Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Лосев, Вычисление картановских пространств для аффинных однородных пространств, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 10, 31–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:29:43

УДК 512.745

И. В. Лосев

Вычисление картановских пространств для аффинных однородных пространств

Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа, а H – ее редуктивная подгруппа. Фиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$ и максимальный тор $T \subset B$. Картановское пространство $\mathfrak{a}_{G,G/H}$ – это по определению подпространство в $\mathfrak{t}^*$ (где $\mathfrak{t}$ – алгебра Ли группы T), порожденное весами всех B -полуинвариантных рациональных функций на G/H . В работе вычисляются пространства $\mathfrak{a}_{G,G/H}$.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Основное поле K предполагается алгебраически замкнутым и характеристики 0.

Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа, $T \subset B$ – максимальный тор и борелевская подгруппа в G соответственно. Решетки характеров $\mathfrak{X}(T)$ и $\mathfrak{X}(B)$ естественным образом изоморфны и вложены в $\mathfrak{t}^*$. Фиксируем такую G -инвариантную симметрическую форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}$, что $(\xi, \eta) = \text{tr}_V(\xi\eta)$ для некоторого локально эффективного G -модуля V , и отождествим $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{t}$ с $\mathfrak{t}^*$. Отметим, что для любой редуктивной алгебраической подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ограничение формы $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ невырождено.

Пусть X – неприводимое G -многообразие. Веса B -полуинвариантных рациональных функций на X образуют подрешетку в $\mathfrak{X}(T)$. Эта подрешетка называется *решеткой весов* многообразия X и обозначается через $\mathfrak{X}_{G,X}$. Подпространство $\mathfrak{a}_{G,X} \subset \mathfrak{t}^*$, порожденное решеткой весов, называется *картановским пространством* многообразия X . Размерность пространства $\mathfrak{a}_{G,X}$ называется *рангом* X и обозначается через $\text{rk}_G(X)$.

Для того чтобы оправдать нашу терминологию, рассмотрим случай симметрического пространства X . Здесь $X = G/H$, где $(G^\sigma)^\circ \subset H \subset G^\sigma$, а σ – инволюция группы G . Положим $\mathfrak{m} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \sigma(\xi) = -\xi\}$. Выберем максимальную коммутативную подалгебру $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$, состоящую из полупростых элементов. Известно, что все такие подалгебры $\text{Int}(\mathfrak{h})$ -сопряжены. Подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ называется *картановским пространством* симметрического пространства G/H . Выберем систему положительных корней Δ_+ в $\mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{b}$ – борелевская подалгебра в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{t}$ – картановская подалгебра в $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Оказывается (см., например, [1]), что $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{G,G/H}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00988).

Целью настоящей работы является вычисление пространств $\mathfrak{a}_{G,G/H} \subset \mathfrak{t}$, где H – редуктивная подгруппа в G . Отметим, что $\mathfrak{a}_{G,G/H} \subset \mathfrak{a}_{G,G/H_1}$ для любой нормальной подгруппы $H_1 \subset H$, поскольку имеется доминантный G -эквивариантный морфизм $G/H_1 \rightarrow G/H$. Более того, поскольку поле $K(G/H^\circ)$ является алгебраическим расширением поля $K(G/H)$, то $\mathfrak{a}_{G,G/H} = \mathfrak{a}_{G,G/H^\circ}$. Поэтому пространство $\mathfrak{a}_{G,G/H}$ зависит только от пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, и мы положим $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}_{G,G/H}$. Основная идея вычисления состоит в том, чтобы заметить, что пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ зависит лишь от некоторого “существенного” идеала в $\mathfrak{h}$. Вот точное определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Редуктивная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *существенной*, если для любого собственного идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ включение $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ является строгим.

Для формулировки основного результата работы нам понадобится довольно стандартное понятие *неразложимой* подалгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Предположим, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ такова, что существуют идеалы $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}$ и редуктивные подалгебры $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2$, для которых $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. В этой ситуации мы говорим, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является прямой суммой пар $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ и пишем $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$. Если пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ не может быть разложена в нетривиальную прямую сумму, то мы говорим, что $\mathfrak{h}$ является *неразложимой* подалгеброй.

Понятно, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus \mathfrak{a}(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть G – связная редуктивная группа, H – ее связная подгруппа, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ – алгебры Ли групп G, H . Тогда:

- (а) Существует единственный идеал $\mathfrak{h}^{\text{ess}} \subset \mathfrak{h}$, который является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и для которого $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{ess}})$. Этот идеал назовем *существенной частью* подалгебры $\mathfrak{h}$. Идеал $\mathfrak{h}^{\text{ess}}$ является максимальным (по включению) среди всех идеалов алгебры $\mathfrak{h}$, которые являются существенными подалгебрами в $\mathfrak{g}$. Если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$, то $\mathfrak{h}^{\text{ess}} = \mathfrak{h}_1^{\text{ess}} \oplus \mathfrak{h}_2^{\text{ess}}$.
- (б) Все нетривиальные полупростые неразложимые существенные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ с точностью до сопряжения в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ суть в точности приведенные в таблице 1.
- (с) Здесь мы классифицируем неразложимые существенные неполупростые подалгебры и указываем, как считать для них картановские пространства.
 - (с1) Пусть $\mathfrak{h}$ – неразложимая существенная неполупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда пара $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ является прямой суммой нескольких копий пар 1, 2 (последняя для $k \neq n/2$), 10, 19 из таблицы 1 и пар $(\mathfrak{sl}_{2n+1}, \mathfrak{sp}_{2n})$, $(\mathfrak{sl}_{2n+1}, \mathfrak{sl}_{n+1})$. В пунктах (с2)–(с5) мы считаем, что $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ имеет указанный вид.
 - (с2) Имеем $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$.
 - (с3) Пусть $\mathfrak{z}_1 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$ – алгебраическая подалгебра. Если подалгебра $\mathfrak{z}_1 \oplus [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{g}$ неразложима, то она существенна.

- (с4) Пространства $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$ и $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z})$ двойственны друг другу. Двойственность задается правилом, сформулированным в замечании 1.4.
- (с5) Подпространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ является прообразом при отображении $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \rightarrow \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z})$ аннулятора подпространства $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{z}$.
- (d) Пусть σ – автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Связь между пространствами $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \sigma(\mathfrak{h}))$ объясняется в замечании 1.5.

