Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Егоров, А. А. Приходько, Арифметическая теория прямоугольных паркетов,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 12, 29–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:38:20

УДК 514.17

А. В. Егоров, А. А. Приходько

Арифметическая теория прямоугольных паркетов

На основе предлагаемого авторами нового, “арифметического”, подхода к теории прямоугольных паркетов строится простая классификация алгебраических прямоугольных паркетов (тайлингов) в $\mathbb{Z}^d$ и даются новые доказательства ряда классических результатов о прямоугольных паркетах в $\mathbb{Z}^d$. Исследуется возможность перенесения некоторых результатов теории прямоугольных паркетов в $\mathbb{Z}^d$ на случай евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Библиография: 18 названий.

Введение

Рассмотрим семейство $\mathbb{P}$ фигур в евклидовом пространстве. Говорят, что множество F обладает $\mathbb{P}$ -упаковкой (или $\mathbb{P}$ -паркетом), если F может быть представлено как объединение (с точностью до множества меры 0) дизъюнктивных множеств A_ξ , где каждое A_ξ есть сдвиг некоторой фигуры из совокупности $\mathbb{P}$. В данной работе рассматриваются *прямоугольные паркет* (см. [1; гл. 18]–[12]), т.е. предполагается, что каждая фигура $B \in \mathbb{P}$ является правильно ориентированным d -мерным прямоугольником. Одним из эффективных методов изучения свойств упаковок является так называемая *алгебраическая теория тайлингов*, развитая Ф. Барнесом в работах [8] и [9]. Понятие тайлинга¹ в [8] появляется как алгебраическое обобщение понятия упаковки. Множество F обладает $\mathbb{P}$ -тайлингом, если индикатор² множества F принадлежит линейной оболочке индикаторов прямоугольников $B \in \mathbb{P}$. Переход от упаковок к тайлингам является аналогом хорошо известной конструкции Гротендика для полугрупп.

Пусть $T_+(\mathbb{P})$ – множество всех прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$ -тайлингом. Скажем, что два семейства $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ *эквивалентны*, если $T_+(\mathbb{P}_1) = T_+(\mathbb{P}_2)$. Под классификацией $\mathbb{P}$ -тайлингов мы понимаем описание классов эквивалентных множеств $\mathbb{P}$. В настоящей работе мы ставим перед собой задачу дать такую интерпретацию алгебраической теории тайлингов, которая бы наиболее соответствовала случаю прямоугольных тайлингов, и, в частности, получить максимально простую их классификацию. Для построения такой классификации мы вводим в рассмотрение абстрактное понятие 1-подгруппы – подмножества в $\mathbb{Z}^d$, удовлетворяющего определенному алгебраическому условию (см. п. 1.3). Предлагаемая нами

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта поддержки ведущих научных школ (№ 96-15-96135).

¹Ф. Барнес, говоря о тайлингах, использует термин *packing*, а упаковки называет *true packing*. Мы используем терминологию, предложенную Дж. Кингом в [12].

²Индикатор F – это функция, равная единице в точках F и нулю в остальных точках.

классификация 1-подгрупп (являющаяся многомерным аналогом основной теоремы арифметики) позволяет установить следующее основное свойство прямоугольных тайлингов в $\mathbb{Z}^d$. Множество прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$ -тайлингом, совпадает с минимальной 1-подгруппой, содержащей множество $\mathbb{P}$ (уточнение этого утверждения см. в п. 1.4 и пп. 1.7–1.8). Исходя из этого результата, можно получить простые доказательства разнообразных утверждений о прямоугольных паркетах, таких как асимптотическая эквивалентность существования $\mathbb{P}$ -упаковки и $\mathbb{P}$ -тайлинга (см. п. 1.8).

Другой нашей задачей является исследование возможности перенесения результатов “целочисленной” теории на случай евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ (см. §§ 3 и 4). Особое внимание уделяется тайлингам прямоугольниками, линейные размеры которых рациональны (§ 3). В этой ситуации также возможно построение, правда более сложной, классификации $\mathbb{P}$ -тайлингов (см. п. 3.5).

§ 1. Прямоугольные тайлинги в $\mathbb{Z}^d$

1.1. Обозначения. В наших рассуждениях будут фигурировать аддитивные группы $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Q}^d$, $\mathbb{R}^d$ и т. д., рассматриваемые как модули над $\mathbb{Z}^d$. Так, ka , $k \in \mathbb{Z}^d$, обозначает вектор $(k^1 a^1, \dots, k^d a^d)$. Мы используем обозначение G/D для фактор-группы $G/D\mathbb{Z}^d$, где G — одна из перечисленных групп $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Q}^d$, $\mathbb{R}^d$ и т. д. и $D \in G$.

Далее, мы будем говорить, что a *делит* b и писать $a|b$, если существует вектор $k \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $ka = b$. Обозначая через $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$ и $\mathbb{R}_+$ множества положительных элементов $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, соответственно, мы видим, что $\mathbb{Z}_+^d$, $\mathbb{Q}_+^d$ и $\mathbb{R}_+^d$ становятся частично упорядоченными по отношению к “ $|$ ”.

Назовем множество $[a..b] := \{x \in \mathbb{Z}^d : a^i \leq x^i < b^i, 1 \leq i \leq d\} \subset \mathbb{Z}^d$ (d -мерным) *прямоугольником*. Вектор $s = b - a$ будем называть *размером прямоугольника* $[a..b]$.

Пусть $\mathbb{P}$ — конечная или бесконечная совокупность “базовых” прямоугольников в $\mathbb{Z}^d$. $\mathbb{P}$ -упаковкой *конечного множества (фигуры)* $F \subset \mathbb{Z}^d$ называется разбиение множества F на сдвиги прямоугольников из $\mathbb{P}$:

$$F = \bigsqcup_{\xi} (a_{\xi} + B_{\xi}), \quad a_{\xi} \in \mathbb{Z}^d, \quad B_{\xi} \in \mathbb{P}. \quad (1.1)$$

Скажем, что фигура F обладает *конечным $\mathbb{P}$ -тайлингом*, если индикатор $\mathbf{1}_F$ множества F может быть представлен как конечная сумма следующего вида:

$$\mathbf{1}_F = \sum_{\xi \in \Xi} c_{\xi} \mathbf{1}_{a_{\xi} + B_{\xi}}, \quad c_{\xi} \in \mathbb{C}, \quad a_{\xi} \in \mathbb{Z}^d, \quad B_{\xi} \in \mathbb{P}, \quad \#\Xi < \infty. \quad (1.2)$$

Мы придерживаемся терминологии, предложенной в работе [12].

Сделаем следующее терминологическое замечание. При рассмотрении $\mathbb{P}$ -упаковок и $\mathbb{P}$ -тайлингов нам нужно знать только размеры прямоугольников $B \in \mathbb{P}$, поэтому мы будем интерпретировать $\mathbb{P}$ двояко: как совокупность прямоугольников и как подмножество $\mathbb{N}^d$.

1.2. Алгебраическая теория прямоугольных тайлингов. Пусть $\mathfrak{A}_d = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_d^{\pm 1}]$ обозначает кольцо полиномов Лорана от d переменных. Каждой фигуре F сопоставляется полином

$$Q_F := \sum_{a \in F} z^a, \quad z^a := z_1^{a^1} \cdots z_d^{a^d}. \quad (1.3)$$

Очевидно, фигура F обладает конечным $\mathbb{P}$ -тайлингом тогда и только тогда, когда $Q_F \in I_0(\mathbb{P})$, где $I_0(\mathbb{P})$ – линейная оболочка полиномов Q_{a+B} , $a \in \mathbb{Z}^d$, $B \in \mathbb{P}$. Ясно, что $I_0(\mathbb{P})$ является идеалом в $\mathfrak{R}_d$: $I_0(\mathbb{P}) \triangleleft \mathfrak{R}_d$. Идея *алгебраической теории тайлингов* состоит в исследовании $\mathbb{P}$ -тайлингов с использованием свойств идеала $I_0(\mathbb{P})$ (см. [8], [9], а также [10], [12] и [13]). Для заданной совокупности $\mathbb{P}$ можно определить алгебраическое многообразие (см. [8])

$$V(\mathbb{P}) := \{z \in \mathbb{C}^d : \forall B \in \mathbb{P} \quad Q_B(z) = 0\}.$$

ТЕОРЕМА 1.1 [10, теорема 5.1]. *Идеал $I_0(\mathbb{P})$ радикален, т.е.*

$$\forall f \in \mathfrak{R}_d \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad f^r \in I_0(\mathbb{P}) \iff f \in I_0(\mathbb{P}). \quad (1.4)$$

В частности, фигура F обладает конечным $\mathbb{P}$ -тайлингом, т.е. $Q_F \in I_0(\mathbb{P})$, тогда и только тогда, когда Q_F обращается в 0 на $V(\mathbb{P})$.

Далее, $\mathbb{P}$ -тайлинги содержат всю информацию об асимптотических свойствах $\mathbb{P}$ -упаковок. Точнее, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2 [9, теорема 2.1]. *По заданной совокупности $\mathbb{P}$ можно найти константу $\mathcal{M}$ такую, что для любого прямоугольника $F = [a..a + s]$ при $s^i \geq \mathcal{M}$, $1 \leq i \leq d$, имеем*

$$F \text{ обладает } \mathbb{P}\text{-упаковкой} \iff F \text{ обладает конечным } \mathbb{P}\text{-тайлингом.} \quad (1.5)$$

Кроме того, алгебраическая теория прямоугольных тайлингов дает ответы на некоторые вопросы о свойствах так называемых частичных упаковок. А именно, скажем, что семейство дизъюнктивных прямоугольников $a_\xi + B_\xi$ осуществляет *частичную упаковку фигуры F* , если $a_\xi + B_\xi \subset F$ для всех ξ . Рассмотрим всевозможные частичные $\mathbb{P}$ -упаковки гиперкуба $[0..\bar{L}]$, где $\bar{L} := (L, \dots, L)$, и обозначим через $\mathcal{W}(L)$ объем незаполненного пространства в наилучшей частичной $\mathbb{P}$ -упаковке рассматриваемого гиперкуба.

ТЕОРЕМА 1.3 [9, теорема 4.1]. *Справедливо следующее: $\mathcal{W}(L) = O(L^\delta)$, где $\delta := \dim V(\mathbb{P})$ – размерность алгебраического многообразия $V(\mathbb{P})$.*

Другой подход к алгебраической теории тайлингов основан на использовании преобразований Фурье (см. [14]). Рассмотрим банахову алгебру $L^1(\mathbb{Z}^d)$ с мультипликативной операцией свертки. Пусть $I(\mathbb{P})$ – минимальный замкнутый идеал в $L^1(\mathbb{Z}^d)$, содержащий все функции $\mathbf{1}_B$, где $B \in \mathbb{P}$. Понятно, что при естественном отождествлении кольца $\mathfrak{R}_d$ с подалгеброй в $L^1(\mathbb{Z}^d)$ идеал $I(\mathbb{P})$ становится замыканием $I_0(\mathbb{P})$: $I(\mathbb{P}) = [I_0(\mathbb{P})]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Мы говорим, что фигура F обладает (*аппроксимирующим*) $\mathbb{P}$ -тайлингом, если $\mathbf{1}_F \in I(\mathbb{P})$, иными словами, если индикатор $\mathbf{1}_F$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{1}_F = \sum_{\xi=1}^{\infty} c_\xi \mathbf{1}_{a_\xi + B_\xi}, \quad c_\xi \in \mathbb{C}, \quad a_\xi \in \mathbb{Z}^d, \quad B_\xi \in \mathbb{P}, \quad (1.6)$$

где ряд сходится в норме пространства $L^1(\mathbb{Z}^d)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Можно показать (см. теорему 1.21), что прямоугольник F в $\mathbb{Z}^d$ обладает конечным тайлингом тогда и только тогда, когда он обладает аппроксимирующим тайлингом.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{Z}^d)$, тогда функция $\hat{f}$ на d -мерном торе $\mathbb{T}^d = \{(\alpha^1, \dots, \alpha^d) : \alpha^i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$, заданная равенством

$$\hat{f}(\alpha) := \int_{\mathbb{Z}^d} e^{2\pi i \langle a, \alpha \rangle} da, \quad \langle a, \alpha \rangle := \sum_{i=1}^d a^i \alpha^i, \quad (1.7)$$

называется *преобразованием Фурье функции f* .

Преобразование Фурье отображает $I(\mathbb{P})$ на замкнутый идеал $\hat{I}(\mathbb{P}) \triangleleft C(\mathbb{T}^d)$. Введем обозначение

$$\mathcal{N}(\mathbb{P}) := \{\alpha \in \mathbb{Z}^d : \forall B \in \mathbb{P} \ \hat{\mathbf{1}}_B(\alpha) = 0\}. \quad (1.8)$$

Из определений следует, что $\mathcal{N}(\mathbb{P}) = V(\mathbb{P}) \cap \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d$ отождествляется с множеством $\{z : |z_i| \equiv 1\}$. Более того, нетрудно проверить, что для любого прямоугольника F функция $\hat{\mathbf{1}}_F$ обращается в 0 на $\mathcal{N}(\mathbb{P})$ тогда и только тогда, когда полином Q_F обращается в 0 на $V(\mathbb{P})$. Таким образом, принимая во внимание замечание 1.5, теорема Барнеса 1.1 может быть переформулирована в следующем виде.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. *Прямоугольник F обладает конечным (или аппроксимирующим) тайлингом тогда и только тогда, когда $\hat{\mathbf{1}}_F$ обращается в 0 на $\mathcal{N}(\mathbb{P})$.*

1.3. Определение S_1 -множеств. Рассмотрим семейство $\{H_1, \dots, H_d\}$ абелевых групп (полугрупп) и их прямое произведение $G = \prod_{i=1}^d H_i$. Точка $g = (g^1, \dots, g^d)$ будет называться *собственной*, если $g^i \neq 0$ для всех i . Обозначим через G_0 множество всех несобственных элементов G . Зафиксируем индекс k и вектор $g' = (g^i)_{i \neq k}$. Множество $L_{k, g'} := \{(g^1, \dots, h, \dots, g^d) : h \in H_k\}$ назовем *стандартной прямой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Множество $P \subseteq G$ обладает S_1 -свойством, если для любого k и вектора g' пересечение $P \cap L_{k, g'}$, рассматриваемое как подмножество H_k , является подгруппой (подполугруппой) в H_k :

$$\{h \in H_k : (g^1, \dots, h, \dots, g^d) \in P\} \leq H_k. \quad (1.9)$$

(Запись $\Gamma \leq H_k$ означает, что Γ – подгруппа H_k .) Введем следующее отношение эквивалентности: $A \sim B$, если $A \triangle B \subseteq G_0$. Класс $\sim$ -эквивалентных множеств с S_1 -свойством мы будем называть S_1 -подмножеством (или 1-подгруппой (1-подполугруппой)) прямого произведения G . Иными словами, S_1 -множество – это множество с S_1 -свойством, рассматриваемое с точностью до несобственных точек.

