a – база натурального расслоения для M , которая, очевидно, диффеоморфна S^1). В силу локальной

эффективности получаем, что это пересечение должно быть тривиально. Но это возможно, только если $l = 1$. Тем самым доказано, что всегда $l \leq 1$.

В силу теоремы 2 группа Ли, транзитивная на $S^1 \times S^{2m}$, либо полупроста (и тогда имеет вид $S \times \mathcal{A}$), либо есть полупрямое произведение $S \times_\phi \mathbb{R}^n$ полупростой группы Ли S и $\mathbb{R}^n$, отвечающее некоторому линейному представлению $\phi: S \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Можно доказать, что на самом деле представление ϕ обязательно будет неприводимым. Более того, можно было бы указать, какие именно значения n возможны для той или иной группы Ли S , но мы этим здесь заниматься не будем.

Описание всех транзитивных действий фиксированной группы Ли G на некотором многообразии – это описание всех возможных стационарных подгрупп. Для сфер это сделано в [2] (если полупростая часть компактна) и в [12] – в общем случае. Для случая $S^1 \times S^{2m}$ мы здесь подобными общими рассмотрениями заниматься не будем. Мы отметим только одно полезное следствие теоремы 2, касающееся несократимых транзитивных действий.

Транзитивное действие группы Ли G на многообразии M называется *несократимым*, если оно локально эффективно и G не имеет собственных подгрупп Ли, транзитивных на M . Несократимые действия иногда называют *минимальными* (они действительно минимальны в определенном смысле этого слова среди всех транзитивных действий). Из теоремы 2 легко выводится

СЛЕДСТВИЕ 3. *Несократимо действовать на $S^1 \times S^{2m}$ могут только группы Ли $\mathrm{Spin}(2m+1) \times_\phi \mathbb{R}^n$ или же $G_2 \times_\phi \mathbb{R}^n$ (при $m = 3$); здесь ϕ – неприводимое представление, причем весьма специального типа.*

Перейдем к более подробному описанию тех представлений ϕ , которые фигурируют в следствии 3. Для $G = \mathrm{Spin}(2m+1) \times_\phi \mathbb{R}^n$ связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы H имеет, как вытекает из изложенного выше, вид $H_0 = \mathrm{Spin}(2m) \cdot V$, где V – некоторое подпространство коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$, причем инвариантное относительно $\mathrm{Spin}(2m)$. В результате мы приходим к необходимости описать неприводимые представления группы $\mathrm{Spin}(2m+1)$, имеющие $\mathrm{Spin}(2m)$ -инвариантное подпространство коразмерности 1.

При $m = 1$ (этот вопрос рассматривался в связи с трехмерными однородными пространствами) были выделены представления нечетной размерности (см. [13]).

В [14] дано в явном виде описание неприводимых представлений группы B_m (т.е. $\mathrm{Spin}(2m+1)$) и его ограничения на $\mathrm{Spin}(2m)$. Ограничение это описывается через его разложение на неприводимые представления. (Можно было бы дать и описание в терминах старших весов представлений.)

Представление группы Ли B_m задается набором чисел, целых или полуцелых одновременно $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, для которых $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$. Тривиальному представлению (одномерному) соответствует набор чисел $(0, 0, \dots, 0)$. Тривиальное представление содержится в разложении на неприводимые ограничения на $\mathrm{Spin}(2m)$ тогда и только тогда, когда исходное представление задается набором $(k_1, 0, \dots, 0)$, где k_1 – целое положительное число. В терминах весов это представление, соответствующее $k\pi_1$ (мы заменили здесь k_1 на k), будем его обозначать ϕ_k и называть *допустимым*. Его размерность равна, как известно,

$$\frac{2m+2k-1}{2m+k-1} C_{2m+k-1}^k.$$

В частности, при $k = 1$ получим представление размерности $2m + 1$ (каноническое представление ортогональной группы).

Для $M = S^1 \times S^{2m+1}$ можно получить результаты, аналогичные теореме 2, но формулироваться они будут значительно более громоздко.

§ 3. Однородные обобщенные четырехугольники

Дадим здесь одно применение полученных выше результатов к изучению одного класса однородных инцидентностных геометрических структур. Во многом именно знакомство с работой [5] привело к написанию данной статьи и к решению сформулированного в [4] и [5] вопроса о существовании транзитивных компактных подгрупп Ли в группах автоморфизмов таких структур.

Нам понадобятся некоторые определения (подробнее см., например, [4], [5]). Начнем с определения инцидентностной геометрии, или геометрии инцидентностей (русскоязычная терминология пока не установилась, автору ближе термин “инцидентностная геометрия” – по аналогии с “проективной геометрией”, “евклидовой геометрией” и т.п.).

