Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Шрамов, $\mathbb{Q}$ -факториальные трехмерные квартики,
Матем. сб., 2007, том 198, номер 8, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:51:47

УДК 512.76

К. А. Шрамов

$\mathbb{Q}$ -факториальные трехмерные квартики

Доказывается, что нодальная трехмерная квартика X , не содержащая плоскостей, $\mathbb{Q}$ -факториальна, если количество ее особых точек не превосходит двенадцати, за исключением случая, когда X имеет двенадцать особых точек и содержит двумерную квадрику. Рассматриваются некоторые геометрические конструкции, связанные с такой квартикой.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

Трехмерная квартика является классическим предметом изучения в бирациональной геометрии. Группа бирациональных автоморфизмов гладкой квартики была впервые изучена в [1]. Группы бирациональных автоморфизмов особых квартик изучались в числе прочего в [2] (случай одной обыкновенной двойной особенности) и [3] (случай произвольного числа обыкновенных двойных особенностей). В [3] доказана бирациональная жесткость и получено описание образующих группы бирациональных автоморфизмов для произвольной $\mathbb{Q}$ -факториальной нодальной квартики. С другой стороны, на не- $\mathbb{Q}$ -факториальные многообразия эти результаты не обобщаются: существуют примеры рациональных не- $\mathbb{Q}$ -факториальных нодальных трехмерных квартик. В связи с этим представляется интересным вопрос о том, какие условия гарантируют $\mathbb{Q}$ -факториальность квартики с обыкновенными двойными особенностями.

Напомним, что многообразие V называется *факториальным*, если любой дивизор Вейля на V является дивизором Картье, и *$\mathbb{Q}$ -факториальным*, если некоторая кратность любого дивизора Вейля на V является дивизором Картье. Особая точка $x \in V$ называется *обыкновенной двойной особенностью*, если некоторая ее окрестность аналитически эквивалентна окрестности вершины конуса над неособой квадрикой соответствующей размерности. Если V – гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, заданная уравнением $F = 0$, то последнее условие эквивалентно невырожденности гессиана $H(F)$ в точке x . Многообразие, имеющее лишь обыкновенные двойные особенности, называется *нодальным*.

Пусть X – нодальная квартика. Известен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [4]). *Если количество особых точек X не превосходит восьми, то X $\mathbb{Q}$ -факториальна. Если количество особых точек равно девяти и X не содержит плоскостей, то X также $\mathbb{Q}$ -факториальна.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00613, 05-01-00353).

Этот результат является частным случаем следующей гипотезы (см., например, [5], [4], а также [6] по поводу дальнейших результатов).

ГИПОТЕЗА 1.2. Пусть Y – нодальная гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^4$, имеющая s особых точек. Если $s < (d - 1)^2$, то Y $\mathbb{Q}$ -факториальна. Если Y не содержит плоскостей и $s < 2(d - 1)(d - 2)$, то Y $\mathbb{Q}$ -факториальна. Если $s \leq 2(d - 1)(d - 2)$ и Y не содержит плоскостей и квадрик, то Y также $\mathbb{Q}$ -факториальна.

Гипотеза 1.2 пока доказана лишь для $d \leq 3$.

Основная цель настоящей работы – доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть нодальная квартика X не содержит плоскостей и имеет не более одиннадцати особых точек. Тогда X $\mathbb{Q}$ -факториальна. Если X имеет двенадцать особых точек, то X $\mathbb{Q}$ -факториальна, за исключением случая, когда X содержит квадрику.

Теорема 1.3 обобщает теорему 1.1 и является частным случаем гипотезы 1.2. Так как существуют примеры не- $\mathbb{Q}$ -факториальных нодальных квартик без плоскостей с двенадцатью особыми точками (общая квартика, содержащая квадрику – см. пример 4.1), то утверждение теоремы 1.3 (как, впрочем, и общее утверждение гипотезы 1.2) неулучшаемо.

Доказательству теоремы 1.3 посвящен § 3. В нем используются некоторые простые следствия теоремы Безе (см. теорему 2.1), собранные в § 2. В § 4 рассматриваются некоторые конструкции, связанные с общей квартикой, содержащей квадрику, описывается известная перестройка такой квартики в полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$ с одной особой точкой (пример 4.1); для последнего многообразия приводится пример бирациональной инволюции, отсутствующей на неособом многообразии такого типа (пример 4.4 и утверждение 4.5).

Все многообразия считаются определенными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Автор выражает благодарность И. А. Чельцову и С. С. Галкину за полезные обсуждения.