Множество $G_{(1)}$ всех S_1 -подмножеств G частично упорядочено: A “меньше или равно” B , если $A \subseteq B$. Далее, если $\{P_\xi\}$ – произвольное семейство S_1 -множеств в прямом произведении G , то пересечение $\bigcap_\xi P_\xi$ также S_1 -множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть A – подмножество G , S_1 -множество

$$[A]_1 := \bigcap_{A \subseteq P \in G_{(1)}} P \quad (1.10)$$

называется S_1 -замыканием A .

Таким образом, в $G_{(1)}$ любые два элемента обладают точной нижней (точной верхней) гранью, следовательно, $(G_{(1)}, \subseteq)$ является *решеткой*.

Предположим, что группы (полугруппы) $\{H_1, \dots, H_d\}$ снабжены топологией. Скажем, что S_1 -множество *замкнуто*, если оно замкнуто с точностью до несобственных точек, т.е. если $P \cup G_0$ замкнуто в топологии прямого произведения.

1.4. Прямоугольные тайлинги и S_1 -множества. Обозначим через $P_+(\mathbb{P})$, $T_+^f(\mathbb{P})$ и $T_+(\mathbb{P})$ множества размеров прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$ -упаковкой, конечным $\mathbb{P}$ -тайлингом и (аппроксимирующим) $\mathbb{P}$ -тайлингом, соответственно. Тогда $P_+(\mathbb{P})$, $T_+^f(\mathbb{P})$, $T_+(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{N}^d$. Рассмотрим две точки

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (s^1, \dots, s^{k-1}, a, s^{k+1}, \dots, s^d), \\ \mathbf{b} &= (s^1, \dots, s^{k-1}, b, s^{k+1}, \dots, s^d) \end{aligned}$$

и обозначим

$$\mathbf{a} \overset{k}{\pm} \mathbf{b} := (s^1, \dots, s^{k-1}, a \pm b, s^{k+1}, \dots, s^d). \quad (1.11)$$

Ясно, что если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P_+(\mathbb{P})$, то $\mathbf{a} \overset{k}{+} \mathbf{b} \in P_+(\mathbb{P})$. Поэтому $P_+(\mathbb{P})$ является 1-подполугруппой $\mathbb{N}^d$. Аналогично, $T_+(\mathbb{P})$, $T_+^f(\mathbb{P}) \in \mathbb{N}_{(1)}^d$. Кроме того, если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_+(\mathbb{P})$,

то $\mathbf{a} \overset{k}{\pm} \mathbf{b} \in T_+(\mathbb{P})$, если только $a - b > 0$. Таким образом, если мы продолжим множество $T_+(\mathbb{P})$ по симметрии на все $\mathbb{Z}^d$, полагая

$$T(\mathbb{P}) := \pm T_+(\mathbb{P}) := \bigcup_{\varepsilon} \varepsilon T_+(\mathbb{P}), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{\pm 1\}^d, \quad (1.12)$$

то мы получим 1-подгруппу $T(\mathbb{P}) \in \mathbb{Z}_{(1)}^d$. Аналогично определяется 1-подгруппа $T^f(\mathbb{P}) := \pm T_+^f(\mathbb{P})$. Заметим, что ограничения множеств $T^f(\mathbb{P})$ и $T(\mathbb{P})$ на $\mathbb{N}^d$ совпадают с $T_+^f(\mathbb{P})$ и $T_+(\mathbb{P})$, соответственно.

Напомним, что S_1 -множество – это класс эквивалентности. В самом деле, мы должны рассматривать $T^f(\mathbb{P})$ и $T(\mathbb{P})$ с точностью до несобственных точек, соответствующих прямоугольникам, у которых хотя бы одна сторона нулевая, а такие прямоугольники являются вырожденными, т.е. пустыми.

1.5. Элементарные свойства S_1 -множеств в $\mathbb{N}^d$ и $\mathbb{Z}^d$. Мы говорим, что множество $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ является *D-периодическим*, $D \in \mathbb{Z}_+^d$, если $kD + P = P$ для всех $k \in \mathbb{Z}^d$. Далее, решетка называется *нётеровой*, если любая возрастающая последовательность (или направленность) элементов данной решетки стабилизируется на некотором конечном шаге.

ТЕОРЕМА 1.9. *Решетка $(\mathbb{Z}_{(1)}^d, \subseteq)$ нётерова. Любая 1-подгруппа P группы $\mathbb{Z}^d$ периодическая. Проекции P на координатные гиперплоскости также являются 1-подгруппами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по размерности d . Пусть $P \in \mathbb{Z}^d$. Для каждого $h > 0$ определим 1-подгруппу

$$P(h) := \{(s^1, \dots, s^{d-1}) : (s^1, \dots, s^{d-1}, h) \in P\}. \quad (1.13)$$

Если $h_1 | h_2$, то благодаря S_1 -свойству $P(h_1) \subseteq P(h_2)$. Значит, 1-подгруппы $\{P(h)\}_{h>0}$ образуют монотонную направленность. Она стабилизируется ввиду нётеровости $\mathbb{Z}_{(1)}^{d-1}$, которая имеет место в силу предположения индукции.

Таким образом, существует $h_0 = D^d$ такое, что $P(h) = P(h_0)$ для всех h , обладающих свойством $h_0 | h$. Заметим, что проекция на гиперплоскость первых $d-1$ координат совпадает с $P(h_0)$, а следовательно, является 1-подгруппой: $\pi_{1, \dots, d-1} P = \pi_{[d]} P \in \mathbb{Z}_{(1)}^{d-1}$. Аналогично, $\pi_{[1]} P, \dots, \pi_{[d-1]} P \in \mathbb{Z}_{(1)}^{d-1}$.

Очевидно, что $P - D^d$ -периодическое по координате a^d . Повторяя приведенные выше рассуждения для $i = 1, \dots, d-1$, мы получаем искомый период D .

Предположим теперь, что мы имеем возрастающую последовательность $\{P_t\}_{t=1}^\infty$ 1-подгрупп в $\mathbb{Z}^d$. В силу индуктивного предположения все проекции $\pi_{[i]} P_t$ стабилизируются, начиная с некоторого t_0 . Тогда все 1-подгруппы $P_t, t \geq t_0$, имеют общий период D , зависящий только от проекций $\pi_{[i]} P_{t_0}$. Значит, множества $P_t, t \geq t_0$, полностью определяются пересечениями $P_t / D := P_t \cap (0..D]$. Так как $t \leq u \implies P_t / D \subseteq P_u / D$ и множества P_t / D конечны, последовательность $\{P_t / D\}_{t \geq t_0}$ также стабилизируется.

ТЕОРЕМА 1.10. *Каждая 1-подгруппа P в $\mathbb{Z}^d$ является конечно порожденной: $P = [a_1, \dots, a_n]_1$, иными словами, обладает конечным базисом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является универсальным свойством нётеровых структур, для элементов которых определено понятие базиса.

Пусть $\{a_1, a_2, \dots\}$ – перечисление элементов P и $P_n := [a_1, \dots, a_n]_1$. Тогда $P_n \subseteq P_{n+1}$ и $\bigcup_n P_n = P$. По предыдущей теореме существует n такое, что $P_n = P$, т.е. $\{a_1, \dots, a_n\}$ – базис P .

Обратно, имея возрастающую последовательность $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots = P$, мы можем найти t_0 и конечный базис (1-подгруппы P) $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq P_{t_0}$. Тогда для всех $t \geq t_0$ имеем $P_t \subseteq P = [a_1, \dots, a_n]_1 \subseteq P_{t_0}$. Следовательно, $P_t \equiv P_{t_0} \forall t \geq t_0$.

ТЕОРЕМА 1.11. *Решетка $\mathbb{N}_{(1)}^d$ нётерова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по d . Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ – некоторая возрастающая последовательность 1-подполугрупп $\mathbb{N}^d$ и $P_n := [A_n]_1$, то по теореме 1.2 (доказательство см. в п. 1.8)

$$\exists \mathcal{M}_n \quad \forall s \in \mathbb{Z}^d, s^i \geq \mathcal{M}_n, \quad s \in A_n \iff s \in P_n. \quad (1.14)$$

В силу теоремы 1.9 существует такое n_0 , что $P_n = P_{n_0}$ при $n \geq n_0$. Очевидно, мы можем положить $\mathcal{M}_n$ для $n \geq n_0$ равными $\mathcal{M}_{n_0}$. Итак, в d -октанте $\{s : s^i \geq \mathcal{M}_{n_0}\}$ исходная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ стабилизируется.

Далее, рассмотрим семейство гиперплоскостей

$$\{\{a^1\} \times \mathbb{Z}^{d-1} : 0 < a^1 < \mathcal{M}_{n_0}\} \sqcup \dots \sqcup \{\mathbb{Z}^{d-1} \times \{a^d\} : 0 < a^d < \mathcal{M}_{n_0}\}.$$

Пересечения A_n с некоторой фиксированной гиперплоскостью из данного семейства образуют возрастающую последовательность 1-подполугрупп $\mathbb{N}^{d-1}$, которая стабилизируется по предположению индукции. В силу того, что рассмотренное семейство гиперплоскостей конечно, последовательность A_n стабилизируется на конечном шаге.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. *Любая 1-подполугруппа $\mathbb{N}^d$ обладает конечным базисом.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13 (см. [12]). $\mathbb{P}$ -упаковка $\mathcal{P}$ прямоугольника B называется *расщепляемой*, если B можно разбить на два прямоугольника B_1 и B_2 так, что ограничение упаковки $\mathcal{P}$ на B_1 и B_2 дает $\mathbb{P}$ -упаковки B_1 и B_2 , соответственно. Прямоугольник B , обладающий $\mathbb{P}$ -упаковкой, называется $\mathbb{P}$ -*расщепляемым*, если B имеет некоторую расщепляемую $\mathbb{P}$ -упаковку. Следуя Дж. Кингу, мы обозначим через $\text{Unsplit}(\mathbb{P})$ множество всех $\mathbb{P}$ -нерасщепляемых прямоугольников.

$\mathbb{P}$ -нерасщепляемые прямоугольники можно считать простейшими прямоугольниками, обладающими $\mathbb{P}$ -упаковкой. А именно, нетрудно проверить, что $\text{Unsplit}(\mathbb{P})$ является подмножеством любого базиса в $\mathbb{P}_+(\mathbb{P})$. Отсюда вытекает следующее свойство упаковок прямоугольниками в $\mathbb{Z}^d$ (см. [4] и [12]).

ТЕОРЕМА 1.14. *Множество $\text{Unsplit}(\mathbb{P})$ конечно.*

1.6. Определение оператора сопряжения. Пусть H – топологическая абелева группа и $\hat{H}$ – группа, дуальная к H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Пусть множество $\mathbb{P} \subset H^d$,

$$\mathbb{P}^* := \{\alpha \in \hat{H}_{(1)}^d : \forall a \in \mathbb{P} \exists i \ a^i \cdot \alpha^i = 0\} \quad (1.15)$$

назовем множеством, *сопряженным к $\mathbb{P}$* . Здесь $a^i \cdot \alpha^i$ обозначает действие характера α^i на элемент a^i .

Ясно, что $\mathbb{P}^*$ – 1-подгруппа $\hat{H}^d$. Обычно мы будем рассматривать *оператор сопряжения* как отображение из $H_{(1)}^d$ в $\hat{H}_{(1)}^d$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.16. *Отображение³ $P \mapsto P^*$ является соответствием Галуа, т.е. $(\cdot)^*$ не возрастает и $P \subseteq P^{**}$. В частности, $P^{***} = P^*$ для любого P .*

1.7. Необходимое условие существования тайлинга. Рассмотрим прямоугольник $F = [0..h)$. Если F обладает (конечным или аппроксимирующим) тайлингом, то $\mathbf{1}_F \in I(\mathbb{P})$. Следовательно, $\hat{\mathbf{1}}_F(\mathcal{N}(\mathbb{P})) = \{0\}$. Наша интерпретация алгебраической теории прямоугольных тайлингов базируется на следующем наблюдении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.17. *Справедливо следующее: $\mathcal{N}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^* \in \mathbb{T}_{(1)}^d$.*

Более того, нетрудно показать, что преобразование Фурье прямоугольника $F = [0..h)$ обращается в 0 на $\mathbb{P}^*$, $\hat{\mathbf{1}}_F(\mathbb{P}^*) = \{0\}$, тогда и только тогда, когда $h \in \mathbb{P}^{**}$, $h \in \mathbb{N}^d$. Таким образом, мы приходим к следующему необходимому условию существования тайлинга.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.18. *Если прямоугольник $[0..h)$ обладает $\mathbb{P}$ -тайлингом, то $h \in \mathbb{P}^{**}$. Другими словами,*

$$\mathbb{T}^f(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{T}(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{P}^{**}. \quad (1.16)$$

³Точнее, пара отображений $(\cdot)^*: H_{(1)}^d \rightarrow \hat{H}_{(1)}^d$ и $(\cdot)^*: \hat{H}_{(1)}^d \rightarrow H_{(1)}^d$.

Утверждение, что данное условие является также достаточным для существования тайлинга (см. теорему 1.1) может быть представлено в следующей форме: в $\mathbb{Z}^d$ оператор сопряжения *инволютивен*, т.е. $P^{**} = P$ для любого $P \in \mathbb{Z}_{(1)}^d$.