Пусть заданы два множества $\mathcal{P}, \mathcal{L}$, называемые *множествами точек и прямых* соответственно. Инцидентностная геометрия задается выбором подмножества $\mathcal{F} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Говорят, что точка $p \in \mathcal{P}$ *инцидентна* прямой $l \in \mathcal{L}$, если $(p, l) \in \mathcal{F}$. Подмножество $\mathcal{F}$ называют иногда *множеством флагов*, но в данном случае это название не очень удачно, так как пара (p, l) визуально больше напоминает не флаг, а его древко.

Через $\mathcal{L}_p$ обозначается множество прямых, проходящих через заданную точку p (инцидентных ей), а через $\mathcal{P}_l$ – множество точек на прямой l . Множества $\mathcal{P}, \mathcal{L}$ могут быть, вообще говоря, произвольными, но мы будем рассматривать только случай, когда они являются гладкими многообразиями; в этом случае предполагается, что $\mathcal{F}$ – гладкое подмногообразие в $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Если $\dim \mathcal{L}_p = r$, $\dim \mathcal{P}_l = s$, то говорят, что рассматривается *инцидентностная геометрия типа (r, s)* . В частности, при $s = 1$ множества точек на прямой – одномерные многообразия.

Обобщенным прямоугольником (generalized quadrangle), или, сокращенно, GQ-структурой, называется такая инцидентностная геометрия, для которой выполнены следующие два условия (из которых второе – самое существенное для данного понятия):

- (i) любые две точки инцидентны не более чем одной прямой;
- (ii) для любой прямой $l \in \mathcal{L}$ и любой точки $p \in \mathcal{P}$, не лежащей на l (т.е. $p \notin l$, или, что эквивалентно, $(p, l) \notin \mathcal{F}$), существует, причем ровно один, такой флаг $(q, h) \in \mathcal{F}$, что $p \in h$, $q \in l$; другими словами, через любую точку, не лежащую на прямой, проходит ровно один перпендикуляр к этой прямой (именно роль перпендикуляра, пересекающего прямую l в точке q , и выполняет прямая h).

Для объяснения, почему такая структура называется *обобщенным четырехугольником*, рассмотрим два простейших примера: один дискретный (даже конечный), другой – непрерывный. Рассмотрим вначале обычный прямоугольник (предполагая, что его стороны “продолжены до бесконечности”, т.е. рассматривая его четыре стороны как прямые). В качестве точек возьмем четыре вершины этого прямоугольника. Ясно, что для таких $\mathcal{L}, \mathcal{P}$ с естественным

отношением инцидентности указанное выше условие выполняется. Это пример с конечными $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$. Возьмем теперь в качестве $\mathcal{P}$ все точки на декартовой плоскости (т.е. плоскости, на которой выбрана декартова система координат), а в качестве $\mathcal{L}$ – множество всех прямых, параллельных какой-то из двух координатных осей. Легко понять, что здесь мы тоже имеем обобщенный прямоугольник, но уже “непрерывный”. Тут $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ – гладкие многообразия, причем $r = 0$ (так как $\mathcal{L}_p$ нульмерно, ибо состоит из двух элементов) и $s = 1$.

В более общем контексте понятие обобщенного четырехугольника возникло при изучении билдингов Титса. Обычно к указанным выше условиям (i), (ii) добавляют еще условие наличия не менее чем трех точек на прямой и не менее чем трех прямых, проходящих через каждую точку, но в непрерывном случае (а именно он нас и интересует) эти дополнительные условия излишни (при $r, s > 0$).

Известно топологическое строение компактных связных обобщенных прямоугольников. Нас будет интересовать в основном случай, когда $s = 1$ (по причине, объясненной ниже); в этом случае $\mathcal{P}_l$ гомеоморфно окружности S^1 , $\mathcal{L}_p$ гомотопически эквивалентно сфере S^r , а $\mathcal{P}$ рационально гомотопически эквивалентно $S^1 \times S^r$ (что для нас особенно интересно).

Автоморфизмом инцидентностной геометрии называется такое взаимно однозначное отображение $\phi: \mathcal{P} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, что $\phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, $\phi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ и $\phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Другими словами, автоморфизмы должны сохранять отношение инцидентности. Через $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ обозначим множество всех автоморфизмов инцидентностной геометрии.