§ 2. Вспомогательные утверждения о точках на поверхностях

В этом параграфе содержатся вспомогательные утверждения, которые будут использоваться в § 3 при исследовании вопросов $\mathbb{Q}$ -факториальности.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [7]). Пусть $\pi: \mathbb{F}_{r,N} \rightarrow \mathbb{F}_r$ – раздутие рациональной линейчатой поверхности $\mathbb{F}_r$ в N точках $p_1, \dots, p_N$, $D \sim as + bf$ – дивизор на $\mathbb{F}_r$, где s и f – классы исключительного сечения и слоя соответственно, $a, b > 0$. Пусть $L_N = \pi^*D - \sum_{i=1}^N E_i$, где E_i – исключительные дивизоры π . Положим $\rho = \dim|D - K_{\mathbb{F}_r}|$,

$$h = h^1(\mathbb{F}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_r}(D) \otimes K_{\mathbb{F}_r}^{-1}) = \rho - \frac{D^2 - 3DK_{\mathbb{F}_r} + 16}{2}.$$

Тогда расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_r, N}(L_N)$ порождено глобальными сечениями, если выполнены следующие условия:

- (i) $N \leq \left\lfloor \frac{\rho - 4}{3} \right\rfloor$,
- (ii) $D^2 \geq 7 + 4h$,
- (iii) всякая кривая C бистепени $(x, y) \neq (0, 0)$ (т.е. линейно эквивалентная $xs + yf$), $0 \leq x \leq a + 2$, $0 \leq y \leq \lfloor (b + 2 + r)/2 \rfloor$, содержит не более $C(D - K_{\mathbb{F}_r} - C) - 2$ точек из $p_1, \dots, p_N$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $p_1, \dots, p_{10}, q \in \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ таковы, что никакие четыре из точек $p_1, \dots, p_{10}$ не лежат на кривой бистепени $(1, 0)$ или $(0, 1)$, никакие семь не лежат на кривой бистепени $(1, 1)$ и все десять не лежат на кривой бистепени $(2, 1)$ или $(1, 2)$. Тогда найдется дивизор D бистепени $(3, 3)$, проходящий через $p_1, \dots, p_{10}$ и не проходящий через q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях теоремы 2.1 имеем $\rho = 35$, $h = 0$, $D^2 = 18$, так что условия (i) и (ii) выполнены. Условие (iii) требует, чтобы на кривой C бистепени $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 2$, лежало не более

$$C(D - K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} - C) - 2 = 5x + 5y - 2xy - 2$$

точек из $p_1, \dots, p_{10}$. Это условие получается для каждой из пар (x, y) непосредственно из сделанных предположений.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $p_1, \dots, p_{10}, q \in \mathbb{F}_2$ таковы, что ни одна из точек $p_1, \dots, p_{10}$ не лежит на исключительном сечении, никакие четыре не лежат на слое, никакие семь не лежат на кривой бистепени $(1, 2)$ и все десять не лежат на кривой бистепени $(1, 3)$. Тогда найдется дивизор D бистепени $(3, 6)$, проходящий через $p_1, \dots, p_{10}$ и не проходящий через q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях теоремы 2.1 имеем $\rho = 35$, $h = 0$, $D^2 = 18$, откуда следуют условия (i) и (ii). Условие (iii), требующее, чтобы на кривой C бистепени $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$, лежало не более $2x^2 + 5y - 2xy - 2$ точек из $p_1, \dots, p_{10}$, проверяется непосредственно для каждой пары (x, y) (отметим, что для $(x, y) = (1, 0)$ условие (iii) означает, что ни одна из точек p_i не лежит на исключительном сечении).

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $p_1, \dots, p_8, q \in \mathbb{F}_2$ таковы, что ни одна из точек $p_1, \dots, p_8$ не лежит на исключительном сечении, никакие три не лежат на слое, никакие шесть не лежат на кривой бистепени $(1, 2)$ и все восемь не лежат на кривой бистепени $(1, 3)$. Тогда найдется дивизор D бистепени $(2, 5)$, проходящий через $p_1, \dots, p_8$ и не проходящий через q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях теоремы 2.1 имеем $\rho = 29$, $h = 0$, $D^2 = 12$, откуда следуют условия (i) и (ii). Условие (iii), требующее, чтобы на кривой C бистепени $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, лежало не более $2x^2 + x + 4y - 2xy - 2$ точек из $p_1, \dots, p_8$, проверяется непосредственно для каждой пары (x, y) .