Кинг в [12] дает комбинаторное доказательство утверждения, аналогичного инволютивности $(\cdot)^*$. Мы получим этот результат как следствие *арифметической классификации* 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$, обсуждаемой в §2 и §3.

1.8. Асимптотическая эквивалентность $\mathbb{P}$ -упаковок и $\mathbb{P}$ -тайлингов для $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}^d$. Теперь мы обсудим свойство асимптотического совпадения множеств $P_+(\mathbb{P})$ и $T_+^f(\mathbb{P})$ (теорема 1.2). Рассмотрим два множества $A, B \subseteq \mathbb{N}^d$ и определим следующее отношение:

$$A \approx B \iff \exists \mathcal{M} \forall s, s^i \geq \mathcal{M}, s \in A \Leftrightarrow s \in B. \quad (1.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19. Скажем, что $\mathbb{P}$ -упаковки *асимптотически эквивалентны* (*A-эквивалентны*) $\mathbb{P}$ -тайлингам, если $P_+(\mathbb{P}) \approx T_+(\mathbb{P})$.

Асимптотическая эквивалентность $\mathbb{P}$ -упаковок и $\mathbb{P}$ -тайлингов в $\mathbb{Z}^d$ составляет утверждение теоремы 1.2. Ниже мы дадим новое доказательство этой теоремы. Пусть $P(\mathbb{P})$ – S_1 -замыкание $P_+(\mathbb{P})$. Скажем, что прямоугольник $F = [0..h]$ обладает *квази-упаковкой*, если $h \in P(\mathbb{P})$. Это понятие может рассматриваться как “ S_1 -обобщение” упаковки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.20. *Справедливо следующее: $P(\mathbb{P}) \approx P_+(\mathbb{P})$.*

Итак, для доказательства A-эквивалентности прямоугольных тайлингов и упаковок нам нужно лишь проверить равенство $P(\mathbb{P}) = T(\mathbb{P})$. Преимущество данного условия состоит в использовании 1-подгрупп, структура которых намного проще структуры 1-подполугрупп.

Нашей ближайшей целью является вывод ряда результатов теории прямоугольных тайлингов в $\mathbb{Z}^d$ из свойства инволютивности оператора сопряжения.

ТЕОРЕМА 1.21. *Пусть $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}^d$. Тогда*

$$[\mathbb{P}]_1 = P(\mathbb{P}) = T^f(\mathbb{P}) = T(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}. \quad (1.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепочку включений

$$[\mathbb{P}]_1 \subseteq P(\mathbb{P}) \subseteq T^f(\mathbb{P}) \subseteq T(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{P}^{**} \subseteq [\mathbb{P}]_1^{**}. \quad (1.19)$$

Так как $[\mathbb{P}]_1 \in \mathbb{Z}_{(1)}^d$, то $[\mathbb{P}]_1^{**} = [\mathbb{P}]_1$ (см. п. 2.4), а значит, все включения превращаются в равенства.

СЛЕДСТВИЕ 1.22. *Тождества $T^f(\mathbb{P}) = T(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}$ означают, что существование конечного тайлинга эквивалентно существованию аппроксимирующего тайлинга и эквивалентно обращению функции $\hat{1}_F$ в 0 на $\mathcal{N}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^*$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.23. *Из равенства $P(\mathbb{P}) = T(\mathbb{P})$ вытекает, что существование квази-упаковки эквивалентно существованию тайлинга. Откуда в силу утверждения 1.20 следует эквивалентность $P_+(\mathbb{P}) \approx T_+(\mathbb{P})$, т.е. A-эквивалентность $\mathbb{P}$ -упаковок и $\mathbb{P}$ -тайлингов для $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}^d$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.24. *Наконец, равенство $[\mathbb{P}]_1 = T(\mathbb{P})$ приводит к следующему свойству $\mathbb{P}$ -тайлингов. Прямоугольник F обладает $\mathbb{P}$ -тайлингом тогда и только тогда, когда F может быть построен из прямоугольников $B \in \mathbb{P}$ в результате применения конечного числа операций “отрезания” $a \overset{i}{-} b$ и “приклеивания” $a \overset{i}{+} b$. В частности, если F обладает тайлингом, то $\mathbf{1}_F$ является конечной линейной комбинацией функций вида $\mathbf{1}_{a+B}$, $B \in \mathbb{P}$ с целыми коэффициентами.*

1.9. Приложение в эргодической теории. В этом пункте мы обсудим одно приложение упаковок прямоугольниками в эргодической теории. Рассмотрим обратимое сохраняющее меру преобразование T пространства Лебега (X, μ) с нормированной непрерывной мерой μ . Можно считать, что X — это отрезок $[0, 1]$ со стандартной мерой Лебега.

Преобразование T называется *апериодическим* (или *свободным*), если мера периодических относительно T точек равна 0. Хорошо известная лемма Рохлина–Халмоша (см. [14]) утверждает, что если преобразование T свободно, то для заданных чисел $h \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $B \subset X$ такое, что множества

$$B, TB, T^2B, \dots, T^{h-1}B \subset X$$

дизъюнкты и

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{h-1} T^j B\right) > 1 - \varepsilon.$$

Множество $B \sqcup TB \sqcup \dots \sqcup T^{h-1}B$ называется *башней Рохлина–Халмоша высоты h* .

Одним из обобщений сформулированной леммы является следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.25 [15]. *Предположим, что преобразование T свободно и заданы высоты $h_1, \dots, h_k$ и веса $m_1, \dots, m_k$, $k \geq 2$, такие, что $m^i > 0$ и $\sum_{i=1}^k m_i = 1$. Тогда если h_i являются взаимно простыми, то существуют башни Рохлина–Халмоша $\mathcal{T}_i = B_i \sqcup \dots \sqcup T^{h_i-1}B_i$, удовлетворяющие условию*

$$X = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{T}_i, \quad \mu(\mathcal{T}_i) = m_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.20)$$

Эта теорема также может рассматриваться как аналог теоремы Рудольфа о специальном представлении эргодического потока с двузначной функцией ([16], см. также [17]).

ТЕОРЕМА 1.26. *Любой эргодический поток $\{T^t : t \in \mathbb{R}\}$ на пространстве Лебега (X, μ) изоморфен так называемому специальному потоку на пространстве*

$$X' = A \times [0, p] \sqcup B \times [0, q],$$

$p/q \notin \mathbb{Q}$, однозначно определяемому соотношениями

$$T^\delta(a, \xi) = (a, \xi + \delta), \quad \text{если } \xi + \delta \leq p; \quad (1.21)$$

$$T^\delta(b, \eta) = (b, \eta + \delta), \quad \text{если } \eta + \delta \leq q;$$

$$T^\varepsilon(a, p) = (Sa, \varepsilon), \quad T^\varepsilon(b, q) = (Sb, \varepsilon), \quad (1.22)$$

где S – метрический автоморфизм $A \sqcup B$, $a \in A$, $b \in B$ и $0 < \delta, \varepsilon < \min\{p; q\}$. Более того, параметры $p, q, \rho\mu(A)$ и $q\mu(B)$ могут быть выбраны произвольно.

Далее, рассмотрим $\mathbb{Z}^d$ -действие, т.е. семейство $\mathbf{T}$ сохраняющих меру отображений T^a , $a \in \mathbb{Z}^d$, такое, что $T^{a+b} = T^a T^b$. Действие $\mathbf{T}$ называется *свободным*, если $T^a x \neq T^b x$ при $a \neq b$ для почти всех x .

Обсудим обобщения теоремы Альперна на случай свободных $\mathbb{Z}^d$ -действий. Пусть Π – прямоугольник в $\mathbb{Z}^d$. Назовем *башней формы* Π множество $\bigsqcup_{a \in \Pi} T^a B$, где B – измеримое множество. Зафиксируем множество $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}^d$ прямоугольников и распределение $\mathbf{m} = \{m_a : a \in \mathbb{P}\}$, $\sum_{a \in \mathbb{P}} m_a = 1$. Будем называть $(\mathbb{P}, \mathbf{m})$ -представлением действия $\mathbf{T}$ семейство башен $\mathcal{T}_a$ формы $[0..a)$, удовлетворяющее условиям

$$X = \bigsqcup_{a \in \mathbb{P}} \mathcal{T}_a, \quad \mu(\mathcal{T}_a) = m_a. \quad (1.23)$$

Назовем совокупность $\mathbb{P}$ *простой*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1) $P_+(\mathbb{P}) \approx \mathbb{Z}^d$;
- 2) $T(\mathbb{P}) = \mathbb{Z}^d$;
- 3) $I(\mathbb{P}) = L^1(\mathbb{Z}^d)$;
- 4) $\mathbb{P}^* = \emptyset$, т.е. не существует разбиения $[1..d]$ на d непустых множеств $\mathcal{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{K}_d$ такого, что

$$\forall i \quad \text{НОД}\{a^i : a \in \mathcal{K}_i\} > 1.$$

В [14] дается следующее обобщение теоремы Альперна 1.25.

ТЕОРЕМА 1.27. *Если совокупность $\mathbb{P}$ проста, то любое $\mathbb{Z}^d$ -действие обладает $(\mathbb{P}, \mathbf{m})$ -представлением для любого распределения $\mathbf{m}$.*

В доказательстве этой теоремы существенно используется свойство асимптотической эквивалентности $\mathbb{P}$ -упаковок и $\mathbb{P}$ -тайлингов.

Модифицируя доказательство, приведенное в [14], можно показать, что условие простоты не является в данной теореме необходимым и может быть ослаблено до следующего условия: длины одномерных проекций прямоугольников из $\mathbb{P}$ должны быть взаимно просты. Последнее условие уже является неулучшаемым в том смысле, что для любого множества $\mathbb{P}$, не удовлетворяющего условию взаимной простоты одномерных проекций, найдется свободное действие $\mathbf{T}$, не обладающее $(\mathbb{P}, \mathbf{m})$ -представлением.

§ 2. Арифметическая классификация 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$

2.1. Предварительные замечания. Отправной точкой нашей *арифметической классификации* является попытка исследования композиционных рядов 1-подгрупп и получения на их основе классификации 1-подгрупп, аналогичной разложению на простые сомножители. Непосредственная реализация этой идеи сопряжена с большими техническими трудностями. Поэтому мы используем данное соображение как вспомогательное и получаем непосредственное описание 1-подгрупп и их простых расширений (пример 1-подгруппы см. на рис. 2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $P \in \mathbb{Z}_{(1)}^d$, 1-подгруппу $P' \supset P$ назовем *простым расширением* P , если не существует 1-подгруппы P'' , отделяющей P и P' : $P \subset P'' \subset P'$.

Предположим на время, что все рассматриваемые 1-подгруппы $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ удовлетворяют условию $\text{НОД}(P) = \bar{1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Последовательность $P = P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_{t_0} = \mathbb{Z}^d$ называется *композиционным рядом* 1-подгруппы P , если P_t являются простыми расширениями P_{t-1} для $t = 1, \dots, t_0$.

Рассмотрим некоторый специальный класс простых расширений. Пусть $D \in \mathbb{N}^d$ и $\varphi|D$, 1-подгруппу вида

$$\Phi_D(\varphi) := \bigcup_{k=1}^d \varphi^1 \mathbb{Z} \times \dots \times D^k \mathbb{Z} \times \dots \times \varphi^d \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

мы будем называть (D, φ) -*фильтром*. Предположим для простоты, что $d = 2$. Очевидно, что все простые расширения $\Phi_D(\varphi^1, \varphi^2)$ должны иметь вид

$$P_{p,q} := \Phi_D(\varphi^1, \varphi^2) \cup (D^1/p, D^2/q)\mathbb{Z}^2, \quad (2.2)$$

где $(p, q)|D$. Более того, p и q – простые числа.

Предположим теперь, что P – произвольная 1-подгруппа и P' – какое-нибудь ее простое расширение. Обозначим $\Phi_D(P) := \Phi_D(1, 1) \cap P$. Пусть a некоторая минимальная точка множества $P' \setminus P$. Тогда существует минимальный по D фильтр $\Phi_D(P)$ такой, что $\varphi|a$ и $a|D$, где $\Phi_D(P) = \Phi_D(\varphi^1, \varphi^2)$. Положим $(p, q) := D/a$. Можно показать, что p и q также являются *простыми* и *не зависят* от a .

Таким образом, любое простое расширение 1-подгруппы задается некоторой парой простых чисел. По аналогии с одномерной ситуацией, где 1-подгруппы имеют вид $a\mathbb{Z}$ и простым расширениям отвечают простые делители числа a , мы могли бы предположить, что любая 1-подгруппа полностью задается “множителями” (p, q) и их степенями. Однако это неверно. Мы покажем, что в дополнение к степеням $m_{(p,q)}$ делители, соответствующие паре (p, q) , должны быть специальным образом “упорядочены”. А именно, это “упорядочение” задается некоторой диаграммой Юнга $\mathcal{D}_{(p,q)}$ веса $m_{(p,q)}$.

2.2. (u, v) -таблицы и оператор Ехр. Можно предложить два подхода к построению арифметической классификации 1-подгрупп в $\mathbb{Z}^d$. Первый связан с конечными S_1 -множествами, т.е. 1-подгруппами $\mathbb{Z}_{/D}^d$. Суть второго подхода заключается в рассмотрении 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$ как подмножеств $\mathbb{Q}^d$ и применении арифметической классификации 1-подгрупп $\mathbb{Q}^d$, которая развивается в §3. Недостатком этого подхода является то, что он применим только в размерности 2. Тем не менее, мы отмечаем, что все следствия из §3, касающиеся 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$, остаются верными в более высоких размерностях. В этом параграфе мы обсудим первый подход.

Предположим, что $P \in \mathbb{Z}_{(1)}^d$ и D – некоторый период множества P . Построим пересечения $P_{/D}^I$ множества P с $\#I$ -мерными гранями прямоугольника $(0..D]$, параллельными плоскости координат $i \in I$. Будем рассматривать $P_{/D}^I$ как 1-подгруппу $\mathbb{Z}_{/D}^{\#I}$. Семейство $\mathfrak{F}_D^\dagger(P) = \{P_{/D}^I : I \subseteq [1..d]\}$ является *флагом*, т.е.

$$I \subset J \implies \pi^I P_{/D}^J \subseteq P_{/D}^I, \quad (2.3)$$

где π^I – проекция на плоскость координат $i \in I$. Очевидно, что P может быть восстановлено из флага $\mathfrak{F}_D^\dagger(P)$. Таким образом, классификация 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$ может быть получена из классификации конечных 1-подгрупп.