Рассмотрим теперь понятие однородной инцидентностной геометрии. Оно может быть введено несколькими существенно различными способами. Инцидентностная геометрия может называться *однородной*, если естественное действие группы $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ транзитивно или на $\mathcal{P}$, или на $\mathcal{L}$, или на $\mathcal{F}$ (что дает разные варианты понятия однородности). Нас будет интересовать только первый случай – когда группа автоморфизмов транзитивна на множестве точек $\mathcal{P}$. При этом мы будем рассматривать только гладкий случай и предполагать, что автоморфизмы являются диффеоморфизмами. В этом случае оказывается, что группа $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ является группой Ли (подробнее см., например, [4]). Условие однородности общей инцидентностной геометрии не очень ограничительно в общем случае – нужна лишь транзитивность действия на одном из многообразий $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$. Но для GQ-структур условие однородности уже является довольно сильным ограничением. При $r, s > 1$ все однородные четырехугольники были описаны (см. обзор результатов такого рода в [5]). Однако один случай (когда $s = 1$) оказался более сложным. Но именно этот случай и соответствует теме данной статьи, так как тут условие однородности – это условие транзитивности группы автоморфизмов на многообразии, рационально гомотопически эквивалентном $S^1 \times S^n$. Как следует из доказанного выше (см. следствие 1), на самом деле многообразие будет даже диффеоморфно $S^1 \times S^n$.

В [4; с. 45] было отмечено, что при $s = 1$ не известны примеры связных компактных обобщенных прямоугольников, для которых группа автоморфизмов транзитивна на множестве точек $\mathcal{P}$, но для которых не существует компактной подгруппы в группе автоморфизмов, транзитивной на $\mathcal{P}$. В соответствии с этим в [5] изучались только компактные группы Ли, транзитивные на $S^1 \times S^n$. Конечно, на $S^1 \times S^n$ транзитивны и не только компактные группы

Ли, причем такие транзитивные действия могут быть даже несократимыми, но вопрос в том, будут ли эти действия сохранять некоторую GQ-структуру. Мы докажем, что примеров указанного в [5] рода на $S^1 \times S^{2m}$ просто не существует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Несократимая транзитивная группа Ли автоморфизмов GQ-структур на $S^1 \times S^{2m}$ при $m \neq 3$ изоморфна группе Ли $\text{Spin}(2m+1) \times \mathbb{R}$, а при $m = 3$ – группе Ли $G_2 \times \mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае многообразие $\mathcal{P}$ диффеоморфно $S^1 \times S^{2m}$. Вначале предположим, что $m \neq 3$.

Пусть $G/H = S^1 \times S^{2m}$, где G – односвязная группа автоморфизмов GQ-структуры. Предположим, что группа Ли G несократима на $S^1 \times S^{2m}$. Тогда по следствию 3 будет $G = \text{Spin}(2m+1) \cdot_\phi \mathbb{R}^n$. При этом $H = \text{Spin}(2m) \cdot V$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ – подпространство коразмерности 1. Для точек из M все стационарные подгруппы сопряжены. Выберем некоторую точку $p \in M$.

Рассмотрим $\mathcal{L}_p$ – множество прямых, проходящих через точку p ; на нем естественным образом действует стационарная подгруппа G_p точки $p \in \mathcal{P}$ (сопряженная с H). Покажем, что $\text{Spin}(2m)$ (почти максимальная компактная подгруппа в G_p) транзитивна на $\mathcal{L}_p$. Для этого заметим, что $\text{Spin}(2m)$ не имеет собственных подгрупп Ли коразмерности, меньшей чем $2m-1$ (см., например, [15; с. 67]). С другой стороны, как уже было отмечено, $\mathcal{L}_p$ гомотопически эквивалентно S^{2m-1} . Поэтому орбиты естественного действия $\text{Spin}(2m)$ на $\mathcal{L}_p$ или открыты, или же являются точками. Но все они точками быть не могут, так как тогда действие группы Ли G не будет локально эффективно (см. [4; гл. 4]). Поэтому обязательно существует открытая орбита, но она компактна и потому совпадает с $\mathcal{L}_p$, т.е. действие $\text{Spin}(2m)$ на $\mathcal{L}_p$ транзитивно.

На $\mathcal{L}_p = S^{2m}$ выберем $2m$ “точек” l_i (т.е. прямых, проходящих через точку p) общего положения.

