Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 12, 13–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:15:26

УДК 517.524+517.929.2

В. И. Буслаев

О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей

В работе получен усиленный вариант классической теоремы Пуанкаре о разностных уравнениях с коэффициентами, имеющими пределы. В качестве приложения получен ряд утверждений, аналогичных известным теоремам Ван Флека, Трона-Воделанда и Перрона о сходимости цепной дроби, но при значительно более слабых предположениях.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Одной из самых тонких теорем в теории линейных разностных уравнений является следующая классическая теорема Пуанкаре [1] о разностных уравнениях с коэффициентами, имеющими пределы.

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ. Пусть имеется линейное разностное уравнение

$$\omega_{n+k} + \alpha_{n,1}\omega_{n+k-1} + \dots + \alpha_{n,k}\omega_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

в котором коэффициенты $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,k}$ имеют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,i} = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, k$). И пусть корни характеристического многочлена $\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_k$ различны по модулю. Тогда для всякого решения $\{\omega_n\}_{n=1,2,\dots}$ этого уравнения либо $\omega_n = 0$ при всех $n \geq n_0$, либо существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n+1}/\omega_n$ и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

Разностное уравнение (1) будем называть невырожденным, если $\alpha_{n,k} \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

Весьма важным уточнением теоремы Пуанкаре служит хорошо известная теорема Перрона [2].

ТЕОРЕМА ПЕРРОНА. Пусть имеется невырожденное линейное разностное уравнение (1), коэффициенты которого $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,k}$ имеют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,i} = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, k$). И пусть корни характеристического многочлена $\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_k$ различны по модулю. Тогда для каждого

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00659) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96185).

корня λ характеристического многочлена существует решение $\{\omega_n\}_{n=1,2,\dots}$ разностного уравнения (1) такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n+1}/\omega_n = \lambda$.

Полагая $\bar{\omega}_n = (\omega_n^1, \dots, \omega_n^k)$, где $\omega_n^i = \omega_{n+i}$ ($i = 1, \dots, k$), разностное уравнение (1) можно переписать в векторном виде

$$\bar{\omega}_n = A_n \bar{\omega}_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{n,k} & -\alpha_{n,k-1} & -\alpha_{n,k-2} & \dots & -\alpha_{n,1} \end{pmatrix}.$$

Допуская в векторных уравнениях (2) в качестве матриц $A_n = (a_n^{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$ матрицы произвольного вида, имеющие предел при $n \rightarrow \infty$, можно утверждать, что теорема Пуанкаре и теорема Перрона формально являются следствиями приводимой ниже теоремы, которую будем называть теоремой Пуанкаре–Перрона в векторной формулировке.

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ–ПЕРРОНА (в векторной формулировке). Пусть имеется линейная система разностных уравнений (2), где матрицы A_n имеют предел $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, и пусть все собственные значения предельной матрицы A различны по модулю. Тогда:

- 1°. для всякого решения $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots} = \{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^k)\}_{n=0,1,\dots}$ разностного уравнения (2) либо $\bar{\omega}_n = \bar{0}$ при всех $n \geq n_0$, либо найдется индекс $m \in \{1, \dots, k\}$ такой, что существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1}^m}{\omega_n^m} = \lambda \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n^m} = \bar{e},$$

где λ – некоторое собственное значение матрицы A , $\bar{e}$ – отвечающий ему собственный вектор;

- 2°. если разностное уравнение (2) невырождено (т.е. $\det A_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$), $\bar{e} = (e^1, \dots, e^k)$ – произвольный собственный вектор предельной матрицы A и $e^m \neq 0$, то найдется такое решение $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$ разностного уравнения (2), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n^m} = \frac{\bar{e}}{e^m}.$$

Доказательство утверждения 1° (без явной формулировки) для диагонального случая, т.е. для диагональной матрицы A , изложено по ходу доказательства классической теоремы Пуанкаре в [3]. Легко видеть, что диагональный случай по сути дела является и общим, так как общий случай сводится к диагональному линейной заменой $\bar{\omega}_n = T \bar{w}_n$, где матрица T не зависит от n и приводит A к диагональному виду: $T^{-1}AT = D$. Доказательство утверждения 1°, отличное от изложенного в [3], приведено в [4]. Доказательству утверждения 1° теоремы целиком посвящена также и значительно более поздняя работа [5].

Доказательство теоремы Перрона для разностного уравнения (1), более простое по сравнению с предложенным самим Перроном, дано в [6]. Доказательство утверждения 2° для систем разностных уравнений (2) может быть получено сведением к классическому случаю. Непосредственное доказательство утверждения 2° для систем разностных уравнений (2), а тем самым и еще одно доказательство первоначальной теоремы Перрона для разностного уравнения (1), дано в [4].

§ 2. Формулировки полученных результатов

В настоящей статье исследуется вопрос о возможности ослабления в теореме Пуанкаре–Перрона условия существования пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{i,j}$, где $a_n^{i,j}$ – элементы матриц $A_n = (a_n^{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$. Например, в диагональном варианте (который, как уже отмечалось, по сути дела является и общим) теоремы Пуанкаре–Перрона – $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{i,j} = 0$ ($i \neq j$), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{i,i} = \lambda^i$ ($i = 1, \dots, k$), $|\lambda^1| < \dots < |\lambda^k|$ – можно отказаться от предельных равенств $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{i,i} = \lambda^i$ ($i = 1, \dots, k$). Точнее, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть имеется линейная система разностных уравнений

$$\omega_n^i = \lambda_n^i \left(\omega_{n-1}^i + \sum_{j \neq i} \varepsilon_n^{i,j} \omega_{n-1}^j \right) \quad (i = 1, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{i,j} = 0$ ($i \neq j$), и пусть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_n^{i-1}}{\lambda_n^i} \right| < 1 \quad (i = 2, \dots, k).$$

Тогда:

- 1°. для всякого решения $\{\overline{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots} = \{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^k)\}_{n=0,1,\dots}$ системы разностных уравнений (3) либо $\overline{\omega}_n = \bar{0}$ при всех $n \geq n_0$, либо найдется индекс $m \in \{1, \dots, k\}$ такой, что существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^i}{\omega_n^m} = 0 \quad (i \neq m);$$