Большая часть обозначений, использованных в таблице 1, объяснена в § 6. В строках 25–27 через π_i (соответственно π'_i) обозначается фундаментальный вес первого (соответственно второго) идеала.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Это замечание объясняет, как вычислять пространства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в случае, когда $\mathfrak{h}$ является существенной неполупростой подалгеброй.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ – разложение в прямую сумму центра и простых (некоммутативных) идеалов. Напомним, что в интересующих нас случаях пара $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ является прямой суммой пар с номерами 1, 2 ($k \neq n/2$), 10, 19 из таблицы 1 и пар $(\mathfrak{sl}_{2n+1}, \mathfrak{sp}_{2n})$, $(\mathfrak{sl}_{2n+1}, \mathfrak{sl}_{n+1})$. Положим $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i))$, $i = \overline{1, k}$. Понятно, что $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])) = \mathfrak{z}_0 \oplus \mathfrak{z}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{z}_k$ и

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), 0) \oplus \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i).$$

Отождествление пространства $\mathfrak{z}$ с $(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z}))^*$ вводится следующим образом. Пусть G – односвязная группа, соответствующая $\mathfrak{g}$, и H – связная подгруппа в G с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$. Элемент $x \in \mathfrak{z}$ отождествляется с единственным линейным функционалом $\alpha_x \in \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$, для которого равенство $xv = \alpha_x(\lambda)v$ выполняется для любого старшего веса λ и любого вектора $v \in V(\lambda)^{(H, H)}$. Используя двойственность Фробениуса, мы видим, что условия

- 1) $V(\lambda)^{(H, H)} \neq 0$,
- 2) $V(\lambda^*)^{(H, H)} \neq 0$,
- 3) λ – старший вес в $K[G/(H, H)]$

эквивалентны.

В § 5 мы покажем, что для всех шести пар $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$, перечисленных выше, функция α_x корректно определена и аннулирует $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z})$.

Теперь мы опишем соответствие $x \mapsto \alpha_x$ явно.

Из определения следует, что для $x \in \mathfrak{z}_i$, $i = \overline{0, k}$, функция α_x лежит в $\mathfrak{a}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), 0)^*$ для $i = 0$ и в $(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i))^*$ для $i > 0$. Для $i = 0$ отображение $x \mapsto \alpha_x$ – это естественное отождествление $\mathfrak{z}_0 \cong \mathfrak{a}(\mathfrak{z}_0, 0)^*$. Для $i > 0$ функция α_x совпадает с аналогичной функцией, определенной для пары $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$. Теперь достаточно найти все пространства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i)$ и отождествить $(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i))^*$ с $\mathfrak{z}_i$. Все пространства $\mathfrak{z}_i$ одномерны, так что достаточно найти старший вес λ модуля $K[G_i/H_i]$, не лежащий в $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i)$ (здесь G_i , H_i – связные группы, соответствующие $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h}_i$), и число $\alpha_x(\lambda_i)$. Эта информация дана в таблице 2. Мы обозначаем через $\pi_i^\vee$ двойственный фундаментальный вес.

Таблица 1. Полупростые существенные неразложимые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

№	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$
1	$\mathfrak{sl}_n, n \geq 2$	$\mathfrak{sl}_k, \frac{n+2}{2} \leq k \leq n$	$\langle \pi_i, \pi_{n-i}; i \leq n-k \rangle$
2	$\mathfrak{sl}_n, n \geq 4$	$\mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k},$ $\frac{n}{2} \leq k \leq n-2$	$\langle \pi_i + \pi_{n-i}, \pi_k, \pi_{n-k};$ $i < n-k \rangle$
3	$\mathfrak{sl}_{2n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\langle \pi_{2i}; i \leq n-1 \rangle$
4	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}, \frac{n+1}{2} \leq k \leq n$	$\langle \pi_i; i \leq 2(n-k) \rangle$
5	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k)},$ $\frac{n}{2} \leq k < n$	$\langle \pi_{2i}; i \leq n-k \rangle$
6	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geq 4$	$\mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$	$\langle \pi_2, \pi_4, \pi_1 + \pi_3 \rangle$
7	$\mathfrak{sp}_6$	$\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$	$\langle \pi_2, \pi_1 + \pi_3 \rangle$
8	$\mathfrak{so}_n, n \geq 7$	$\mathfrak{so}_k, \frac{n+2}{2} \leq k \leq n$	$\langle \pi_i; i \leq n-k \rangle$
9	$\mathfrak{so}_{4n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sl}_{2n}$	$\langle \pi_{2i}; i \leq n \rangle$
10	$\mathfrak{so}_{4n+2}, n \geq 2$	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\langle \pi_{2i}, \pi_{2n+1}; i \leq n \rangle$
11	$\mathfrak{so}_9$	$\mathfrak{spin}_7$	$\langle \pi_1, \pi_4 \rangle$
12	$\mathfrak{so}_{10}$	$\mathfrak{spin}_7$	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_5 \rangle$
13	$\mathfrak{so}_7$	G_2	$\langle \pi_3 \rangle$
14	$\mathfrak{so}_8$	G_2	$\langle \pi_1, \pi_3, \pi_4 \rangle$
15	G_2	A_2	$\langle \pi_1 \rangle$
16	F_4	B_4	$\langle \pi_1 \rangle$
17	F_4	D_4	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$
18	E_6	F_4	$\langle \pi_1, \pi_5 \rangle$
19	E_6	D_5	$\langle \pi_1, \pi_5, \pi_6 \rangle$
20	E_6	B_4	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_5, \pi_6 \rangle$
21	E_6	A_5	$\langle \pi_1 + \pi_5, \pi_2 + \pi_4, \pi_3, \pi_6 \rangle$
22	E_7	E_6	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_6 \rangle$
23	E_7	D_6	$\langle \pi_2, \pi_4, \pi_5, \pi_6 \rangle$
24	E_8	E_7	$\langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_7 \rangle$
25	$\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}$	$\langle \pi_i^* + \pi_i'; i \leq \text{rk } \mathfrak{h} \rangle$
26	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2m},$ $m > n > 1$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2m-2}$	$\langle \pi_2, \pi_2', \pi_1 + \pi_1' \rangle$
27	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sl}_2, n > 1$	$\mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sl}_2$	$\langle \pi_2, \pi_1 + \pi_1' \rangle$

ТАБЛИЦА 2. Отождествление $\mathfrak{z}_i$ с $(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i))^*$

$(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$	$x \in \mathfrak{z}_i$	λ	$\alpha_x(\lambda)$	$\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i)$
$(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_k), k > \frac{n}{2}$	$\pi_{n-k}^\vee$	π_1	$\frac{k}{n}$	$\{\sum_{i=1}^{n-k} (x_i \pi_i + x_{n-i} \pi_{n-i});$ $\sum_{i=1}^{n-k} i(x_i - x_{n-i}) = 0\}$
$(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k}),$ $k > \frac{n}{2}$	$\pi_{n-k}^\vee$	π_{n-k}	$\frac{(n-k)k}{n}$	$\langle \pi_i + \pi_{n-i}; i \leq n-k \rangle$
$(\mathfrak{sl}_{2n+1}, \mathfrak{sp}_{2n})$	$\pi_1^\vee$	π_1	$\frac{2n}{2n+1}$	$\{\sum_{i=1}^{2n} x_i \pi_i;$ $\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)x_{2i+1} - \sum_{i=1}^n i x_{2i} = 0\}$
$(\mathfrak{so}_{4n+2}, \mathfrak{sl}_{2n+1})$	$\pi_{2n+1}^\vee$	π_{2n+1}	$n + \frac{1}{2}$	$\langle \pi_{2i}, \pi_{2n} + \pi_{2n+1}; i \leq n-1 \rangle$
(E_6, D_5)	$\pi_1^\vee$	π_1	$\frac{4}{3}$	$\langle \pi_1 + \pi_5, \pi_6 \rangle$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Это замечание объясняет связь между пространствами $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \sigma(\mathfrak{h}))$ для $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Заметим, что найдется элемент $g \in \text{Int}(\mathfrak{g})$, для которого $\mathfrak{b}, \mathfrak{t}$ устойчивы относительно σ_1 , где $\sigma_1 = g\sigma$. Заменяя σ на σ_1 , мы можем считать, что $\sigma(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$, $\sigma(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. В этом случае $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \sigma(\mathfrak{h})) = \sigma(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$. Это можно доказать, например, следующим образом. По двойственности Фробениуса пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (соответственно $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \sigma(\mathfrak{h}))$) порождено старшими весами λ , для которых $V(\lambda)^{* \mathfrak{h}} \neq 0$ (соответственно $V(\lambda)^{* \sigma(\mathfrak{h})} \neq 0$). Но $\dim V(\lambda)^{* \sigma(\mathfrak{h})} = \dim V(\sigma(\lambda))^{* \mathfrak{h}}$.