Пусть $G_{p,l}$ – стационарная подгруппа точки $p \in \mathcal{P}$ и некоторой прямой $l \in \mathcal{L}$, проходящей через эту точку. Тогда $G_{p,l}$ естественным образом действует на множество точек этой прямой l (диффеоморфной S^1). Рассмотрим орбиты этого действия; это могут быть точки, интервалы и их объединения или же это действие транзитивно (и тогда орбита только одна – сама окружность). Рассмотрим нетривиальные орбиты – отрезки (диффеоморфные $\mathbb{R}$) и окружность S^1 . На одномерных связных многообразиях могут транзитивно и локально эффективно действовать только $\mathbb{R}$, разрешимая двумерная группа Ли и простая группа Ли, локально изоморфная $\mathcal{A}$ (универсальной накрывающей для $\text{SL}(2, \mathbb{R})$). Но $\mathcal{A}$ не может содержаться в нашей группе Ли G (строение которой описано выше). Поэтому в $G_{p,l}$ существует подгруппа $G_{p,l}^0$ коразмерности ≤ 1 , которая действует на точки прямой l тривиально. Для такой подгруппы обозначим ее максимальную компактную подгруппу через $K_{p,l}^0$ и рассмотрим пересечение $\bigcap_{i=1}^{2m} K_{p,l_i}^0$. Докажем, что это пересечение тривиально.

Для этого нам понадобятся некоторые подробности геометрии обобщенных прямоугольников. Из определения GQ-структуры следует существование проекции $\pi: \mathcal{P} \times \mathcal{L} \setminus \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}$, которая точке p , не лежащей на прямой l , сопоставляет точку q , фигурирующую в определении GQ-структуры (см. выше). Отображение π гладкое. Рассмотрим теперь проекции $x_i = \pi(x, l_i)$ для точек $x \in M$; все вместе x_i определены для любой точки x , лежащей вне всех выбранных выше прямых l_i . Возьмем теперь координатное отображение $c: x \rightarrow$

$(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$, определенное на открытом подмножестве $U = \mathcal{L}_p \setminus (\bigcup l_i)$ в $\mathcal{L}_p$. Оно является гладким и имеет максимальный ранг (так как точки l_i являются точками общего положения; подробнее см. [4], [16]). Поэтому отображение c – локальный диффеоморфизм.

Рассмотрим введенное выше пересечение $\bigcap_{i=1}^{2m} K_{p,l_i}^0$. Элементы этой группы действуют на точки прямых l_i тривиально, поэтому, в частности, и x_i относительно них неподвижны. Но тогда это действие тривиально и на всем подмножестве U , а так как оно открыто, то и на всем $\mathcal{L}_p$. Отсюда выводится, что связная компонента единицы группы Ли $\bigcap_{i=1}^{2m} K_{p,l_i}^0$ лежит в ядре неэффективности действия группы Ли G (см. [4; гл. 4], где берутся две проекции и две координаты, а здесь их $2m$). Но тогда связная компонента компактной подгруппы Ли $\bigcap_{i=1}^{2m} K_{p,l_i}^0$ должна быть тривиальна в силу эффективности действия группы автоморфизмов.

От рассмотрений максимальных компактных подгрупп вернемся к рассмотрению групп $G_{p,l}$ и подгрупп $G_{p,l}^0$ в них. Рассмотрим пересечения $G_{p,l} \cap \mathbb{R}^n$ с радикалом группы Ли G . Напомним, что в силу следствия 3 $G = \text{Spin}(2m) \times_{\phi} \mathbb{R}^n$, где ϕ – допустимое представление. Пересечение $G_{p,l_i} \cap \mathbb{R}^n$ имеет в $\mathbb{R}^n$ коразмерность ≤ 1 (см. выше), а потому пересечения $G_{p,l_i}^0 \cap \mathbb{R}^n$ имеют коразмерность ≤ 2 (ибо коразмерность G_{p,l_i}^0 в G_{p,l_i} не больше 1). Поэтому пересечение $(\bigcap G_{p,l_i}) \cap \mathbb{R}^n$ имеет в $\mathbb{R}^n$ коразмерность не больше $4m$. Группа Ли $\bigcap G_{p,l_i}$ имеет, как доказано выше, тривиальную максимальную компактную подгруппу. Поэтому она лежит в $\mathbb{R}^n$, при этом так же, как в [4] при доказательстве леммы 4.2.4, показывается, что и в нашей ситуации указанная группа Ли действует на $S^1 \times S^{2m}$ тривиально. Поэтому в силу эффективности действия группы Ли G пересечение $\bigcap G_{p,l_i} \subset \mathbb{R}^n$ должно быть тривиально. Но это возможно, только если $4m \geq n$.

