Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Данилин, Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 11, 27–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:55:12

УДК 517.977

А. Р. Данилин

**Асимптотика ограниченных управлений
для сингулярной эллиптической задачи
в области с малой полостью**

Рассматривается задача оптимального управления решениями эллиптического уравнения в области с малой полостью. Методом согласования асимптотических разложений строятся равномерные асимптотики решения до любой степени малого параметра. Другие аспекты этой задачи рассмотрены В. Е. Капустяном.

Библиография: 11 названий.

В работе методом согласования асимптотических разложений [1] строится равномерная асимптотика до любой степени малого параметра одной задачи Лионса [2] оптимального управления решениями уравнения эллиптического типа в области с малой полостью. Другой вид этой задачи рассмотрен в [3]. Сингулярные эллиптические задачи в областях с малым отверстием рассматривались также в [4]–[9].

§ 1. Постановка задачи и определяющие соотношения

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей (класса C^∞) $\partial\Omega$. Пусть Ω содержит начало координат O . Наряду с Ω введем аналогичную область ω такую, что $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ связно. Через Ω_ε обозначим область $\Omega \setminus \varepsilon\omega$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр. В Ω_ε рассмотрим следующую задачу оптимального управления [2]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_\varepsilon(x) &= f(x) - u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad y_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) &:= \int_{\Omega_\varepsilon} (y_\varepsilon^2(x) + \nu u_\varepsilon^2(x)) dx \rightarrow \inf, \quad u_\varepsilon \in U_\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь $\nu > 0$, $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ – соболевское пространство функций, равных нулю на грани-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96241).

це $\partial\Omega_\varepsilon$,

$$\mathcal{L}y_\varepsilon := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial x_j} \right) - a_0(x) y_\varepsilon \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad (1.1)$$

$$f, a_{ij}, a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \geq \eta_1 > 0 \text{ при } x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \eta_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \text{ при всех } \xi_i \quad (\eta_2 > 0), \quad (1.3)$$

$$U_\varepsilon := \left\{ u_\varepsilon(\cdot) \in L_2(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2(x) dx \leq R^2 \right\}. \quad (1.4)$$

В этом случае единственное оптимальное управление $u_\varepsilon^{\text{opt}}(\cdot)$ находится как решение следующей задачи:

$$\mathcal{L}y_\varepsilon = f - u_\varepsilon^{\text{opt}}, \quad \mathcal{L}p_\varepsilon = -y_\varepsilon, \quad y_\varepsilon, u_\varepsilon^{\text{opt}}, p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \quad (1.5)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (p_\varepsilon(x) + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}(x)) (v(x) - u_\varepsilon^{\text{opt}}(x)) dx \geq 0 \text{ при всех } v \in U_\varepsilon \quad (1.6)$$

(см. [2; гл. 2, § 2, формула (2.10)]).

Требуется найти асимптотику оптимального управления $u_\varepsilon^{\text{opt}}$ и соответствующего ему y_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим, что если $\mathcal{L}y = f$, $y \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, то

$$\int_{\Omega_\varepsilon} y^2(x) dx \leq c^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} f^2(x) dx, \quad (1.7)$$

где $c = \max_{x \in \overline{\Omega}} a_0(x)$.

Введем обозначение

$$(u, v)_\varepsilon := \int_{\Omega_\varepsilon} u(x) v(x) dx - \text{скалярное произведение в } L_2(\Omega_\varepsilon)$$

и запишем соотношение (1.6) в виде

$$(p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}, v - u_\varepsilon^{\text{opt}})_\varepsilon \geq 0 \text{ при всех } v: \|v\|_\varepsilon \leq R, \quad (1.8)$$

где $\|v\|_\varepsilon := (v, v)_\varepsilon^{1/2}$ — норма элемента v в $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

Условие (1.8) равносильно неравенству

$$(p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}, u_\varepsilon^{\text{opt}})_\varepsilon \leq \inf_{\|v\|_\varepsilon \leq R} (p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}, v)_\varepsilon = -R \|p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}\|_\varepsilon,$$

откуда

$$(p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}, u_\varepsilon^{\text{opt}})_\varepsilon = -R \|p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}\|_\varepsilon$$

и либо $p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}} = 0$, либо $u_\varepsilon^{\text{opt}} = -R \frac{p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}}{\|p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}\|_\varepsilon}$. В первом случае $u_\varepsilon^{\text{opt}} = -\frac{1}{\nu} p_\varepsilon$. Во втором случае

$$u_\varepsilon^{\text{opt}} = -\frac{1}{\nu + \|p_\varepsilon + \nu u_\varepsilon^{\text{opt}}\|_\varepsilon / R} \cdot p_\varepsilon =: -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon,$$

причем $0 < \lambda_\varepsilon < 1/\nu$. Таким образом, в любом случае $u_\varepsilon^{\text{opt}} = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon$, где $0 < \lambda_\varepsilon \leq 1/\nu$. Поэтому задача (1.5), (1.6) принимает вид

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_\varepsilon + u_\varepsilon^{\text{opt}} = f, & \mathcal{L}u_\varepsilon^{\text{opt}} - \lambda_\varepsilon y_\varepsilon = 0, & y_\varepsilon, u_\varepsilon^{\text{opt}} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ \left(\frac{1}{\nu} - \lambda_\varepsilon\right)(R - \|u_\varepsilon^{\text{opt}}\|_\varepsilon) = 0, & \|u_\varepsilon^{\text{opt}}\|_\varepsilon \leq R, & \lambda_\varepsilon \leq 1/\nu. \end{cases} \quad (1.9)$$

Теперь исходная задача свелась к построению асимптотики решений системы (1.9) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В дальнейшем вместо $u_\varepsilon^{\text{opt}}$ будем писать просто u_ε .

Вначале рассмотрим вопрос о поведении y_ε и u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Прежде всего отметим, что, отождествив элемент $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ с $\bar{v}_\varepsilon: \bar{v}_\varepsilon = v_\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega_\varepsilon$ и $\bar{v}_\varepsilon = 0$ при $x \in \varepsilon\omega$, получим изометрическое вложение $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ в $H_0^1(\Omega)$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть λ_ε , y_ε и u_ε — решение задачи (1.9). Тогда

$$\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0, \quad y_\varepsilon \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} y_0, \quad u_\varepsilon \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \longrightarrow 0,$$

где λ_0 , y_0 и u_0 — решение предельной задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_0 + u_0 = f, & \mathcal{L}u_0 - \lambda_0 y_0 = 0, & y_0, u_0 \in H_0^1(\Omega), \\ \left(\frac{1}{\nu} - \lambda_0\right)(R - \|u_0\|) = 0, & \|u_0\| \leq R, & \lambda_0 \leq 1/\nu. \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь $\|u\| := (u, u)^{1/2}$, $(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Тогда найдется такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, что $\varepsilon_n \rightarrow +0$ и

$$|\lambda_n - \lambda_0| + \|y_n - y_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_n - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \eta > 0, \quad (1.11)$$

где $y_n := y_{\varepsilon_n}$ и $u_n := u_{\varepsilon_n}$.

Отметим, что $0 < \lambda_n := \lambda_{\varepsilon_n} \leq 1/\nu$, т.е. $\{\lambda_n\}$ ограничена и можно считать, что $\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda}$, $\bar{\lambda} \in [0; 1/\nu]$. В силу определения y_n , u_n и λ_n справедливы равенства

$$\mathcal{L}y_n + u_n = f, \quad \mathcal{L}u_n - \lambda_n y_n = 0. \quad (1.12)$$

Умножая скалярно первое из этих равенств на u_n и используя второе соотношение и самосопряженность $\mathcal{L}$, получаем

$$\begin{aligned}(f, u_n) &= (f, u_n)_{\varepsilon_n} = (\mathcal{L}y_n, u_n)_{\varepsilon_n} + \|u_n\|_{\varepsilon_n}^2 \\ &= (y_n, \mathcal{L}u_n)_{\varepsilon_n} + \|u_n\|^2 = \lambda_n \|y_n\|^2 + \|u_n\|^2.\end{aligned}$$

Так как $\|u_n\|^2 \leq R$, то $\{u_n\}$, а значит, и $\{\lambda_n y_n\}$ — ограниченные последовательности в $L_2(\Omega)$. Из равенств (1.12) следует, что $\{\mathcal{L}y_n\}$ и $\{\mathcal{L}u_n\}$ ограничены в $L_2(\Omega)$. Соотношения (1.3) и формула Грина показывают, что

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial y_n(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \frac{1}{\eta_2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial y_n(x)}{\partial x_i} \frac{\partial y_n(x)}{\partial x_j} dx \\ &= \frac{1}{\eta_2} \left(\int_{\Omega} a_0(x) y_n^2(x) dx - (\mathcal{L}y_n, y_n) \right).\end{aligned}\quad (1.13)$$

Это, вместе с ограниченностью $\{\lambda_n y_n\}$ в $L_2(\Omega)$, дает ограниченность последовательности $\left\{ \left\| \frac{\partial(\lambda_n y_n(x))}{\partial x_i} \right\| \right\}$ при $i = 1, 2, 3$. Аналогично проверяется и ограниченность $\left\{ \left\| \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \right\| \right\}$ при $i = 1, 2, 3$. Таким образом, последовательности $\{\lambda_n y_n\}$ и $\{u_n\}$ ограничены в $H_0^1(\Omega)$ и, тем самым, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lambda_n y_n \xrightarrow[H_0^1(\Omega)]{\text{сл.}} \bar{y}, \quad u_n \xrightarrow[H_0^1(\Omega)]{\text{сл.}} \bar{u}, \quad \lambda_n \longrightarrow \bar{\lambda} \in [0; 1/\nu]. \quad (1.14)$$

В силу теоремы вложения [10] оператор вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ вполне непрерывен. Поэтому из (1.14) следует, что

$$\lambda_n y_n \xrightarrow[L_2(\Omega)]{} \bar{y}, \quad u_n \xrightarrow[L_2(\Omega)]{} \bar{u}. \quad (1.15)$$

Отсюда, в частности, переходя в соотношениях

$$\left(\frac{1}{\nu} - \lambda_n \right) (R - \|u_n\|) = 0, \quad \|u_n\| \leq R, \quad \lambda_n \leq 1/\nu,$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\left(\frac{1}{\nu} - \bar{\lambda} \right) (R - \|\bar{u}\|) = 0, \quad \|\bar{u}\| \leq R, \quad \bar{\lambda} \leq 1/\nu. \quad (1.16)$$

Аналогично из второго равенства в (1.12) заключаем:

$$\mathcal{L}\bar{u} = \bar{y}. \quad (1.17)$$

Если $\bar{\lambda} = 0$, то из (1.16) следует равенство $\|\bar{u}\| = R$, которое с учетом (1.17) означает, что $\bar{y} \neq 0$. Но тогда из (1.15) получаем $\|y_n\| \rightarrow +\infty$. С другой стороны, y_n есть решения уравнений

$$\mathcal{L}y_n = f - u_n, \quad y_n \in H_0^1(\Omega_{\varepsilon_n}),$$

с равномерно ограниченной правой частью, что в силу (1.7) влечет ограниченность последовательности $\{\|y_n\|\}$. Таким образом, $\bar{\lambda} \neq 0$ и, следовательно,

$$y_n \xrightarrow[H_0^1(\Omega)]{\text{сл.}} \bar{y}/\bar{\lambda} \quad \text{и} \quad y_n \xrightarrow[L_2(\Omega)]{} \bar{y}/\bar{\lambda}.$$

Теперь из (1.12) находим, что $\mathcal{L}(\bar{y}/\bar{\lambda}) + \bar{u} = f$. Это равенство вместе с соотношениями (1.16) и (1.17) показывает, что набор $\bar{\lambda}$, $\bar{u}$ и $\bar{y}/\bar{\lambda}$ есть решение предельной задачи (1.10). В силу единственности этого решения имеем:

$$\bar{\lambda} = \lambda_0, \quad \bar{u} = u_0, \quad \bar{y}/\bar{\lambda} = y_0.$$

Функции $z_n := y_n - y_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $w_n := u_n - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}z_n + w_n &= -f_n, \quad \mathcal{L}w_n - \lambda_n z_n = (\lambda_n - \lambda_0)y_0, \\ \begin{cases} z_n \xrightarrow[H_0^1(\Omega)]{\text{сл.}} 0, & w_n \xrightarrow[H_0^1(\Omega)]{\text{сл.}} 0, \\ z_n \xrightarrow[L_2(\Omega)]{} 0, & w_n \xrightarrow[L_2(\Omega)]{} 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $f_n(x) = 0$ при $x \in \Omega_{\varepsilon_n}$ и $f_n(x) = f(x)$ при $x \in \varepsilon_n \omega$. Поэтому и $\|\mathcal{L}z_n\| \rightarrow 0$, и $\|\mathcal{L}w_n\| \rightarrow 0$. Заменяя в (1.13) y_n на z_n , получим

$$0 \leq \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial z_n}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \frac{c\|z_n\|^2 - (\mathcal{L}z_n, z_n)}{\eta_2}. \quad (1.19)$$

Соотношения (1.18) и (1.19) показывают, что $z_n \rightarrow 0$ в $H_0^1(\Omega)$. Стремление w_n к нулю в $H_0^1(\Omega)$ проверяется аналогично. Таким образом, $y_n \rightarrow y_0$ и $u_n \rightarrow u_0$ в $H_0^1(\Omega)$, что противоречит (1.11).