Сейчас мы введем обозначения, которые будут постоянно использоваться ниже. Пусть $n = \prod_p p^{r_p}$ – разложение рационального числа n на простые множители. Обозначим через $\text{Log } n$ последовательность $(r_p)_{p \in \mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ – множество простых чисел. Мы будем использовать символ Exp для обратного к Log отображения. Пусть $\mathbf{F}$ обозначает множество всех отображений $r: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ с конечным носителем. Тогда $\text{Log } n \in \mathbf{F}$.

Если $a \in \mathbb{Q}_+^d$ и $\vec{p} = (p^1, \dots, p^d)$ – последовательность простых чисел, то $\text{Log}_{\vec{p}} a$ обозначает вектор $(\text{Log}_{p^1} a^1, \dots, \text{Log}_{p^d} a^d)$. Пусть $\mathbb{Z}_{0,+}$ – множество всех неотрицательных элементов $\mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. d -мерной диаграммой Юнга называется множество

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{Z}_{0,+}^d : x^d \leq H(x^1, \dots, x^{d-1})\}, \quad (2.4)$$

где $H: \mathbb{Z}_{0,+}^{d-1} \rightarrow \mathbb{Z}_{0,+}$ – функция с конечным носителем, не возрастающая по любой переменной x^i . Мы будем называть точки $x \in \mathcal{D}$ *ячейками*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $[a..b)$ – прямоугольная область в $\mathbb{Z}^d$. Множество $\mathcal{D} \subset [a..b)$ назовем *ограниченной кодиаграммой Юнга*, если $\mathcal{D} = [a..b) \setminus (a + \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – диаграмма Юнга и $\mathcal{A} \subseteq [0..b - a)$. Положим

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D} &:= \bigcup_{\xi \in \mathcal{D}} [\xi^1, \xi^1 + 1] \times \dots \times [\xi^d, \xi^d + 1] \\ &\cup \bigcup_{k=1}^d [a^1, b^1] \times \dots \times \{b^k\} \times \dots \times [a^d, b^d] \subset \mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим два элемента $u, v \in \mathbf{F}^d$, $u \leq v$. Существует лишь конечное число векторов $\vec{p} = (p^1, \dots, p^d)$ таких, что $u_{p^i}^i \neq v_{p^i}^i$ для всех i . Назовем (u, v) -*таблицей* семейство $\mathbf{T}(u, v)$ прямоугольников

$$\mathbf{T}_{\vec{p}}(u, v) := [(u_{p^1}^1, \dots, u_{p^d}^d) .. (v_{p^1}^1, \dots, v_{p^d}^d)). \quad (2.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Семейство $\mathcal{D}$ ограниченных кодиаграмм Юнга $\mathcal{D}_{\vec{p}} \subseteq \mathbf{T}_{\vec{p}}(u, v)$ будем называть (u, v) -*диаграммой*.

Обозначим через $\mathfrak{D}^d(u, v)$ множество всех (u, v) -диаграмм. Ясно, что $\mathfrak{D}^d(u, v)$ является частично упорядоченным по отношению к теоретико множественному включению “ $\subseteq$ ”:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \forall p \ \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{B}_p. \quad (2.7)$$

Более того, $\mathfrak{D}^d(u, v)$ – алгебра Гейтинга (или *псевдо-булева алгебра*), т.е. частично упорядоченное множество, удовлетворяющее следующим дополнительным условиям:

- 1) $\mathfrak{D}^d(u, v)$ – решетка (т.е. любые два элемента $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обладают как точной нижней $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, так и точной верхней $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ гранями);
- 2) $\mathfrak{D}^d(u, v)$ содержит наименьший элемент $\emptyset$;
- 3) для любых $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в множестве $\{\mathcal{D} : \mathcal{A} \vee \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}\}$ существует наибольший элемент $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, называемый *псевдодополнением* $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{B}$.

Из теории псевдо-булевых алгебр следует (см., например, [18]), что решетка $\mathfrak{D}^d(u, v)$ *дистрибутивна*, т.е.

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \quad \mathcal{D} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &= (\mathcal{D} \wedge \mathcal{A}) \vee (\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}), \\ \mathcal{D} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) &= (\mathcal{D} \vee \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{D} \vee \mathcal{B}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $v := \text{Log } D$. По $(0, v)$ -диаграмме $\mathcal{D}$ построим 1-подгруппу

$$\text{Exp}(\mathcal{D}) := \{a \in \mathbb{Z}_{/D}^d : \forall p \text{ Log } a \in {}^c\mathcal{D}\}, \quad (2.9)$$

где для сокращения записи мы приняли следующее обозначение:

$$s \in {}^c\mathcal{D} \iff \forall \vec{p} \ s_{\vec{p}} \in {}^c\mathcal{D}_{\vec{p}}. \quad (2.10)$$

(Если $\text{Log}_p a \notin T_p(u, v)$, то мы считаем, что $\text{Log}_{\vec{p}} a \in {}^c\mathcal{D}_{\vec{p}}$.)

Очевидно, что определение корректно, т.е. $\text{Exp}(\mathcal{D}) \in (\mathbb{Z}_{/D}^d)_{(1)}$. Заметим, что отображение Exp инъективно. Естественно поставить вопрос, будет ли оператор Exp взаимно однозначным? Ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.7. Для любой 1-подгруппы P , $P \subset \mathbb{Z}_{/D}^d$, существует единственная $(0, v)$ -диаграмма $\text{Log}(P)$, $v := \text{Log } D$, такая, что $\text{Exp}(\text{Log}(P)) = P$. Другими словами, оператор Exp устанавливает естественный изоморфизм решеток

$$((\mathbb{Z}_{/D}^d)_{(1)}, \subseteq) \stackrel{\text{Exp}}{\cong} (\mathfrak{D}^d(0, v), \subseteq) \quad (2.11)$$

и отображение Log является обратным к Exp .

Простым следствием этого результата является оценка мощности множества $(\mathbb{Z}_{/D}^d)_{(1)}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Пусть $G = \mathbb{Z}_{/D}^2$ и $\Delta^i := \sum_{p \in \mathcal{P}} v_p^i$ – число простых делителей D^i с учетом кратности. Тогда

$$\#G_{(1)} \leq 2^{\Delta^1 \cdot \Delta^2}. \quad (2.12)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \#G_{(1)} &\leq 2^{\log_2 D^1 \cdot \log_2 D^2} \leq 2^{(\log_2 D^1 + \log_2 D^2)^2 / 4} \\ &\leq (D^1 \cdot D^2)^{(\log_2 D^1 + \log_2 D^2) / 4} = (\#G)^{(\log_2 \#G) / 4}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. Мы остановимся на случае $d = 2$. Рассмотрим 1-подгруппу P и определим $\text{Log}(P)$ следующим образом. Для любой пары (p, q) построим множество $E_{(p, q)} = \{(\text{Log}_p a^1, \text{Log}_q a^2) : a \in P\}$. Тогда $\text{Log}_{(p, q)}(P)$ – минимальная ограниченная кодиаграмма Юнга, содержащая $E_{(p, q)}$.

Нашей целью является доказательство следующих двух тождеств:

$$\text{Exp}(\text{Log}(P)) \equiv P, \quad \text{Log}(\text{Exp}(\mathcal{D})) \equiv \mathcal{D}.$$

Мы докажем это, показав, что $\text{Exp}(\text{Log}(P)) \equiv P$, и воспользовавшись инъективностью Exp .

Предположим, что $a \in P$, тогда по определению оператора Log для любой пары (p, q) будем иметь

$$\text{Log}_{(p,q)} a = (\text{Log}_p a^1, \text{Log}_q a^2) \in \text{Log}_{(p,q)} P. \quad (2.14)$$

Откуда в силу определения Exp будет следовать, что точка a принадлежит $\text{Exp}(\text{Log}(P))$.

Итак, нам осталось доказать, что $\text{Exp}(\text{Log}(P)) \subseteq P$. Рассмотрим точку $a \in \mathbb{Z}_{/D}^2$, $a|D$. Если D^1/a^1 — простое число, то утверждение $a \in \text{Exp}(\text{Log}(P)) \iff a \in P$ является непосредственным следствием определения оператора Log . Далее, полагая

$$m_r := \min \left\{ y : \left(\frac{D^1}{r}, y \right) \in P \right\}, \quad (2.15)$$

определим “ограничения”

$$P_r := \left\{ a \in P : a^1 | \frac{D^1}{r}, m_r | a^2 \right\}, \quad (2.16)$$

которые могут рассматриваться как 1-подгруппы в $\mathbb{Z}_{/(D^1/r, D^2)}^2$, где r — простой делитель D^1 . Ясно, что

$$P = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left(\left(k \frac{D^1}{r}, 0 \right) + P_r \right) \cup \left(\frac{D^1}{r}, m_r \right) \mathbb{Z}_{/D}^2.$$

Поэтому нам осталось доказать, что точка a , удовлетворяющая условиям

$$a | \left(\frac{D^1}{r}, D^2 \right), \quad a \neq \left(\frac{D^1}{r}, D^2 \right), \quad \text{Log } a \in \text{Log } P, \quad (2.17)$$

принадлежит P_r .

Рассмотрим $(0, v)$ -диаграмму $\mathcal{D} = \text{Log}(P)$ и зафиксируем некоторое простое число r такое, что $v_r^1 > 0$. Полагая

$${}^c\mathcal{D}_{(r,q)} \cap \{x = v_r^1 - 1\} = [v_q^2 - \beta_{r,q}, v_q^2], \quad (2.18)$$

построим $(0, v_r)$ -диаграммы

$$\mathcal{D}_{r(p,q)} := \begin{cases} \{(x, y) \in \mathcal{D}_{(p,q)} : y \geq v_q^2 - \beta_{r,q}\}, & \text{если } p \neq r, \\ \{(x, y) \in \mathcal{D}_{(r,q)} : 0 \leq x < v_r^1 - 1\} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.19)$$

где $v_r := \text{Log}(D^1/r, D^2)$. Пусть $\tilde{\mathcal{D}}_r := \text{Log}(P_r)$.

Ясно, что $\tilde{\mathcal{D}}_r \subseteq \mathcal{D}_r$. Необходимо доказать обратное включение. Пусть точка (x, y) принадлежит ${}^c\mathcal{D}_{r(p_0, q_0)}$. Так как $\mathcal{D}_r \subseteq \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} = \text{Log}(P)$, существует последовательность $s \in \mathbf{F}^2$, удовлетворяющая условиям $\text{Exp } s \in P$ (откуда $s_{(p,q)} \in {}^c\mathcal{D}_{(p,q)}$) и $s_{(p_0, q_0)} = (x, y)$. Заметим, что если мы положим $s_q^2 := v_q^2$ для $q \neq q_0$, то приведенные выше условия на s останутся в силе.

Предположим, что $s_r^1 = v_r^1$, и рассмотрим точку $(s_r^1, s_{q_0}^2)$. В силу определения $\mathcal{D}_r$ (см. (2.19)) эту точку можно сместить на единицу влево так, что она останется в ${}^c\mathcal{D}_{(r, q_0)}$. Значит, мы можем положить $s_r^1 := v_r^1 - 1$.

Построенная в результате описанной процедуры последовательность, которую мы обозначим через t , обладает следующими свойствами: $t \in {}^c\mathcal{D}_r$, $\text{Exp } t \in P_r$ и $t_{(p_0, q_0)} = (x, y)$. Таким образом, $(x, y) \in {}^c\text{Log}_{(p_0, q_0)}(P_r) = {}^c\mathcal{D}_r$.

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся индукцией по числу простых делителей D^1 . А именно, рассмотрим точку, обладающую свойствами (2.17), и покажем, что $a \in P_r$. Действительно, $\text{Log } a \in \mathcal{D}_r \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_r$. Напомним, что диаграмма $\tilde{\mathcal{D}}_r = \text{Log}(P_r)$. Следовательно, $a \in \text{Exp}(\tilde{\mathcal{D}}_r) = \text{Exp}(\text{Log}(P_r)) = P_r$. Итак, $a \in P_r \subseteq P$.

Рис. 1. Пример двух сопряженных 1-подгрупп $\mathbb{Z}_{(36,36)}^2$

2.3. (u, v) -диаграммы и сопряжение. Зафиксируем последовательность $v \geq 0$ и определим отображение $\tau: T(0, v) \rightarrow T(0, v)$ следующим образом. Если $x \in T_{\vec{p}}(0, v)$, то $\tau x := v_{\vec{p}} - x$, где $v_{\vec{p}} = (v_{p_1}^1, \dots, v_{p_d}^d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. (u, v) -диаграмму $\mathcal{D}^* := \tau(T(u, v) \setminus \mathcal{D})$ назовем диаграммой, сопряженной к $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 2.10. Справедливо равенство $\text{Exp}(\mathcal{D}^*) = \text{Exp}^*(\mathcal{D})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея доказательства заключена в следующем комбинаторном факте. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – диаграмма и кодиаграмма Юнга, причем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ дополняютельны, и $\xi \in \mathcal{A}$, $x \in \mathcal{B}$ – две точки, то существует, по крайней мере, один индекс i , для которого $x^i \geq \xi^i$.

Пусть точка $\alpha \in \text{Exp}(\mathcal{D}^*)$, т.е. $\text{Log } \alpha \in \mathcal{D}^*$. Если $\alpha \notin \text{Exp}^*(\mathcal{D})$, то существует точка $a \in \text{Exp}(\mathcal{D})$ такая, что для любого i произведение $a^i \alpha^i \not\equiv 0 \pmod{D^i}$. Значит, мы можем выбрать простые числа p^i так, что

$$\forall i \quad \text{Log}_{p^i}(a^i \alpha^i) < v_{p^i}^i. \quad (2.20)$$

Полагая $\mathcal{B} = \mathcal{D}_p$ и $\mathcal{A} = -\mathcal{D}_p^*$, мы видим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ дополняютельны. Далее, $\text{Log}_p a \in \mathcal{D}$ и $v_p - \text{Log}_p a \in \mathcal{A}$. Следовательно, существует индекс i такой, что $\text{Log}_{p^i} a^i \geq v_{p^i}^i - \text{Log}_{p^i} \alpha^i$. Это противоречит условию (2.20).