Выясним теперь, для каких допустимых представлений может выполняться неравенство $4m \geq n$. Допустимые представления – это представления вида $k\pi_1$ (см. выше). При $k = 0, 1$ для них указанное неравенство, как легко проверить, выполнено, а для $k \geq 2$ оно уже не выполняется. Поэтому должно быть только $k = 0$ или $k = 1$. При $k = 0$ получаем прямое произведение $G = \text{Spin}(2m+1) \times \mathbb{R}$, а при $k = 1$ – группу Ли $G = \text{Spin}(2m+1) \times_{\phi_1} \mathbb{R}^{2m+1}$. Покажем, что второй случай в нашей ситуации невозможен. Дело в том, что должно быть $G_p = \text{Spin}(2m) \times_{\psi} \mathbb{R}^{2m}$, где ψ – тоже неприводимое представление. Но такая группа Ли G_p не может нетривиально действовать на одномерном многообразии (все возможные тут группы Ли были перечислены выше), и потому в этом случае подгруппы G_{p,l_i}^0 , введенные выше, совпадают с G_{p,l_i} , а их пересечения с $\mathbb{R}^n$ имеют коразмерность 1, а не ≤ 2 , как в общем рассуждении. Но тогда рассуждения, приведенные выше, приводят к неравенству $2m \geq n$. А это неравенство уже не выполняется ни для одного допустимого представления, кроме тривиального. Итак, представление ϕ обязательно тривиально, что и завершает наше доказательство в случае $m \neq 3$.

Случай $m = 3$ разбирается аналогично, только там вместо спинорной группы будет фигурировать исключительная компактная группа G_2 .

В заключение отметим, что утверждение предложения 4, видимо, верно и для нечетных значений $r = 2m + 1$.

Список литературы

- [1] D. Montgomery, H. Samelson, "Transformation groups of spheres", *Ann. of Math.* (2), **44**:3 (1943), 454–470.
- [2] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, М., 1995; англ. пер.: A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Barth, Leipzig, 1994.
- [3] B. Kamerich, *Transitive transformations groups on product of two spheres*, Meppel, Krips Repro, 1977.
- [4] L. Kramer, "Homogeneous spaces, Tits buildings, and isoparametric hypersurfaces", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **158**:752 (2002).
- [5] O. Bletz-Siebert, "Almost transitive actions on spaces with the rational homotopy of sphere products", *J. Lie Theory*, **15**:1 (2005), 1–11.
- [6] В. В. Горбачевич, "Об одном расслоении компактного однородного пространства", *Тр. ММО*, **43** (1981), 116–141; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, "On a fibration of compact homogeneous spaces", *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1983, № 1, 129–157.
- [7] В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, "Группы Ли преобразований", *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240.
- [8] В. В. Горбачевич, "Критерий существования натурального расслоения для компактного однородного многообразия", *Матем. заметки*, **35**:2 (1984), 277–285; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, "A criterion for the existence of a natural fibering for a compact homogeneous manifold", *Math. Notes*, **35**:2 (1984), 147–151.
- [9] V. Gorbatsevich, "Connected sums of compact manifolds and homogeneity", *Lie groups and invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 113–128.
- [10] А. Л. Онищик, "О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях", *Матем. сб.*, **71(113)**:4 (1966), 483–494; англ. пер.: A. L. Onishchik, "On Lie groups transitive on compact manifolds", *Math. USSR-Sb.*, **73** (1968), 59–72.
- [11] А. Л. Онищик, "О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях. II", *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 398–416; англ. пер.: A. L. Onishchik, "On Lie groups transitive on compact manifolds. II", *Math. USSR-Sb.*, **3** (1967), 373–388.
- [12] Е. Я. Вишик, "Группы Ли, транзитивные на односвязных компактных многообразиях", *Матем. сб.*, **92(134)**:4(12) (1973), 564–570; англ. пер.: E. J. Višik, "Lie groups which act transitively on simply-connected compact manifolds", *Math. USSR-Sb.*, **21**:4 (1973), 558–564.
- [13] В. В. Горбачевич, "О трехмерных однородных пространствах", *Сиб. матем. журн.*, **18**:2 (1977), 280–293; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, "Three-dimensional homogeneous spaces", *Siberian Math. J.*, **18**:2 (1977), 200–210.
- [14] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970; англ. пер.: D. P. Zelopenko, *Compact Lie groups and their representations*, Transl. Math. Monogr., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
- [15] Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [16] T. Grundhöfer, N. Knarr, "Topology in generalized quadrangles", *Topology Appl.*, **34**:2 (1990), 139–152.

В. В. Горбачевич (V. V. Gorbatsevich)

"МАТИ" – Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского,
г. Москва

Поступила в редакцию
04.09.2006 и 09.04.2007