Отметим, что для всех подалгебр из таблиц 1, 2, кроме случаев 8 ($n = 8, k = 7$), 9, 25, любая подалгебра, $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ -сопряженная с $\mathfrak{h}$, является и $\text{Int}(\mathfrak{g})$ -сопряженной. В случае 8 (соответственно 9, 25) класс $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ -сопряженности подалгебры $\mathfrak{h}$ является объединением 3 (соответственно 2, $\# \text{Aut}(\mathfrak{h})/\text{Int}(\mathfrak{h})$) классов $\text{Int}(\mathfrak{g})$ -сопряженности.

§ 2. Основные свойства существенных подалгебр

В этом параграфе G обозначает связную редуктивную группу, а H – ее редуктивную подгруппу.

Для неприводимого G -многообразия X положим

$$L_{G,X} = Z_G(\mathfrak{a}_{G,X}), \quad (2.1)$$

$$L_{0G,X} = \bigcap_{\chi \in \mathfrak{X}_{G,X}} \ker \chi. \quad (2.2)$$

В (2.2) мы рассматриваем $\mathfrak{X}_{G,X}$ как подрешетку в $\mathfrak{X}(L_{G,X})$.

Нам нужен следующий основополагающий факт, доказанный (в большей общности) Ф. Кнопом в [2; теорема 8.1, следствие 8.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть X – квазиаффинное гладкое G -многообразие. Тогда $L_{0G,X}$ является стабилизатором общего положения для действия $G : T^*X$.

Напомним, что по определению подгруппа $G_0 \subset G$, где G – произвольная алгебраическая группа, называется *стабилизатором общего положения* (сокращенно с.о.п.) для неприводимого G -многообразия Y , если для некоторого открытого подмножества $Y^0 \subset Y$ стабилизатор любой точки $y \in Y^0$ сопряжен с G_0 в G . Алгебра Ли с.о.п. называется *стабильной подалгеброй общего положения* (с.п.о.п.) для действия $G : Y$. Если Y – векторное пространство, группа G редуктивна и действие $G : Y$ линейно, то с.о.п. для этого действия существует (см. [3; § 7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пространство $\mathfrak{a}_{G,X}$ не обязательно однозначно определяется по с.п.о.п. для действия $G : T^*X$. К примеру, пусть $G = \mathrm{SL}_n$, $X_1 = K^n \oplus K^n$, $X_2 = K^n \oplus K^{n*}$, $X_3 = K^{n*} \oplus K^{n*}$, где K^n означает пространство тавтологического представления группы SL_n . Тогда $\mathfrak{a}_{G,X_1} = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$, $\mathfrak{a}_{G,X_2} = \langle \pi_1, \pi_{n-1} \rangle$, $\mathfrak{a}_{G,X_3} = \langle \pi_{n-1}, \pi_{n-2} \rangle$. Но $T^*X_1 \cong T^*X_2 \cong T^*X_3$.

Если $X = G/H$, то получаем следующее следствие из предложения 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Подалгебра $\mathfrak{l}_{0,G/H} \subset \mathfrak{g}$ сопряжена со с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \cong \mathfrak{h}^\perp$.

В дальнейшем нам будут нужны две следующие несложные леммы.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathfrak{h}$ – редуктивная алгебра Ли, V – $\mathfrak{h}$ -модуль (см. § 6), $\mathfrak{l}_0$ – соответствующая с.п.о.п., $\mathfrak{h}_1$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{h}$. Тогда подалгебра $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$ с $h \in \mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ общего положения является с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля V . В частности, если $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ – идеал, то $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$ – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля V .

Утверждение леммы следует непосредственно из определения с.п.о.п.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$ – идеал в $\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}_1$ -модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ является прямой суммой тривиального $\mathfrak{h}_1$ -модуля и $\mathfrak{h}_1$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Утверждение леммы вытекает из того факта, что $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_1$ является тривиальным $\mathfrak{h}_1$ -модулем.

Основным результатом этого параграфа является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Идеал $\mathfrak{h}^{\mathrm{ess}} \subset \mathfrak{h}$, определенный в пункте (а) теоремы 1.3, существует и однозначно определен. Предположим, что $\mathfrak{l}_0$ является с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}^{\mathrm{ess}}$ совпадает с идеалом в $\mathfrak{h}$, порожденным $\mathfrak{l}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{h}_1$ идеал в $\mathfrak{h}$, порожденный $\mathfrak{l}_0$. По лемме 2.4 $\mathfrak{l}_0$ – это с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, стало быть по лемме 2.5 и для $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$. Поскольку $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ и $\dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{rk} \mathfrak{g} - \mathrm{rk} \mathfrak{l}_0 = \dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$, мы получаем, что $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$.

Далее, покажем, что идеал $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$ с $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ содержит $\mathfrak{h}_1$. Пусть H_2 – связная подгруппа в H , соответствующая $\mathfrak{h}_2$. Тогда $\mathfrak{l}_{0,G/H_2} = \mathfrak{l}_{0,G/H}$. Следствие 2.3 и лемма 2.5 дают, что $\mathfrak{l}_0$ и с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_2$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2$ G -сопряжены. Из леммы 2.4 следует, что $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{h}_2$. По определению идеала $\mathfrak{h}_1$ имеем $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$.

Если $\mathfrak{h}_2$ – идеал в $\mathfrak{h}_1$, удовлетворяющий равенству $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$, то $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$, поскольку $\mathfrak{h}_2$ – идеал в $\mathfrak{h}$. Поэтому $\mathfrak{h}_1$ – существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$.