В дальнейшем будем считать, что для предельной задачи (1.10) справедливо соотношение $\lambda_0 < 1/\nu$ и, тем самым, $\lambda_\varepsilon < 1/\nu$ и $\|u_\varepsilon\| = R$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Отметим, что такие задачи существуют. Действительно, взяв $\lambda_0 < 1/\nu$, найдем y_0 и u_0 , удовлетворяющие первым двум соотношениям системы (1.10). Полагая $R = \|u_0\|$, видим, что λ_0, y_0, u_0 есть решение предельной задачи (1.10).

§ 2. Оценки решения и его формальная асимптотика

В предположениях относительно оператора $\mathcal{L}$ и функции f (см. (1.1)–(1.3)) задача (1.9) есть задача Дирихле для системы, зависящей от параметра λ_ε :

$$\mathcal{L}y_\varepsilon + u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon y_\varepsilon = 0, \quad (2.2)$$

$$y_\varepsilon(x) = 0 = u_\varepsilon(x), \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (2.3)$$

с дополнительным условием

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2(x) dx = R^2. \quad (2.4)$$

Отметим, что $y_\varepsilon, u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, а $y_0, u_0 \in C^\infty(\Omega)$. Для доказательства этого достаточно поочередно рассматривать эллиптические уравнения (2.1) и (2.2), учитывая, что $y_\varepsilon, u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ функции $y(x), u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ и $\lambda(\varepsilon)$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{cases} \mathcal{L}y + u - f = o(\varepsilon^\alpha), & \mathcal{L}w - \lambda(\varepsilon)y = o(\varepsilon^\alpha), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ y(x) = o(\varepsilon^\alpha), & u(x) = o(\varepsilon^\alpha), & x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u^2(x) dx - R^2 = o(\varepsilon^\alpha) \quad (2.6)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле метрики пространств $C^2(\Omega_\varepsilon), C^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ соответственно, а

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda_0 = o(1), \quad y(x) - y_0(x) = o(1), \quad u(x) - u_0(x) = o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

в $L_2(\Omega_\varepsilon)$. Тогда

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha), \quad y(x) - y_\varepsilon(x) = o(\varepsilon^\alpha), \quad u(x) - u_\varepsilon(x) = o(\varepsilon^\alpha) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

в $C(\overline{\Omega_\varepsilon})$, где $y_\varepsilon, u_\varepsilon$ и λ_ε – решение задачи (2.1)–(2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z := y_\varepsilon - y, w := u_\varepsilon - u$ и $\mu(\varepsilon) := \lambda_\varepsilon - \lambda(\varepsilon)$. Тогда для z, w и $\mu(\varepsilon)$ в силу условий теоремы и равенств (2.1)–(2.4) получаем следующие соотношения

$$\mathcal{L}z + w = o(\varepsilon^\alpha), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}w - \lambda_\varepsilon z - \mu(\varepsilon)y = o(\varepsilon^\alpha), \quad (2.9)$$

$$z(x) = o(\varepsilon^\alpha), \quad w(x) = o(\varepsilon^\alpha), \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (2.10)$$

$$(u_\varepsilon, w)_\varepsilon = \frac{1}{2} \|w\|_\varepsilon^2 + o(\varepsilon^\alpha). \quad (2.11)$$

Умножая равенство (2.8) скалярно на u_ε и учитывая ограниченность $\{\|u_\varepsilon\|_\varepsilon\}$, находим

$$\begin{aligned} o(\varepsilon^\alpha) &= (\mathcal{L}z, u_\varepsilon)_\varepsilon + (w, u_\varepsilon)_\varepsilon \stackrel{(2.10)}{=} (z, \mathcal{L}u_\varepsilon)_\varepsilon + o(\varepsilon^\alpha) + (w, u_\varepsilon)_\varepsilon \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \lambda_\varepsilon (z, y_\varepsilon)_\varepsilon + (w, u_\varepsilon)_\varepsilon + o(\varepsilon^\alpha) \end{aligned}$$

или

$$\lambda_\varepsilon (z, y_\varepsilon)_\varepsilon + (w, u_\varepsilon)_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha). \quad (2.12)$$

Аналогично из равенства (2.9) умножением на y_ε с учетом соотношения (2.12) заключаем, что

$$\mu(\varepsilon)(y, y_\varepsilon)_\varepsilon = (w, f)_\varepsilon + o(\varepsilon^\alpha). \quad (2.13)$$

Наконец, умножив равенство (2.9) на z , получим

$$\begin{aligned} (o(\varepsilon^\alpha), z)_\varepsilon &= (\mathcal{L}w, z)_\varepsilon - \lambda_\varepsilon \|z\|_\varepsilon^2 - \mu(\varepsilon)(y, z)_\varepsilon \\ &\stackrel{(2.10), (2.8)}{=} (w, o(\varepsilon^\alpha))_\varepsilon - \|w\|_\varepsilon^2 + o(\varepsilon^{2\alpha}) - \lambda_\varepsilon \|z\|_\varepsilon^2 - \mu(\varepsilon)(y, z)_\varepsilon. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} -\lambda_\varepsilon \|z\|_\varepsilon^2 - \mu(\varepsilon)(y, z)_\varepsilon &= -\lambda_\varepsilon \|z\|_\varepsilon^2 - \mu(\varepsilon)(y_\varepsilon - z, z)_\varepsilon \\ &\stackrel{(2.12)}{=} -\lambda_\varepsilon \|z\|_\varepsilon^2 + \mu(\varepsilon)\|z\|_\varepsilon^2 - \frac{\mu(\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon}(o(\varepsilon^\alpha) - (w, u_\varepsilon)_\varepsilon) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} (\mu(\varepsilon) - \lambda_\varepsilon)\|z\|_\varepsilon^2 - \frac{\mu(\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon}\left(o(\varepsilon^\alpha) - \frac{1}{2}\|w\|_\varepsilon^2 + o(\varepsilon^{2\alpha})\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(o(\varepsilon^\alpha), z)_\varepsilon = (w, o(\varepsilon^\alpha))_\varepsilon + o(\varepsilon^{2\alpha}) - \left(\|w\|_\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\mu(\varepsilon)}{2\lambda_\varepsilon}\right) + (\lambda_\varepsilon - \mu(\varepsilon))\|z\|_\varepsilon^2\right) + \frac{\mu(\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon}o(\varepsilon^\alpha). \quad (2.14)$$

Так как $y_\varepsilon \rightarrow y_0$ в $L_2(\Omega)$ (в силу теоремы 1.1), то из (2.7) следует, что $(y, y_\varepsilon)_\varepsilon \rightarrow \|y_0\|^2 \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\mu(\varepsilon)}{\lambda_\varepsilon}o(\varepsilon^\alpha) \stackrel{(2.13)}{=} o(\varepsilon^\alpha) \left(\frac{(w, f)_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon (y, y_\varepsilon)_\varepsilon} + o(\varepsilon^\alpha) \right) = (w, o(\varepsilon^\alpha))_\varepsilon + o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Таким образом, равенство (2.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\mu(\varepsilon)}{2\lambda_\varepsilon}\right)\|w\|_\varepsilon^2 + (\lambda_\varepsilon - \mu(\varepsilon))\|z\|_\varepsilon^2 &= (o(\varepsilon^\alpha), z)_\varepsilon + (o(\varepsilon^\alpha), w)_\varepsilon + o(\varepsilon^{2\alpha}) \\ &\leq o(\varepsilon^\alpha)(\|z\|_\varepsilon^2 + \|w\|_\varepsilon^2)^{1/2} + o(\varepsilon^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Отсюда следует: $\|w\|_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha)$, $\|z\|_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha)$. Эти соотношения с использованием (2.13) дают последнее равенство $\mu(\varepsilon) = o(\varepsilon^\alpha)$. Теперь, применяя (1.3), формулу Грина и условие (2.10), получаем:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial z(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \frac{1}{\eta_2} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i} \frac{\partial z(x)}{\partial x_j} dx \\ &= \frac{1}{\eta_2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} a_0(x) z^2(x) dx - (\mathcal{L}z, z)_\varepsilon + o(\varepsilon^{2\alpha}) \right) \\ &= \frac{1}{\eta_2} (o(\varepsilon^{2\alpha}) + (w + o(\varepsilon^\alpha), z)_\varepsilon + o(\varepsilon^{2\alpha})) = o(\varepsilon^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Тем самым $\|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^\alpha)$. Аналогично показывается, что $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^\alpha)$. Но в силу условий теоремы $z, w \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, поэтому можно применить неравенство (см. [11; гл. 2, теорема 5.1]):

$$\|z\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C(\|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\mathcal{L}z\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \|o(\varepsilon^\alpha) - w\|_{H^2(\partial\Omega_\varepsilon)}) = o(\varepsilon^\alpha).$$

В силу теоремы вложения получим, что $\|z\|_{C(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^\alpha)$. Соотношение $\|w\|_{C(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^\alpha)$ доказывается аналогично.

Доказанная теорема утверждает, что для построения асимптотики функций y_ε и u_ε достаточно построить y и u , удовлетворяющие условиям (2.5)–(2.7). Будем искать эти функции методом согласования внешнего и внутреннего разложения [1].

Внешнее разложение ищем в виде

$$\mathcal{Y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} y_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \quad \mathcal{U}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} u_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \quad (2.15)$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \lambda_{k,l} \ln^l \varepsilon. \quad (2.16)$$

Внутреннее разложение для функций $z(\xi) := y(\varepsilon\xi)$ и $v(\xi) := u(\varepsilon\xi)$, где ξ – внутренняя переменная ($x = \varepsilon\xi$), ищем в виде

$$\mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} z_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon, \quad \mathcal{V}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} v_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon. \quad (2.17)$$

Как обычно, считаем, что $y_{k,i} = 0 = u_{k,l}$, $\lambda_{k,l} = 0$ при $l > k - 3$ и $z_{i,m} = 0 = v_{i,m}$ при $m > i - 2$.

Функции $y_{0,0}(x)$, $u_{0,0}(x)$ и число $\lambda_{0,0}$ – это решение предельной задачи (1.10) $y_0(x)$, $u_0(x)$ и λ_0 . При этом, как уже отмечалось, $y_0(x), u_0(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Функции $y_{k,l}(x)$, $u_{k,l}(x)$ и числа $\lambda_{k,l}$ являются решениями задач

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_{k,l}(x) + u_{k,l}(x) = 0, & x \in \Omega \setminus \{O\}, \quad y_{k,l}, u_{k,l} \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\}), \\ \mathcal{L}u_{k,l}(x) - \lambda_{k,l}y_{k,l}(x) = \lambda_{k,l}y_0(x) + g_{k,l}(x), \\ y_{k,l}(x) = 0 = u_{k,l}(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.18)$$

где $g_{k,l}(x) = \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\sigma} \lambda_{s,\sigma} y_{k-s,l-\sigma}(x)$ полностью определяются предыдущими уравнениями (здесь $\sigma: s-3 \geq \sigma \geq 0, k-l-3 \geq s-\sigma, l \geq \sigma$).

Чтобы получить аналогичные уравнения для $z_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$, необходимо разложить оператор $\mathcal{L}$ в окрестности точки O в ряд. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Тогда при $x \rightarrow 0$ получим

$$\mathcal{L} = \Delta - \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(x, D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(x, D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(x), \quad (2.19)$$

где $Q_{i,j}(x, D)$ — многочлены от $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$, однородные степени i по x и степени j по D (при этом оператор D действует раньшее умножения).