Обратно, предположим, что $\alpha \in \text{Exp}^*(\mathcal{D})$, но $\text{Log } a \notin \mathcal{D}^*$. Тогда можно найти последовательность $p = (p^1, \dots, p^d)$ и точку $a \in \text{Exp}(\mathcal{D})$ такую, что $v_{p^i}^i - \text{Log}_{p^i} a^i > \text{Log}_{p^i} \alpha^i$ для всех i . Следовательно, $a^i \alpha^i \not\equiv 0 \pmod{1}$, $1 \leq i \leq d$. Таким образом, $\alpha \notin \text{Exp}^*(\mathcal{D})$. Противоречие возникло из предположения, что $\text{Log } a \notin \mathcal{D}^*$. Значит, $\text{Exp}^*(\mathcal{D}) = \text{Exp}(\mathcal{D}^*)$.

2.4. Свойства сопряжения в $(\mathbb{Z}_{/D}^d)_{(1)}$ и $\mathbb{Z}_{(1)}^d$. В этом пункте мы докажем *инволютивность* оператора сопряжения в $\mathbb{Z}_{(1)}^d$. Для начала рассмотрим $(0, v)$ -диаграмму $\mathcal{D}$ и ее двойное сопряжение $\mathcal{D}^{**}$. Очевидно, что

$$\mathcal{D}^{**} = \tau(\Gamma(0, v) \setminus \tau(\Gamma(0, v) \setminus \mathcal{D})) = \tau^2 \mathcal{D} = \mathcal{D}. \quad (2.21)$$

Следовательно, в силу теоремы 2.10 сопряжение в $\mathbb{Z}_{/D}^d$ также является инволюцией.

Рассмотрим теперь 1-подгруппу $P \in \mathbb{Z}_{(1)}^d$ и соответствующий ей флаг $\mathfrak{F}_D^\uparrow(P)$. Семейство $\mathfrak{F}_D^\downarrow(P) := (P_{/D}^{I*} : I \subseteq [1..d])$ является *обратным флагом*, т.е. $\pi^I P_{/D}^{J*} \supseteq P_{/D}^{I*}$ при $I \subset J$. Нетрудно проверить, что

$$P^* = \bigcup_I P_{/D}^{I*} \times \mathbb{Z}_{/D}^{d-\#I} \setminus D^{[0..d] \setminus I}, \quad (2.22)$$

где $D^{[0..d] \setminus I} = (D^i)_{i \in [0..d] \setminus I}$. Значит,

$$\mathfrak{F}_D^\uparrow(P^{**}) = \{P_{/D}^{I**} : I \subseteq [1..d]\} = \mathfrak{F}_D^\uparrow(P). \quad (2.23)$$

Таким образом, $P^{**} = P$.

2.5. Арифметическая классификация 1-подгрупп $\mathbb{Z}^2$: аналогия с одномерной арифметикой. Любая нетривиальная 1-подгруппа P в $\mathbb{Z}$ является обычной подгруппой и имеет вид

$$P = a\mathbb{Z} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{m_p} \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

Арифметическая классификация предоставляет способ получить аналогичное представление в многомерном случае. Если $d = 2$, то аналогия наиболее явная.

А именно, рассмотрим 1-подгруппу $P \in \mathbb{Z}_{(1)}^2$ и предположим, что $\pi^1 P = \pi^2 P = \mathbb{Z}$. Тогда P обладает конечным композиционным рядом, и если мы рассмотрим $\mathcal{D}_{(p,q)} := (\mathbb{Z}_{0,+} \times \mathbb{Z}_{0,+}) \setminus \text{Log}_{(p,q)} P$ как подмножество $\mathbb{Z}_{0,+} \times \mathbb{Z}_{0,+}$ (см. §3), то существует лишь конечное число $\mathcal{D}_{(p,q)} \neq \emptyset$ и мы можем формально представить P в виде⁴

$$P = \prod_{(p,q)} (p, q)^{\mathcal{D}_{(p,q)}} \mathbb{Z}^2. \quad (2.25)$$

Для произвольной $P \in \mathbb{Z}_{(1)}^2$ имеем аналогичное представление

$$P = \prod_{(p,q)} (p, q)^{\mathcal{D}_{(p,q)}} (a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}). \quad (2.26)$$

⁴Этой записи можно попытаться придать недостающую строгость, рассматривая простые расширения как операторы на $\mathbb{Z}_{(1)}^2$. Недостатком такого представления является то, что не все произведения формальных простых расширений допустимы, но лишь те, что соответствуют конечным наборам диаграмм Юнга.

ПРИМЕР 2.11. Пусть $\mathbb{P} = \{(9, 4), (6, 6), (4, 9)\}$, 1-подгруппа $P = [\mathbb{P}]_1$ показана на рис. 2. Разложение (2.25) для P имеет вид (см. также рис. 1):

$$P = (2, 2) \boxplus (3, 3) \boxplus \mathbb{Z}^2.$$

Рис. 2. Пример 1-подгруппы $P = (2, 2) \boxplus (3, 3) \boxplus \mathbb{Z}^2$

2.6. Классификация прямоугольных тайлингов и сложность 1-подгрупп. Под классификацией прямоугольных тайлингов мы подразумеваем описание 1-подгрупп вида $T(\mathbb{P})$. В силу теоремы 1.21 в $\mathbb{Z}^d$ любая 1-подгруппа равна $T(\mathbb{P})$ для некоторого $\mathbb{P}$. Значит, классификация тайлингов в $\mathbb{Z}^d$ эквивалентна классификации 1-подгрупп. Мы рассмотрим три подхода к этому вопросу. Первый – это алгебраическая теория тайлингов, которая сводит исследование $\mathbb{P}$ -тайлингов к изучению свойств соответствующего идеала $I(\mathbb{P})$. В некоторых случаях, для специальных $\mathbb{P}$, эта интерпретация оказывается выгодной. Однако мы утверждаем, что как способ построения общей классификации алгебраическая теория тайлингов не дает выигрыша в сложности, потому что, как мы показали выше, переход от 1-подгруппы P к множеству P^* нулей идеала $\mathbb{P}$ суть инволюция, которая при ограничении класса всех 1-подгрупп D -периодическими превращается в инволюцию, заданную на некотором конечном множестве.

В качестве второго подхода к классификации прямоугольных тайлингов приведем способ, предложенный Кингом в [13]. Пусть $d = 2$. Будем сопоставлять 1-подгруппе P множество $\text{Mnml}(P)$ минимальных относительно “ $|$ ” элементов множества $P \cap \mathbb{Z}_+^2$. Заметим, что $P = [\text{Mnml}(P)]_1$. Имея множество $\text{Mnml}(P)$, можно конструктивно определить, принадлежит ли P та или иная точка $a \in \mathbb{Z}^2$. Данный подход имеет следующий недостаток. Точки $a \in \text{Mnml}(P)$ являются “сильно зависимыми”; не любое множество A несравнимых между собой элементов $\mathbb{Z}_+^2$ может быть взято в качестве $\text{Mnml}(P)$ для некоторого P , а соответствующее условие, налагаемое на A , является трудно проверяемым. Что касается вычислительной сложности этого метода, то как показал Кинг (см. [13]), если мощность $\mathbb{P}$ равна N , то максимальная мощность множества $\text{Mnml}([\mathbb{P}]_1)$ равна в точности числу монотонных булевых функций от N переменных, т.е. имеет порядок 2^{2^N} .

Третьим методом описания прямоугольных тайлингов является арифметическая классификация 1-подгрупп, рассмотренная в §2. Этот метод устраняет недостаток предыдущего способа, так как предоставляет независимую систему параметров. Для того чтобы сравнить сложность арифметической классификации со сложностью описания базиса $\text{Mnml}([\mathbb{P}]_1)$, нужно наложить некоторые разумные ограничения на границы изменения степеней простых чисел, входящих в разложения координат точек $a \in \mathbb{P}$, на которых мы здесь не останавливаемся. Тогда для сложности C задания $[\mathbb{P}]_1$ через $\text{Log}([\mathbb{P}]_1)$ будем иметь оценку

$$\log C = O(N \log N). \quad (2.27)$$

§ 3. Арифметическая теория 1-подгрупп $\mathbb{Q}^2$

3.1. Оператор Exp в $\mathbb{Q}_{(1)}^2$. Пусть $H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ — произвольная невозрастающая функция. Множество

$$\mathcal{D} = \{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{Z}^2 : \xi^2 \geq H(\xi^1)\} \quad (3.1)$$

будем называть *расширенной кодиаграммой Юнга*. Положим

$${}^c\mathcal{D} := \bigcup_{\xi \in \mathcal{D}} [\xi^1, \xi^1 + 1] \times [\xi^2, \xi^2 + 1]. \quad (3.2)$$

Назовем $\mathcal{P}^2$ -*диаграммой* семейство $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathcal{P}^2\}$ расширенных кодиаграмм Юнга. Обозначим через $\mathfrak{D}^2$ множество всех $\mathcal{P}^2$ -диаграмм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{D}$ — $\mathcal{P}^2$ -диаграмма. Положим

$$\text{Exp}(\mathcal{D}) := \pm \{a \in \mathbb{Q}_+^2 : \forall (p,q) \in \mathcal{P}^2 \ (\text{Log}_p a^1, \text{Log}_q a^2) \in {}^c\mathcal{D}_{(p,q)}\}. \quad (3.3)$$

Ясно, что $\text{Exp}(\mathcal{D}) \in \mathbb{Q}_{(1)}^2$. Далее, определим “*сильные*” проекции

$$\begin{aligned} \pi_+^1 \mathcal{D}_p &:= \{\xi \in \mathbb{Z} : \#\{q : (\xi, 0) \notin \mathcal{D}_{(p,q)}\} < \infty\} \subseteq \bigcap_q \pi^1 \mathcal{D}_{(p,q)}, \\ \pi_+^2 \mathcal{D}_q &:= \{\eta \in \mathbb{Z} : \#\{p : (0, \eta) \notin \mathcal{D}_{(p,q)}\} < \infty\} \subseteq \bigcap_p \pi^2 \mathcal{D}_{(p,q)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где π^i — проекция на i -ю координатную ось. *Областью видимости диаграммы $\mathcal{D}$* назовем семейство $T^{[+]}(\mathcal{D})$ расширенных кодиаграмм Юнга

$$T_{(p,q)}^{[+]}(\mathcal{D}) := \pi_+^1 \mathcal{D}_p \times \pi_+^2 \mathcal{D}_q. \quad (3.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^2$, $\mathcal{P}^2$ -диаграмму $\text{opt}(\mathcal{D}) := \mathcal{D} \cap T^{[+]}(\mathcal{D})$ назовем *оптимизацией диаграммы $\mathcal{D}$* . $\mathcal{P}^2$ -диаграмма $\mathcal{D}$ называется *оптимальной*, если $\text{opt}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{A} = \text{opt}(\mathcal{D})$ является наименьшей $\mathcal{P}^2$ -диаграммой со свойством $\text{Exp}(\mathcal{A}) = \text{Exp}(\mathcal{D})$. Термин “область видимости” можно объяснить следующим образом. Ячейку $\xi \in \mathcal{D}_{(p_0, q_0)}$ назовем *видимой относительно $\mathcal{D}$* , если существует $s \in \mathbf{F}^2$ такое, что для всех $p, q \in \mathcal{P}$ точка $(s_p^1, s_q^2) \in \mathcal{D}_{(p,q)}$ и $(s_{p_0}^1, s_{q_0}^2) = \xi$. Тогда множество видимых ячеек есть в точности $\text{opt}(\mathcal{D}) = T^{[+]}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}$. Понятно, что “*невидимые*” ячейки не влияют на значение $\text{Exp}(\mathcal{D})$, другими словами, вся информация о $\text{Exp}(\mathcal{D})$ содержится в $\text{opt}(\mathcal{D})$.

ТЕОРЕМА 3.3. Для любой 1-подгруппы $P \in \mathbb{Q}_{(1)}^2$ существует единственная $\mathcal{P}^2$ -диаграмма $\text{Log}(P)$ такая, что $\text{Exp}(\text{Log}(P)) = P$. Таким образом, отображение Exp устанавливает естественный изоморфизм решетки $\mathbb{Q}_{(1)}^2$ и решетки всех $\mathcal{P}^2$ -диаграмм $\mathfrak{D}_0^2$

$$(\mathbb{Q}_{(1)}^2, \subseteq) \cong_{\text{Exp}} (\mathfrak{D}_0^2, \subseteq). \quad (3.6)$$

Ниже все $\mathcal{P}^2$ -диаграммы предполагаются оптимальными.

3.2. Сопряжение в $\mathbb{Q}_{(1)}^2$. Пусть $\mathcal{D}$ – $\mathcal{P}^2$ -диаграмма и $T := \{T_{(p,q)} : (p,q) \in \mathcal{P}^2\}$, $T_{(p,q)} = \mathbb{Z}^d$. Обозначим

$$T \setminus \mathcal{D} := \{\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{D}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathcal{P}^2\}. \quad (3.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Диаграммой, сопряженной к $\mathcal{D}$, назовем $\mathcal{P}^2$ -диаграмму

$$\mathcal{D}^* := \text{opt}(-T \setminus \mathcal{D}). \quad (3.8)$$

Скажем, что диаграмма $\mathcal{D}$ рефлексивна, если $\mathcal{D}^{**} = \mathcal{D}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Оператор сопряжения $(\cdot)^* : \mathfrak{D}_0^2 \rightarrow \mathfrak{D}_0^2$ является соответствием Галуа, т.е.

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}_0^2 \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{**}, \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{A}^* \supseteq \mathcal{B}^*. \quad (3.9)$$

ТЕОРЕМА 3.6. Для всех $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_0^2$ справедливо равенство $\text{Exp}(\mathcal{D}^*) = \text{Exp}^*(\mathcal{D})$.

В отличие от случая конечных 1-подгрупп и 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$, объединение $\mathcal{D}_{(p,q)} \cup \mathcal{D}_{(p,q)}^*$, вообще говоря, не равно $\mathbb{Z}^2$ (см. рис. 3).