Из равенства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1) = \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ вытекает, что если $\mathfrak{h}_2$ – идеал в $\mathfrak{h}$, содержащий $\mathfrak{h}_1$, то $\mathfrak{h}_2$ является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}$, если и только если $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1$. Это завершает доказательство.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\mathfrak{h}$ – редуктивная алгебра Ли, V_1 – $\mathfrak{h}$ -модуль, V_2 – $\mathfrak{h}$ -подмодуль в V_1 , l_i – с.п.о.п. для V_i , $i = 1, 2$. Тогда подалгебра $l_1 \text{ Int}(\mathfrak{h})$ -сопряжена со с.п.о.п. для l_2 -модуля V_1/V_2 . В частности, если идеал в $\mathfrak{h}$, порожденный l_1 , совпадает с $\mathfrak{h}$, то же верно для l_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем инвариантное дополнение V'_2 к V_2 в V_1 . Тогда с точностью до $\text{Int}(\mathfrak{h})$ -сопряженности $l_1 = \mathfrak{h}_{v_1+v_2} = (\mathfrak{h}_{v_2})_{v_1}$, $l_2 = \mathfrak{h}_{v_2}$ для $v_1 \in V'_2$, $v_2 \in V_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Если $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$ – редуктивные подалгебры в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h}_1^{\text{ess}} \subset \mathfrak{h}_2^{\text{ess}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l_{0i} обозначает с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_i$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$. Из определения с.п.о.п. следует, что с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2$ $\text{Int}(\mathfrak{h}_2)$ -сопряжен подалгебре в l_{02} . Используя лемму 2.7, мы видим, что подалгебра $l_{01} \text{Int}(\mathfrak{h}_2)$ -сопряжена подалгебре в l_{02} . Остается применить предложение 2.6.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть $\mathfrak{h}$ – существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) пусть $\mathfrak{g}_0$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_0$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}_0$ и $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_0$ – эпиморфизм алгебр Ли, для которого $\mathfrak{h}$ -модуль $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0$ является подмодулем в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, тогда $\mathfrak{h}_0$ – существенная подалгебра в $\mathfrak{g}_0$;
- 2) проекция $\mathfrak{h}$ на любой идеал $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}_1$;
- 3) если подалгебра $\mathfrak{h}_0$ – идеал в $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ является существенной подалгеброй в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_0)/\mathfrak{h}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть следует из леммы 2.7 и характеристики существенных подалгебр, данной в предложении 2.6. Второе и третье утверждения являются частными случаями первого.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Предположим, что $\mathfrak{h}$ не содержит идеалов $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a}$ – простой некоммутативный идеал в $\mathfrak{h}$, для которого существуют такие различные идеалы $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}$, что проекция $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{g}_i$ ненулевая для всех i . Тогда

- 1) $\mathfrak{h}$ -модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ содержит $\mathfrak{h}$ -подмодуль, изоморфный $\mathfrak{a}^{\oplus k-1}$;
- 2) если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – существенная подалгебра, то $k \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кратность $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{h}$ -модулях $\mathfrak{g}_i$, $i = \overline{1, k}$, и $\mathfrak{h}$ равна 1. Поэтому кратность $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ не меньше чем k . Это доказывает первые два утверждения.

Предположим теперь, что подалгебра $\mathfrak{h}$ существенна, но $k \geq 3$. Тогда $\mathfrak{h}$ -модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ содержит подмодуль $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}$. С.п.о.п. для $\mathfrak{a}$ -модуля $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}$ тривиальна. В самом деле, с.п.о.п. для $\mathfrak{a}$ -модуля $\mathfrak{a}$ является картановской подалгеброй $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{a}$. С.п.о.п. для $\mathfrak{t}_0$ -модуля $\mathfrak{a}$ тривиальна, поскольку подалгебра $\mathfrak{t}_0$ коммутативна и представление $\mathfrak{t}_0$ в $\mathfrak{a}$ эффективно. Мы видим, что с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}$ проектируется тривиально на $\mathfrak{a}$. По лемме 2.7 то же выполняется для с.п.о.п. для $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Из предложения 2.6 вытекает, что подалгебра $\mathfrak{h}$ не существенна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Идеал, порожденный подалгеброй $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{h}$, совпадает с прямой суммой проекции $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ и всех простых идеалов $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$, для которых проекция $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{h}_0$ ненулевая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧАСТИ (а) ТЕОРЕМЫ 1.3. Для начала мы докажем, что $\mathfrak{h}^{\text{ess}}$ содержит любой идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, который является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{l}_0$ – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Подалгебра $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$ является с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ (леммы 2.4, 2.5). Применим предложение 2.6 к паре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$. Мы видим, что не существует собственного идеала в $\mathfrak{h}_1$, содержащего $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$. Поэтому $\mathfrak{h}_1$ является идеалом в $\mathfrak{h}$, порожденным подалгеброй $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$. Поскольку идеал $\mathfrak{h}^{\text{ess}} \subset \mathfrak{h}$ порожден подалгеброй $\mathfrak{l}_0$, то $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}^{\text{ess}}$.

Пусть теперь $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$. Обозначим через $\mathfrak{l}_{0i}$, $i = 1, 2$, с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_i$ -модуля $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i$. Тогда $\mathfrak{l}_{01} \oplus \mathfrak{l}_{02}$ является с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Из предложения 2.6 вытекает, что $\mathfrak{h}^{\text{ess}} = \mathfrak{h}_1^{\text{ess}} \oplus \mathfrak{h}_2^{\text{ess}}$.

Для того чтобы сделать описание существенных подалгебр более удобным, нам потребуется понятие *насыщения* существенной подалгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{h}}$ прообраз центра $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ при естественной проекции $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. По определению *насыщение* подалгебры $\mathfrak{h}$ – это $\tilde{\mathfrak{h}}^{\text{ess}}$. Мы обозначим насыщение $\mathfrak{h}$ через $\mathfrak{h}^{\text{sat}}$. Мы говорим, что подалгебра $\mathfrak{h}$ *насыщена*, если $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\text{sat}}$.

Предположим, что подалгебра $\mathfrak{h}$ существенна. Тогда в силу следствия 2.8 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^{\text{sat}}$. Понятно, что $\mathfrak{h}^{\text{sat}}$ является прямой суммой $\mathfrak{h}$ и некоторого коммутативного идеала. Пусть $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0^1$ суть с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^{\text{sat}}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}^{\text{sat}}$ соответственно. По леммам 2.4, 2.5 $\mathfrak{l}_0^1 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{l}_0$. Это позволяет нам свести классификацию произвольных существенных подалгебр к классификации насыщенных (вместе с соответствующими с.п.о.п.). Именно, пусть $\mathfrak{h}$ – насыщенная подалгебра. Следующие условия эквивалентны:

- 1) идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, содержащий $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}$;
- 2) подалгебра $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$, являющаяся с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$, проектируется нетривиально на любой простой некоммутативный идеал в $\mathfrak{h}$.

В самом деле, $\mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{h}_1$ проектируется сюръективно на $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, поскольку $\mathfrak{l}_0$ проектируется сюръективно на $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Эквивалентность двух условий следует теперь из замечания 2.11. Поэтому имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех существенных подалгебр $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$ с $\mathfrak{h}_1^{\text{sat}} = \mathfrak{h}$ и множеством всех (алгебраических) подалгебр $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{l}_0/([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{l}_0) \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, для которых прообраз подалгебры $\mathfrak{t}_1$ в $\mathfrak{l}_0$ проектируется нетривиально на любой простой некоммутативный идеал в $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Это соответствие задается посредством $\mathfrak{h}_1 \mapsto \mathfrak{h}_1/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

Заметим также, что если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$, то $\mathfrak{h}^{\text{sat}} = \mathfrak{h}_1^{\text{sat}} \oplus \mathfrak{h}_2^{\text{sat}}$.

Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ является *первичной*, если $\mathfrak{h}$ насыщена и неразложима. Классификация существенных подалгебр сводится к задаче нахождения всех первичных подалгебр с последующим вычислением подалгебр $\mathfrak{l}_0$ для всех первичных подалгебр. Понятно, что любая первичная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ содержит $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Поэтому достаточно классифицировать первичные подалгебры в полупростых алгебрах.

§ 3. Индексы подалгебр и модулей

Мы используем обозначения § 2.

В предыдущем параграфе мы заметили тесную связь между существенными подалгебрами и с.п.о.п. для определенных модулей. При изучении с.п.о.п.

большую роль играет понятие *индекса* модуля над простой алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{h}$ – редуктивная алгебра Ли, V – $\mathfrak{h}$ -модуль (см. § 6). Определим инвариантную симметрическую билинейную форму $(\cdot, \cdot)_V$ на $\mathfrak{h}$ формулой $(x, y)_V = \text{tr}_V(xy)$. Если модуль V эффективен, то форма $(\cdot, \cdot)_V$ невырождена. Предположим, что подалгебра $\mathfrak{h}$ проста. Тогда инвариантная симметрическая билинейная форма определена однозначно с точностью до умножения на константу (см., например, [4]). *Индекс* $\mathfrak{h}$ -модуля V – это по определению $(x, y)_V / (x, y)_{\mathfrak{h}}$. Последняя дробь не зависит от выбора x, y с $(x, y)_{\mathfrak{h}} \neq 0$. Мы обозначаем индекс через $l_{\mathfrak{h}}(V)$.

Следующее предложение является непосредственным обобщением результатов из [4], [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть $\mathfrak{h}$ – редуктивная алгебра Ли, V – эффективный $\mathfrak{h}$ -модуль. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_k$ – разложение алгебры $\mathfrak{h}$ в прямую сумму центра и простых некоммутативных идеалов. Тогда*

- 1) *если с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля V нетривиален, то $l_{\mathfrak{h}_i}(V) \leq 1$ для некоторого индекса i ;*
- 2) *если $l_{\mathfrak{h}_i}(V) \geq 1$ для всех i , то с.п.о.п. содержится в $\bigoplus_{i, l_{\mathfrak{h}_i}(V)=1} \mathfrak{h}_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{l}_0$ – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля V . Это алгебраическая подалгебра в $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{l}_0$ содержит нильпотентный элемент, то оба утверждения следуют из доказательства основной теоремы в [4]. Таким образом, мы можем предположить, что $l_{\mathfrak{h}_i}(V) \geq 1$ для всех i и что $\mathfrak{l}_0$ содержит рациональный полупростой элемент x (слово “рациональный” означает: имеющий рациональные собственные значения на любом $\mathfrak{h}$ -модуле). Положим $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$, где $x_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, $x_i \in \mathfrak{h}_i$ для $i = \overline{1, k}$. Из [4; лемма 3] следует, что

$$\sum_{i=0}^k (x_i, x_i)_V = (x, x)_V \leq (x, x)_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^k (x_i, x_i)_{\mathfrak{h}_i}.$$

Отсюда получаем оба утверждения предложения (отметим, что $(x_0, x_0)_V \neq 0$ для всех рациональных элементов $x_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, поскольку модуль V эффективен).

Нашей следующей целью является описание всех редуктивных подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, для которых $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \leq 1$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$. Для этого нам нужно понятие индекса Дынкина.

До конца настоящего параграфа $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ обозначают простые алгебры Ли, ι – вложение $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Мы зафиксируем такую инвариантную невырожденную симметрическую билинейную форму $K_{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{g}$, что $K_{\mathfrak{g}}(\alpha^{\vee}, \alpha^{\vee}) = 2$ для корня $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ максимальной длины. Аналогично определим форму $K_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$. Напомним, что *индекс Дынкина* вложения $\iota: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ это по определению $K_{\mathfrak{g}}(\iota(x), \iota(x)) / K_{\mathfrak{h}}(x, x)$ (последняя дробь не зависит от выбора элемента $x \in \mathfrak{h}$ с $K_{\mathfrak{h}}(x, x) \neq 0$). Для краткости мы обозначаем индекс Дынкина вложения ι через $i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Оказывается, что $i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ является положительным целым числом (см. [6]).

Через $k_{\mathfrak{g}}$ обозначим число $(\alpha^{\vee}, \alpha^{\vee})_{\mathfrak{g}}$ для корня $\alpha \in \mathfrak{g}$ максимальной длины. Аналогичным образом мы определим $k_{\mathfrak{h}}$. Непосредственно из определения следует, что

$$k_{\mathfrak{g}} = \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{g})} \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle^2 = 8 + \#\{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}) \mid \beta \neq \pm\alpha, (\alpha, \beta) \neq 0\}.$$

Числа $k_{\mathfrak{g}}$ для всех простых алгебр Ли приведены в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3. Числа $k_{\mathfrak{g}}$

$\mathfrak{g}$	A_l	B_l	C_l	D_l	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$k_{\mathfrak{g}}$	$4l + 4$	$8l - 4$	$4l + 4$	$8l - 8$	48	72	120	36	16

Анализируя возможные включения между простыми алгебрами Ли, мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. Имеем $k_{\mathfrak{h}} < k_{\mathfrak{g}}$.

Из определения индекса $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ мы видим, что

$$l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \frac{i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})k_{\mathfrak{g}}}{k_{\mathfrak{h}}} - 1. \quad (3.1)$$

Из (3.1) и леммы 3.2 следует, что неравенство $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \leq 1$ влечет $i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = 1$.

В таблице 4 мы перечисляем все (с точностью до сопряжения автоморфизмом) простые подалгебры $\mathfrak{h}$ в классических простых алгебрах $\mathfrak{g}$ с $i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = 1$.

ТАБЛИЦА 4. Простые подалгебры $\mathfrak{h}$ в классических алгебрах $\mathfrak{g}$ с $i(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = 1$

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{sl}_n, n \geq 2$	$\mathfrak{sl}_k, k \leq n$
$\mathfrak{sl}_n, n \geq 4$	$\mathfrak{sp}_{2k}, 2 \leq k \leq \frac{n}{2}$
$\mathfrak{so}_n, n \geq 7$	$\mathfrak{so}_k, k \leq n, k \neq 4$
$\mathfrak{so}_n, n \geq 7$	$\mathfrak{sl}_k, k \leq \frac{n}{2}$
$\mathfrak{so}_n, n \geq 8$	$\mathfrak{sp}_{2k}, 2 \leq k \leq \frac{n}{4}$
$\mathfrak{so}_n, n \geq 7$	G_2
$\mathfrak{so}_n, n \geq 9$	$\mathfrak{spin}_7$
$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}, k \leq n$

В следующем предложении мы описываем простые вложения $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ при условии $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \leq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Собственные простые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ (с точностью до сопряженности в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$), для которых выполняется $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) < 1$ (соответственно $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$), суть в точности приведенные в таблице 5 (соответственно в таблице 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 3.3 проверяется непосредственно с помощью таблицы 3, равенства (3.1), таблицы 4 (для классических $\mathfrak{g}$) или результатов классификации в [6] (для исключительных $\mathfrak{g}$).