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^3$ – неприводимая квадрика, $p_1, \dots, p_{10}, q \in Y$ таковы, что никакие четыре из точек $p_1, \dots, p_{10}$ не лежат на прямой, никакие семь не лежат на конике и все десять не лежат на скрученной кубике. Тогда найдется дивизор $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|_Y$, проходящий через $p_1, \dots, p_{10}$ и не проходящий через q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Y – гладкая квадрика, то утверждение вытекает из следствия 2.2. Если Y – конус над гладкой коникой, причем никакая из точек p_i, q не является его вершиной, то утверждение получается применением следствия 2.3 к прообразам p_i, q при проекции $g: \mathbb{F}_2 \rightarrow Y$. Если q является вершиной конуса, то применим следствие 2.3 к точкам $g^{-1}(p_i)$ и произвольной точке $\tilde{q} \in s \subset \mathbb{F}_2$. Это дает дивизор $\tilde{D} \sim 3s + 6f$, проходящий через $g^{-1}(p_i)$ и не содержащий s , а потому и не пересекающийся с s , так как $\tilde{D}s = 0$. Дивизор $D = g_*\tilde{D}$ искомый.

Осталось рассмотреть случай, когда какая-то из точек p_i , например, p_{10} , является вершиной конуса Y . Так как не все точки p_i лежат на одной прямой, то можно выбрать такую образующую конуса l , что $q \notin l$ и одна из точек $p_1, \dots, p_9$ лежит на l . Более того, если существует коника, содержащая шесть точек из $p_1, \dots, p_9$, то такая коника единственна и можно выбрать l так, чтобы на нее попала одна из этих шести точек (пусть это, например, p_9). Заметим, что никакие три из точек $p_1, \dots, p_8$ не лежат на прямой, никакие шесть не лежат на конике и все восемь не лежат на скрученной кубике. Применив следствие 2.4 к точкам $g^{-1}(p_1), \dots, g^{-1}(p_8), g^{-1}(q)$, найдем дивизор $\tilde{D} \sim 2s + 5f$, проходящий через точки $g^{-1}(p_1), \dots, g^{-1}(p_8)$ и не проходящий через $g^{-1}(q)$. Дивизор $D = g_*\tilde{D} \cup l$ искомый.

§ 3. $\mathbb{Q}$ -факториальность

На протяжении этого параграфа X обозначает нодальную трехмерную кваттику, не содержащую плоскостей и имеющую особенности в точках $p_1, \dots, p_s$.

Для нодального трехмерного многообразия условия $\mathbb{Q}$ -факториальности и факториальности совпадают. Факториальность трехмерного многообразия Фано X равносильна условию $\mathrm{rk} H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{rk} H_4(X, \mathbb{Z})$ (в нашем случае $\mathrm{rk} H^2(X, \mathbb{Z}) = \rho(X) = 1$). Таким образом, для доказательства $\mathbb{Q}$ -факториальности многообразия X достаточно проверить, что для малого разрешения $h: \tilde{X} \rightarrow X$ выполнено $\rho(\tilde{X}) = s + 1$. Для этого достаточно, чтобы в терминологии работы [8] дефект многообразия X был равен нулю (см. доказательство теоремы 2 в [8], а также [9]). Последнее условие означает, что особые точки $p_1, \dots, p_s$ накладывают независимые условия на гиперповерхности степени 3 в $\mathbb{P}^4$, т.е. для любой точки p_i , $1 \leq i \leq s$, найдется кубическая гиперповерхность $D_i \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $p_i \notin D_i$ и $p_j \in D_i$ при $j \neq i$.

В качестве основного инструмента для проверки последнего свойства мы будем использовать следующую теорему, доказанную в [10].

ТЕОРЕМА 3.1. Точки $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}^n$ накладывают независимые условия на формы степени d , если в каждом линейном подпространстве размерности k лежит не более $dk + 1$ точек из $p_1, \dots, p_s$.

Точки $p_1, \dots, p_s$ обладают следующим простым свойством.

ЛЕММА 3.2. Среди точек $p_1, \dots, p_s$ никакие четыре не лежат на одной прямой, никакие семь не лежат в одной плоскости и никакие десять не лежат на скрученной кубике. Если точки $p_1, \dots, p_6$ лежат в плоскости P , то либо X пересекает P по (возможно, приводимой) двойной конике, либо X пересекает P по объединению четырех различных прямых $l_1, \dots, l_4$, а точки p_i , $1 \leq i \leq 6$, являются точками попарных пересечений прямых l_j, l_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые три утверждения выполняются независимо от предположения об отсутствии плоскостей на X (см., например, [6; лемма 2.7]). Пусть точки $p_1, \dots, p_6$ лежат в плоскости P . Предположим, что $p_1, \dots, p_6$ лежат на конике Q . Если существует точка $q \in (X \cap P) \setminus Q$, то через $p_1, \dots, p_6, q$ проходит двумерное семейство плоских кубических кривых. Пусть C – общая кривая из этого семейства. Тогда C неприводима и $C \subset X$, так как иначе индекс пересечения C с X в $\mathbb{P}^4$ был бы не меньше тринадцати. Так как C подвижна, то $P \subset X$, получили противоречие.