- 2°. если система разностных уравнений (3) невырождена (т.е. ее определитель отличен от нуля при всех $n = 1, 2, \dots$), то для всякого $m \in \{1, \dots, k\}$ найдется решение $\{\overline{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$, для которого

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^i}{\omega_n^m} = 0 \quad (i \neq m).$$

Оказывается, что достаточно содержательные утверждения могут быть получены и в случае отказа в диагональном варианте теоремы Пуанкаре–Перрона от условия существования пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{i,j} = 0$ при $i < j$ или при $i > j$, или даже при всех $i \neq j$ (см. ниже леммы 1–3). Полученный результат находит свои приложения и проще всего формулируется в случае $k = 2$. В этом случае условие различности по модулю диагональных элементов матрицы $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ и условие малости недиагональных элементов могут быть записаны в виде одного неравенства

$$|a_n| + |b_n| + |c_n| < |d_n| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеется невырожденная линейная система разностных уравнений

$$\begin{cases} \omega_n^1 = a_n \omega_{n-1}^1 + b_n \omega_{n-1}^2, \\ \omega_n^2 = c_n \omega_{n-1}^1 + d_n \omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

и пусть при всех $n = 1, 2, \dots$

$$|a_n| + |b_n| \leq q(|d_n| - |c_n|), \quad (6)$$

где $q < 1$. Тогда:

- 1°. существует единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots} = \{(v_n^1, v_n^2)\}_{n=0,1,\dots}$ системы разностных уравнений (4) такое, что $|v_n^1| \geq |v_n^2|$ при всех $n = 0, 1, \dots$, а для всякого другого решения $\{\bar{w}_n\}_{n=0,1,\dots} = \{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=0,1,\dots}$ системы разностных уравнений (4) из условия $|\omega_{n_0}^1| < |\omega_{n_0}^2|$ следует, что $|\omega_n^1| < |\omega_n^2|$ при всех $n \geq n_0$;
- 2°. для всякого решения $\{\bar{u}_n\}_{n=0,1,\dots} = \{(u_n^1, u_n^2)\}_{n=0,1,\dots}$ системы разностных уравнений (4), не пропорционального исключительному решению $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$, имеет место неравенство

$$\left| \frac{v_n^1}{u_n^2} \right| \leq q^{n-n_0} \left| \frac{v_{n_0}^1}{u_{n_0}^2} \right|, \quad (7)$$

где n_0 – индекс, начиная с которого $|u_n^1| < |u_n^2|$ ($n \geq n_0$); в частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^1/u_n^2 = 0$;

- 3°. если $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/(|d_n| - |c_n|) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^1/u_n^2 = 0$;
- 4°. если $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n/d_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^2/v_n^1 = 0$.

Здесь и в дальнейшем через $\{\bar{w}_n\}_{n=0,1,\dots}$ обозначается произвольное решение разностных уравнений, через $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$ – единственное исключительное (выделяемое тем или иным образом) решение, через $\{\bar{u}_n\}_{n=0,1,\dots}$ – всякое другое (не пропорциональное исключительному) решение.

Заметим, что основное утверждение теоремы 2 – утверждение 1° о существовании исключительного решения $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$ (без утверждения о его единственности) – справедливо и при более слабом по сравнению с (6) условии (4) (см. лемму 1). Предельное равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^1/u_n^2 = 0$ утверждения 2°, из которого следует единственность исключительного решения, выполняется при условии (4) и дополнительном условии

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{|d_n| - |c_n|} = 0$$

(оба эти условия автоматически выполнены, если выполнено (6), см. лемму 2).

Как следствие теоремы 2 будет получена теорема о композициях дробно-линейных преобразований.

ТЕОРЕМА 3. Пусть невырожденные дробно-линейные преобразования $S_n(w) = \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n}$ таковы, что

$$|\alpha_n| + |\gamma_n| \leq q(|\delta_n| - |\beta_n|) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где $q < 1$. Тогда:

1°. при всех $|w| < 1$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = S$, причем S не зависит от w , $|S| \leq 1$ и

$$|S_1 \circ \dots \circ S_n(w) - S| \leq q^n \frac{1 + |w|}{1 - |w|}; \quad (9)$$

2°. существует числовая последовательность $\{t_n\}_{n=1,2,\dots}$ такая, что $|t_n| \leq 1$ и при всех $|w| < \infty$

$$|S_1 \circ \dots \circ S_n(w) - S| \leq q^n \frac{1 + |w|}{|1 + t_n w|}; \quad (10)$$

3°. если $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n / (|\delta_n| - |\beta_n|) = 0$, то $S_1 \circ \dots \circ S_n(w)$ сходится к S при $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте комплексной плоскости.

Хорошо известно, что если $S_n(w) = a_n / (w + b_n)$ (т.е. $\alpha_n = 0$, $\beta_n = a_n$, $\gamma_n = 1$, $\delta_n = b_n$), то

$$S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = \frac{P_{n-1}w + P_n}{Q_{n-1}w + Q_n},$$

где P_n и Q_n — числители и знаменатели n -й подходящей дроби цепной дроби

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}. \quad (11)$$

В частности, $P_n/Q_n = S_1 \circ \dots \circ S_n(w)|_{w=0}$. Поэтому теорему 3 можно рассматривать как распространение на случай произвольных дробно-линейных преобразований известной теоремы Прингсхейма [7].

ТЕОРЕМА ПРИНГСХЕЙМА. Пусть цепная дробь (11) такова, что $|a_n| + 1 \leq |b_n|$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда цепная дробь (11) сходится.

Хорошо известно также, что последовательности числителей $\{P_n\}_{n=1,2,\dots}$ и знаменателей $\{Q_n\}_{n=1,2,\dots}$ подходящих дробей цепной дроби (11) являются решениями одного и того же разностного уравнения

$$\omega_n = b_n \omega_{n-1} + a_n \omega_{n-2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

с начальными условиями $P_0 = 0$, $P_{-1} = 1$, $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$. Для разностного уравнения (12) сформулированная в начале статьи классическая теорема Пуанкаре может быть дополнена следующими утверждениями.