В последнем столбце таблицы 6 приведена нетривиальная часть $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Здесь τ обозначает тавтологическое представление классической алгебры Ли.

ТАБЛИЦА 5. Простые подалгебры $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ с $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) < 1$

№	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
1	$\mathfrak{sl}_n, n > 1$	$\mathfrak{sl}_k, \frac{n}{2} < k < n$
2	$\mathfrak{sl}_{2n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$
3	$\mathfrak{sl}_{2n+1}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2n}$
4	$\mathfrak{sp}_{2n}, n \geq 2$	$\mathfrak{sp}_{2k}, \frac{n}{2} \leq k < n$
5	$\mathfrak{so}_n, n \geq 7$	$\mathfrak{so}_k, \frac{n+2}{2} < k < n, k \neq 4$
6	$\mathfrak{so}_{2n}, n \geq 5$	$\mathfrak{sl}_n$
7	$\mathfrak{so}_{2n+1}, n \geq 3$	$\mathfrak{sl}_n$
8	$\mathfrak{so}_n, 9 \leq n \leq 11$	$\mathfrak{so}_7$
9	$\mathfrak{so}_n, 7 \leq n \leq 9$	G_2
10	G_2	A_2
11	F_4	B_4
12	F_4	D_4
13	F_4	B_3
14	E_6	F_4
15	E_6	D_5
16	E_6	B_4
17	E_7	E_6
18	E_7	D_6
19	E_8	E_7

Теперь мы выведем два следствия из предложения 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – такая полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$, что $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1) < 1$ для любого простого идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$. Если подалгебра $\mathfrak{h}$ не проста, то $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sp}_{4n}$, $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия проверяется непосредственно с помощью таблицы 5.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ – такая полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$, что $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1) = 1$ для любого простого идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$. Алгебра $\mathfrak{h}$ не проста в точности в следующих трех случаях:

- 1) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_{2n}, n > 1, \mathfrak{h} \cong \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n$;
- 2) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sp}_{4n+2}, \mathfrak{h} \cong \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n}$;
- 3) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sp}_6, \mathfrak{h} \cong \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия проверяется непосредственно с помощью таблицы 6.

ТАБЛИЦА 6. Простые подалгебры $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ с $l_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$

№	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_+$
1	$\mathfrak{sl}_{2n}, n > 1$	$\mathfrak{sl}_n$	$n(\tau + \tau^*)$
2	$\mathfrak{sl}_{2n}, n \geq 3$	$\mathfrak{sp}_{2n-2}$	$R(\pi_2) + 4\tau$
3	$\mathfrak{sp}_{4n+2}, n \geq 1$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$(n+2)\tau$
4	$\mathfrak{so}_{2n}, n \geq 4$	$\mathfrak{so}_{n+2}$	$(n-2)\tau$
5	$\mathfrak{so}_{2n}, n \geq 4$	$\mathfrak{sl}_{n-1}$	$\bigwedge^2 \tau + \bigwedge^2 \tau^* + 2(\tau + \tau^*)$
6	$\mathfrak{so}_{12}$	$\mathfrak{so}_7$	$\tau + 4R(\pi_3)$
7	$\mathfrak{so}_{10}$	G_2	$4R(\pi_1)$
8	G_2	A_1	4τ
9	E_6	D_4	$2(\tau + R(\pi_3) + R(\pi_4))$
10	E_6	A_5	$2\bigwedge^3 \tau$
11	E_7	F_4	3τ
12	E_7	B_5	$\tau + 2R(\pi_5)$

§ 4. Классификация первичных подалгебр

Этот параграф является центральным в статье. Здесь $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – первичная (т.е. насыщенная и неразложимая) подалгебра в $\mathfrak{g}$ и l_0 – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеет место в точности одна из следующих возможностей (а) или (б).*

- (а) Алгебра $\mathfrak{g}$ проста, $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 0$ и $l_{\mathfrak{h}_i}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i) = 1$ для любого простого идеала $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{h}$.
- (б) Для любого простого идеала $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ выполняется в точности одно из следующих условий:
 - (b1) существует простой некоммутативный идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, содержащийся в $\mathfrak{g}_1$, для которого $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1) < 1$;
 - (b2) существует простой некоммутативный идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, содержащийся в сумме $\mathfrak{g}_1$ с еще одним простым идеалом в $\mathfrak{g}$ и проектирующийся на $\mathfrak{g}_1$ изоморфно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что возможности (а), (б) не могут иметь место одновременно. То же верно для условий (b1), (b2) (для данного идеала $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$).

Предположим, что (б) не имеет места. В этом случае из следствия 2.10 вытекает, что существует такой простой идеал $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$, что

- 1) $\mathfrak{g}_1$ не содержит простой идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ с $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1) < 1$;
- 2) не существует простых идеалов $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$, проектирующихся сюръективно на $\mathfrak{g}_1$.

Через π_2 обозначим ортогональную проекцию $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1^\perp$. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \pi_2^{-1}(\pi_2(\mathfrak{h}))$. Отметим, что $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$. Обозначим через $\mathfrak{h}_0$ ядро представления $\mathfrak{h}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}$. Понятно,

что $\mathfrak{h}_0$ является идеалом в $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1^\perp$. Положим $\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_0$, $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$. Из того что $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}$ – это $\mathfrak{h}$ -подмодуль в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, следует, что $\hat{\mathfrak{h}}$ – существенная подалгебра в $\hat{\mathfrak{g}}$ (по лемме 2.7). Отметим, что проекция любого идеала алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{g}_1$ не совпадает с $\{0\}$, $\mathfrak{g}_1$ по построению.

Предположим, что проекция простого идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \hat{\mathfrak{h}}$ на некоторый простой идеал $\mathfrak{g}_2 \subset \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}_2 \neq \mathfrak{g}_1$, ненулевая. Тогда $\mathfrak{h}_1$ является $\mathfrak{h}_1$ -подмодулем в $\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_1$. Если, кроме того, $l_{\mathfrak{h}_1}(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_1) \leq 1$, то $\mathfrak{h}_1$ -модуль $\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_1$ является прямой суммой $\mathfrak{h}_1$ и тривиального модуля, ибо $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{h}_1) = 1$. Поэтому $\mathfrak{g}_1 = \pi_1(\mathfrak{h}_1) + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\pi_1(\mathfrak{h}_1))$. Согласно последнему равенству $\pi_1(\mathfrak{h}_1)$ – идеал в $\mathfrak{g}_1$. Получили противоречие с условием 2), приведенным выше. Поэтому $l_{\mathfrak{h}_1}(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_1) > 1$.

Далее, в силу условия 1) для любого простого некоммутативного идеала $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, содержащегося в $\mathfrak{g}_1$, имеет место неравенство $l_{\mathfrak{h}_1}(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_1) \geq 1$. Из предложения 3.1 следует, что $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{h}}) = 0$ и $l_{\mathfrak{h}_1}(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}_1) = 1$ для всех простых идеалов $\mathfrak{h}_1 \subset \hat{\mathfrak{h}}$. Мы выводим отсюда, что все простые идеалы алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ содержатся в $\mathfrak{g}_1$. Поэтому $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_1$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{h}$ неразложима, имеет место возможность (a).