Рис. 3. Пример двух сопряженных $\mathcal{P}^2$ -диаграмм

3.3. Пример. Рассмотрим 1-подгруппу $P = [(2^j, 2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}]_1$ и соответствующую ей диаграмму $\mathcal{D} := \text{Log}(P)$. Диаграммы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ показаны на рис. 3.

Очевидно, что $P^* = [(2^{j-1}, 2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}]_1$.

Модифицируя рассмотренный пример, нетрудно построить 1-подгруппу, не являющуюся рефлексивной. А именно, удалим одну ячейку из кодиаграммы $\mathcal{D}_{(3,3)}$. Тогда для построенной диаграммы $\tilde{\mathcal{D}}$ мы будем иметь $\tilde{\mathcal{D}}^* = \mathcal{D}^*$, следовательно, $\tilde{\mathcal{D}}^{**} = \mathcal{D} \neq \tilde{\mathcal{D}}$ и 1-подгруппа $\tilde{P} := \text{Exp}(\tilde{\mathcal{D}}) = [\{(3 \cdot 2^j, 2^{-j}), (2^j, 3 \cdot 2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}\}]_1$ не рефлексивна.

3.4. Доказательство теоремы 3.3. В этом пункте мы докажем теорему 3.3, которая утверждает, что существует естественное соответствие между 1-подгруппами в $\mathbb{Q}^2$ и оптимальными $\mathcal{D}^2$ -диаграммами, задаваемое отображениями Exp и Log .

Пусть $u = (u^1, u^2) \in \mathbf{F}^2$ и P – 1-подгруппа в $\mathbb{Q}^2$. Обозначим

$$P_{(u)} := \{a \in P : \text{Exp}(-u) \mid a \text{ и } a \mid \text{Exp}(u)\}. \quad (3.10)$$

Ясно, что $P_{(u)} \subseteq P_{(v)}$, когда $u \leq v$. отождествляя точки a , $\text{Exp}(-u) \mid a$ и $a \mid \text{Exp}(u)$, с элементами группы $G_{(u)} := \text{Exp}(u)\mathbb{Z}^2 / \text{Exp}(-u)\mathbb{Z}^2$, мы можем рассматривать $P_{(u)}$ как 1-подгруппу $G_{(u)}$. Итак, мы можем определить $\mathcal{D}_{(u)} := \text{Log } P_{(u)} \subseteq T(-u, u)$. Положим $\mathcal{D} := \bigcup_u \mathcal{D}_{(u)}$.

Зафиксируем некоторый индекс $u \in \mathbf{F}$ и рассмотрим $\xi \in T_{(p_0, q_0)}$. По аналогии с (3.4) определим *сильные проекции*

$$\pi_+^1 \mathcal{D}_{(u)} p := \bigcap_q \pi^1 \mathcal{D}_{(u)}(p, q), \quad \pi_+^2 \mathcal{D}_{(u)} q := \bigcap_p \pi^2 \mathcal{D}_{(u)}(p, q).$$

Будем писать $u \Vdash \xi \in \mathcal{D}$, если выполнены следующие условия:

$$\xi \in T_{(p_0, q_0)}(-u, u), \quad \xi^1 \in {}^c(\pi_+^1 \mathcal{D}_{(u)} p_0), \quad \xi^2 \in {}^c(\pi_+^2 \mathcal{D}_{(u)} q_0).$$

ЛЕММА 3.7. Если $\{\mathcal{D}_{(u)}\}$ – произвольная неубывающая направленность $(-u, u)$ -диаграмм и $\mathcal{D} = \bigcup_u \mathcal{D}_{(u)}$, то

$$\text{opt}(\mathcal{D}) = \{\xi \in T : \exists u \Vdash \xi \in \mathcal{D}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $T^{[+]}$ непосредственно следует, что $T^{[+]}(\mathcal{D}) = \bigcup_u T^{[+]}(\mathcal{D}_{(u)})$. Рассмотрим $\xi \in \text{opt}(\mathcal{D})$. Существуют u и v такие, что $\xi \in T^{[+]}(\mathcal{D}_{(u)})$ и $\xi \in \mathcal{D}_{(v)}$. Положим $w = \max\{u; v\}$. Тогда $\xi \in \mathcal{D}_{(w)} \cap T^{[+]}(\mathcal{D}_{(w)})$. Значит, $w \Vdash \xi \in \mathcal{D}$.

Обратно, если $\exists u \Vdash \xi \in \mathcal{D}$, то $\xi \in \mathcal{D}_{(u)} \subset \mathcal{D}$. Кроме того, $\xi \in T^{[+]}(\mathcal{D}_{(u)}) \subset T^{[+]}(\mathcal{D})$. Таким образом, $\xi \in \text{opt}(\mathcal{D})$.

ТЕОРЕМА 3.8. Если $\mathcal{D}_{(u)} = \text{Log } P_{(u)}$, где $P_{(u)}$ заданы формулой 3.10, и $\mathcal{D} = \bigcup_u \mathcal{D}_{(u)}$, то

$$\text{Log } P = \mathcal{D}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P = \bigcup_u P_{(u)}$ и $\mathcal{D}_{(u)} = \text{Log } P_{(u)} \subset \mathcal{D}$, 1-подгруппа $P \subseteq \text{Exp}(\mathcal{D})$.

Для того чтобы доказать, что $\text{Exp}(\mathcal{D}) \subseteq P$, рассмотрим $s \in {}^c\mathcal{D}$ и положим

$$\mathcal{P}^{(1)} := \{p : s_p^1 \neq 0\}, \quad \mathcal{P}^{(2)} := \{q : s_q^2 \neq 0\}.$$

Существуют $u_{(p,q)}$ такие, что $(s_p^1, s_q^2) \in {}^c\mathcal{D}_{(u)}$. Пусть

$$u := \max\{u_{(p,q)} : p \in \mathcal{P}^{(1)}, q \in \mathcal{P}^{(2)}\}.$$

Тогда $s \in {}^c\mathcal{D}_{(u)}$, откуда $\text{Exp } s \in P_{(u)} \subset P$.

Для завершения доказательства достаточно установить равенство $\text{opt}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Действительно, если $\xi \in {}^c\mathcal{D}_{(p,q)}$, то $\xi \in {}^c\mathcal{D}_{(u)}_{(p,q)}$ для некоторого u . Выберем последовательность $s = (s_p^i)_{i=1,2} \in {}^c\mathcal{D}_{(u)}$, удовлетворяющую условию $(s_p^1, s_q^2) = \xi$, и положим

$$v := u + (\mathbf{1}_{\mathcal{P}^{(1)}}, \mathbf{1}_{\mathcal{P}^{(2)}}),$$

где $\mathcal{P}^{(i)}$ определяются, как и выше. Точка $\text{Exp } s$ принадлежит $P_{(u)} \subset P_{(v)}$ при $v \geq u$. Значит, $s \in {}^c\mathcal{D}_{(v)}$. Таким образом, $v \Vdash \xi \in \mathcal{D}$. По предыдущей лемме $\xi \in \text{opt}(\mathcal{D})$. Значит, $\text{opt}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ и $\text{Log}(P) = \mathcal{D}$.

Теорема 3.3 является непосредственным следствием теоремы 3.8.

Сделаем в заключение замечание по поводу возможности аксиоматизации рассмотренной выше теории 1-подгрупп. Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что можно привести систему естественных аксиом, которой удовлетворяют рассмотренные выше классы 1-подгрупп в $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}_{/D}^d$ и $\mathbb{Q}^d$ (те классы, для которых работают приведенные выше арифметические соображения). Точнее, эти классы естественным образом предстают как *модели Крипке* (см., например, [18]) данной аксиоматической теории. В связи с этим естественно поставить следующий вопрос. Можно ли получить *арифметическую классификацию* (т.е. утверждение о возможности перехода от одномерных “факторизаций” к многомерным) как логическое следствие аксиом и, таким образом, получить универсальное доказательство, применимое ко всем моделям?

3.5. Непосредственная классификация $\mathcal{P}^2$ -диаграмм. Как мы увидим в §4, для любого множества $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}_+^2$ имеет место равенство $\text{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}$. Таким образом, для построения классификации тайлингов в $\mathbb{R}^2$ достаточно дать описание рефлексивных 1-подгрупп $\mathbb{R}^2$. Более того, двумерный случай необычен тем, что все рефлексивные 1-подгруппы P либо *рациональны*, т.е. $P = [cA]$, где $c \in \mathbb{R}_+^2$, $A \in \mathbb{Q}_{(1)}^2$, $A^{**} = A$, либо имеют вид $a\mathbb{Z}^2 \sqcup b\mathbb{Z}^2$.

В этом пункте мы дадим явную классификацию рефлексивных $\mathcal{P}^2$ -диаграмм.⁵ Рассмотрим пару сопряженных (оптимальных) $\mathcal{P}^2$ -диаграмм $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$. Если одна из этих диаграмм пуста, то другая равна T . Поэтому ниже мы рассматриваем лишь нетривиальный случай, когда $\mathcal{D}, \mathcal{D}^* \neq \emptyset$. Введем следующие обозначения (см. рис. 4):

$$\text{T}^{[-]}(\mathcal{D}) := -\text{T}^{[+]}(\mathcal{D}^*), \quad \text{T}^{\text{I}}(\mathcal{D}) := \text{T}^{[-]}(\mathcal{D}) \cap \text{T}^{[+]}(\mathcal{D}), \quad (3.12)$$

$$\text{T}^{-}(\mathcal{D}) := \text{T}^{[-]} \setminus \text{T}^{\text{I}}, \quad \text{T}^{+}(\mathcal{D}) := \text{T}^{[+]} \setminus \text{T}^{\text{I}}, \quad (3.13)$$

$$\text{T}^{\emptyset}(\mathcal{D}) := \text{T} \setminus (\text{T}^{-}(\mathcal{D}) \sqcup \text{T}^{\text{I}}(\mathcal{D}) \sqcup \text{T}^{+}(\mathcal{D})). \quad (3.14)$$

⁵Результаты этого пункта приводятся без доказательств.

Рис. 4

Назовем *типом диаграммы* $\mathcal{D}$ последовательность

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\pm \mathcal{D} &= \{\mathbf{t}_i^\pm \mathcal{D}_p : p \in \mathcal{P}, i = 1, 2\}, \\ \mathbf{t}_i^\pm \mathcal{D}_p &:= \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } \pi_\pm^i \mathcal{D}_p - \text{луч}, \\ \infty, & \text{если } \pi_\pm^i \mathcal{D}_p = \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Далее, рассмотрим пересечение $\mathcal{I} = {}^c \pi_-^i \mathcal{D}_p \cap {}^c \pi_+^i \mathcal{D}_p$, где ${}^c \pi_\pm^i \mathcal{D}_p$ есть, как обычно, объединение ячеек $\pi_\pm^i \mathcal{D}_p$, рассматриваемых как замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. $\mathcal{I}$ может иметь одну из следующих 5 форм: точка, отрезок, луч $(-\infty, a]$, луч $[a, +\infty)$ и прямая $(-\infty, +\infty)$, которые мы обозначим “0”, “I”, “-”, “+” и “ ∞ ”, соответственно. Пусть $\mathbf{t}_i^I \mathcal{D}_p$ – форма $\mathcal{I}$. Последовательность $\mathbf{t}^I$ будем называть последовательностью *типов взаимодействия* $\mathcal{P}^2$ -диаграммы $\mathcal{D}$.

ЛЕММА 3.9. *Типы $\mathbf{t}_i^\pm \mathcal{D}_p$ и $\mathbf{t}_i^I \mathcal{D}_p$, рассматриваемые как функции от p , стабилизируются, когда $p \rightarrow \infty$.*

Значит, мы можем определить *асимптотические типы* $\mathbf{t}_{\infty, i}^\pm \mathcal{D}$ и $\mathbf{t}_{\infty, i}^I \mathcal{D}$ как пределы соответствующих последовательностей при $p \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что $\mathbf{t}_{\infty}^I = (\mathbf{t}_{\infty, 1}^I, \mathbf{t}_{\infty, 2}^I)$ принадлежит множеству (см. рис. 5):

$$\mathfrak{T} := \{(0, 0), (0, -), (0, +), (-, 0), (+, 0), (0, \infty), (\infty, 0), (-, -), (+, +)\}. \quad (3.16)$$

Далее, для фиксированных $\varepsilon \in \{-, +\}$ и $i \in \{1, 2\}$ рассмотрим последовательность $\mathbf{t}_i^\varepsilon \mathcal{D}_p$. Положим $\mathbf{t}_{f, i}^\varepsilon \mathcal{D}$ равным $\mathbf{t}_{\infty, 1}^\varepsilon \mathcal{D}$, если $\mathbf{t}_i^\varepsilon \mathcal{D}_p \equiv \mathbf{t}_{\infty, 1}^\varepsilon \mathcal{D}$, и равным $\{R, \infty\} \setminus \{\mathbf{t}_{0, 1}^\varepsilon\}$ в противном случае. Последовательность

$$\text{red } \mathbf{t}^\pm \mathcal{D} := \{\mathbf{t}_{f, i}^\pm \mathcal{D}, \mathbf{t}_{\infty, i}^\pm \mathcal{D} : i = 1, 2\} \quad (3.17)$$

назовем *приведенным типом* $\mathcal{P}^2$ -диаграммы $\mathcal{D}$. Перебором можно доказать следующее утверждение.

РИС. 5. Типы взаимодействия

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.10. Для заданного асимптотического типа взаимодействия $\mathbf{t} \in \mathfrak{T}$ существует лишь один допустимый приведенный тип $\mathbf{r}$. Другими словами, существует единственный $\mathbf{r}$ такой, что для любой $\mathcal{D}$, обладающей свойством $\mathbf{t}_\infty^1 \mathcal{D} = \mathbf{t}$, приведенный тип $\text{red } \mathbf{t}^\pm \mathcal{D} = \mathbf{r}$. Более того, любая оптимальная $\mathcal{P}^2$ -диаграмма $\mathcal{D}$ с $\text{red } \mathbf{t}^\pm \mathcal{D} = \mathbf{r}$ рефлексивна.