Предположим теперь, что $X \cap P$ не является коникой и не состоит из четырех прямых. Это значит, что найдется точка $q \in X \cap P$ такая, что точки $p_1, \dots, p_6, q$ не лежат на одной конике и никакие четыре из них неколлинеарны. Таким образом, через $p_1, \dots, p_6, q$, как и в предыдущем случае, проходит двумерное семейство плоских кубических кривых; общая кривая из этого семейства неприводима и, следовательно, содержится в X , получили противоречие.

Из теоремы 3.1 и леммы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $s \leq 10$. Тогда X Q-факториальна.

С другой стороны, из леммы 3.2 также получается

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $s \geq 11$ и точки $p_1, \dots, p_s$ содержатся в приводимой двумерной квадрике (т.е. в паре плоскостей, линейная оболочка которых трехмерна). Тогда либо $p_1, \dots, p_s$ накладывают независимые условия на формы степени 3, либо $p_1, \dots, p_s$ содержатся также в некоторой неприводимой двумерной квадрике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, \dots, p_s$ содержатся в объединении плоскостей L и L' , причем $p_1, \dots, p_6 \in L$, $p_7, \dots, p_s \in L'$, $L \cap L' = l$. Заметим, что $s \leq 12$ и не больше одной из точек p_i лежит на прямой l . В частности, $p_1, \dots, p_6$ лежат на конике тогда и только тогда, когда $p_7, \dots, p_s$ лежат на конике, так как при сделанных предположениях конфигурация из четырех прямых с пересечениями в особенностях X пересекает прямую l не менее чем в трех точках, а коника – не более чем в двух точках.

Предположим, что точки $p_1, \dots, p_6$ лежат на конике Q_1 , а точки $p_7, \dots, p_s$ — на конике Q_2 . Заметим, что $Q_1 \cap l = Q_2 \cap l$ (иначе X содержит одну из плоскостей L или L'), т.е. коники Q_i пересекают l по одной и той же паре точек (возможно, совпадающих). Любые две коники с этим свойством содержатся в некоторой неприводимой квадрике.

Таким образом, если точки $p_1, \dots, p_s$ не лежат на неприводимой квадрике, то по лемме 3.2 пересечение X с L состоит из четырех прямых $l_1, \dots, l_4$. Следовательно, пересечение X с L' также состоит из четырех прямых. Обозначим их $l'_1, \dots, l'_4$. Мы можем считать (перенумеровав, если нужно, прямые l'_i), что $l_i \cap l = l'_i \cap l$. Теперь легко видеть, что точки $p_1, \dots, p_s$ накладывают независимые условия на формы степени 3. (Например, поверхность S_1 степени 3, проходящая через $p_2, \dots, p_s$ и не проходящая через p_1 , строится следующим образом: если p_1 не лежит на прямых l_1 и l_2 , то S_1 состоит из объединения плоскостей $P_1 = \langle l_1, l'_1 \rangle$, $P_2 = \langle l_2, l'_2 \rangle$ и какой-нибудь плоскости P_3 , проходящей через единственную из точек $p_7, \dots, p_s$, не лежащую ни на одной из прямых l'_1, l'_2 , и не проходящей ни через одну из остальных особых точек.)

Нам понадобится еще несколько несложных наблюдений.

ЛЕММА 3.5. Пусть $s \leq 12$ и точки $p_1, \dots, p_s$ содержатся в некотором трехмерном пространстве $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$, но при этом не содержатся ни в какой двумерной квадрике. Тогда $p_1, \dots, p_s$ накладывают независимые условия на формы степени 3 в $\mathbb{P}^3$ (и, следовательно, в $\mathbb{P}^4$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $s = 12$. Достаточно предъявить кубическую поверхность, содержащую $p_1, \dots, p_{11}$ и не содержащую p_{12} . Так как точки $p_1, \dots, p_{12}$ не лежат на одной квадрике, то найдется квадрика, содержащая девять из них (пусть это, например, точки $p_1, \dots, p_9$) и не содержащая p_{12} . Если точки p_{10}, p_{11} и p_{12} неколлинеарны, то в качестве искомой кубической поверхности можно взять объединение этой квадрики с любой плоскостью, проходящей через p_{10} и p_{11} и не проходящей через p_{12} . Если же точки p_{10}, p_{11} и p_{12} коллинеарны, то по лемме 3.2 точки p_i, p_{11} и p_{12} неколлинеарны ни при каком $1 \leq i \leq 9$. С другой стороны, не все квадрики, проходящие через наборы точек $\{p_1, \dots, p_9, p_{10}\} \setminus \{p_i\}$, $1 \leq i \leq 9$, проходят через p_{12} , так что искомую кубическую поверхность снова можно получить в виде объединения квадрики и плоскости.