Все первичные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, удовлетворяющие условию (a) предложения 4.1, могут быть просто описаны: мы классифицируем их в предложении 4.5. Классификация первичных подалгебр $\mathfrak{h}$, удовлетворяющих условию (b), сложнее. Следующее предложение описывает первичные подалгебры, обладающие идеалом специального вида. В предложении 4.6 мы увидим, что практически все простые идеалы $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, содержащиеся в простом идеале $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ и удовлетворяющие неравенству $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1) < 1$, имеют этот вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathfrak{h}_1$ – полупростой идеал в $\mathfrak{h}$, содержащийся в идеале $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$. Положим $\hat{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{h}_1)$ и обозначим через $\mathfrak{f}$ с.п.о.п. для $\hat{\mathfrak{h}}_1$ -модуля $\mathfrak{g}_1/\hat{\mathfrak{h}}_1$. Предположим, что $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{h}_1$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{h}$ – идеал в $\hat{\mathfrak{h}}_1$, порожденный подалгеброй $\mathfrak{l}_0$.

Для доказательства этого предложения нам нужны следующие леммы.

ЛЕММА 4.3. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{f})$ – тройка редуктивных алгебр Ли, для которой $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, а $\mathfrak{h}$ содержит идеал в $\mathfrak{g}$, порожденный подалгеброй $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$. Обозначим через $\mathfrak{f}_0$ с.п.о.п. для $\mathfrak{f}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{f}_0$ является пересечением $\mathfrak{f}$ с максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{g}$, содержащемся в $\mathfrak{h}$. В частности, $\mathfrak{h}$ содержит идеал алгебры $\mathfrak{g}$, порожденный подалгеброй $\mathfrak{f}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму в случае, когда $\mathfrak{h}$ не содержит идеала алгебры $\mathfrak{g}$. В этом случае надо проверить, что $\mathfrak{f}_0 = \{0\}$. Алгебра $\mathfrak{f}$ коммутативна. Поэтому $\mathfrak{f}_0$ совпадает с ядром неэффективности $\mathfrak{f}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Мы видим, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}_0)$. Учитывая то, что подалгебра $\mathfrak{h}$ устойчива относительно $\text{ad}(\mathfrak{f}_0)$, мы получаем, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0] \subset \mathfrak{h}$. Так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}_0) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0]$ и $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}_0), [\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0]] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0]$, то подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная подпространством $[\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0]$, является идеалом. Поэтому $\mathfrak{h}$ содержит идеал из $\mathfrak{g}$, порожденный $[\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0]$. По нашему предположению $\mathfrak{h}$ не содержит идеалов из $\mathfrak{g}$. Отсюда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_0] = \{0\}$. Аналогично, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Таким образом, $\mathfrak{f}_0 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

ЛЕММА 4.4. Для насыщенной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ выполняется равенство $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^{\text{sat}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 2) следствия 2.9 $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}_0$ коммутативна, с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_0$ -модуля $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0$ является ядром неэффективности этого модуля. Поэтому $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{h}}$ (соответственно через $\hat{\mathfrak{h}}$) прообраз $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$ (соответственно $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$) при естественной проекции. По определению $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^{\text{sat}} = \tilde{\mathfrak{h}}^{\text{ess}}$. Заметим, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$. Поэтому $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \hat{\mathfrak{h}}$. Включения $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{h}} \subset \hat{\mathfrak{h}}$ дают $\mathfrak{h}^{\text{ess}} \subset \tilde{\mathfrak{h}}^{\text{ess}} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^{\text{sat}} \subset \hat{\mathfrak{h}}^{\text{ess}}$ (см. следствие 2.8). Наконец, заметим, что $\mathfrak{h}^{\text{ess}} = \mathfrak{h}$, $\hat{\mathfrak{h}}^{\text{ess}} = \mathfrak{h}$, поскольку подалгебра $\mathfrak{h}$ насыщена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.2. Обозначим через π_1, π_2 ортогональные проекции $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1^\perp$.

Шаг 1. Докажем, что любой простой некоммутативный идеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ содержится либо в $\mathfrak{g}_1$, либо в $\mathfrak{g}_1^\perp$. Предположим противное. Положим $\mathfrak{g}_0 = \pi_2^{-1}(\pi_2(\mathfrak{a}))$. Это полупростая алгебра Ли, изоморфная $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{a}$. Подпространство $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{a} \oplus \pi_1(\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_0$ является подалгеброй, ибо $[\mathfrak{a}, \pi_1(\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{h})] = 0$. Имеется эпиморфизм φ :

$$\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_0, \quad \varphi|_{\mathfrak{a}} = \text{id}, \quad \varphi|_{\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{h}} = \pi_1.$$

$\mathfrak{h}$ -модуль $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0$ изоморфен $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1/\pi_1(\mathfrak{h}_1)$. Поэтому $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0$ является подмодулем в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Из утверждения 1) следствия 2.9 следует, что $\mathfrak{h}_0$ является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}_0$.

Обозначим через f_1 с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_0$ -модуля $\mathfrak{g}_1/\hat{\mathfrak{h}}_1 \cong \mathfrak{g}_0/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1) \hookrightarrow \mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0$. Покажем теперь, что тройка $(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{h}_0, f_1)$ удовлетворяет условиям леммы 4.3. По построению $\mathfrak{h}_1$ является идеалом в $\mathfrak{h}_0$. Поэтому $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1)$ и $\mathfrak{h}_1$ – идеал алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1)$, содержащийся в $\mathfrak{h}_0$. Ограничение гомоморфизма $\pi_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1$ на $\mathfrak{h}_0$ – это вложение, и $\pi_1(\mathfrak{h}_0) = \pi_1(\mathfrak{h})$. Подалгебра $\pi_1(f_1) \subset \pi_1(\mathfrak{h})$ является с.п.о.п. для $\pi_1(\mathfrak{h})$ -модуля $\mathfrak{g}_1/\hat{\mathfrak{h}}_1$. Из леммы 2.4 следует, что $\pi_1(f_1) \subset \text{Ad}(g)f$ для некоторого элемента $g \in \text{Int}(\hat{\mathfrak{h}}_1)$. Поэтому $[f_1, f_1] \subset \mathfrak{h}_1$. Таким образом, мы проверили, что тройка $(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{h}_0, f_1)$ удовлетворяет условиям леммы 4.3.

Пусть f_0 – с.п.о.п. для f_1 -модуля $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1)/\mathfrak{h}_0$. По лемме 2.7 f_0 является также с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_0$ -модуля $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0$. Покажем, что проекция f_0 на $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_1^\perp$ ненулевая. Предположим противное. Тогда $f_0 \subset \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a}^\perp$. Поэтому проекция f_0 на $\mathfrak{a}$ нулевая. Поскольку $\mathfrak{h}_0$ является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}_0$, получаем противоречие. Но $\mathfrak{g}_1^\perp \cap \mathfrak{g}_0$ – это идеал алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1)$. По лемме 4.3, примененной к $(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{h}_0, f_1)$, имеем $\mathfrak{g}_1^\perp \cap \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}_0$, что невозможно.