Для функций $z(\xi)$ и $v(\xi)$ система (2.1), (2.2) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta z(\xi) - \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(\xi, D) \varepsilon^i + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(\xi, D) \varepsilon^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(\xi) \varepsilon^{i+2} \right) z(\xi) \\ \quad + \varepsilon^2 v(\xi) = \varepsilon^2 f(\varepsilon \xi), \\ \Delta v(\xi) - \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(\xi, D) \varepsilon^i + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(\xi, D) \varepsilon^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,0}(\xi) \varepsilon^{i+2} \right) v(\xi) \\ \quad - \varepsilon^2 \lambda(\varepsilon) z(\xi) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Подставляя ряды (2.16) и (2.17) в систему (2.20), получаем для функций $z_{i,m}$ и $v_{i,m}$ следующие задачи

$$\begin{cases} \Delta z_{0,0}(\xi) = 0, \quad \Delta v_{0,0}(\xi) = 0, \\ \Delta z_{1,0}(\xi) = (Q_{1,2}(\xi, D) + Q_{0,1}(\xi, D)) z_{0,0}(\xi), \\ \Delta v_{1,0}(\xi) = (Q_{1,2}(\xi, D) + Q_{0,1}(\xi, D)) v_{0,0}(\xi), \\ \Delta z_{i,m}(\xi) = \sum_{s=1}^i (Q_{s,2}(\xi, D) + Q_{s-1,1}(\xi, D) + Q_{s-2,0}(\xi)) z_{i-s,m}(\xi) \\ \quad - v_{i-2,m}(\xi) + f_{i-2,m}(\xi), \\ \Delta v_{i,m}(\xi) = \sum_{s=1}^i (Q_{s,2}(\xi, D) + Q_{s-1,1}(\xi, D) + Q_{s-2,0}(\xi)) v_{i-s,m}(\xi) \\ \quad + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{\sigma} \lambda_{s,\sigma} z_{i-2-s,m-\sigma}(\xi) \end{cases} \quad (2.21)$$

($\xi \notin \omega$) с граничными условиями

$$z_{i,m}(\xi) = 0 = v_{i,m}(\xi) \quad \text{при } \xi \in \omega.$$

Здесь $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,0}(x)$ при $x \rightarrow 0$, $f_{i,0}(x)$ — однородный многочлен степени i , а $f_{i,m}(x) = 0$ при $m > 0$.

§ 3. Общий вид функций $y_{k,l}$ и $u_{k,l}$

Прежде всего отметим, что решение системы (2.18) можно представить в виде

$$\begin{cases} y_{k,l}(x) = \lambda_{k,l} \bar{y}_0(x) + Y_{k,l} + G_{k,l}(x), \\ u_{k,l}(x) = \lambda_{k,l} \bar{u}_0(x) + W_{k,l} + H_{k,l}(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\bar{y}_0, \bar{u}_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ – решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}\bar{y}_0(x) + \bar{u}_0(x) = 0, & \mathcal{L}\bar{u}_0(x) - \lambda_0 \bar{y}_0(x) = y_0(x), & x \in \Omega, \\ \bar{y}_0(x) = 0, & \bar{u}_0(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

$Y_{k,l}, W_{k,l} \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{O\})$ – решение однородной системы

$$\begin{cases} \mathcal{L}Y(x) + W(x) = 0, & \mathcal{L}W(x) - \lambda_0 Y(x) = 0, & x \in \Omega \setminus \{O\}, \\ Y(x) = 0, & W(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

а $G_{k,l}, H_{k,l} \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{O\})$ – некоторые решения неоднородной системы

$$\begin{cases} \mathcal{L}G(x) + H(x) = 0, & \mathcal{L}H(x) - \lambda_0 G(x) = g(x), & x \in \Omega \setminus \{O\}, \\ G(x) = 0, & H(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $g(x) = g_{k,l}(x)$.

Для выяснения вида решений систем (3.3) и (3.4) нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Всюду в данном пункте, не оговаривая это в дальнейшем, через $X_k(x), Z_k(x)$ или $X_{k,i}(x), Z_{k,i}(x)$ и т. д. будут обозначаться однородные гармонические многочлены степени k (или тождественный нуль при $k < 0$), а через $P_k(x), R_k(x)$ или $P_{k,i}(x), R_{k,i}(x)$ и т. д. – однородные многочлены степени k (или тождественный нуль при $k < 0$).

Непосредственным вычислением находим, что при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Delta(r^\alpha X_k(x) \ln^\beta r) &= r^{\alpha-2} X_k(x) (\alpha(\alpha+1+2k) \ln^\beta r \\ &\quad + \beta(2\alpha+2k-1) \ln^{\beta-1} r + \beta(\beta-1) \ln^{\beta-2} r), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $r := |x|$.

ЛЕММА 3.1. Уравнение $\Delta\varphi(x) = r^\alpha X_k(x) \ln^\beta r$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -2$ и $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, имеет решение вида $\varphi(x) = r^{\alpha+2} X_k(x) M_\beta(\ln r)$ при $\alpha + 2k + 3 \neq 0$ и $\varphi(x) = r^{\alpha+2} X_k(x) M_\beta(\ln r) \ln r$ при $\alpha + 2k + 3 = 0$. Здесь $M_\beta(\cdot)$ – многочлен степени β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится стандартно, индукцией по β с использованием равенства (3.5).

ЛЕММА 3.2. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и α – нечетное. Тогда уравнение $\Delta\varphi(x) = r^\alpha X_k(x)P_l(x) \ln^\beta r$ имеет решение вида

$$\varphi(x) = r^{\alpha+2} \sum_{s=0}^{\beta+1} R_{k+l}(x) M_\beta(\ln r)$$

при

$$2(k+l) \geq -(\alpha+3) \geq \max\{2k, k+l\} \quad (3.6)$$

и $\varphi(x) = r^{\alpha+2} \sum_{s=0}^{\beta} R_{k+l}(x) M_\beta(\ln r)$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [1; гл. 3, §1, лемма 1.4]

$$X_k(x)P_l(x) = \sum_{s=0}^l r^{2s} Z_{k+l-2s}(x). \quad (3.7)$$

Поэтому

$$r^\alpha X_k(x)P_l(x) \ln^\beta r = \sum_{s=0}^l r^{2s+\alpha} Z_{k+l-2s}(x) \ln^\beta r. \quad (3.8)$$

При этом выполнение условия (3.6) означает, что среди слагаемых в (3.8) найдется такое $r^{\alpha_1} Z_{k_1}(x) \ln^\beta r$, что $\alpha_1 + 2k_1 + 3 = 0$. Теперь осталось применить лемму 3.1 (заметим, что $r^{2s+\alpha+2} Z_{k+l-2s}(x)$ есть $r^{\alpha+2} R_{k+l}(x)$).

Обозначим через $\Phi(\alpha, k, \beta, x)$ (с индексами или без них) функции вида

$$r^\alpha \sum_{s=0}^{\beta} R_{k,s}(x) \ln^s r.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и α – нечетное. Тогда уравнение вида $\Delta\varphi(x) = \Phi(\alpha, k, \beta, x)$ имеет решение вида $\varphi(x) = \Phi(\alpha+2, k, \beta+1, x)$ при выполнении условия

$$2k \geq -(\alpha+3) \geq k \quad (3.9)$$

и $\varphi(x) = \Phi(\alpha+2, k, \beta, x)$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 3.2 с учетом равенств

$$\Phi(\alpha, k, \beta, x) = \Phi(\alpha-2, k+2, \beta, x), \quad (3.10)$$

$$\Phi(\alpha, k, \beta, x) + \Phi(\alpha, k, \beta+\gamma, x) = \Phi(\alpha, k, \beta+\gamma, x). \quad (3.11)$$

Теперь перейдем к выяснению вида функций $Y_{k,l}(x), W_{k,l}(x), G_{k,l}(x), H_{k,l}(x)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $X_{k-1}(x)$, $Z_{k-1}(x)$ существуют функции $Y(x), W(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$, являющиеся решением системы (3.3) и имеющие при $x \rightarrow 0$ асимптотические разложения вида

$$\begin{aligned} Y(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} r^{-2k+1-2j} P_{k-1+3j}(x), \\ W(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} r^{-2k+1-2j} R_{k-1+3j}(x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $P_{k-1}(x) = X_{k-1}(x)$, $R_{k-1}(x) = Z_{k-1}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 1.2 из [1; гл. 3, §1]. Введем обозначения для членов рядов (3.12)

$$\varphi_j(x) := r^{-2k+1-2j} P_{k-1+3j}(x), \quad \psi_j(x) := r^{-2k+1-2j} R_{k-1+3j}(x)$$

(где $\varphi_0(x) := r^{-2k+1} X_{k-1}(x)$, $\psi_0(x) := r^{-2k+1} Z_{k-1}(x)$) и подставим в систему (3.3), где оператор $\mathcal{L}$ записан в виде (2.19). Затем приравняем члены одинаковой степени однородности, учитывая, что степень однородности функций $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$ и $Q_{l,i}(x, D)\varphi_j(x)$, $Q_{l,i}(x, D)\psi_j(x)$ равна соответственно $j - k$ и $l + j - k - i$. Получится следующая система, аналогичная системе (2.21):

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0(x) = 0, & \Delta\psi_0(x) = 0, \\ \Delta\varphi_j(x) = \sum_{l=1}^j (Q_{l,2}(x, D) + Q_{l-1,1}(x, D) + Q_{l-2,0}(x))\varphi_{j-l}(x) - \psi_{j-2}(x), \\ \Delta\psi_j(x) = \sum_{l=1}^j (Q_{l,2}(x, D) + Q_{l-1,1}(x, D) + Q_{l-2,0}(x))\psi_{j-l}(x) + \lambda_0\varphi_{j-2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Первые два уравнения из этой системы выполняются в силу выбора функций φ_0 и ψ_0 . Далее, индукцией по j с использованием леммы 3.1, соотношений (3.7) и равенств

$$\begin{aligned} Q_{0,1}(x, D)(r^\alpha X_p(x)) &= r^{\alpha-2} X_{p+1,1}(x) + r^\alpha X_{p-1,1}(x), \\ Q_{0,2}(x, D)(r^\alpha X_p(x)) &= r^{\alpha-4} X_{p+2,2}(x) + r^{\alpha-2} X_{p,2}(x) + r^\alpha X_{p-2,2}(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

показывается, что

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sum_{s=0}^{2j-1} r^{-2k+1-2j+2s} X_{k-1+3j-2s}(x), \\ \psi_j(x) &= \sum_{s=0}^{2j-1} r^{-2k+1-2j+2s} Z_{k-1+3j-2s}(x), \end{aligned}$$

т. е.

$$P_{k-1+3j}(x) = \sum_{s=0}^{2j-1} r^{2s} X_{k-1+3j-2s}(x), \quad R_{k-1+3j}(x) = \sum_{s=0}^{2j-1} r^{2s} Z_{k-1+3j-2s}(x).$$

Итак, ряды вида (3.12), являющиеся формальными асимптотическими рядами (ф.а.р.) системы (3.3), построены. Возьмем теперь частичные суммы этих рядов $\widehat{Y}_N(x)$ и $\widehat{W}_N(x)$. Тогда по построению $\mathcal{L}\widehat{Y}_N(x) + \widehat{W}_N(x) = \gamma_N(x)$, $\mathcal{L}\widehat{W}_N(x) - \lambda_0\widehat{Y}_N(x) = \delta_N(x)$, где $\gamma_N, \delta_N \in C^{N_1}(\overline{\Omega})$, $\gamma_N(x) = O(r^{N_1})$, $\delta_N(x) = O(r^{N_1})$ при $x \rightarrow 0$, $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Пусть $Y_N(x)$ и $W_N(x)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}Y_N(x) + W_N(x) = -\gamma_N(x), & \mathcal{L}W_N(x) - \lambda_0Y_N(x) = -\delta_N(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ Y_N(x) = -\widehat{Y}_N(x), & W_N(x) = -\widehat{W}_N(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

В силу условий на $\mathcal{L}$ это решение существует и $Y_N, W_N \in C^{N_1}(\overline{\Omega})$. Тогда функции $Y(x) := \widehat{Y}_N(x) + Y_N(x)$ и $W(x) := \widehat{W}_N(x) + W_N(x)$ – искомое решение задачи (3.3), так как оно по построению удовлетворяет всем условиям задачи (3.3) и при больших N не зависит от N , ибо разность таких функций при разных N принадлежит $C^2(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет однородной системе с однородными граничными условиями.