Заметим, что при этом для любого приведенного типа $\mathbf{r}$ существует $\mathcal{P}^2$ -диаграмма $\mathcal{D}$ такая, что $\text{red } \mathbf{t}^\pm = \mathbf{r}$.

На рис. 6 мы перечисляем приведенные типы, соответствующие асимптотическим типам взаимодействия.

Далее, пусть $P = \text{Exp}(\mathcal{D}) \in \mathbb{Q}_{(1)}^2$ и $\mathbf{t}_\infty^1 = \mathbf{t}$. Рассмотрим пару проекций $(\pi^1 P, \pi^2 P)$. Мы будем классифицировать проекции $\pi^i P$ следующим образом: скажем, что проекция имеет тип “ $\mathbb{Z}$ ”, если $\pi^i P = a\mathbb{Z}$, тип “ $\mathbb{R}$ ”,⁶ если $\pi^i P = \mathbb{Q}$, и тип “ $\mathbb{Q}$ ”, если $\pi^i P$ – некоторая собственная плотная подгруппа в $\mathbb{Q}$. Существует ровно $9 = 3^2$ типов проекций $(\pi^1 P, \pi^2 P)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.11. Существует взаимно однозначное соответствие между асимптотическими типами взаимодействия $\mathbf{t} \in \mathfrak{T}$ и типами проекций $(\pi^1 P, \pi^2 P)$ (см. рис. 6.).

Можно показать, что условия, приведенные выше, являются не только необ-

⁶Смысл этого обозначения состоит в том, что замыкание в $\mathbb{R}^2$ 1-подгруппы P , проекция $\pi^1 P$ которой имеет тип “ $\mathbb{R}$ ”, содержит горизонтальную прямую $\mathbb{R} \times b$.

$\pi^1 P$		$\mathbb{Q}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{R}$	
$\pi^2 P$	$\text{red } \mathbf{t}_i^\pm$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 2$
$\mathbb{Q}$		1 $(0, 0)$		2 $(0, +)$		3 $(-, 0)$	
	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \mathbf{R} \\ \infty & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \mathbf{R} \\ \infty & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \infty & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \mathbf{R} \\ \infty & \infty \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$
$\mathbb{Z}$		4 $(+, 0)$		5 $(+, +)$		6 $(\infty, 0)$	
	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \mathbf{R} \\ \infty & \infty \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \infty & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \infty & \infty \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \infty & \infty \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$
$\mathbb{R}$		7 $(0, -)$		8 $(0, \infty)$		9 $(-, -)$	
	$\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \infty \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \infty & \infty \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}$

Рис. 6. Приведенные типы, соответствующие допустимым асимптотическим типам взаимодействия

ходимыми, но и достаточными для того, чтобы две $\mathcal{P}^2$ -диаграммы были взаимно сопряженными. Таким образом, нами получена классификация рефлексивных $\mathcal{P}^2$ -диаграмм.

Сделаем несколько замечаний по поводу построенной арифметической классификации 1-подгрупп $\mathbb{Q}^2$. Во-первых, арифметическая классификация в ее одномерном варианте аналогична классификации подгрупп $\mathbb{Q}$, получаемой в теории абелевых групп ранга один. Соответственно, арифметическая классификация 1-подгрупп $\mathbb{Q}^2$ может рассматриваться как многомерное обобщение упомянутой классической конструкции.

Далее, заметим, что в одномерном случае рефлексивными (в смысле данного нами определения) являются только подгруппы вида $a\mathbb{Z}$, а также 0 и $\mathbb{Q}$. (Напомним, что рефлексивные 1-подгруппы P являются “хорошими” в смысле теории тайлингов, так как имеют вид $T(\mathbb{P})$ для некоторой совокупности $\mathbb{P}$ прямоугольников.) Таким образом, теория типов для рефлексивных подгрупп $\mathbb{Q}$ “вырождается”, а именно, все нетривиальные рефлексивные подгруппы $a\mathbb{Z}$ имеют один и тот же тип.

Кроме того, используя введенную выше терминологию, можно сказать, что асимптотические типы взаимодействия в случае размерности 1 исчерпываются одним типом “0”. В двумерном же случае число различных асимптотических типов взаимодействия для нетривиальных рефлексивных $\mathcal{P}^2$ -диаграмм равно 9. Это число можно уменьшить, рассматривая естественные симметрии 1-подгрупп и соответствующих им $\mathcal{P}^2$ -диаграмм: сопряжение $(\cdot)^*$ и транспозицию $(\cdot)^T$ – перестановку координат. Ясно, что эти симметрии индуцируют симметрии асимптотических типов взаимодействия (см. рис. 7), которые распадаются по отношению к этим симметриям на 4 класса.

Рис. 7. Естественные симметрии допустимых асимптотических типов взаимодействия: $\vdots$ – сопряжение, $|$ – транспозиция

Наконец, рассмотрим две $\mathcal{P}^2$ -диаграммы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с одними и теми же проекциями. Они могут отличаться только в области взаимодействия $T^I(\mathcal{A}) = T^I(\mathcal{B}) = T^I$. Более того, нетрудно показать, что существует лишь *конечное число* нетривиальных пересечений $\mathcal{D}_{(p,q)} \cap T^I_{(p,q)}$. Этот факт можно считать двумерным аналогом утверждения классической арифметики о том, что число простых чисел, входящих в разложение на простые множители, конечно.

§ 4. Прямоугольные тайлинги в $\mathbb{R}^2$

Сделаем, прежде всего, замечание о понятии упаковки в $\mathbb{R}^2$. Под *фигурой* мы будем понимать ограниченное измеримое относительно меры Лебега множество в $\mathbb{R}^2$. Скажем, что фигура F обладает $\mathbb{P}$ -упаковкой, где $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^2_+$, если F обладает $\mathbb{P}$ -упаковкой с точностью до множества меры 0, иными словами, если

$$1_F = \sum_{\xi} 1_{[a_{\xi} \dots a_{\xi} + h_{\xi}]}, \quad a_{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad h_{\xi} \in \mathbb{P}. \quad (4.1)$$

Понятия *тайлинга* и *аппроксимирующего тайлинга* переносятся на случай $\mathbb{R}^2$ без изменения.

4.1. Критерий существования и классификация аппроксимирующих тайлингов в $\mathbb{R}^2$. Скажем, что 1-подгруппа P *связна*, если P нельзя представить в виде $P = A \sqcup B$, где $A, B \in \mathbb{R}^2_{(1)}$. Очевидно, что P может быть разложено на компоненты связности: $P = \bigsqcup_{\xi} P_{\xi}$.

Замкнутая 1-подгруппа P в $\mathbb{R}^2$ называется *рациональной*, если $P = c[A]$, где $c \in \mathbb{R}^2$ и $A \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$. (Здесь $[\cdot]$ – топологическое замыкание.) Имеет место следующая простая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Если замкнутая 1-подгруппа $P \in \mathbb{R}^2_{(1)}$ связна, то P рациональна.*

ЛЕММА 4.2. *Если число компонент связности P превосходит 2, то $P^* = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме каждая компонента связности P_{ξ} , $\xi \in \Xi$, 1-подгруппы P рациональна: $P_{\xi} = (c_{\xi}^1, c_{\xi}^2)A_{\xi}$, $A_{\xi} \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$. Ясно, что для любой пары $\xi \neq \eta$ числа c_{ξ}^i и c_{η}^i независимы над $\mathbb{Q}$.

Предположим, что $\#\Xi \geq 3$ и зафиксируем различные $\xi, \eta, \zeta \in \Xi$ и собственные точки $c_\xi \in P_\xi$, $c_\eta \in P_\eta$ и $c_\zeta \in P_\zeta$. Пусть $(\alpha, \beta) \in P^*$. По определению сопряжения $\alpha \cdot c_\xi^1 = 0$ или $\beta \cdot c_\xi^2 = 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что выполнено первое соотношение. Напомним, что $a \cdot \alpha$ обозначает действие на a характера, отождествляемого с $\alpha \in \mathbb{R}$, в частности,

$$a \cdot \alpha = 0 \iff a\alpha \equiv 0 \pmod{1}.$$

Итак, $\alpha \cdot c_\eta^1 \neq 0$, откуда $\beta \cdot c_\eta^2 = 0$. Для третьего индекса имеем $\alpha \cdot c_\zeta^1 \neq 0$ и $\beta \cdot c_\zeta^2 \neq 0$. Таким образом, $P^* = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Рефлексивная 1-подгруппа $P \neq \emptyset$ в $\mathbb{R}^2$ может иметь либо одну либо две компоненты связности.*

Предположим, что число компонент P равно двум: $P = A \sqcup B$. Как A , так и B рациональны: $A = a[A']$, $B = b[B']$, $A', B' \in \mathbb{Q}_{(1)}^2$. Координаты a^i и b^i независимы над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим точку $\alpha \in P^*$. По определению $a^i \cdot \alpha_i = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Очевидно, что $b^i \cdot \alpha_i \neq 0$. Следовательно, $b^{3-i} \cdot \alpha_{3-i} = 0$. Таким образом, множество P^* распадается на две части: $P^* = C_1 \sqcup C_2$, где

$$\begin{aligned} C_1 &:= P^* \cap (a^1)^{-1}\mathbb{Q} \times (b^2)^{-1}\mathbb{Q}, \\ C_2 &:= P^* \cap (b^1)^{-1}\mathbb{Q} \times (a^2)^{-1}\mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть $\alpha = ((a^1)^{-1}\xi_1, (b^2)^{-1}\xi_2)$ — некоторая точка множества C_1 . Понятно, что для всех $(a^1x^1, a^2x^2) \in A$ выполнено $x^1 \cdot \xi^1 = 0$. Значит, $\xi^1 \in \text{ann}(\pi^1 A)$, где $\text{ann}(X)$ — аннулятор X . Аналогично, $\xi^2 \in \text{ann}(\pi^2 B)$. Более того, если $\xi \in \text{ann}(\pi^1 A) \times \text{ann}(\pi^2 B)$, то $\xi \in C_1$. Таким образом,

$$P^* = \text{ann}(\pi^1 A) \times \text{ann}(\pi^2 B) \sqcup \text{ann}(\pi^1 B) \times \text{ann}(\pi^2 A), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} P^{**} &= \text{ann}(\text{ann}(\pi^1 A)) \times \text{ann}(\text{ann}(\pi^2 A)) \\ &\quad \sqcup \text{ann}(\text{ann}(\pi^1 B)) \times \text{ann}(\text{ann}(\pi^2 B)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Откуда следует, что если $P^{**} = P$, то

$$\begin{aligned} A &= \text{ann}(\text{ann}(\pi^1 A)) \times \text{ann}(\text{ann}(\pi^2 A)), \\ B &= \text{ann}(\text{ann}(\pi^1 B)) \times \text{ann}(\text{ann}(\pi^2 B)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Поэтому можно считать, что $A = B = \mathbb{Z}^2$. Итак, мы приходим к следующей классификации 1-подгрупп $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Для рефлексивной 1-подгруппы P в $\mathbb{R}^2$ имеются следующие две возможности:*

- 1) P рациональна, $P = c[A]$, $A \in \mathbb{Q}_{(1)}^2$, $A^{**} = A$;
- 2) $P = a\mathbb{Z}^2 \sqcup b\mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим множество $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^2$. Как и в $\mathbb{Z}^d$ -случае, мы сопоставляем совокупности $\mathbb{P}$ замкнутый идеал $I(\mathbb{P}) \triangleleft L^1(\mathbb{Z}^2)$, порожденный индикаторами $\mathbf{1}_{[0..h]}$, где $h \in \mathbb{P}$. Наша следующая задача — классификация прямоугольных тайлингов в $\mathbb{R}^2$. Под классификацией тайлингов мы подразумеваем описание класса 1-подгрупп вида $\mathbf{T}(\mathbb{P})$, где $\mathbf{T}(\mathbb{P})$ — множество размеров прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$ -тайлингом, т.е. прямоугольников $[0..h]$, обладающих свойством $\mathbf{1}_{[0..h]} \in I(\mathbb{P})$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Имеет место тождество $T(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}$. Другими словами, прямоугольник $[0..h]$ обладает $\mathbb{P}$ -тайлингом тогда и только тогда, когда $\hat{1}_{[0..h]} \in I(\mathbb{P})$.*

Доказательство теоремы носит технический характер, поэтому мы его опускаем.

Заметим, что эта теорема дает не только классификацию тайлингов в $\mathbb{R}^2$, но и классификацию соответствующих идеалов в $L^1(\mathbb{Z}^d)$. Действительно, пусть $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ — два множества в $\mathbb{R}_+^2$ такие, что $T(\mathbb{P}_1) = T(\mathbb{P}_2)$. Если $[0..h] \in I(\mathbb{P}_2)$, то $h \in \mathbb{P}_2^{**} = \mathbb{P}_1^{**}$, следовательно, по теореме 4.5 индикатор $1_{[0..h]} \in I(\mathbb{P}_1)$. Значит, $I(\mathbb{P}_2) \subseteq I(\mathbb{P}_1)$. Аналогично, $I(\mathbb{P}_1) \subseteq I(\mathbb{P}_2)$. Таким образом, $I(\mathbb{P}_1) = I(\mathbb{P}_2) \iff T(\mathbb{P}_1) = T(\mathbb{P}_2)$.

4.2. Пример связной рефлексивной 1-подгруппы $\mathbb{R}^3$, не являющейся рациональной. Рассмотрим множество $\mathbb{P} := \{(1, 1, 1), (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)\}$, где ε — некоторое положительное *иррациональное* число. Положим $P = [\mathbb{P}]_1^*$ (см. рис. 8). Очевидно, что P рефлексивна. Можно показать, что

$$P = \mathbb{Z} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \cup \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \cup \mathbb{R} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Следовательно, P не является рациональной и при этом является связной (даже линейно связной).

РИС. 8. Иллюстрация к п. 4.2. Здесь $\varepsilon \approx \frac{7}{5}$. Для наглядности линии обозначены тонкими цилиндрами, а точки пересечения — сферами

4.3. Необходимое условие существования конечного тайлинга. В этом пункте мы сформулируем необходимое условие существования конечного $\mathbb{P}$ -тайлинга, предложенное В.Г. Покровским в [12] (см. также [11]). Пусть $\mathbb{P}$ — конечное множество d -мерных прямоугольников. Определим 1-подгруппу

$$L(\mathbb{P}) := \left\{ b \in \mathbb{R}^d : \forall \{M_1, \dots, M_d\} \exists i \ b^i = \sum_{a \in M_i} k_a a^i, \ k_a \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (4.7)$$

где $\{M_1, \dots, M_d\}$ — покрытие множества $\mathbb{P}$.