ЛЕММА 3.6. Пусть $s \leq 11$ и точки $p_1, \dots, p_s$ лежат на двумерной квадрике. Тогда $p_1, \dots, p_s$ накладывают независимые условия на формы степени 3 в $\mathbb{P}^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3.4 можно считать, что точки $p_1, \dots, p_s$ лежат на неприводимой квадрике. Далее см. следствие 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть $s = 12$, причем точки $p_1, \dots, p_{11}$ порождают трехмерное пространство, не содержащее p_{12} . Тогда $p_1, \dots, p_{12}$ накладывают независимые условия на формы степени 3 в $\mathbb{P}^4$.

Доказательство заключается в очевидном применении лемм 3.5 и 3.6.

ЛЕММА 3.8. Пусть $s = 12$ и $p_1, \dots, p_{12}$ лежат на двумерной квадрике. Тогда либо точки $p_1, \dots, p_{12}$ накладывают независимые условия на формы степени 3 в $\mathbb{P}^4$, либо $p_1, \dots, p_{12}$ содержатся в пучке двумерных квадрик в некотором трехмерном подпространстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3.4 можно считать, что точки $p_1, \dots, p_s$ лежат на неприводимой квадрике Q , также можно предполагать, что $s = 12$. Предположим, что любая квадрика, содержащая точки $p_1, \dots, p_{12}$, совпадает с Q (иначе выполнено второе утверждение леммы). Докажем, что через точки $p_1, \dots, p_{11}$ можно провести (приводимую) кубическую поверхность, не содержащую p_{12} . Пусть Q' – квадрика, не совпадающая с Q , проходящая через восемь точек p_i (например, через $p_1, \dots, p_8$) и не проходящая через p_{12} . Если точки $p_9, \dots, p_{12}$ некомпланарны, то искомую поверхность можно получить как объединение квадрики Q' и плоскости, проходящей через p_9, p_{10} и p_{11} . Пусть теперь точки $p_9, \dots, p_{12}$ лежат в плоскости P . Перенумеровав, если потребуется, точки p_9, p_{10} и p_{11} , мы можем считать, что p_{10}, p_{11} и p_{12} порождают P . По лемме 3.2 в плоскости P лежит не более двух точек из $p_1, \dots, p_8$. Пусть это точки p_7 и p_8 (случай, когда в P лежит лишь одна из точек $p_1, \dots, p_8$ или не лежит ни одной из них, разбираются аналогично). Если все квадрики, проходящие через наборы точек $\{p_1, \dots, p_8, p_9\} \setminus \{p_i\}$, $1 \leq i \leq 6$, проходят через точку p_{12} , то выполнено следующее условие: всякая квадрика, проходящая через точки p_7, p_8 и p_9 , проходит также и через p_{12} , т.е. точки p_7, p_8, p_9 и p_{12} лежат на одной прямой, получили противоречие с леммой 3.2. В противном случае пусть, например, существует квадрика Q_1 , проходящая через $p_2, \dots, p_9$ и не проходящая через p_{12} , тогда искомая кубика строится как объединение Q_1 с плоскостью, проходящей через точки p_1, p_{10} и p_{11} .

ЛЕММА 3.9. Пусть $s = 12$ и точки $p_1, \dots, p_{12}$ содержатся в пучке двумерных квадрик в некотором трехмерном подпространстве. Тогда квартика X содержит квадрику.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q и Q' – различные двумерные квадрики, содержащие $p_1, \dots, p_{12}$, кривая E – пересечение Q и Q' . Можно считать, что Q и Q' неприводимы и Q содержит некоторую точку $q \in X$, $q \notin E$. Пусть $\mathcal{H}$ – линейная система на Q , состоящая из ограничений на Q кубических форм, имеющих нули в точках $p_1, \dots, p_{12}$ и q . Из леммы 3.2 следует, что $\mathcal{H}$ не имеет неподвижных компонент. Но индекс пересечения соответствующих кривых с X в $\mathbb{P}^4$ не меньше двадцати пяти, так что $Q \subset X$.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пусть $s = 12$ и некоторые одиннадцать точек из $p_1, \dots, p_{12}$ лежат в трехмерном пространстве. Тогда X либо Q-факториальна, либо содержит квадрику.

Доказательство заключается в последовательном применении следствия 3.7, лемм 3.5, 3.8 и 3.9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Согласно следствию 3.3 можно считать, что $11 \leq s \leq 12$. Пусть $s = 11$. Если точки $p_1, \dots, p_{11}$ лежат в некотором

трехмерном пространстве, то они накладывают независимые условия на формы степени 3 в $\mathbb{P}^4$ по леммам 3.6 и 3.5. Если же они не содержатся ни в каком трехмерном пространстве, то, учитывая лемму 3.2, утверждение можно получить из теоремы 3.1.