Обозначим через $S(\alpha, k, x)$ (с индексами или без них) ряды вида

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^{\alpha-2j} P_{k+3j}(x).$$

Тогда теорема 3.1 утверждает, что у задачи (3.3) есть решения с асимптотикой при $x \rightarrow 0$ вида

$$Y(x) = S_1(-2k+1, k-1, x), \quad W(x) = S_2(-2k+1, k-1, x).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Если $g(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ и при $x \rightarrow 0$ имеет асимптотическое разложение вида

$$g(x) = r^{-2k+3} X_{k-2}(x) + S_1(-2k+1, k+1, x) + \sum_{s=1}^{k-5} S_1(-2k-2s+7, k+3s-3, x) \ln^s r,$$

то у задачи (3.4) существует решение $G(x), H(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ с асимптотикой при $x \rightarrow 0$ вида

$$\begin{aligned} G(x) &= S_2(-2k+5, k-2, x) + \sum_{s=1}^{k-4} S_2(-2k-2s+5, k+3s-2, x) \ln^s r, \\ H(x) &= S_3(-2k+5, k-2, x) + \sum_{s=1}^{k-4} S_3(-2k-2s+5, k+3s-2, x) \ln^s r. \end{aligned} \tag{3.15}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично теореме 3.1 вначале построим формальные асимптотические ряды $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x)$, удовлетворяющие системе (3.4), где $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_j(x) &= \Phi_2(-2k+5-2j, k-2+3j, m_j, x), \\ \psi_j(x) &= \Phi_3(-2k+5-2j, k-2+3j, m_j, x).\end{aligned}$$

Здесь $m_j = j$ при $0 \leq j \leq k-4$ и $m_j = k-4$ при $j \geq k-3$. Опять, подставив эти ряды в систему (3.4), в которой оператор $\mathcal{L}$ записан в виде (2.19), и приравняв члены, имеющие одинаковый вид $\Phi(\bar{\alpha}, \bar{k}, \bar{m})$, получим для φ_j и ψ_j систему, аналогичную (3.13):

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\varphi_0(x) &= 0, \quad \Delta\psi_0(x) = r^{-2k+3} X_{k-2}(x), \\ \Delta\varphi_j(x) &= \sum_{l=1}^j (Q_{l,2}(x, D) + Q_{l-1,1}(x, D) + Q_{l-2,0}(x)) \varphi_{j-l}(x) - \psi_{j-2}(x), \\ \Delta\psi_j(x) &= \sum_{l=1}^j (Q_{l,2}(x, D) + Q_{l-1,1}(x, D) + Q_{l-2,0}(x)) \psi_{j-l}(x) \\ &\quad + \lambda_0 \varphi_{j-2} + \Phi_1(-2k+3-2j, k-2+3j, n_j, x), \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

где $n_j = 0$ при $0 \leq j \leq 4$, $n_j = j-4$ при $5 \leq j \leq k-1$ и $n_j = k-5$ при $j \geq k$ (здесь использованы соотношения (3.10), (3.11)). Отметим также, что

$$Q_{l,s}(x, D) \Phi(\alpha, k, m, x) = \Phi(\alpha - 2s, k + l + s, m, x). \quad (3.17)$$

Возьмем $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, а для нахождения ψ_0 применим лемму 3.1. Получим, что $\psi_0(x) = r^{-2k+5} X_{k-2,1}(x)$. Используя равенства (3.14), для нахождения ψ_1 получаем уравнение

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1(x) &= r^{-2k+1} X_{k+1,2}(x) + r^{-2k+3} X_{k-1,2}(x) + r^{-2k+5} X_{k-3,2}(x) \\ &\quad + r^{-2k+7} X_{k-5,2}(x) + \Phi_1(-2k+1, k+1, 0, x).\end{aligned}$$

Если $k-5 \geq 0$, то по лемме 3.1 слагаемое $r^{-2k+7} X_{k-5,2}(x)$ даст для ψ_1 слагаемое вида $r^{-2k+9} X_{k-5,3}(x) \ln r$. Далее, для построения φ_j и ψ_j применим лемму 3.3. При этом отметим, что все оставшиеся уравнения в силу равенств (3.17) и (3.14) имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_j(x) &= \Phi_4(-2k+3-2j, k-2+3j, m_j-1, x), \\ \Delta\psi_j(x) &= \Phi_5(-2k+3-2j, k-2+3j, m_j-1, x).\end{aligned}$$

Условие (3.9) здесь принимает вид $2(k-2+3j) \geq -(-2k+6-2j) \geq k-2+3j$. Левая часть этого неравенства справедлива всегда, а правая — лишь при $j \leq k-4$, т.е. при $j \geq k-3$ степень логарифма в φ_j и ψ_j стабилизируется. Таким образом, при $k \leq 4$ в выражениях для φ_j и ψ_j при всех $j \geq 0$ отсутствуют логарифмы.

После того как формальные ряды, удовлетворяющие системе (3.4), построены, завершение доказательства теоремы проводится аналогично тому, как это было сделано в теореме 3.1.

Среди решений задачи (2.18) нас будут интересовать те, асимптотика которых при $x \rightarrow 0$ имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{k,0} = S_1(-2k+1, k-1, x) + \sum_{s=1}^{k-4} S_1(-2k-2s+5, k+3s-2, x) \ln^s r, \\ u_{k,0} = S_2(-2k+1, k-1, x) + \sum_{s=1}^{k-4} S_2(-2k-2s+5, k+3s-2, x) \ln^s r, \\ y_{k,l} = S_3(-2k+2l+5, k-l-3, x) \\ \quad + \sum_{s=1}^{k-l-6} S_3(-2k-2s+2l+9, k+3s-l-4, x) \ln^s r, \\ y_{k,l} = S_4(-2k+2l+5, k-l-3, x) \\ \quad + \sum_{s=1}^{k-l-6} S_4(-2k-2s+2l+9, k+3s-l-4, x) \ln^s r. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Теоремы 3.1 и 3.2 с учетом очевидных соотношений $\bar{y}_0 = S_5(-4k+1, 4k-1, x)$, $\bar{u}_0 = S_5(-4k+1, 4k-1, x)$ показывают, что при фиксированном наборе чисел $\{\lambda_{k,l}\}$ задача (2.18) имеет решения $\{y_{k,l}\}$ и $\{u_{k,l}\}$ с асимптотикой при $x \rightarrow 0$ вида (3.18).

В дальнейшем через $\Psi(\alpha, m, x)$ (с индексами или без них) будем обозначать функции вида $|x|^{-k} P_{k+\alpha}(x) \ln^m |x|$, где коэффициент при $\ln^m |x|$ есть однородная функция порядка α , а через $\Xi(\alpha, m, x)$ и $\Upsilon(\alpha, m, \xi)$ — ряды вида $\sum_{s=0}^{\infty} \Psi(\alpha+s, m, x)$ и $\sum_{s=0}^{\infty} \Psi(\alpha-s, m, \xi)$ соответственно.

С помощью этих обозначений формулы (3.18) запишутся следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{k,0} = \Xi_1(-k, 0, x) + \sum_{s=1}^{k-4} \Xi_1(-k+s+3, s, x), \\ u_{k,0} = \Xi_2(-k, 0, x) + \sum_{s=1}^{k-4} \Xi_2(-k+s+3, s, x), \\ y_{k,l} = \Xi_3(-k+l+2, 0, x) + \sum_{s=1}^{k-l-6} \Xi_3(-k+s+l+5, s, x), \\ y_{k,l} = \Xi_4(-k+l+2, 0, x) + \sum_{s=1}^{k-l-6} \Xi_4(-k+s+l+5, s, x). \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Подставив решения задачи (2.18) с асимптотикой вида (3.19) в ряды (2.15), затем сделав замену переменной $x := \varepsilon \xi$ и приведя подобные, получим ряды вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} \mathcal{X}_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} \mathcal{Y}_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon, \quad (3.20)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{i,0} = \Upsilon_1(i, 0, \xi) + \sum_{s=1}^{i-3} \Upsilon_1(i-s-4, s, \xi), \\ \mathcal{V}_{i,0} = \Upsilon_2(i, 0, \xi) + \sum_{s=1}^{i-3} \Upsilon_2(i-s-4, s, \xi), \\ \mathcal{X}_{i,m} = \Upsilon_3(i-m-2, 0, \xi) + \sum_{s=1}^{i-m-5} \Upsilon_3(i-m-s-6, s, \xi), \\ \mathcal{V}_{i,m} = \Upsilon_4(i-m-2, 0, \xi) + \sum_{s=1}^{i-m-5} \Upsilon_4(i-m-s-6, s, \xi). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

ЛЕММА 3.4. Если функции $y_{k,l}(x)$ и $u_{k,l}(x)$ являются решением задачи (2.18) при фиксированном наборе чисел $\{\lambda_{k,l}\}$ и имеют при $x \rightarrow 0$ асимптотику вида (3.19), то построенные по ним ряды (3.21) являются ф.а.р. системы (2.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению справедливы равенства

$$\mathcal{L} A_{N,x} \mathcal{Y}(x) = -A_{N,x} \mathcal{U}(x) + f(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{L} A_{N,x} \mathcal{U}(x) = \mathcal{G}(A_{N,x} \mathcal{Y}(x), A_{N,x} \mathcal{U}(x))$$

(здесь $A_{N,x}$ — оператор взятия частичной суммы внешнего разложения, содержащей все члены со степенями не выше ε^N , а $\mathcal{G}$ — некоторая известная функция). Переходя в этих равенствах к переменной $\xi = x/\varepsilon$, заменяя $A_{N,x} \mathcal{Y}(x)$ на $\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \sum_{m=1}^{i-3} B_{N-i} \mathcal{X}_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon$, а $A_{N,x} \mathcal{U}(x)$ на $\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \sum_{m=1}^{i-3} B_{N-i} \mathcal{V}_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon$ и приравнявая в соотношениях

$$\begin{aligned} A_{N,\xi} \mathcal{L} A_{N,x} \mathcal{Y}(x) &= A_{N,\xi} (f(x) - A_{N,x} \mathcal{U}(x)), \\ A_{N,\xi} \mathcal{L} A_{N,x} \mathcal{U}(x) &= A_{N,\xi} \mathcal{G}(A_{N,x} \mathcal{Y}(x), A_{N,x} \mathcal{U}(x)) \end{aligned}$$

коэффициенты при одинаковых членах $\varepsilon^i \ln^m \varepsilon$, получаем для $B_{N-i} \mathcal{X}_{i,m}$ и $B_{N-i} \mathcal{V}_{i,m}$ точно такую же систему, как и система (2.21). Здесь B_k — операторы взятия частичной суммы асимптотического ряда при $\xi \rightarrow \infty$, содержащей все слагаемые, не являющиеся $o(\rho^{-k})$ при $\rho \rightarrow \infty$, а $A_{N,\xi}$ — оператор, аналогичный оператору $A_{N,x}$, но применяемый к внутреннему разложению.

В дальнейшем вместо $O(t^\alpha |\ln^m t|)$ будем писать $O_m(t^\alpha)$ или $O_*(t^\alpha)$, если конкретное значение числа m нам неважно.