ТЕОРЕМА 4.6 [12, теорема 1]. *Справедливо следующее: $T^f(\mathbb{P}) \subseteq L(\mathbb{P})$.*

Покровский отмечает, что в $\mathbb{R}^d$ сформулированное условие не является достаточным, т.е., вообще говоря, $T^f(\mathbb{P}) \neq L(\mathbb{P})$.

Нам понадобится обобщение результата Покровского на случай бесконечного множества $\mathbb{P}$. А именно, мы полагаем $L(\mathbb{P})$ равным объединению множеств $L(\mathbb{P}')$, где $\mathbb{P}'$ – конечные подмножества $\mathbb{P}$. Покажем, что утверждение 4.6 остается истинным.

Действительно, если прямоугольник $[0..h)$ обладает конечным тайлингом, то $h \in T^f(\mathbb{P}')$ для некоторого конечного множества $\mathbb{P}' \subset \mathbb{P}$. Следовательно, $h \in L(\mathbb{P}') \subset L(\mathbb{P})$.

Для произвольного множества $\mathbb{P}$ рассмотрим ряд

$$[\mathbb{P}]_1 \subseteq P(\mathbb{P}) \subseteq T^f(\mathbb{P}) \subseteq L(\mathbb{P}) \subseteq T(\mathbb{P}) \stackrel{b}{=} [\mathbb{P}]_1^{**}. \quad (4.8)$$

Равенство (b) было доказано в теореме 4.5.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $[\mathbb{P}]_1 \neq P(\mathbb{P})$ и $L(\mathbb{P}) \neq T(\mathbb{P})$.

ПРИМЕР 4.7. Пусть $\mathbb{P} = \{(\varepsilon, 1), (1, \varepsilon), (1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon)\}$, где $\varepsilon \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Очевидно, что

$$[\mathbb{P}]_1 = (\varepsilon, 1)\mathbb{Z}^2 \sqcup (1, \varepsilon)\mathbb{Z}^2 \sqcup (1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon)\mathbb{Z}^2. \quad (4.9)$$

Тем не менее, существует прямоугольник $[0..(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon))$, обладающий $\mathbb{P}$ -упаковкой, но не принадлежащий $[\mathbb{P}]_1$. Ясно, что $L(\mathbb{P}) = A \times A$, где A – подгруппа $\mathbb{R}$, порожденная 1 и ε . Следовательно, $L(\mathbb{P}) \neq T(\mathbb{P}) = \mathbb{R}^2$. Так как $P(\mathbb{P}) \supseteq \pm P_+(\mathbb{P})$, множество $P_+(\mathbb{P}) \not\approx T(\mathbb{P})$. Таким образом, $\mathbb{P}$ -упаковки не являются асимптотически эквивалентными $\mathbb{P}$ -тайлингам для данного $\mathbb{P}$ (см. определение ниже).

4.4. Рациональные прямоугольные тайлинги в $\mathbb{R}^2$. Если $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}^2$, то мы говорим, что семейство прямоугольников $\mathbb{P}$ *рационально*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.8. *Если $\mathbb{P}$ рационально, то $[\mathbb{P}]_1 = L(\mathbb{P})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $\mathbb{P}$ счетно, $\mathbb{P}$ аппроксимируется конечными множествами: $\mathbb{P} = \bigcup_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_t$, где $\mathbb{P}_t \subseteq \mathbb{P}_{t+1}$ и $\#\mathbb{P}_t < \infty$. Далее, все 1-подгруппы $[\mathbb{P}_t]_1$ являются *целыми*, т.е. $[\mathbb{P}_t]_1 \subseteq \nu_t \mathbb{Z}^d$. Значит, $[\mathbb{P}_t]_1 = L(\mathbb{P}_t)$. Таким образом, $[\mathbb{P}]_1 = \bigcup_t [\mathbb{P}_t]_1 = \bigcup_t L(\mathbb{P}_t) = L(\mathbb{P})$.

Итак, в случае рациональных тайлингов ряд (4.8) принимает вид:

$$[\mathbb{P}]_1 = P(\mathbb{P}) = T^f(\mathbb{P}) = L(\mathbb{P}) \subseteq T(\mathbb{P}) = [\mathbb{P}]_1^{**}. \quad (4.10)$$

Рассмотрим соотношение между $\mathbb{P}$ -упаковками и $\mathbb{P}$ -тайлингами в случае рациональных тайлингов.

Для любых двух множеств $A, B \in \mathbb{Q}^2$ определим расстояние

$$d_{\infty}(A, B) := \inf_{L > 0} \max \left\{ \sup_{(L, L) \leq a \in A} \text{dist}(a, B); \sup_{(L, L) \leq b \in B} \text{dist}(b, A) \right\}. \quad (4.11)$$

Пишем $A \approx B$, если $d_{\infty}(A, B) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Скажем, что $\mathbb{P}$ -упаковки *асимптотически эквивалентны* конечным (аппроксимирующим) $\mathbb{P}$ -тайлингам, если $\mathbb{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathbb{T}^f(\mathbb{P})$ (соответственно, $\mathbb{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathbb{T}(\mathbb{P})$).

В $\mathbb{Z}^d$ -случае мы имеем $\mathbb{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathbb{P}(\mathbb{P})$. Поэтому для проверки А-эквивалентности $\mathbb{P}$ -упаковок и $\mathbb{P}$ -тайлингов нам нужно было лишь сравнить 1-подгруппы $\mathbb{P}(\mathbb{P})$ и $\mathbb{T}(\mathbb{P})$. В $\mathbb{R}^2$ данное соображение непригодно. Поэтому рассматриваемая задача сложнее.

ТЕОРЕМА 4.10. *Если $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}_+^2$, то $\mathbb{P}(\mathbb{P}) = \mathbb{T}(\mathbb{P})$ тогда и только тогда, когда 1-подгруппа $[\mathbb{P}]_1$ рефлексивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное следствие (4.10).

Опираясь на эту теорему, мы можем получить критерий А-эквивалентности $\mathbb{P}$ -упаковок и аппроксимирующих $\mathbb{P}$ -тайлингов для достаточно большого класса рациональных множеств $\mathbb{P}$.

Зафиксируем $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}^2$ и рассмотрим для каждого $u \in \mathbb{F}$, $u_p \geq 0$, множество $\mathbb{P}_{(u)}$ точек $a \in \mathbb{P}$ таких, что $-u \leq \text{Log } a \leq u$. Тогда $\bigcup_u \mathbb{P}_{(u)} = \mathbb{P}$. Заметим, что

$$\mathbb{P}_+(\mathbb{P}) = \bigcup_u \mathbb{P}_+(\mathbb{P}_{(u)}), \quad \mathbb{P}(\mathbb{P}) = \bigcup_u \mathbb{P}(\mathbb{P}_{(u)}). \quad (4.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11. Направленность $\mathbb{P}_u$ 1-подгрупп назовем *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое u , что для всех $v, w \geq u$ выполняется неравенство $d_\infty(P_v, P_w) < \varepsilon$. Скажем, что совокупность $\mathbb{P}$ *фундаментальна*, если направленность $[\mathbb{P}_{(u)}]_1$ является фундаментальной.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. В определении фундаментального множества направленность $\mathbb{P}_{(u)}$ можно заменить на любую другую аппроксимирующую направленность.

Верна следующая

ТЕОРЕМА 4.13. *Предположим, что совокупность прямоугольников $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ фундаментальна. Тогда $\mathbb{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathbb{P}(\mathbb{P})$ и $\mathbb{P}$ -упаковки асимптотически эквивалентны конечным $\mathbb{P}$ -тайлингам. $\mathbb{P}$ -упаковки А-эквивалентны аппроксимирующим $\mathbb{P}$ -тайлингам тогда и только тогда, когда $[\mathbb{P}]_1 = [\mathbb{P}]_1^{**}$.*

Заметим, что в условии сформулированной теоремы фигурируют только 1-подгруппы (но не 1-подполугруппы).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.14. *Если $\mathbb{P}^* \neq \emptyset$, то $\mathbb{P}$ фундаментальна.*

4.5. Пример множества $\mathbb{P}$, не являющегося фундаментальным. Будем представлять себе плоскость $\mathbb{R}^2$ как объединение квадратов $[a, a+1] \times [b, b+1]$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Пусть $P_0 := \mathbb{Z}^2$. Существует $n_1 = 2^{k_1}$ такое, что $3^2/n_1^2 < \frac{1}{4}$. Положим P_1 равным (3, 3)-расширению 1-подгруппы $P_0 \cup \Phi_{(n_1, n_1)}(3^{-1}, 3^{-1})$. Скажем, что квадрат $C = (a, a+1) \times (b, b+1)$ занят множеством P_t , если $C \cap P_t \neq \emptyset$. Ясно, что плотность δ_1 квадратов, занятых P_1 , не превосходит $3^2/n_1^2 < \frac{1}{4}$.

Предположим, что мы построили 1-подгруппы P_r , $0 \leq r < t$, удовлетворяющие следующим условиям: P_r является (n_r, n_r) -периодическим, $n_{r-1} | n_r$ и плотность⁷ δ_r квадратов, занятых P_r , меньше, чем $1/2 - 1/2^r$.

⁷Так как P_r является (n_r, n_r) -периодическим, плотность квадратов, занятых P_r , есть не что иное, как отношение числа квадратов, занятых P_r , внутри $[0, (n_r, n_r)]$ к n_r^2 .

Найдем такое простое p_t , что $p_t > 4n_{t-1}$. Пусть P_t — простое (p_t, p_t) -расширение $P_{t-1} \cup \Phi_{(n_t, n_t)}(l_t^{-1}, l_t^{-1})$, где $l_t = 3 \cdots p_t$ и $n_t = 2^{k_t} n_{t-1}$. Так как $p_t > 4n_{t-1}$, для любого квадрата $[a, a+1] \times [b, b+1]$, $(a, b) \in [0, (n_{t-1}, n_{t-1}))$, найдется точка $A = (\lambda^1 n_t / p_t, \lambda^2 n_t / p_t) \in P_t$, обладающая свойством $A \bmod(n_{t-1}, n_{t-1}) \in C$. Более того, $A \bmod(n_{t-1}, n_{t-1}) \in [a + \frac{1}{4}, a + \frac{3}{4}] \times [b + \frac{1}{4}, b + \frac{3}{4}]$. Пусть C — некоторый не занятый P_{t-1} квадрат. Такой квадрат должен существовать, так как плотность $\delta_{t-1} < \frac{1}{2} < 1$. Тогда точка A , построенная выше, займет некоторый не занятый ранее квадрат, причем $\text{dist}(A, P_{t-1}) > \frac{1}{4}$.

Построенная таким образом последовательность P_t такова, что $d_\infty(P_{t-1}, P_t) > \frac{1}{4}$, а следовательно, $P = \bigcup_t P_t$ не является фундаментальной. Теперь, используя приведенную конструкцию, мы можем без труда построить пример такой совокупности $\mathbb{P}$, что $P_+(\mathbb{P}) \not\approx P(\mathbb{P})$. Для этого достаточно положить

$$\mathbb{P} = \{(n_t(1 - p_t^{-1}), n_t(1 - p_t^{-1})) : 1 \leq t < \infty\}. \quad (4.13)$$

Авторы выражают благодарность участникам семинаров “Динамические системы и эргодическая теория”, “Дискретная геометрия и геометрия чисел” и “Тригонометрические суммы и их приложения” и особенно Д. В. Аносову, Н. П. Долбилину, Дж. Кингу, Н. Г. Мошевитину, В. В. Рыжикову и А. М. Стёпину за проявленный интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Гарднер М. Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.
2. de Bruijn N. G. Filling boxes with bricks // Amer. Math. Monthly. 1969. V. 76. P. 37–40.
3. Brualdi R. A., Foregger T. H. Packing boxes with harmonic bricks // J. Combin. Theory. Ser. B. 1974. V. 17. P. 81–114.
4. de Bruijn N. G., Klarner D. A. A finite basis theorem for packing boxes with bricks // Philips Research Rep. 1975. V. 30. P. 337–343.
5. Katona G., Szász D. Matching problems // J. Combin. Theory. Ser. B. 1971. V. 10. P. 60–92.
6. Klarner D. A. Brick packing puzzles // J. Recreational Math. 1973. V. 6. P. 112–117.
7. Klarner D. A., Göbel F. Packing boxes with congruent figures // Indag. Math. (N.S.) 1969. V. 31. P. 465–472.
8. Barnes F. W. Algebraic theory of brick packings I // Discrete Math. 1982. V. 42. №1. P. 7–27.
9. Barnes F. W. Algebraic theory of brick packings II // Discrete Math. 1982. V. 42. №2. P. 129–144.
10. Pokrovsky V. G. About dissection of an n -dimensional cube into congruent parallelepipeds // Math. Notes. 1981. V. 30. №6. P. 881–887.
11. Pokrovsky V. G. Linear relations in dissection into n -dimensional parallelepipeds // Math. Notes. 1985. V. 37. №6. P. 901–907.
12. King J. L. Brick tiling and monotone boolean functions // Preprint. Univ. of Florida, 1996.
13. Prikhod'ko A. A. Special representations of $\mathbb{Z}^n$ -actions // J. Dynam. Control Systems. 1996. V. 2. P. 239–253.
14. Халмош П. П. Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1969.
15. Alpern S. Return times and conjugations of antiperiodic automorphism // Ergodic Theory Dynam. System. 1981. V. 1. №2. P. 135–143.
16. Rudolph D. A two-valued step-coding for ergodic flows // Math. Z. 1976. V. 150. P. 201–220.
17. Rudolph D. Markovtilings of $\mathbb{R}^n$ and representations of $\mathbb{R}^n$ -actions // Contemp. Math. 1987. V. 94. P. 271–290.
18. Драгалин А. Г. Математический интуиционизм: теория доказательств. М.: Наука, 1979.