Пусть теперь $s = 12$. Если никакие одиннадцать из точек $p_1, \dots, p_{12}$ не лежат в трехмерном пространстве, то $\mathbb{Q}$ -факториальность X снова следует из теоремы 3.1. Если же какие-то одиннадцать точек лежат в трехмерном пространстве, то нужное утверждение получается из следствия 3.10.

§ 4. Некоторые конструкции

ПРИМЕР 4.1 (см. [4; пример 3], [6; пример 1.21], а также [3; пример 6]). Пусть X – кватрика в $\mathbb{P}^4$ с однородными координатами $(x_0 : \dots : x_4)$, содержащая (неприводимую) двумерную квадрику. Тогда X можно задать уравнением вида $QQ' - LC = 0$, где $\deg(Q) = \deg(Q') = 2$, $\deg(L) = 1$, $\deg(C) = 3$ (в дальнейшем для краткости символами L и C мы также будем обозначать соответствующие гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$, а символами Q и Q' – соответствующие двумерные квадрики). Достаточно общая кватрика такого вида имеет двенадцать обыкновенных двойных особенностей и является, очевидно, не- $\mathbb{Q}$ -факториальной.

Положим $y = Q/L = C/Q'$, $y' = Q'/L = C/Q$. Рациональное отображение $f: (x_0 : \dots : x_4) \mapsto (x_0 : \dots : x_4 : y)$ устанавливает бирациональную эквивалентность X с многообразием Y , заданным в $\mathbb{P}_{(x_0: \dots : x_4: y)}^5$ уравнениями

$$\begin{aligned} yL &= Q, \\ yQ' &= C. \end{aligned}$$

Аналогично отображение $f': (x_0 : \dots : x_4) \mapsto (x_0 : \dots : x_4 : y')$ переводит X в многообразие Y' , заданное в $\mathbb{P}_{(x_0: \dots : x_4: y')}^5$ уравнениями

$$\begin{aligned} y'L &= Q', \\ y'Q &= C. \end{aligned}$$

Отображение f (отображение f') является композицией одного из двух малых разрешений особенностей многообразия X : раздутия дивизора Q (соответственно Q') и стягивания собственного прообраза дивизора Q' (соответственно Q) в особую точку на Y . Если квадрика Q' неособа, то соответствующая точка на Y является обыкновенной двойной точкой. Композиция $f' \circ f^{-1}: Y \dashrightarrow Y'$ является линком типа II (определение см., например, в [11]). Многообразия Z и Z' связаны флопом χ :

$$\begin{array}{ccccc} & Z & \xrightarrow{\chi} & Z' & \\ \sigma \swarrow & & & & \searrow \sigma' \\ Y & & & & Y' \\ & \searrow \phi & & \swarrow \phi' & \\ & & X & & \end{array} .$$

Обратно, пусть дано общее пересечение Y квадрики D_2 и кубики D_3 в $\mathbb{P}^5$ с одной обыкновенной двойной особенностью p . Тогда на Y лежит двенадцать прямых $l_1, \dots, l_{12}$, проходящих через p , причем все они содержатся в общем касательном пространстве $\tilde{L}$ к D_2 и D_3 в точке p (условие общности позволяет считать D_2 и D_3 гладкими). Проекция $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^4$ из точки p разлагается в композицию раздутья $\sigma: Z \rightarrow Y$ точки p и стягивания $\phi: Z \rightarrow X$ прообразов двенадцати прямых. Легко видеть, что образ X многообразия Y при этой проекции является квартикой, содержащей квадрику $\pi(\tilde{L} \cap D_2)$ и особой в точности в точках $\pi(l_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если квадрика D_2 из примера 4.1 вырождается в конус над гладкой трехмерной квадрикой с вершиной в точке p , а кубика D_3 проходит через p и остается достаточно общей, то Y имеет одну обыкновенную двойную точку и бирационально эквивалентно не-Q-факториальному двойному накрытию квадрики с ветвлением в пересечении с квартикой, причем структура двойного накрытия задается проекцией π . Отметим, что это дает пример не-Q-факториального нодального двойного накрытия квадрики с ветвлением в пересечении с квартикой с минимальным количеством особенностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3 (ср. с [12; гипотеза 9]). Если квартика X , содержащая квадрику, достаточно общая, то она не имеет (бигулярных) автоморфизмов, переставляющих квадрики Q и Q' . Действительно, любой автоморфизм многообразия X сохраняет эллиптическую кривую $E = Q \cap Q'$ и действует на множестве $\mathcal{Q} = \{q_1, \dots, q_{16}\}$ точек $q_i \in E$ таких, что $4q_i$ является гиперплоским сечением E . Если квадрики Q и Q' достаточно общие, то все неподвижные точки автоморфизмов из $\text{Aut}(E)$, действующих на $\mathcal{Q}$, принадлежат $\mathcal{Q}$. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_N \in \text{PGL}_4$ – все автоморфизмы $\mathbb{P}^3$, действующие на множестве $\mathcal{Q}$ и не имеющие неподвижных точек на $E \setminus \mathcal{Q}$, $t \in E \setminus \mathcal{Q}$, $t_j = \tau_j(t)$, $1 \leq j \leq N$. Выберем кубик C так, чтобы C проходила через t , но не проходила ни через какую из точек t_j . Предположим, что существует нетривиальный автоморфизм τ многообразия X . Пусть $\tau' \in \text{PGL}_4$ – такой автоморфизм трехмерного пространства L , что $\tau|_L = \tau'|_L$. Автоморфизм τ' должен совпадать с одним из автоморфизмов τ_j , но должен также действовать на множестве особых точек многообразия X , одной из которых является t . Таким образом, $\tau' = \text{id}$.