ТЕОРЕМА 4. Пусть имеется невырожденное линейное разностное уравнение (12) такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^1 = \lambda$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| < |\lambda|$, где $\lambda_n^{1,2}$ – корни многочлена $z^2 - b_n z - a_n$. Тогда существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{v_n\}_{n=-1,0,\dots}$ разностного уравнения (12) такое, что $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(v_{n+1}/v_n) - \lambda| > 0$. Для всякого другого решения $\{u_n\}_{n=-1,0,\dots}$ этого разностного уравнения $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n = \lambda$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n/u_n = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть имеется невырожденное линейное разностное уравнение (12) такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^1 = \lambda$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > |\lambda|$, где $\lambda_n^{1,2}$ – корни многочлена $z^2 - b_n z - a_n$. Тогда существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{v_n\}_{n=-1,0,\dots}$ разностного уравнения (12) такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1}/v_n = \lambda$. Для всякого другого решения $\{u_n\}_{n=-1,0,\dots}$ этого разностного уравнения $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(u_{n+1}/u_n) - \lambda| > 0$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n/(u_{n+1} - \lambda u_n) = 0$. Если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > 2|\lambda|$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n/u_n = 0$.

В применении к вопросам сходимости цепной дроби (11) теоремы 4 и 5 дают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть цепная дробь (11) такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^1 = \lambda$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| < |\lambda|$, где $\lambda_n^{1,2}$ – корни многочлена $z^2 - b_n z - a_n$. Тогда:

- 1°. цепная дробь (11) сходится;
- 2°. если цепная дробь (11) сходится к конечному значению, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \lambda,$$

$$\text{где } H_n = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \dots \dots + \frac{a_2}{b_1}}}.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть цепная дробь (11) такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^1 = \lambda$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > |\lambda|$, где $\lambda_n^{1,2}$ – корни многочлена $z^2 - b_n z - a_n$. Тогда:

- 1°. существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w) \Big|_{w=-\lambda} = S,$$

где $S_n(w) = a_n/(w + b_n)$;

- 2°. выполняется равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 \circ \dots \circ S_{n+1}(w) \Big|_{w=-\lambda} - S}{S_1 \circ \dots \circ S_n(w) \Big|_{w=0} - S} = 0; \quad (13)$$

- 3°. $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_m \circ \dots \circ S_n(w) \Big|_{w=-\lambda} = -\lambda$;

- 4°. если $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > 2|\lambda|$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w) \Big|_{w=0} = S,$$

т.е. цепная дробь (11) сходится.

Заметим, что можно построить пример цепной дроби, показывающий, что в условиях теоремы 7 ($\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^1 = \lambda$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > |\lambda|$ и даже $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > 2|\lambda| - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало) последовательность подходящих дробей не имеет предела. Но даже если предел существует, то эта последовательность, как показывает предельное равенство (13), сходится медленнее, чем последовательность $S_1 \circ \dots \circ S_n(w)|_{w=-\lambda}$.

Теоремы 6 и 7 были доказаны ранее при более сильном едином предположении, что оба корня $\lambda_n^{1,2}$ многочлена $z^2 - b_n z - a_n$ имеют предел и эти пределы различны по модулю. В этих предположениях утверждение 1° теоремы 6 – это хорошо известная теорема Ван Флека [8]; если условие конечности цепной дроби (11) заменить условиями $b_n = 1$ и $a_n \in \{z : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-2i\alpha}) \leq \rho \cos^2 \alpha\}$, $n \geq 1$, где $|\alpha| < \pi/2$, $0 < \rho < 1/2$, то утверждение 2° теоремы 6 – это теорема Трона–Воделанда [9]; утверждения 1°, 2° теоремы 7 – это теорема Трона–Воделанда [10] об ускорении скорости сходимости цепной дроби (11); утверждение 3° теоремы 7 – это теорема Перрона [11].

§ 3. Доказательства теорем

Докажем теперь теоремы 1–7. Теорема 2 является частным случаем ($k = 2$) следующих трех лемм. Следствием этих же лемм является также и теорема 1.

ЛЕММА 1. Пусть имеется невырожденная линейная система разностных уравнений (2) с матрицами $A_n = (a_n^{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$ такими, что при всех $i = 2, \dots, k$

$$\sum_{p=1}^k |a_n^{i-1,p}| + \sum_{p \neq i} |a_n^{i,p}| < |a_n^{i,i}| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Тогда:

- 1°. для всякого решения $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$ разностного уравнения (2) и для любого $m \in \{2, \dots, k\}$ из условия

$$\max_{1 \leq i \leq m-1} |\omega_{n_0}^i| < \max_{m \leq i \leq k} |\omega_{n_0}^i|$$

следует, что при всех $n \geq n_0$

$$\max_{1 \leq i \leq m-1} |\omega_n^i| < \max_{m \leq i \leq k} |\omega_n^i|;$$

- 2°. всякому решению $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$ разностного уравнения (2) можно поставить в соответствие индекс $m \in \{1, \dots, k\}$ такой, что при всех $n \geq n_0$ ($n_0 = 0$ при $m = 1$, а в общем случае n_0 зависит от решения $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$)

$$\max_{1 \leq i \leq m-1} |\omega_n^i| < |\omega_n^m| = \max_{1 \leq i \leq k} |\omega_n^i|;$$

- 3°. для всякого $m \in \{1, \dots, k\}$ найдется нетривиальное решение разностного уравнения (2), которому ставится в соответствие индекс m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Положим $M_n = \max_{1 \leq i \leq k} |\omega_n^i|$. Для доказательства утверждения 1° леммы достаточно убедиться в том, что из неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m-1} |\omega_n^i| < \max_{m \leq i \leq k} |\omega_n^i|$$

следует неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq m-1} |\omega_{n+1}^i| < \max_{m \leq i \leq k} |\omega_{n+1}^i|.$$