Следующая теорема является основной в методе согласования асимптотических разложений.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть функции $y_{k,l}(x)$ и $u_{k,l}(x)$ являются решениями задачи (2.18) при фиксированном наборе констант $\lambda_{k,l}$ и имеют при $x \rightarrow 0$ асимптотику вида (3.19). Пусть функции $z_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$ являются решениями системы (2.21) при тех же значениях $\lambda_{k,l}$ и имеют при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотику

вида (3.21). Если выполнены условия согласования рядов $\mathcal{Y}(x)$ и $\mathcal{Z}(\xi)$, $\mathcal{U}(x)$ и $\mathcal{V}(\xi)$, т.е. при всех $n \geq 0$

$$A_{N,\xi} A_{N,x} \mathcal{Y}(x) = A_{N,x} A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi), \quad A_{N,\xi} A_{N,x} \mathcal{U}(x) = A_{N,x} A_{N,\xi} \mathcal{V}(\xi), \quad (3.22)$$

то для

$$\begin{cases} y_N(x) := A_{N,x} Y(x) + A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi) - A_{N,x} A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi), \\ u_N(x) := A_{N,x} U(x) + A_{N,\xi} \mathcal{V}(\xi) - A_{N,x} A_{N,\xi} \mathcal{V}(\xi), \\ \lambda_N := \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-3} \lambda_{k,l} \ln^l \varepsilon \end{cases} \quad (3.23)$$

справедливы соотношения

$$\begin{cases} \mathcal{L} y_N(x) + u_N(x) = f(x) + O_{N-2}(\varepsilon^{(N-1)/2}), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \mathcal{L} u_N(x) - \lambda_N y_N(x) = O_{N-2}(\varepsilon^{(N-1)/2}), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ y_N(x) = O_{N-3}(\varepsilon^{N+1}), \quad u_N(x) = O_{N-3}(\varepsilon^{N+1}), & x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.24)$$

равномерно в Ω_ε и на границе $\partial\Omega_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим y_N и u_N на $\partial\Omega_\varepsilon$. Из асимптотических разложений (3.19), (3.21) и условий согласования (3.22) получим при малых $r = |x|$

$$A_{N,x} \mathcal{Y}(x) - A_{N,\xi} A_{N,x} \mathcal{Y}(x) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \ln^l \varepsilon \cdot O_{k-l-4}(r^{N+1-k}). \quad (3.25)$$

Если $x \in \varepsilon \partial\omega$ (т.е. r/ε — ограничено), то из (3.25) следует, что

$$A_{N,x} \mathcal{Y}(x) - A_{N,\xi} A_{N,x} \mathcal{Y}(x) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k O_{k-4}(\varepsilon^{N+1-k}) = O_{N-4}(\varepsilon^{N+1}).$$

А так как $A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi)$ на $\partial\omega$ равны нулю, то $y_N = O_{N-4}(\varepsilon^{N+1})$ на $\varepsilon \partial\omega$. Аналогично при больших $\rho = |\xi|$

$$A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi) - A_{N,x} A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} \ln^m \varepsilon \cdot O_{i-m-3}(\rho^{-N-1+i}). \quad (3.26)$$

Поэтому при $x \in \partial\Omega$ (т.е. если $\varepsilon\rho \geq c > 0$)

$$A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi) - A_{N,x} A_{N,\xi} \mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i O_{i-3}(\varepsilon^{N+1-i}) = O_{N-3}(\varepsilon^{N+1}).$$

Так как по построению $A_{N,x} \mathcal{Y}(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то $y_N = O_{N-3}(\varepsilon^{N+1})$ на $\partial\Omega$ и, следовательно, на $\partial\Omega_\varepsilon$. Соотношение $u_N = O_{N-3}(\varepsilon^{N+1})$ проверяется аналогично.

Теперь оценим величины $\mathcal{L}y_N(x) + u_N(x) - f(x)$ и $\mathcal{L}u_N(x) - \lambda_N y_N(x)$ в Ω_ε . Прежде всего отметим, что по построению $\mathcal{L}(A_{N,x}\mathcal{Y}(x)) + A_{N,x}\mathcal{U}(x) = f(x)$ в Ω_ε . С другой стороны, при $r \geq \sqrt{\varepsilon}$ в силу (3.26) имеем:

$$\begin{aligned} A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi) - A_{N,x}A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi) &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} \ln^m \varepsilon \cdot O_{i-m-3}(\varepsilon^{(N+1-i)/2}) \\ &= \sum_{i=0}^N O_{i-3}(\varepsilon^{(N+1-i)/2}) = O(\varepsilon^{(N+1)/2}). \end{aligned}$$

Аналогично получается соотношение $A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi) - A_{N,x}A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi) = O(\varepsilon^{(N+1)/2})$. Производные первого и второго порядка от этих функций при $r \geq \sqrt{\varepsilon}$ будут иметь порядок $O(\varepsilon^{(N-1)/2})$. Таким образом,

$$\mathcal{L}y_N(x) + u_N(x) = f(x) + O(\varepsilon^{(N-1)/2}) \quad \text{при } |x| = r \geq \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.27)$$

Если же $r \leq \sqrt{\varepsilon}$, то в силу (3.25)

$$\begin{aligned} A_{N,x}\mathcal{Y}(x) - A_{N,x}A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi) \\ &= A_{N,x}\mathcal{Y}(x) - A_{N,\xi}A_{N,x}\mathcal{Y}(x) + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \ln^l \varepsilon \cdot O_{k-l-4}(\varepsilon^{(N+1-k)/2}) \\ &= O(\varepsilon^{(N+1)/2}). \end{aligned}$$

Аналогично и $A_{N,x}\mathcal{U}(x) - A_{N,x}A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi) = O(\varepsilon^{(N+1)/2})$. Таким образом, при $r \leq \sqrt{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_{N,x}\mathcal{Y}(x) - A_{N,x}A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi)) \\ + (A_{N,x}\mathcal{U}(x) - A_{N,x}A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi)) = O(\varepsilon^{(N-1)/2}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

С другой стороны, функции $z_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$, входящие в $A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi)$ и $A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi)$, удовлетворяют системе (2.21) при $i \leq N$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi)) + A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi) \\ &= \left(\varepsilon^{-2}\Delta_\xi - \varepsilon^{-2} \sum_{i=1}^N Q_{i,2}(\xi, D)\varepsilon^i - \varepsilon^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} Q_{i,1}(\xi, D)\varepsilon^i - \sum_{i=0}^{N-2} Q_{i,0}(\xi)\varepsilon^i \right) (A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi)) \\ &\quad + A_{N,\xi}\mathcal{V}(\xi) - \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} Q_{i,2}(x, D) + \sum_{i=N}^{\infty} Q_{i,1}(x, D) + \sum_{i=N-1}^{\infty} Q_{i,0}(x) \right) (A_{N,\xi}\mathcal{Z}(\xi)) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{0,0} + \varepsilon f_{1,0}(\xi) + \dots + \varepsilon^{N-2} f_{N-2,0}(\xi) \\
&\quad - \varepsilon^{N-1} \sum_{m=0}^{N-2} \ln^m \varepsilon \sum_{s=1}^N (Q_{s,2}(\xi, D) + Q_{s-1,1}(\xi, D) + Q_{s-2,0}(\xi)) z_{N-s+1,m}(\xi) \\
&\quad - \dots - \varepsilon^{2N-2} \sum_{m=0}^{N-2} \ln^m \varepsilon (Q_{N,2}(\xi, D) + Q_{N-1,1}(\xi, D) + Q_{N-2,0}(\xi)) z_{N,m}(\xi) \\
&\quad + \varepsilon^{N-1} \sum_{m=0}^{N-3} v_{N-1,m}(\xi) \ln^m \varepsilon + \varepsilon^N \sum_{m=0}^{N-2} v_{N,m}(\xi) \ln^m \varepsilon \\
&\quad + O\left(r^{N-1} \left\| (A_{N,\xi} \mathcal{Z}) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{C^2(r \leq \sqrt{\varepsilon})} \right) \\
&\stackrel{(3.20)}{=} f(x) + O(r^{N-1}) + O(\varepsilon^{N-1} |\ln^{N-2} \varepsilon| \rho^{N-1} + \dots + \varepsilon^{2N-2} |\ln^{N-2} \varepsilon| \rho^{2N-2}) \\
&\quad + O(\varepsilon^{N-1} |\ln^{N-3} \varepsilon| \rho^{N-1} + \varepsilon^N |\ln^{N-2} \varepsilon| \rho^N) \\
&\quad + O(\rho^{N-1} (1 + \varepsilon \rho + \dots + \varepsilon_N |\ln^{N-2} \varepsilon| \rho^N)) \\
&= f(x) + O_{N-2}(\varepsilon^{(N-1)/2}).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{L}y_N(x) + u_N(x) = f(x) + O_{N-2}(\varepsilon^{(N-1)/2})$ в Ω_ε . Аналогично оценивается и $\mathcal{L}u_N(x) - \lambda_N y_N(x)$.

§ 4. Определяющие соотношения для $\lambda_{k,l}$

Теперь, прежде чем приступить к построению функций $y(x)$, $u(x)$ и $\lambda(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, рассмотрим подробнее равенство (2.6).

Пусть $\bar{u}(x) := u(x) - u_0(x)$, где $u(x)$ удовлетворяет условию (2.6). Тогда для $\bar{u}(x)$ получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}
R^2 + O(\varepsilon^\alpha) &= \int_{\Omega_\varepsilon} u_0^2(x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} (2u_0(x)\bar{u}(x) + \bar{u}^2(x)) dx \\
&= \int_{\Omega} u_0^2(x) dx - \int_{\varepsilon\omega} u_0^2(x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} (2u_0(x)\bar{u}(x) + \bar{u}^2(x)) dx.
\end{aligned}$$

Но $R^2 = \int_{\Omega} u_0^2(x) dx$, поэтому

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (2u_0(x)\bar{u}(x) + \bar{u}^2(x)) dx = \int_{\varepsilon\omega} u_0^2(x) dx + O(\varepsilon^\alpha). \quad (4.1)$$

Так как

$$\int_{\varepsilon\omega} u_0^2(x) dx = \int_{\varepsilon\omega} \left(\sum_{s=0}^{\infty} P_s(x) \right) dx \stackrel{(x=\varepsilon\xi)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+3} \int_{\omega} P_s(\xi) d\xi = \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k \mu_k$$

есть известный ряд, то равенство (4.1) принимает вид

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (2u_0(x)\bar{u}(x) + \bar{u}^2(x)) dx = \sum_{k=3}^{[\alpha]} \varepsilon^k \mu_k + O(\varepsilon^\alpha). \quad (4.2)$$

Условие (4.2) и позволяет определить числа $\lambda_{k,l}$.

Пусть $y_{k,l}(x)$, $u_{k,l}(x)$, $z_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3.3 и для $y_N(x)$ и $u_N(x)$, определенных по формулам (3.23), выполнено соотношение (2.6). Рассмотрим следующие функции

$$\begin{aligned} U_k(x) &:= (A_{k,x}\mathcal{U} - A_{k,\xi}A_{k,x}\mathcal{U}) - (A_{k-1,x}\mathcal{U} - A_{k-1,\xi}A_{k-1,x}\mathcal{U}), \quad k \geq 1, \\ V_k(\xi) &:= A_{k,\xi}\mathcal{V} - A_{k-1,\xi}\mathcal{V}, \quad k \geq 1, \quad V_0(\xi) := v_{0,0}(\xi) - u_0(0). \end{aligned}$$

Тогда

$$U_k(x) = \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} U_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \quad V_k(\xi) = \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} V_{k,l}(\xi) \ln^l \varepsilon,$$

где $U_{k,l}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ и имеет при $x \rightarrow 0$ асимптотику вида

$$U_{k,0}(x) = \Xi(0, k-4, x), \quad U_{k,l}(x) = \Xi(0, k-l-6, x), \quad (4.3)$$

а $V_{k,l}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$ и имеет при $\xi \rightarrow \infty$ асимптотику вида

$$V_{k,0}(\xi) = \Upsilon(-1, k-3, \xi), \quad V_{k,l}(\xi) = \Upsilon(-1, k-l-5, \xi), \quad (4.4)$$

при этом

$$u_N(x) = u_0(x) + V_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N \left(U_k(x) + V_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right). \quad (4.5)$$

Подставив в соотношение (4.2) вместо $\overline{u}(x)$ величину

$$u_0(x) + V_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N \left(U_k(x) + V_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right),$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{[\alpha]+1} \varepsilon^k \mu_k + O(\varepsilon^\alpha) &= 2 \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_k(x) dx + 2 \sum_{k=0}^N \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) V_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_\varepsilon} \left(V_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N \left(U_k(x) + V_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Найдем вид асимптотики интегралов, входящих в равенство (4.6).

Через M_m или $M_{m,s}$ будем обозначать многочлены степени m (константу при $m \leq 0$), через B — единичный шар в $\mathbb{R}^3$ с центром в точке O , а через S — его поверхность.