Пусть X не имеет автоморфизмов, переставляющих Q и Q' . Тогда многообразия Y и Y' не изоморфны, так как изоморфизм между Y и Y' опускается до такого автоморфизма многообразия X . Таким образом, общее полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$ с одной особенностью заведомо не является бирационально жестким. С другой стороны, легко привести пример такой квартики X , что многообразия Y и Y' изоморфны (как раз такой пример рассматривался в [3; пример 6]).

Полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$ является популярным объектом изучения. Для общего неособого многообразия $\mathcal{Y}$ такого типа доказана бирациональная жесткость и вычислена группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(\mathcal{Y})$ (см. [13] и [14]). Оказывается, что $\text{Bir}(\mathcal{Y})$ является полупрямым

произведением подгруппы бигулярных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathcal{Y})$ и подгруппы, порожденной бирациональными инволюциями, связанными с прямыми и кониками, линейная оболочка которых содержится в квадрике. Инволюции первого типа получаются из структур двойного накрытия, инволюции второго типа – из структур эллиптических расслоений. Оказывается, что бирациональные инволюции полного пересечения квадрики и кубики с одной обыкновенной двойной точкой не исчерпываются перечисленными.

ПРИМЕР 4.4. Пусть $B \subset Y$ – коника, проходящая через особую точку p , такая, что линейная оболочка B не содержится в D_2 (на общем многообразии Y существует 240 таких коник – см. замечание 4.6). Общее трехмерное пространство, содержащее B , пересекает D_2 по неособой квадрике S , и коника B является кривой бистепени $(1, 1)$ на S . Пересечение D_3 с S состоит из B и эллиптической кривой B' бистепени $(2, 2)$, проходящей через p и пересекающей B в трех других точках. Пусть $g: \tilde{Y} \rightarrow Y$ – последовательное раздутие точки p и собственного прообраза коники B на Y , E и F – соответствующие исключительные дивизоры. Тогда $\tilde{Y}$ обладает структурой эллиптического расслоения $\phi: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$ с сечением E и 3-сечением F . Отражение относительно сечения E , определенное на неособых слоях, продолжается до бигулярной инволюции $\tilde{\tau}_B$ многообразия $\tilde{Y}$ и определяет бирациональную инволюцию τ_B многообразия Y . Действие $\tilde{\tau}_B$ на $\text{Pic}(\tilde{Y})$ описывается утверждением 4.5.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5 (ср. с [14; лемма 5.1.3]). Пусть h, f и e обозначают классы H, F и E в $\text{Pic}(\tilde{X})$. Тогда

$$\tilde{\tau}_B^* h = 15h - 8f - 16e, \quad \tilde{\tau}_B^* f = 14h - 7f - 16e, \quad \tilde{\tau}_B^* e = e.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Третье равенство очевидно. Пусть G – общий слой расслоения ϕ , h_G, f_G и e_G – ограничения h, f и e на G . Заметим, что $\tilde{\tau}_B$ действует на $\text{Pic}(G)$. При этом

$$\tilde{\tau}_B^* h_G = 8f_G - h_G + m(h_G - f_G - e_G)$$

для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, так как ядро отображения ограничения $\text{Pic}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Pic}(G)$ порождено классом $h_G - f_G - e_G$.

Рассмотрим поверхность $S = \phi^{-1}(l)$ – прообраз общей прямой $l \subset \mathbb{P}^2$. Пусть h_S, f_S и e_S – ограничения h, f и e на S . Тогда

$$h_S^2 = 4, \quad h_S f_S = 0, \quad h_S e_S = 2, \quad f_S^2 = e_S^2 = -2, \quad f_S e_S = 1.$$

Так как $(\tilde{\tau}_B^* h_S)^2 = h_S^2 = 6$, то

$$6 = ((8f_S - h_S) + m(h_S - f_S - e_S))^2 = -122 + 8m,$$

откуда $m = 16$, что доказывает первое равенство.