Пусть $j, m \leq j \leq k$, — индекс, для которого $|\omega_n^j| = \max_{m \leq i \leq k} |\omega_n^i| = M_n$. Тогда из разностного уравнения (2) имеем

$$\begin{aligned} \max_{m \leq i \leq k} |\omega_{n+1}^i| &\geq |\omega_{n+1}^j| = \left| \sum_{p=1}^k a_{n+1}^{j,p} \omega_n^p \right| \geq M_n |a_{n+1}^{j,j}| - M_n \sum_{p \neq j} |a_{n+1}^{j,p}|, \\ \max_{1 \leq i \leq m-1} |\omega_{n+1}^i| &= \max_{1 \leq i \leq m-1} \left| \sum_{p=1}^k a_{n+1}^{i,p} \omega_n^p \right| \leq M_n \max_{1 \leq i \leq m-1} \sum_{p=1}^k |a_{n+1}^{i,p}|. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и предположений (14) следует требуемое утверждение 1° леммы.

Обозначим далее через $m_n, 1 \leq m_n \leq k$, индекс, для которого

$$\max_{1 \leq i \leq m_n-1} |\omega_n^i| < |\omega_n^{m_n}| = M_n.$$

По уже доказанному утверждению 1° леммы последовательность m_n ($n = 0, 1, \dots$) не убывает с ростом n . Так как m_n не убывает и принимает значения из конечного множества $\{1, \dots, k\}$, то $m_n = m$ начиная с некоторого n_0 . Этот индекс m и ставится в соответствие решению $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$. Если $m = 1$, то из невозрастания m_n при убывании n следует, что $m_n = 1$ при всех $n = 0, 1, \dots$, т.е. в этом случае $n_0 = 0$. Утверждение 2° леммы доказано.

Докажем теперь существование нетривиального решения $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$ разностного уравнения (2), которому ставится в соответствие наперед заданный индекс $m \in \{1, \dots, k\}$. Для всякого k -мерного вектора $\bar{e} = (e^1, \dots, e^k)$ через $\{\bar{\omega}_n(\bar{e})\}_{n=0,1,\dots}$ будем обозначать решение разностного уравнения (2) с начальными условиями $\bar{\omega}_0(\bar{e}) = \bar{e}$. Заметим, что $\bar{\omega}_n(\bar{e}) = A_n \cdots A_1 \bar{e}$ при любом n , где A_n — линейные операторы, определяемые разностным уравнением (2), и, следовательно, при любом фиксированном n решения $\bar{\omega}_n(\bar{e})$ непрерывно зависят от начального вектора $\bar{e}$. Через $m_n(\bar{e})$ ($n = 0, 1, \dots$) будем обозначать последовательность индексов, определенных выше для решения $\{\bar{\omega}_n(\bar{e})\}_{n=0,1,\dots}$.

Построим ненулевой вектор $\bar{e}$, для которого $m_n(\bar{e}) = m$ при всех $n = 0, 1, \dots$, где $m \in \{1, \dots, k\}$ — наперед заданный индекс. Через L_1 и L_2 обозначим $(k - m + 1)$ -мерное и m -мерное векторные подпространства, состоящие из векторов, у которых соответственно первые $m - 1$ или последние $k - m$ координат равны нулю. Введем последовательность единичных векторов $\bar{e}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), где $\bar{e}_n \in L_1 \cap A_1^{-1} \cdots A_n^{-1} L_2$ (размерность указанного пересечения, очевидно, не меньше 1), и выберем из этой последовательности единичных векторов некоторую сходящуюся подпоследовательность: $\bar{e}_p \rightarrow \bar{e}$ ($p \in \Lambda \subset \mathbb{N}$). Покажем, что построенный таким образом вектор $\bar{e}$ является искомым, т.е. $m_n(\bar{e}) = m$ при всех $n = 0, 1, \dots$.

Очевидно, $\bar{e} \in L_1$ и, следовательно, $\omega_0^1(\bar{e}) = \dots = \omega_0^{m-1}(\bar{e}) = 0$. Поэтому $m_0(\bar{e}) \geq m$. Так как $m_n(\bar{e})$ – неубывающая последовательность, то $m_n(\bar{e}) \geq m$ при всех $n = 0, 1, \dots$. Покажем теперь, что строгое неравенство здесь невозможно ни при каком n . Предположим противное, а именно, предположим, что $m_l(\bar{e}) > m$ при некотором l . По определению индекса $m_l(\bar{e})$ имеем

$$\max_{1 \leq i \leq m_l(\bar{e})-1} |\omega_l^i(\bar{e})| < |\omega_l^{m_l(\bar{e})}(\bar{e})|.$$

Так как $\bar{\omega}_l(\bar{e})$ непрерывно зависит от начального вектора $\bar{e}$, то найдется вектор $\bar{e}_p$ ($p \in \Lambda, p > l$) столь близкий к вектору $\bar{e}$, что

$$\max_{1 \leq i \leq m_l(\bar{e})-1} |\omega_l^i(\bar{e}_p)| < |\omega_l^{m_l(\bar{e})}(\bar{e}_p)|.$$

Отсюда следует, что $m_l(\bar{e}_p) \geq m_l(\bar{e}) > m$. Так как последовательность $m_n(\bar{e}_p)$ не убывает и $p > l$, то $m_p(\bar{e}_p) \geq m_l(\bar{e}_p) > m$. С другой стороны, по определению вектора $\bar{e}_p$ выполняется $\bar{\omega}_p(\bar{e}_p) = A_p \dots A_1 \bar{e}_p \in (A_p \dots A_1 L_1) \cap L_2 \subseteq L_2$ и, следовательно, $\omega_p^{m+1}(\bar{e}_p) = \dots = \omega_p^k(\bar{e}_p) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $m_n(\bar{e}) = m$ при всех $n = 0, 1, \dots$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть имеют место предположения леммы 1 и дополнительное условие

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{p=1}^k |a_n^{i-1,p}|}{|a_n^{i,i}| - \sum_{p \neq i} |a_n^{i,p}|} = 0 \quad (i = 2, \dots, k). \quad (15)$$

Тогда:

- 1°. если решению $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$ соответствует индекс m , решению $\{\bar{u}_n\}_{n=0,1,\dots}$ – индекс l (определенные в лемме 1) и $m < l$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^m / u_n^l = 0$;
- 2°. все решения разностного уравнения (2), которым соответствуют индексы, не превосходящие r ($r = 1, \dots, k$), образуют r -мерное векторное пространство; в частности, нетривиальное решение разностного уравнения (2), которому соответствует индекс $m = 1$, единственно с точностью до постоянного множителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Из разностного уравнения (2) следует, что

$$|v_{n+1}^m| = \left| \sum_{p=1}^k a_{n+1}^{m,p} v_n^p \right| \leq |v_n^m| \sum_{p=1}^k |a_{n+1}^{m,p}|,$$

$$|u_{n+1}^l| = \left| \sum_{p=1}^k a_{n+1}^{l,p} u_n^p \right| \geq |u_n^l| \left(|a_{n+1}^{l,l}| - \sum_{p \neq l} |a_{n+1}^{l,p}| \right)$$

при всех $n \geq n_2$ (n_2 – индекс, начиная с которого стабилизируются обе последовательности m_n и l_n , определенные при доказательстве леммы 1 для решений $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$ и $\{\bar{u}_n\}_{n=0,1,\dots}$ соответственно; если $m = 1$, то n_2 – индекс, начиная с которого стабилизируется последовательность l_n).

Из этих двух неравенств и из предположения (15) леммы 2 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_n^m}{u_n^l} \right) = 0.$$

В случае $k = 2$ имеем $m = 1, l = 2$ и из этих же неравенств следует также и неравенство (7) теоремы 2.

Покажем далее, что если решениям $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$ и $\{\bar{u}_n\}_{n=0,1,\dots}$ соответствуют индексы m и l , не превосходящие r ($r = 1, \dots, k$), то индекс их линейной комбинации $\{\bar{\gamma}_n\}_{n=0,1,\dots} = c_1\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots} + c_2\{\bar{u}_n\}_{n=0,1,\dots}$ также не превосходит r . Предположим противное, а именно, предположим, что индекс s решения $\{\bar{\gamma}_n\}_{n=0,1,\dots}$ превосходит r . Тогда, учитывая, что $|v_n^s| \leq |v_n^m|$ и $|u_n^s| \leq |u_n^l|$, и пользуясь уже доказанным утверждением 1° леммы, получим противоречие:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n^s}{\gamma_n^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 v_n^s + c_2 u_n^s}{\gamma_n^s} = 0.$$

Таким образом, решения разностного уравнения (2), индексы которых не превосходят r , образуют векторное пространство. Аналогичными рассуждениями можно показать, что базис этого пространства состоит из r решений с индексами, в точности равными соответственно $1, \dots, r$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть имеется невырожденная линейная система разностных уравнений (2) с матрицами $A_n = (a_n^{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$ такими, что при всех $i = 2, \dots, k$

$$\sum_{p=1}^k |a_n^{i-1,p}| \leq q \left(|a_n^{i,i}| - \sum_{p \neq i} |a_n^{i,p}| \right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

где $q < 1$, и пусть решению $\{\bar{\omega}_n\}_{n=0,1,\dots}$ разностного уравнения (2) поставлен в соответствие индекс m , введенный в лемме 1. Тогда:

- 1°. если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p=i}^k |a_n^{i-1,p}|}{|a_n^{i,i}| - \sum_{p \neq i} |a_n^{i,p}|} = 0$ ($i = 2, \dots, k$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^j}{\omega_n^m} = 0$ при всех $j < m$;
- 2°. если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p=1}^{i-1} |a_n^{i,p}|}{|a_n^{i,i}| - \sum_{p=i+1}^k |a_n^{i,p}|} = 0$ ($i = 2, \dots, k$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^j}{\omega_n^m} = 0$ при всех $j > m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Положим $R_n = \max_{j < m} |\omega_n^j|$ и обозначим через r_n какой-либо из индексов $1, \dots, m-1$, для которого $R_n = |\omega_n^{r_n}|$. Из разностного уравнения (2) и предположений (16) леммы следует, что при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \frac{R_n}{M_n} &= \left| \frac{\omega_n^{r_n}}{\omega_n^m} \right| = \frac{|\sum_{p=1}^{r_n} a_n^{r_n,p} \omega_{n-1}^p + \sum_{p=r_n+1}^k a_n^{r_n,p} \omega_{n-1}^p|}{|\sum_{p=1}^k a_n^{m,p} \omega_{n-1}^p|} \\ &\leq \frac{R_{n-1} \sum_{p=1}^{r_n} |a_n^{r_n,p}| + M_{n-1} \sum_{p=r_n+1}^k |a_n^{r_n,p}|}{M_{n-1} (|a_n^{m,m}| - \sum_{p \neq m} |a_n^{m,p}|)} \leq q \frac{R_{n-1}}{M_{n-1}} + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

где $q < 1$ и по предположениям утверждения 1° леммы $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Оценивая аналогичным образом R_{n-1}/M_{n-1} и последующие отношения, получим

$$\begin{aligned} \frac{R_n}{M_n} &\leq \varepsilon_n + q\varepsilon_{n-1} + \dots + q^{[n/2]} \varepsilon_{n-[n/2]} + q^{[n/2]+1} \frac{R_{n-[n/2]-1}}{M_{n-[n/2]-1}} \\ &\leq (1-q)^{-1} \max_{n/2 \leq p \leq n} |\varepsilon_p| + q^{n/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n/M_n = 0$, и тем самым предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^j}{\omega_n^m} = 0$$

при любом $j < m$ доказано.