ЛЕММА 4.1. Если $U(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ и имеет при $x \rightarrow 0$ асимптотику вида $U(x) = \Xi(0, m, x)$, то

$$\int_{\Omega_\varepsilon} U(x) dx = d_0 + \sum_{s=3}^{\infty} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в силу условий леммы $U(x)$ интегрируема в Ω . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U(x) dx &= \int_{\Omega} U(x) dx - \int_{\varepsilon\omega} U(x) dx = d_0 - \varepsilon^3 \int_{\omega} U(\varepsilon\xi) d\xi \\ &= d_0 - \varepsilon^3 \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\omega} \Psi(s, m, \varepsilon\xi) d\xi = d_0 - \varepsilon^3 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.2. Если $V(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$ и имеет при $\xi \rightarrow \infty$ асимптотику вида $V(\xi) = \Upsilon(-2, m, \xi)$, то

$$\int_{\Omega_\varepsilon} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^2 M_{m,2}(\ln \varepsilon) + \varepsilon^3 M_{m+1,3}(\ln \varepsilon) + \sum_{s=4}^{\infty} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $V(\xi) = \Upsilon(-2, m, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi(-2-s, m, \xi)$, то $V^*(\xi) := V(\xi) - \Psi(-2, m, \xi) - \Psi(-3, m, \xi)$ интегрируема в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Psi\left(-2, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \Psi\left(-2, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &\quad + \int_{x \notin \varepsilon\omega} V^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \int_{x \notin \Omega} V^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \end{aligned}$$

Найдем $\int_{\Omega_\varepsilon} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx$ при $k = 2, 3$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\Omega \setminus r_1 B} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \int_{r_1 B \setminus \varepsilon r_2 B} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon r_2 B \setminus \varepsilon\omega} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \varepsilon^k M_{m,1}(\ln \varepsilon) + \int_{r_1 B \setminus \varepsilon r_2 B} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &\quad + \varepsilon^3 \int_{r_2 B \setminus \omega} \Psi(-k, m, \xi) d\xi \\ &= \varepsilon^k M_{m,1}(\ln \varepsilon) + \varepsilon^3 d_3 + \int_{r_1 B \setminus \varepsilon r_2 B} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{r_1 B \setminus \varepsilon r_2 B} \Psi\left(-k, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \varepsilon^k \int_S \psi(\varphi, \vartheta) d\varphi d\vartheta \int_{\varepsilon r_2}^{r_1} r^{2-k} \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dr \\ &= \varepsilon^k M_{m+k-2}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\int_{x \notin \Omega} V^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \sum_{s=4}^{\infty} \int_{x \notin \Omega} \Psi\left(-s, m, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \sum_{s=4}^{\infty} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon).$$

ЛЕММА 4.3. Если $\psi_s(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{O\})$ – однородная порядка s функция, то

$$\int_{r_1 B \setminus \mu B} \psi_s(x) \ln^l r \ln^m \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) dx = \begin{cases} M_m(\ln \varepsilon) + \mu^{s+3} M_{m+l}(\ln \varepsilon, \ln \mu), & s \neq -3, \\ M_m(\ln \varepsilon) + M_{m+l+1}(\ln \varepsilon, \ln \mu), & s = -3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется непосредственным вычислением интеграла с переходом к сферическим координатам.

Следующее утверждение является удобным инструментом при нахождении асимптотики интегралов.

ЛЕММА 4.4. Пусть $F(\varepsilon, \mu) = \sum_{s=1}^k \alpha_s \mu^{a_s} \varepsilon^{b_s} \ln^{c_s} \mu \ln^{d_s} \varepsilon$, где $c_s, d_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_s^2 + c_s^2 \neq 0$ при всех s . Если $f(\varepsilon)$ такова, что $f(\varepsilon) = F(\varepsilon, \mu(\varepsilon)) + o(\varepsilon^\alpha)$ для всех $\mu(\varepsilon) \in (\varepsilon^{p+q_0}; \varepsilon^{p-q_0})$, то $f(\varepsilon) = o(\varepsilon^\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу слагаемых. Пусть $k = 1$. Тогда

$$f(\varepsilon) = \alpha \mu^a(\varepsilon) \varepsilon^b \ln^c \mu(\varepsilon) \ln^d \varepsilon + o(\varepsilon^\alpha) \quad \text{при} \quad \mu(\varepsilon) \in (\varepsilon^{p+q_0}; \varepsilon^{p-q_0}). \quad (4.7)$$

Взяв $\mu(\varepsilon) = \varepsilon^p$, получим $f(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{ap+b} p^c \ln^{c+d} \varepsilon + o(\varepsilon^\alpha)$. Если $ap + b > \alpha$, то $f(\varepsilon) = o(\varepsilon^\alpha)$. В противном случае $a(p+q) + b < \alpha$ при $a \neq 0$ и при всех q : $aq < 0$. Тогда

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{a(p+q)+b} \ln^{c+d} \varepsilon} \rightarrow \alpha(p+q)^c \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{a(p+q)+b} \ln^{c+d} \varepsilon} = \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{ap+b} \ln^{c+d} \varepsilon} \varepsilon^{-aq} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad aq < 0.$$

Тем самым, $\alpha = 0$. Если же $a = 0$, то $c \neq 0$. Поэтому если $b \leq \alpha$, то из (4.7) находим

$$\frac{f(\varepsilon)}{\ln^{c+d} \varepsilon} \rightarrow \alpha(p+q)^c \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \text{всех} \quad q : |q| < q_0,$$

откуда снова следует, что $\alpha = 0$.

Пусть утверждение справедливо при числе слагаемых меньшем k . При $\mu(\varepsilon) = \varepsilon^{p_1}$ будем иметь

$$f(\varepsilon) = \sum_{s=1}^k \alpha_s \varepsilon^{a_s p_1 + b_s} p_1^{c_s} \ln^{c_s + d_s} \varepsilon + o(\varepsilon^\alpha).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$a_1 p_1 + b_1 = a_2 p_1 + b_2 = \dots = a_\sigma p_1 + b_\sigma =: \gamma < a_i p_1 + b_i \quad \text{при} \quad i > \sigma, \\ a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\sigma \quad \text{и} \quad \gamma \leq \alpha.$$

Если $\sigma < k$, то при достаточно малых q найдется γ_1 такая, что

$$a_s(p_1 + q) + b_s < \gamma_1 < a_i(p_1 + q) + b_i, \quad s \leq \sigma < i \leq k,$$

т.е.

$$f(\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\sigma} \alpha_s \mu^{a_s}(\varepsilon) \varepsilon^{b_s} \ln^{c_s} \mu(\varepsilon) \ln^{d_s} \varepsilon + o(\varepsilon^{\gamma_1}) \quad \text{при} \quad \mu(\varepsilon) \in (\varepsilon^{p_1+q_1}; \varepsilon^{p_1-q_1}).$$

Так как $\sigma < k$, то $f(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\gamma_1})$ и, следовательно, $a_s = 0$ при $s \leq \sigma$. В этой ситуации $k - \sigma < k$ и, значит, $f(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\alpha})$.

Если же $a_1 p + b_1 = a_2 p + b_2 = \dots = a_k p + b_k$ при хотя бы двух значениях p , то $a_1 = a_2 = \dots = a_k =: a$, $b_1 = b_2 = \dots = b_k =: b$ и все c_s попарно различны. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что

$$a(p + q_0) + b \leq \alpha \quad \text{и} \quad c_1 + d_1 = c_2 + d_2 = \dots = c_{\sigma} + d_{\sigma} =: \gamma_2 > c_s + d_s, \quad \sigma < s.$$

Теперь при всех q таких, что $|q| < q_0$,

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{a(p+q)+b} \ln^{\gamma_2} \varepsilon} \rightarrow \sum_{s=1}^{\sigma} \alpha_s (p+q)^{c_s} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Откуда при $a \neq 0$ опять получаем, что $\sum_{s=1}^{\sigma} \alpha_s (p+q)^{c_s} = 0$ при всех q ($|q| < q_0$) и, значит, $\alpha_s = 0$. Если же $a = 0$, то $f(\varepsilon) = \varepsilon^b \sum_{s=1}^k \alpha_s \ln^{d_s} \varepsilon \ln^{c_s} \mu(\varepsilon) + o(\varepsilon^{\alpha})$ и все $c_s \neq 0$. Поэтому при всех q ($|q| < q_0$)

$$\frac{f(\varepsilon)}{\ln^{\gamma_2} \varepsilon} \rightarrow \sum_{s=1}^{\sigma} \alpha_s (p+q)^{c_s} = \text{const} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

что опять дает $\alpha_s = 0$.

В дальнейшем любую функцию вида $\sum_{s=1}^k \alpha_s \mu^{a_s} \varepsilon^{b_s} \ln^{c_s} \mu \ln^{d_s} \varepsilon$ будем обозначать через $F(\varepsilon, \mu)$.

Применим доказанную лемму для нахождения асимптотики $\int_{\Omega_{\varepsilon}} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$.

ЛЕММА 4.5. *Если $U(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$ и имеет при $x \rightarrow 0$ асимптотику вида $U(x) = \Xi(0, l, x)$, а $V(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$ и имеет при $\xi \rightarrow \infty$ асимптотику вида $V(\xi) = \Upsilon(-1, m, \xi)$, то*

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon M_{m,1}(\ln \varepsilon) + \varepsilon^2 M_{m,2}(\ln \varepsilon) + \sum_{s=3}^{\alpha-1} M_{m+l+1,s}(\ln \varepsilon) + o(\varepsilon^{(\alpha-1)/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s(x) \ln^l r$ при $x \rightarrow 0$, а $V(\xi) = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{-s}(\xi) \ln^m \rho$ при $\xi \rightarrow \infty$, где ψ_s — однородные порядка s функции, бесконечно дифференцируемые в $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Опять разобьем рассматриваемый интеграл на три слагаемых

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\Omega \setminus r_1 B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &+ \int_{r_1 B \setminus \varepsilon r_2 B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \int_{\varepsilon r_2 B \setminus \varepsilon \omega} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \end{aligned}$$

Но при $x \notin r_1 B$ величина x/ε велика, поэтому

$$\int_{\Omega \setminus r_1 B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \sum_{s=1}^{\infty} \int_{\Omega \setminus r_1 B} U(x) \psi_{-s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dx = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon).$$

Аналогично, при $x \in \varepsilon r_2 B \setminus \varepsilon \omega$ величина x мала, и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon r_2 B \setminus \varepsilon \omega} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\varepsilon r_2 B \setminus \varepsilon \omega} \psi_s(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln^l r dx \\ &= \varepsilon^3 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \int_{r_2 B \setminus \omega} \psi_s(\xi) V(\xi) \ln^l(\varepsilon \rho) d\xi \\ &= \sum_{s=3}^{\infty} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Найдем теперь асимптотику последнего слагаемого, для чего разобьем его на две части

$$\int_{r_1 B \setminus \varepsilon r_2 B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{r_1 B \setminus \mu B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \int_{\mu B \setminus \varepsilon r_2 B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx, \quad (4.8)$$

где $\mu \in (\varepsilon^p; \varepsilon^q)$, $0 < q < p < 1$.