Наконец, второе равенство следует из первого и третьего с учетом того, что инволюция $\tilde{\tau}_B$ сохраняет класс $h - e - f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Если квартака X достаточно общая, то через каждую ее особую точку p_i , $i = 1, \dots, 12$, проходит 24 прямых $l_{i,j}$, $j = 1, \dots, 24$, причем две из них (например, $l_{i,1}$ и $l_{i,2}$) содержатся в квадрике Q' , две (например, $l_{i,3}$ и $l_{i,4}$) – в квадрике Q , а остальные 20 не содержатся в подпространстве L . С каждой из точек p_i связана бирациональная инволюция σ_i квартаки X , а с каждой прямой $l_{i,j}$ – бирациональная инволюция $\sigma_{i,j}$ (см. [2] или [14]). С другой стороны, с каждой коникой $B \subset Y$ такой, что линейная оболочка B содержится в D_2 , связана бирациональная инволюция τ_B многообразия Y (см. [13] или [14]); с каждой коникой $B \subset Y$, не обладающей этим свойством, но проходящей через особую точку p , также связана бирациональная инволюция τ_B (см. пример 4.4). Образы прямых $l_{i,3}$ и $l_{i,4}$ при отображении f являются кониками $B_{i,3}$, $B_{i,4}$, линейные оболочки которых содержатся в D_2 , а образы прямых $l_{i,j}$, $5 \leq j \leq 24$, – кониками $B_{i,j}$, линейные оболочки которых не содержатся в D_2 . Все коники $B_{i,j}$, $1 \leq i \leq 12$, $3 \leq j \leq 24$, проходят через особую точку p . Наконец, пусть $l_i \subset Y$ – прямая такая, что $\phi(l_i) = p_i$; с каждой прямой $l \subset Y$ связана бирациональная инволюция τ_l (см. [13] или [14]). Тогда при естественном отождествлении групп $\text{Bir}(X)$ и $\text{Bir}(Y)$ инволюции σ_i отождествляются с инволюциями τ_{l_i} , $1 \leq i \leq 12$, а инволюции $\sigma_{i,j}$ – с инволюциями $\tau_{B_{i,j}}$, $1 \leq i \leq 12$, $3 \leq j \leq 24$.

Список литературы

- [1] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные квартаки и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, J. I. Manin, “Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.
- [2] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартаки с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135(177)**:4 (1988), 472–496; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of a three-dimensional quartic with a quadratic singularity”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 457–482.
- [3] M. Mella, “Birational geometry of quartic 3-folds. II: The importance of being $\mathbb{Q}$ -factorial”, *Math. Ann.*, **330**:1 (2004), 107–126.
- [4] I. Cheltsov, “Nonrational nodal quartic threefolds”, *Pacific J. Math.*, **226**:1 (2006), 65–82.
- [5] C. Ciliberto, V. Di Gennaro, “Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^4$ with ordinary double points”, *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, Proceedings of the conference on interesting algebraic varieties arising in algebraic transformation group theory (Vienna, 2001), Encyclopaedia Math. Sci., **132**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 1–7.
- [6] I. Cheltsov, *Points in projective spaces and applications*, [arXiv:math.AG/0511578](https://arxiv.org/abs/math/0511578).
- [7] E. M. Bese, “On the spannedness and very ampleness of certain line bundles on the blow-ups of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and F_r ”, *Math. Ann.*, **262**:2 (1983), 225–238.
- [8] S. Cynk, “Defect of a nodal hypersurface”, *Manuscripta Math.*, **104**, № 3, 2001, 325–331.
- [9] I. Cheltsov, J. Park, *Sextic double solids*, [arXiv:math.AG/0404452](https://arxiv.org/abs/math/0404452).
- [10] D. Eisenbud, J.-H. Koh, “Remarks on points in a projective space”, *Commutative algebra* (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer-Verlag, New York, 1989, 157–172.

- [11] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [12] G. Brown, A. Corti, F. Zucconi, “Birational geometry of 3-fold Mori fibre spaces”, *Proceedings of the Fano Conference* (Univ. Torino, Turin, 2002), Univ. Torino, Turin, 2004, 235–275; [arXiv:math.AG/0307301](#).
- [13] В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13** (1980), 815–868.
- [14] В. А. Исковских, А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы многомерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Алгебраическая геометрия* – 1, **19**, ВИНТИ, М., 2001, 5–139.

К. А. Шрамов (К. А. Shramov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: shramov@mccme.ru

Поступила в редакцию

07.09.2006 и 12.01.2007