Положим $Q_n = \max_{j > m} |\omega_n^j|$ и обозначим через q_n какой-либо из индексов $m+1, \dots, k$, для которого $Q_n = |\omega_n^{q_n}|$. Пусть

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{M_n} = \lim_{n \in \Lambda} \frac{Q_n}{M_n} \quad (0 \leq \rho \leq 1).$$

Из разностного уравнения (2) и предположений (16) леммы следует, что

$$\begin{aligned} \rho &\geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \frac{Q_{n+1}}{M_{n+1}} \geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \frac{|\omega_{n+1}^{q_n}|}{|\omega_{n+1}^m|} \\ &\geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \frac{|a_{n+1}^{q_n, q_n} \omega_n^{q_n}| - |\sum_{p=q_n+1}^k a_{n+1}^{q_n, p} \omega_n^p| - |\sum_{p=1}^{q_n-1} a_{n+1}^{q_n, p} \omega_n^p|}{|\sum_{p=1}^k a_{n+1}^{m, p} \omega_n^p|} \\ &\geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \frac{(|a_{n+1}^{q_n, q_n}| - \sum_{p=q_n+1}^k |a_{n+1}^{q_n, p}|)(Q_n - \varepsilon_n M_n)}{M_n \sum_{p=1}^k |a_{n+1}^{m, p}|} \\ &= \overline{\lim}_{n \in \Lambda} \frac{|a_{n+1}^{q_n, q_n}| - \sum_{p=q_n+1}^k |a_{n+1}^{q_n, p}|}{\sum_{p=1}^k |a_{n+1}^{m, p}|} \cdot \lim_{n \in \Lambda} \frac{(Q_n - \varepsilon_n M_n)}{M_n} \geq q^{-1} \rho, \end{aligned}$$

где $q^{-1} > 1$ и по предположениям утверждения 2° леммы $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Полученное неравенство $\rho \geq q^{-1} \rho$ невозможно при положительных ρ . Следовательно, $\rho = 0$, т.е. предельное равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^j / \omega_n^m = 0$ при любом $j > m$ доказано. Лемма 3 доказана.

Итак, леммы 1–3, а вместе с ними и теоремы 1 и 2 доказаны (неравенство (7) теоремы 2, не сформулированное явным образом в леммах, доказано в лемме 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим

$$T_n(w) = S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = \frac{\varphi_n^1 w + \varphi_n^2}{\psi_n^1 w + \psi_n^2}.$$

Тогда

$$\frac{\varphi_n^1 w + \varphi_n^2}{\psi_n^1 w + \psi_n^2} = T_{n-1}(S_n(w)) = \frac{(\alpha_n \varphi_{n-1}^1 + \gamma_n \varphi_{n-1}^2)w + (\beta_n \varphi_{n-1}^1 + \delta_n \varphi_{n-1}^2)}{(\alpha_n \psi_{n-1}^1 + \gamma_n \psi_{n-1}^2)w + (\beta_n \psi_{n-1}^1 + \delta_n \psi_{n-1}^2)}$$

и, следовательно, последовательности двумерных векторов $\overline{\varphi}_n = (\varphi_n^1, \varphi_n^2)$ и $\overline{\psi}_n = (\psi_n^1, \psi_n^2)$ ($n = 1, 2, \dots$) являются решениями одной и той же линейной разностной системы уравнений

$$\begin{cases} \omega_n^1 = \alpha_n \omega_{n-1}^1 + \gamma_n \omega_{n-1}^2, \\ \omega_n^2 = \beta_n \omega_{n-1}^1 + \delta_n \omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

с начальными условиями $\overline{\varphi}_0 = (1, 0)$, $\overline{\psi}_0 = (0, 1)$.

Условие (8) теоремы 3 совпадает с условием (6) теоремы 2 применительно к системе разностных уравнений (17). По утверждению 1° теоремы 2 имеют место неравенства $|\psi_n^1| \leq |\psi_n^2|$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. По утверждениям 1° и 2° теоремы 2 существует единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots} = \{(v_n^1, v_n^2)\}_{n=0,1,\dots}$ системы разностных уравнений (17) такое, что $|v_n^1| \geq |v_n^2|$ и $|v_n^1/\psi_n^2| \leq q^n |v_0^1|$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Положим $S = -v_0^2/v_0^1$ и $t_n = \psi_n^1/\psi_n^2$. В силу вышесказанного $|S| \leq 1$ и $|t_n| \leq 1$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

Так как решение $\{v_0^1 \overline{\varphi}_n + v_0^2 \overline{\psi}_n\}_{n=0,1,\dots}$ имеет те же начальные условия, что и исключительное решение $\{\bar{v}_n\}_{n=0,1,\dots}$, то эти решения равны между собой. Следовательно, при всех $n = 1, 2, \dots$ и всех $|w| < \infty$

$$\begin{aligned} |S_1 \circ \dots \circ S_n(w) - S| &= \left| \frac{\varphi_n^1 w + \varphi_n^2}{\psi_n^1 w + \psi_n^2} + \frac{v_0^2}{v_0^1} \right| = \left| \frac{v_n^1 w + v_n^2}{v_0^1 (\psi_n^1 w + \psi_n^2)} \right| \\ &= \left| \frac{v_n^1 w + v_n^2}{v_0^1 \psi_n^2 (1 + t_n w)} \right| \leq q^n \frac{1 + |w|}{|1 + t_n w|}, \end{aligned}$$

и тем самым неравенство (10) доказано. Так как $|t_n| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$), то при всех $|w| < 1$ из неравенства (10) следует неравенство (9).

Если выполнено предположение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{|\delta_n| - |\beta_n|} = 0,$$

то из утверждения 3° теоремы 2 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n^1}{\psi_n^2} = 0.$$

Отсюда и из неравенства (10) следует, что $S_1 \circ \dots \circ S_n(w)$ сходится к S равномерно на любом компакте комплексной плоскости. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из предположений теоремы 4 и из теоремы Виета следует, что при любом фиксированном $\theta > 0$

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|b_n - \lambda| + |\theta^{-1}(\lambda^2 - b_n \lambda - a_n)|\} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|\lambda_n^1 + \lambda_n^2 - \lambda| + |\theta^{-1}(\lambda_n^1 - \lambda)(\lambda_n^2 - \lambda)|\} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|\lambda_n^1 - \lambda| + |\lambda_n^2| + \theta^{-1}|\lambda_n^1 - \lambda|(|\lambda_n^2| + |\lambda|)\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2|. \end{aligned}$$