Рассмотрим первое слагаемое. Так как $\mu > \varepsilon^p$ и $p < 1$, то при $|x| > \mu$ величина x/ε велика, и можно воспользоваться разложением функции $V(x/\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \int_{r_1 B \setminus \mu B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{r_1 B \setminus \mu B} U(x) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\sum_{s=1}^{\alpha-1} \psi_{-s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O_m\left(\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^\alpha\right) \right) dx \\ &= \sum_{s=1}^{\alpha-1} \varepsilon^s \int_{r_1 B \setminus \mu B} U(x) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(x) dx + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)}) \\ &= \sum_{s=1}^{\alpha-1} \varepsilon^s \left(\int_{r_1 B \setminus \mu B} \left(\sum_{\sigma=0}^{s-1} \psi_\sigma(x) \ln^l r \right) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_1 B \setminus \mu B} U_s^*(x) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(x) dx \right) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)}). \end{aligned}$$

Здесь $U_s^*(x) = U(x) - \sum_{\sigma=0}^{s-1} \psi_\sigma(x) \ln^l r$, и поэтому $U_s^*(x) \psi_{-s}(x) \ln^m(r/\varepsilon)$ интегрируемы в $r_1 B$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1 B \setminus \mu B} U_s^*(x) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(x) dx \\
&= \int_{r_1 B} U_s^*(x) \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(x) dx - \mu^3 \int_B U_s^*(\mu\xi) \ln^m\left(\frac{\mu\rho}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(\mu\xi) d\xi \\
&= M_{m,s}(\ln \varepsilon) \\
&\quad - \mu^3 \int_B \left(\left(\sum_{\sigma=s}^{\alpha-1} \mu^{\sigma-s} \psi_\sigma(\xi) \ln^l(\mu\rho) \right) \ln^m\left(\frac{\mu\rho}{\varepsilon}\right) \psi_{-s}(\xi) + O_{m+l}((\mu\rho)^\alpha \mu^{-s}) \right) d\xi \\
&= M_{m,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_{m+l}(\varepsilon^{q(\alpha-s+3)}).
\end{aligned}$$

Далее, в силу леммы 4.3

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma=0}^{s-1} \int_{r_1 B \setminus \mu B} \psi_\sigma(x) \psi_{-s}(x) \ln^l r \ln^m\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dx &= \sum_{\sigma=0}^{s-1} (M_{m,s,\sigma}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu)) \\
&= M_{m,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu).
\end{aligned}$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части равенства (4.8) имеет вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{\alpha-1} \varepsilon^s (M_{m,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_{m+l}(\varepsilon^{q(\alpha-s+3)})) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)}) \\
&= \sum_{s=1}^{\alpha-1} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_{m+l}(\varepsilon^{q(\alpha+3)+1-q}) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (4.8). Так как $\mu < \varepsilon^q$, то при $x \in \mu B$ можно воспользоваться разложением функции $U(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mu B \setminus \varepsilon r_2 B} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\mu B \setminus \varepsilon r_2 B} \left(\sum_{s=0}^{\alpha-1} \psi_s(x) \ln^l r + O_l(r^\alpha) \right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\
&= \sum_{s=0}^{\alpha-1} \int_{\mu B \setminus \varepsilon r_2 B} \psi_s(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln^l r dx + O_l(\varepsilon^q) \\
&= \sum_{s=0}^{\alpha-1} \varepsilon^{3+s} \int_{(\mu/\varepsilon) B \setminus r_2 B} \psi_s(\xi) V(\xi) \ln^l(\varepsilon\rho) d\xi + O_l(\varepsilon^q).
\end{aligned}$$

Опять

$$\begin{aligned}
& \int_{(\mu/\varepsilon) B \setminus r_2 B} \psi_s(\xi) V(\xi) \ln^l(\varepsilon\rho) d\xi \\
&= \int_{(\mu/\varepsilon) B \setminus r_2 B} \psi_s(\xi) \left(\sum_{\sigma=0}^{s+3} \psi_{-\sigma}(\xi) \ln^m \rho + V_s^*(\xi) \right) \ln^l(\varepsilon\rho) d\xi,
\end{aligned}$$

где $V_s^*(\xi) := V(\xi) - \sum_{\sigma=0}^{s+3} \psi_{-\sigma}(\xi) \ln^m \rho$ такова, что $\psi_s(\xi) V_s^*(\xi)$ интегрируема в $\mathbb{R}^3 \setminus r_2 B$. В силу леммы 4.3

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=0}^{s+3} \int_{(\mu/\varepsilon)B \setminus r_2 B} \psi_s(\xi) \psi_{-\sigma}(\xi) \ln^m \rho \ln^l(\varepsilon \rho) d\xi \\ &= \sum_{\sigma=0}^{s+2} \left(M_{l,s,\sigma}(\ln \varepsilon) + \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{s-\sigma+3} M_{m+l,s,\sigma} \left(\ln \varepsilon, \ln \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right) \right) \right) \\ & \quad + M_l(\ln \varepsilon) + M_{m+l+1} \left(\ln \varepsilon, \ln \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right) \right) = M_{m+l+1}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} & \int_{(\mu/\varepsilon)B \setminus r_2 B} \psi_s(\xi) V_s^*(\xi) \ln^l(\varepsilon \rho) d\xi \\ &= \int_{\xi \notin r_2 B} \psi_s(\xi) V_s^*(\xi) \ln^l(\varepsilon \rho) d\xi \\ & \quad - \int_{\xi \notin (\mu/\varepsilon)B} \psi_s(\xi) \left(\sum_{\sigma=s+4}^{\alpha-1} \psi_{-\sigma}(\xi) \ln^m \rho + O_m(\rho^{-\alpha}) \right) \ln^l(\varepsilon \rho) d\xi \\ &= M_l(\ln \varepsilon) - \sum_{\sigma=s+4}^{\alpha-1} \int_{\xi \notin (\mu/\varepsilon)B} \psi_s(\xi) \psi_{-\sigma}(\xi) \ln^m \rho \ln^l(\varepsilon \rho) d\xi + O_m \left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{-\alpha+s} \right) \\ &= M_l(\ln \varepsilon) - \sum_{\sigma=s+4}^{\alpha-1} \left(M_{l,s,\sigma}(\ln \varepsilon) + M_{l+m,s,\sigma} \left(\ln \varepsilon, \ln \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right) \right) \right) + O_m \left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{-\alpha+s} \right) \\ &= M_{l+m,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_m \left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{-\alpha+s} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части равенства (4.8) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\alpha-1} \varepsilon^{3+s} \left(M_{l+m+1,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_m \left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{-\alpha+s} \right) \right) + O_l(\varepsilon^{\alpha q}) \\ &= \sum_{s=0}^{\alpha-1} \varepsilon^{3+s} M_{l+m+1,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)+3}) + O_l(\varepsilon^{\alpha q}). \end{aligned}$$

Собирая вместе все оценки, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} U(x) V \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \sum_{s=1}^{\alpha-1} \varepsilon^s M_{m,s}(\ln \varepsilon) + F(\varepsilon, \mu) + O_{m+l}(\varepsilon^{q(\alpha+3)+1-q}) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)}) \\ & \quad + \sum_{s=0}^{\alpha-1} \varepsilon^{3+s} M_{l+m+1,s}(\ln \varepsilon) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)+3}) + O_l(\varepsilon^{\alpha q}). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} O_{m+l}(\varepsilon^{q(\alpha+3)+1-q}) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)}) + O_m(\varepsilon^{\alpha(1-p)+3}) + O_l(\varepsilon^{\alpha q}) \\ = O_{m+l}(\varepsilon^{\alpha q}) + O_{m+l}(\varepsilon^{\alpha(1-p)}) = o(\varepsilon^{-q_0\alpha+\alpha/2}) \end{aligned}$$

при всех $\mu(\varepsilon) \in (\varepsilon^{q_0+1/2}; \varepsilon^{-q_0+1/2})$, $0 < q_0 < 1/2$. Поэтому в силу леммы 4.4

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon M_{m,1}(\ln \varepsilon) + \varepsilon^2 M_{m,2}(\ln \varepsilon) \\ + \sum_{s=3}^{\alpha-1} \varepsilon^s M_{l+m+1,s}(\ln \varepsilon) + o(\varepsilon^{-q_0\alpha+\alpha/2}), \quad 0 < q_0 < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

что при q_0 : $q_0\alpha < 1/2$ дает требуемое соотношение.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_s(x) dx = O_*(\varepsilon^s), \quad \int_{\Omega_\varepsilon} U_\sigma(x) U_s(x) dx = O_*(\varepsilon^{\sigma+s}), \\ \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) V_s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = O_*(\varepsilon^{s+1}), \quad \int_{\Omega_\varepsilon} U_\sigma(x) V_s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = O_*(\varepsilon^{\sigma+s+1}), \\ \int_{\Omega_\varepsilon} V_\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V_s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = O_*(\varepsilon^{\sigma+s+2}). \end{aligned}$$

Используя это, выпишем в равенстве (4.6) слагаемые порядка $O_*(\varepsilon^k)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^k \mu_k = A_k \left(2 \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_k(x) dx + \sum_{s=1}^{k-1} \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_{k-s}(x) dx \right. \\ + \sum_{s=1}^k \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) V_{k-s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \sum_{s \geq 1, \sigma \leq k}^{s+\sigma \leq k} \int_{\Omega_\varepsilon} U_s(x) U_\sigma(x) dx \\ \left. + \sum_{s \geq 1, \sigma \geq 0}^{s+\sigma \leq k-1} \int_{\Omega_\varepsilon} U_s(x) V_\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \sum_{s \geq 0, \sigma \geq 0}^{s+\sigma \leq k-2} \int_{\Omega_\varepsilon} V_s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V_\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $A_k(\cdot)$ – оператор выделения слагаемых вида $\varepsilon^k \ln^l \varepsilon$. Найдем вид правой части в равенстве (4.9).

Прежде всего отметим, что $U_{k,l}(x) = \lambda_{k,l} \bar{u}_0(x) + \bar{U}_{k,l}(x)$ в силу равенства (3.1), а функции $\bar{U}_{k,l}(x)$ полностью определяются функциями u и v . Поэтому

$$\begin{aligned} A_k \left(2 \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_k(x) dx \right) \\ = 2\varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) \bar{U}_{k,l}(x) dx + \lambda_{k,l} \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) \bar{u}_0(x) dx \right) \ln^l \varepsilon. \end{aligned}$$

Далее, в силу соотношений (4.3), (4.4) и леммы 4.4 при $0 < s < k$ получим

$$\begin{aligned} A_k \left(2 \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_{k-s}(x) dx \right) &= 2 A_k \left(\varepsilon^{k-s} \sum_{l=0}^{k-s-2} \ln^l \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) U_{k-s,l}(x) dx \right) \\ &= 2 A_k \left(\varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-s-2} \ln^l \varepsilon M_{k-s-l-4}(\ln \varepsilon) \right) \\ &= \varepsilon^k M_{k-7}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Аналогично, при $0 < s < k$

$$\begin{aligned} A_k \left(2 \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) V_{k-1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) &= 2 A_k \left(\varepsilon^{k-s} \sum_{m=0}^{k-s-3} \ln^m \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) V_{k-1,m} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) \\ &= 2 A_k \left(\varepsilon^k \sum_{m=0}^{k-s-3} \ln^m \varepsilon M_{k-s-m-4}(\ln \varepsilon) \right) \\ &= \varepsilon^k M_{k-3}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Пусть теперь $s \geq 1$, $\sigma \geq 1$ и $s + \sigma \leq k$. Тогда

$$\begin{aligned} A_k \left(\int_{\Omega_\varepsilon} U_s(x) U_\sigma(x) dx \right) &= A_k \left(\varepsilon^{s+\sigma} \sum_{l=0}^{s-2} \sum_{m=0}^{\sigma-2} \ln^{l+m} \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} U_{s,l}(x) U_{\sigma,m}(x) dx \right) \\ &= \varepsilon^k M_{k-4}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Если же $s \geq 1$, $\sigma \geq 0$ и $s + \sigma \leq k - 1$, то

$$\begin{aligned} A_k \left(\int_{\Omega_\varepsilon} U_s(x) V_\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) &= A_k \left(\varepsilon^{s+\sigma} \sum_{l=0}^{s-2} \sum_{m=0}^{\sigma-2} \ln^{l+m} \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} U_{s,l}(x) V_{\sigma,m} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) \\ &= \varepsilon^k M_{k-5}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Наконец, при $s \geq 0$, $\sigma \geq 0$ и $s + \sigma \leq k - 2$

$$\begin{aligned} A_k \left(\int_{\Omega_\varepsilon} V_s \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) V_\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) &= A_k \left(\varepsilon^{s+\sigma} \sum_{l=0}^{s-2} \sum_{m=0}^{\sigma-2} \ln^{l+m} \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} V_{s,l} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) V_{\sigma,m} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \right) \\ &= \varepsilon^k M_{k-4}(\ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (4.9) принимает вид

$$\sum_{l=0}^{k-2} \lambda_{k,l} J_0 \ln^l \varepsilon = M_{k-2}(\ln \varepsilon), \quad (4.10)$$

где $J_0 := \int_{\Omega_\varepsilon} u_0(x) \overline{u_0}(x) dx$.