Фиксируем некоторое θ ($0 < \theta < |\lambda| - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2|$). Из последнего неравенства следует, что найдутся $q < 1$ и индекс N такие, что при всех $n \geq N$

$$|b_n - \lambda| + |\theta^{-1}(\lambda^2 - b_n \lambda - a_n)| \leq q(|\lambda| - \theta).$$

Следовательно, для системы разностных уравнений

$$\begin{cases} \omega_n^1 = (b_{n+1} - \lambda)\omega_{n-1}^1 + \theta^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)\omega_{n-1}^2, \\ \omega_n^2 = \theta\omega_{n-1}^1 + \lambda\omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad (n = N, N+1, \dots) \quad (18)$$

выполняются условия (6) теоремы 2. Определитель системы (18) равен $-a_{n+1}$ ($n = N, N+1, \dots$). Поэтому из невырожденности разностного уравнения (12) следует невырожденность системы разностных уравнений (18). По утверждению 3° теоремы 2 для всех решений $\{(u_n^1, u_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$ системы разностных уравнений (18), за исключением единственного решения $\{(v_n^1, v_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^1/u_n^2 = 0$. По утверждениям 1° и 2° теоремы 2 для единственного исключительного решения, во-первых, имеют место неравенства $|v_n^1| \geq |v_n^2|$ при всех $n = N-1, N, \dots$ и, во-вторых, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^1/u_n^2 = 0$.

Легко видеть, что если $\{\omega_n\}_{n=-1, 0, \dots}$ – решение разностного уравнения (12), то $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$ (где $\omega_n^1 = \theta^{-1}(\omega_{n+1} - \lambda\omega_n)$, $\omega_n^2 = \omega_n$) – решение системы разностных уравнений (18). И наоборот, если $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$ – решение системы разностных уравнений (18), то $\{\omega_n\}_{n=-1, 0, \dots}$ (где $\omega_n = \omega_n^2$ при $n \geq N-1$, а при $n < N-1$ значение ω_n вычисляется при помощи обращения невырожденного разностного уравнения (12)) является решением разностного уравнения (12).

Поэтому полученные выше утверждения относительно решений системы разностных уравнений (18) означают, что для всех решений $\{u_n\}_{n=-1, 0, \dots}$ разностного уравнения (12), за исключением единственного решения $\{v_n\}_{n=-1, 0, \dots}$, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^{-1}(u_{n+1} - \lambda u_n)}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^1}{u_n^2} = 0,$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n = \lambda$.

Для единственного исключительного решения

$$|\theta^{-1}(v_{n+1} - \lambda v_n)| \geq |v_n| \quad (n = N-1, N, \dots), \quad \text{т.е.} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} - \lambda \right| \geq \theta > 0.$$

При этом $|v_n/u_n| = |v_n^2/u_n^2| \leq |v_n^1/u_n^2|$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n/u_n = 0$. Теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Из предположений теоремы 5 и теоремы Виета следует, что при любом фиксированном $\theta > 0$

$$\begin{aligned} & \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|\lambda - b_n| - \theta^{-1}|\lambda^2 - b_n \lambda - a_n|\} \\ & \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|\lambda_n^2| - |\lambda_n^1 - \lambda| - \theta^{-1}|\lambda_n^1 - \lambda|(|\lambda_n^2| + |\lambda|)\} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2|. \end{aligned}$$

Фиксируем некоторое θ ($0 < \theta < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| - |\lambda|$). Из последнего неравенства следует, что найдутся $q < 1$ и индекс N такие, что при всех $n \geq N$

$$|\lambda| + \theta \leq q(|b_n - \lambda| - |\theta^{-1}(\lambda^2 - b_n \lambda - a_n)|).$$

Следовательно, для системы разностных уравнений

$$\begin{cases} \omega_n^1 = \lambda \omega_{n-1}^1 + \theta \omega_{n-1}^2, \\ \omega_n^2 = \theta^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)\omega_{n-1}^1 + (b_{n+1} - \lambda)\omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad (n = N, N+1, \dots) \quad (19)$$

выполняются условия (6) теоремы 2. Определитель системы (19) равен $-a_{n+1}$ ($n = N, N+1, \dots$). Поэтому из невырожденности разностного уравнения (12) следует невырожденность системы разностных уравнений (19). По утверждению 1° теоремы 2 для всех решений $\{(u_n^1, u_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$ системы разностных уравнений (19), за исключением единственного решения $\{(v_n^1, v_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$, имеют место неравенства $|u_n^1| < |u_n^2|$ при всех $n \geq n_0$. По утверждениям 4° и 2° теоремы 2 для единственного исключительного решения существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^2}{v_n^1} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^1}{u_n^2} = 0.$$

Легко видеть, что если $\{\omega_n\}_{n=-1, 0, \dots}$ – решение разностного уравнения (12), то $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$ (где $\omega_n^1 = \omega_n$, $\omega_n^2 = \theta^{-1}(\omega_{n+1} - \lambda\omega_n)$) – решение системы разностных уравнений (19). И наоборот, если $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=N-1, N, \dots}$ – решение системы разностных уравнений (19), то $\{\omega_n\}_{n=-1, 0, \dots}$ (где $\omega_n = \omega_n^1$ при $n \geq N-1$, а при $n < N-1$ значение ω_n вычисляется при помощи обращения невырожденного разностного уравнения (12)) является решением разностного уравнения (12).