ЛЕММА 4.6. Если $\overline{y}_0 \neq 0$, то $J_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что при доказательстве теоремы 1.1 было показано, что $\lambda_0 \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$w(x) := \overline{u}_0(x) - \frac{u_0(x)}{\lambda_0}. \quad (4.11)$$

Тогда в силу (3.2) $w(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ и

$$\mathcal{L}w(x) = \mathcal{L}\overline{u}_0(x) - \frac{\mathcal{L}u_0(x)}{\lambda_0} = y_0(x) + \lambda_0\overline{y}_0(x) - y_0(x) = \lambda_0\overline{y}_0(x). \quad (4.12)$$

Поэтому и $\mathcal{L}w(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Но

$$\mathcal{L}^2w(x) = \lambda_0\mathcal{L}\overline{y}_0(x) = -\lambda_0\overline{u}_0(x) \quad (4.13)$$

и, в частности, $\mathcal{L}^2w(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Из (4.12) и (4.11) получим, что $(\mathcal{L}^2 + \lambda_0)w(x) = -u_0(x)$. Теперь, используя равенства (4.13), (4.12), формулу Грина и тот факт, что $\mathcal{L}w(x) = 0$ на $\partial\Omega$, получаем

$$\begin{aligned} J_0 = (u_0, \overline{u}_0) &= \left(-(\mathcal{L}^2 + \lambda_0)w, -\frac{\mathcal{L}^2w}{\lambda_0} \right) = \frac{1}{\lambda_0} (\mathcal{L}^2w, \mathcal{L}^2w) + (w, \mathcal{L}^2w) \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \|\mathcal{L}^2w\|^2 + \|\mathcal{L}w\|^2 = \frac{1}{\lambda_0} \|\mathcal{L}^2w\|^2 + \|\lambda_0\overline{y}_0\|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что если

$$f(x) \not\equiv 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ или } \mathcal{L}f(x) \not\equiv 0 \text{ в } \Omega, \quad (4.14)$$

то $\overline{y}_0 \neq 0$.

Лемма 4.6 вместе с равенством (4.10) показывает, что числа $\lambda_{k,l}$ однозначно определяются величинами $\lambda_{s,\sigma}$, $u_{s,\sigma}$, $v_{s,\sigma}$ при $s < k$.

§ 5. Построение асимптотик $y_\varepsilon(x)$ и $u_\varepsilon(x)$

Теперь имеется все необходимое для доказательства основных теорем об асимптотике функций y_ε и u_ε .

ТЕОРЕМА 5.1. Если $f(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет условию (4.14), то найдутся числа $\lambda_{k,l}$ и функции $y_{k,l}(x)$, $u_{k,l}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{O\})$, $z_{i,m}(\xi)$, $v_{i,m}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3.3, и при этом будут справедливы равенства (4.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем процесс построения констант $\lambda_{k,l}$ и функций $y_{k,l}(x)$, $u_{k,l}(x)$, $z_{i,m}(\xi)$ и $v_{i,m}(\xi)$. За процессом построения удобно следить по таблицам согласования рядов $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (таблица 1 — одна из таких таблиц). В каждой строке этих таблиц, в нижних частях клеток, стоят члены асимптотического разложения функций $\varepsilon^k \ln^l \varepsilon y_{k,l}(x)$ (соответственно $\varepsilon^k \ln^l \varepsilon u_{k,l}(x)$) при $x \rightarrow 0$. В каждом столбце, в верхних частях клеток, стоят члены разложения функций $\varepsilon^i \ln^m \varepsilon z_{i,m}(\xi)$ (соответственно $\varepsilon^i \ln^m \varepsilon v_{i,m}(\xi)$) при $\xi \rightarrow \infty$. При этом внутри каждого блока (блоки ограничены жирными линиями) сумма всех функций, стоящих в нижних частях клеток, совпадает с суммой всех функций, стоящих в верхних частях клеток, что эквивалентно условию (3.19) согласования рядов $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

В случае, когда явный вид функции, стоящей в клетке, нам неважен, будем вместо $\sum_{\sigma=0}^m \varphi_{s,\sigma}(x) \ln^\sigma r$ (нижние части клеток) или $\sum_{\sigma=0}^m \varphi_{s,\sigma}(\xi) \ln^\sigma \rho$ (верхние части клеток) писать (s, m) .

Начнем процесс построения. Прежде всего, $y_{0,0}(x)$ — это $y_0(x)$, $u_{0,0}(x)$ — это $u_0(x)$, $\lambda_{0,0}$ — это λ_0 . Тем самым полностью определены все многочлены в первой строке таблиц для y и u . По главному члену асимптотики y_0 и u_0 на бесконечности (это $y_0(0)$ и $u_0(0)$ соответственно) строим в силу [1; гл.3, §1, лемма 1.2] функции $z_{0,0}(\xi)$ и $v_{0,0}(\xi)$ с асимптотикой при $\xi \rightarrow \infty$ вида

$$z_{0,0}(\xi) = y_0(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-2j-1} X_j(\xi), \quad v_{0,0}(\xi) = u_0(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-2j-1} Z_j(\xi),$$

и тем самым определяем все функции в первом столбце таблиц. Теперь, взяв все $\lambda_{k,l} = 0$ при $k > 0$, согласно теореме 3.1 найдем функции $y_{k,l}$ и $u_{k,l}$, являющиеся решением однородной системы (3.3) и, следовательно, системы (2.18). Таким образом, в таблицах окажутся заполненными все нижние части клеток. При этом в каждом столбце (в верхних частях клеток) в силу леммы 3.4 будут стоять ф.а.р. соответствующего уравнения системы (2.21) для этого набора $\lambda_{k,l}$. Теперь из равенства (4.10), которое при $k = 1$ имеет вид $\lambda_{1,0} = -(u_0, u_{1,0})$ (напомним, что здесь $y_{1,0}$ и $u_{1,0}$ — это решение однородной системы (3.3) с главными членами разложения при $x \rightarrow 0$ равными $X_0 r^{-1}$ и $Z_0 r^{-1}$ соответственно), находим $\lambda_{1,0}$. Затем, прибавляя к $y_{1,0}$ и $u_{1,0}$ слагаемые $\lambda_{1,0} \bar{y}_0$ и $\lambda_{1,0} \bar{u}_0$, получаем, что $y_{1,0}$, $u_{1,0}$ — это уже решение соответствующих уравнений системы (2.18) с новым $\lambda_{1,0}$. После чего последовательно подправляем и все остальные функции $y_{k,l}$ и $u_{k,l}$ при $k > 1$ до решения системы (2.18) с новым набором $\lambda_{k,l}$. В силу теоремы 3.1 это приведет (для сохранения условия согласования рядов) к изменениям в столбцах, начиная с четвертого для $k > 1$, а при $k = 1$ — со второго, ибо добавятся слагаемые $\lambda_{1,0} \bar{y}_0$ и $\lambda_{1,0} \bar{u}_0$, главный член асимптотик которых имеет вид $(0, 0)$.

Рассмотрим второй столбец. В нем находится ф.а.р. второго уравнения системы (2.18). В силу [1; гл. 3, §1, лемма 1.6] существует решение этого уравнения, асимптотика которого при $\xi \rightarrow \infty$ отличается от ф.а.р. наличием ряда $\sum_{j=0}^{\infty} X_{j,1}(\xi) \rho^{-2j-1}$. Таким образом, находим $z_{1,0}(\xi)$ и $v_{1,0}(\xi)$, являющиеся решениями соответствующей задачи из системы (2.21). При этом в нижних частях клеток второго столбца, начиная с третьей строки, добавятся слагаемые вида

$X_{j,1}(\xi)\rho^{-2j-1}$. В силу теоремы 3.1 добавим ко всем $y_{k,l}$ и $u_{k,l}$ при $k > 1$ решения однородной системы (3.3), после чего подправим последовательно все $y_{k,l}$ и $u_{k,l}$ при $k > 1$ решениями соответствующих неоднородных систем (см. теорему 3.2) до решений системы (2.18) с новым набором $\lambda_{k,l}$. Это, в свою очередь, приведет к изменению верхних частей клеток начиная с четвертого столбца. Теперь уже полностью определены $\lambda_{1,0}$, $y_{1,0}$ и $u_{1,0}$. Далее процесс продолжается тем же способом: из (4.10) при $k = 2$ находим $\lambda_{2,0}$, после чего определяются $y_{2,0}$, $u_{2,0}$, $z_{2,0}$ и $v_{2,0}$, переопределяются $y_{k,l}$, $u_{k,l}$ и ряды $\mathcal{Z}_{i,m}$, $\mathcal{V}_{i,m}$ и т. д.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если $f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условию (4.14), а числа $\lambda_{k,l}$ и функции $y_{k,l}(x)$, $u_{k,l}(x)$, $z_{i,m}(\xi)$, $v_{i,m}(\xi)$ удовлетворяют заключению теоремы 5.1, то*

$$\begin{aligned} y_N(x) - y_0(x) &= o(\varepsilon^{(N-2)/2}), & u_N(x) - u_0(x) &= o(\varepsilon^{(N-2)/2}), \\ \lambda_N - \lambda(\varepsilon) &= o(\varepsilon^{(N-2)/2}), \end{aligned}$$

где $y_N(x)$, $u_N(x)$ и λ_N определены по формулам (3.23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.3 для применения теоремы 2.1 необходимо проверить выполнение условий (2.6) и (2.7). Прежде всего,

$$\lambda_N - \lambda_0 = \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \lambda_{k,l} \ln^l \varepsilon = O_l(\varepsilon) = o(1).$$

Из формулы (4.5)

$$u_N(x) - u_0(x) = V_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N \left(U_k(x) + V_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right),$$

откуда в силу лемм 4.1, 4.2 и леммы 4.4

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u_N(x) - u_0(x))^2 dx = O_*(\varepsilon^2),$$

т.е. $\|u_N - u_0\|_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогично показывается соотношение $\|y_N - y_0\|_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Наконец, в силу определения $\lambda_{k,l}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u_N^2(x) dx &= R^2 - \sum_{k=N+1}^{\infty} \varepsilon^k \mu_k \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (2u_0(x)(u_N(x) - u_0(x)) + (u_N(x) - u_0(x))^2) dx \right) \\ &= R^2 - O_*(\varepsilon^{N+1}) = R^2 - o(\varepsilon^N). \end{aligned}$$

Автор благодарит А. М. Ильина за внимание к работе и ценное обсуждение.

ТАБЛИЦА 1

[illegible]

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТАБЛИЦЫ 1

$\varepsilon^4 \ln \varepsilon z_{4,1}$	$\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon z_{4,2}$	$\varepsilon^5 z_{5,0}$	$\varepsilon^5 \ln \varepsilon z_{5,1}$	$\varepsilon^5 \ln^2 \varepsilon z_{5,1}$	$\dots$
---	---	$(5, 0)\varepsilon^5$ --- $(5, 0)$	---	---	$\dots$
---	---	$(4, 0)\varepsilon^5$ --- $(4, 0)\varepsilon$	---	---	$\dots$
---	---	$(3, 0)\varepsilon^5$ --- $(3, 0)\varepsilon^2$	---	---	$\dots$
---	---	$(2, 0)\varepsilon^5$ --- $(2, 0)\varepsilon^3$	---	---	$\dots$
$(1, 0)\varepsilon^4 \ln \varepsilon$ --- $(1, 0)\varepsilon^3 \ln \varepsilon$	---	---	$(2, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$ --- $(2, 0)\varepsilon^3 \ln \varepsilon$	---	$\dots$
---	---	$(1, 0)\varepsilon^5$ --- $(1, 0)\varepsilon^4$	---	---	$\dots$
$(0, 0)\varepsilon^4 \ln \varepsilon$ --- $(0, 0)\varepsilon^4 \ln \varepsilon$	---	---	$(1, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$ --- $(1, 0)\varepsilon^4 \ln \varepsilon$	---	$\dots$
---	$(0, 0)\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon$ --- $(0, 0)\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon$	---	---	$(1, 0)\varepsilon^5 \ln^2 \varepsilon$ --- $(1, 0)\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon$	$\dots$
$(-1, 0)\varepsilon^4$ ---	---	$(0, 1)\varepsilon^5$ --- $(0, 1)\varepsilon^5$	$(0, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$ --- $(0, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$	---	$\dots$
$(-1, 0)\varepsilon^4 \ln \varepsilon$ --- $(-1, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$	---	---	$(0, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$ --- $(0, 0)\varepsilon^5 \ln \varepsilon$	---	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Список литературы

1. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
3. Капустян В. Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. математика, естествознание, технические науки. 1992. №2. С. 70–74.
4. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с тонкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103. №2. С. 265–284.
5. Ильин А. М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи с малым отверстием // Труды сем. им. И.Г. Петровского. №6. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 57–82.
6. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.
7. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в области с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №2. С. 347–371.
8. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. №2. С. 258–277.
9. Назаров С. А. Асимптотические решения задачи с малыми препятствиями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №6. С. 1031–1041.
10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Уральский государственный
педагогический университет
E-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
20.08.1997