Поэтому полученные выше утверждения относительно решений системы разностных уравнений (19) означают, что для всех решений $\{u_n\}_{n=-1, 0, \dots}$ разностного уравнения (12), за исключением единственного решения $\{v_n\}_{n=-1, 0, \dots}$,

$$|\theta^{-1}(u_{n+1} - \lambda u_n)| \geq |u_n| \quad (n \geq n_0), \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda \right| \geq \theta > 0.$$

Для единственного исключительного решения существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^{-1}(v_{n+1} - \lambda v_n)}{v_n} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lambda.$$

При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_{n+1} - \lambda u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^1}{\theta u_n^2} = 0.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > 2|\lambda|$, то приведенные выше рассуждения справедливы и при некотором $\theta > |\lambda|$. В этом случае

$$\begin{aligned} |u_n| &= |(u_n - \lambda u_{n-1}) + \lambda u_{n-1}| = |\theta u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-1}^1| \\ &\geq |\theta u_{n-1}^2| (1 - \theta^{-1}|\lambda|) = |u_n - \lambda u_{n-1}| (1 - \theta^{-1}|\lambda|). \end{aligned}$$

Отсюда и из уже доказанного предельного равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_{n+1} - \lambda u_n} = 0$$

следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n/u_n = 0$. Теорема 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6 И 7. Как уже нами отмечалось, числители $\{P_n\}_{n=-1,0,\dots}$ и знаменатели $\{Q_n\}_{n=-1,0,\dots}$ подходящих дробей цепной дроби (11) являются решениями разностного уравнения (12) с начальными условиями $P_0 = 0$, $P_{-1} = 1$, $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$. По условиям теоремы 6 к разностному уравнению (12) применима теорема 4. По теореме 4 существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{v_n\}_{n=-1,0,\dots}$ разностного уравнения (12) такое, что для всякого другого решения $\{u_n\}_{n=-1,0,\dots}$ этого разностного уравнения $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n/u_n) = 0$. Представим исключительное решение $\{v_n\}_{n=-1,0,\dots}$ в виде

$$\{v_n\}_{n=-1,0,\dots} = v_{-1}\{P_n\}_{n=-1,0,\dots} + v_0\{Q_n\}_{n=-1,0,\dots}.$$

Если $v_{-1} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \infty.$$

Если $v_{-1} \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = -\frac{v_0}{v_{-1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{-1}P_n + v_0Q_n}{v_{-1}Q_n} = -\frac{v_0}{v_{-1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{v_{-1}Q_n} = -\frac{v_0}{v_{-1}},$$

т.е. цепная дробь (11) сходится к значению $S = -v_0/v_{-1}$.

Если цепная дробь (11) сходится к конечному значению, то $v_{-1} \neq 0$ и $\{Q_n\}_{n=-1,0,\dots}$ не является исключительным решением. Известно, что $H_n = Q_n/Q_{n-1}$. Поэтому по теореме 4 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \lambda.$$

Теорема 6 доказана.

По условиям теоремы 7 к разностному уравнению (12) применима теорема 5. По теореме 5 существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{v_n\}_{n=-1,0,\dots}$ разностного уравнения (12) такое, что для всякого другого решения $\{u_n\}_{n=-1,0,\dots}$ этого разностного уравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_{n+1} - \lambda u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1} - \lambda v_n}{u_{n+1} - \lambda u_n} = 0.$$

Как и выше, отсюда следует, что если $v_{-1} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1} - \lambda P_n}{Q_{n+1} - \lambda Q_n} = \infty,$$

а если $v_{-1} \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1} - \lambda P_n}{Q_{n+1} - \lambda Q_n} = -\frac{v_0}{v_{-1}}.$$

Так как

$$S_1 \circ \dots \circ S_n(w)|_{w=-\lambda} = \frac{P_n - \lambda P_{n-1}}{Q_n - \lambda Q_{n-1}},$$

то тем самым утверждение 1° теоремы 7 доказано.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^2| > 2|\lambda|$, то по теореме 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n/u_n = 0$ и аналогичным образом получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = -v_n/v_{-1}$, т.е. утверждение 4° теоремы 7 доказано.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{S_1 \circ \dots \circ S_{n+1}(w)|_{w=-\lambda} - S}{S_1 \circ \dots \circ S_n(w)|_{w=0} - S} &= \frac{v_{n+1} - \lambda v_n}{Q_{n+1} - \lambda Q_n} \left(\frac{v_n}{Q_n} \right)^{-1} \\ &= \frac{v_{n+1} - \lambda v_n}{v_n} \left(\frac{Q_{n+1} - \lambda Q_n}{Q_n} \right)^{-1} \end{aligned}$$

и по теореме 5 первый множитель, стоящий в правой части этого равенства, стремится к нулю, а второй ограничен, то отсюда следует утверждение 2° теоремы 7.

Выше было показано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w)|_{w=-\lambda} = -v_0/v_{-1}$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_m \circ \dots \circ S_n(w)|_{w=-\lambda} = -v_{m-1}/v_{m-2}$, где $\{v_n\}_{n=-1,0,\dots}$ — исключительное решение разностного уравнения (12). По теореме 5 существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} (v_{m+1}/v_m) = \lambda$. Отсюда следует утверждение 3° теоремы 7. Теорема 7 доказана.

Список литературы

1. *Poincaré H.* Sur les équations linéaires aux différentielles et aux différences finies // Amer. J. Math. 1885. V. 7. P. 203–258.
2. *Перрон О.* Об одной теореме А. Пуанкаре // J. Reine Angew. Math. 1909. V. 136. P. 17–37; О линейном разностном уравнении А. Пуанкаре // J. Reine Angew. Math. 1910. T. 137. C. 6–64.
3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
4. *Фрейман Г. А.* О теоремах Пуанкаре и Перрона // УМН. 1957. Т. 12. №3. С. 241–246.
5. *Mate A., Nevai P.* A generalization of Poincaré's theorem for recurrence equations // J. Approx. Theory. 1990. V. 63. P. 92–97.
6. *Евграфов М. А.* Новое доказательство теоремы Перрона // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 77–82.
7. *Pringsheim A.* Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche // Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1899. V. 28. P. 295–324.
8. *Van Vleck E. V.* On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values // Trans. Amer. Soc. 1904. V. 5. P. 253–262.
9. *Thron W. J., Waadeland H.* Truncation error bounds for limit periodic continued fractions // Math. Comp. 1983. V. 40. №162. P. 589–597.
10. *Thron W. J., Waadeland H.* Accelerating convergence of limit periodic continued fractions $K(a_n/1)$ // Numer. Math. 1980. V. 34. P. 155–170.
11. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. V. II. Stuttgart: Teubner, 1957.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
24.03.1997