Шаг 2. По шагу 1

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = ([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{g}_1^\perp) \cap ([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{g}_1).$$

По лемме 4.4 $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1^\perp) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1)$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{h}$ неразложима, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$. Обозначим через f_1 с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\hat{\mathfrak{h}}_1$. Заметим, что подалгебра f_1 сопряжена относительно $\text{Int}(\hat{\mathfrak{h}}_1)$ подалгебре в f . Поэтому $[f_1, f_1] \subset \mathfrak{h}_1$ и тройка $(\hat{\mathfrak{h}}_1, \mathfrak{h}, f_1)$ удовлетворяет требованиям леммы 4.3. С.п.о.п. для f_1 -модуля $\hat{\mathfrak{h}}_1/\mathfrak{h}$ сопряжен относительно $\text{Int}(\mathfrak{h})$ с l_0 . Применяя лемму 4.3, мы видим, что $\mathfrak{h}$ содержит идеал в $\hat{\mathfrak{h}}_1$, порожденный l_0 . Поскольку подалгебра $\mathfrak{h}$ существенна, она совпадает с этим идеалом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Для пары $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ удовлетворяет условию (а) предложения 4.1 и $\mathfrak{h}$ является первичной подалгеброй в $\mathfrak{g}$;
- 2) $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_{2n}), (\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sp}_6), (\mathfrak{so}_{n+2}, \mathfrak{so}_{2n}), (A_5, E_6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{h}$ – существенная подалгебра в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию (а) предложения 4.1. Заметим, что $\mathfrak{h}^{\text{sat}}$ также удовлетворяет этому условию. Поэтому алгебра $\mathfrak{h}^{\text{sat}}$ полупроста. Отсюда $\mathfrak{h}^{\text{sat}} = \mathfrak{h}$ и подалгебра $\mathfrak{h}$ первична.

Предположим сначала, что алгебра $\mathfrak{h}$ непроста. Тогда $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ – это одна из пар, перечисленных в следствии 3.5.

Обозначим через $\tau_1, \dots, \tau_i$ тавтологические представления идеалов алгебры $\mathfrak{h}$ ($i = 2$ в случаях 1), 2) из следствия 3.5 и $i = 3$ в случае 3)).

Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$, то нетривиальная часть представления алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – это $\tau_1 \otimes \tau_2 + \tau_1^* \otimes \tau_2^*$. С.п.о.п. для представления $\tau_1 \otimes \tau_2$ есть подалгебра $\mathfrak{sl}_n \subset \mathfrak{h}$, вложенная диагонально. Ограничение представления $\tau_1^* \otimes \tau_2^*$ на эту подалгебру изоморфно прямой сумме присоединенного и тривиального представлений. Поэтому с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ нетривиальна и ее проекции на оба простых идеала алгебры $\mathfrak{h}$ ненулевые. По предложению 2.6 подалгебра $\mathfrak{h}$ существенна.

Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$. Представление $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ изоморфно $\tau_1 \otimes \tau_2 + \tau_2 \otimes \tau_3 + \tau_3 \otimes \tau_1$. С.п.о.п. l_1 для представления $\tau_2 \otimes \tau_3$ изоморфен $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$, где второй множитель вложен диагонально в сумму двух идеалов $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{h}$. Ограничение представления $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ на l_1 изоморфно $2\tau_1 \otimes \tau_2$. Согласно вычислениям в предыдущем случае с.п.о.п. для этого представления одномерен и проектируется нетривиально на оба простых идеала алгебры l_1 . Поэтому подалгебра $\mathfrak{h}$ существенна.

В оставшемся случае мы должны показать, что с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ тривиален. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{4n+2}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n}$. Нетривиальная часть представления алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – это $\tau_1 \otimes \tau_2 + 2(\tau_1 + \tau_2)$. С.п.о.п. l_1 для представления $\tau_1 \otimes \tau_2$ – это прямая сумма n экземпляров алгебры $\mathfrak{sl}_2$, вложенной диагонально в $\mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n}$ (см. [7]). Легко видеть, что ограничение представления $2(\tau_1 \otimes \tau_2)$ на l_1 имеет тривиальную с.п.о.п.

Если алгебра $\mathfrak{h}$ проста, то доказательство следует из таблицы 6 и классификации, полученной в [5].

До конца настоящего параграфа мы будем предполагать, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ – ее первичная подалгебра, удовлетворяющая условию (b) предложения 4.1. Последнее означает, что для любого простого идеала $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ существует простой некоммутативный идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, либо содержащийся в $\mathfrak{g}_1$ и удовлетворяющий неравенству $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1) < 1$, либо проектирующийся на $\mathfrak{g}_1$ изоморфно и содержащийся в сумме $\mathfrak{g}_1$ с другим простым идеалом алгебры $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть $\mathfrak{g}_1$ – простой идеал в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}_1$ – простой некоммутативный идеал в $\mathfrak{h}$, для которых $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$, и $l_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1) < 1$. Если $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1$ не удовлетворяют требованию предложения 4.2, то $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{sp}_{2m}$, $m \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\hat{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{h}_1)$ и обозначим через l_1 с.п.о.п. для $\hat{\mathfrak{h}}_1$ -модуля $\mathfrak{g}_1/\hat{\mathfrak{h}}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{g}_1 \not\cong \mathfrak{sp}_{2m}$, $[l_1, l_1]$ не содержится в $\mathfrak{h}_1$. По следствию 3.4 если $\mathfrak{h}_2$ – такой идеал в $\widehat{\mathfrak{h}}_1$, что $l_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_2) < 1$, то $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1$. Поэтому из леммы 2.4 и пункта 1) предложения 3.1 следует, что $[l_1, l_1]$ проектируется на $\mathfrak{h}_1$ инъективно.

По следствию 2.8 $[l_1, l_1]$ совпадает с коммутантом некоторой подалгебры Леви в $\mathfrak{g}_1$. Зафиксируем простой идеал $\mathfrak{f} \subset [l_1, l_1]$, и пусть $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_k$ – это все простые идеалы в $\widehat{\mathfrak{h}}_1$, для которых проекция $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{h}_i$ ненулевая, или, эквивалентно, инъективная. Тогда $i(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \sum_j i(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}_j) i(\mathfrak{h}_j, \mathfrak{g})$ (см. [6]). Значит, для любого простого идеала $\mathfrak{f} \subset [l_1, l_1]$, не содержащегося в $\mathfrak{h}_1$, выполняется неравенство $i(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \geq 2$. Отсюда следует, что $\mathfrak{g}_1 \not\cong \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_{2n}, E_l$, поскольку индекс Дынкина любого простого идеала подалгебры Леви в $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_{2n}, E_l$ равен 1. Если $\mathfrak{g}_1 \cong F_4, G_2$, то из таблицы 7 следует, что $[\widehat{\mathfrak{h}}_1, \widehat{\mathfrak{h}}_1] = \mathfrak{h}_1$. Остается рассмотреть случай $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}_{2n+1}$, $n \geq 3$. Мы можем предположить, что алгебра $[\widehat{\mathfrak{h}}_1, \widehat{\mathfrak{h}}_1]$ не является простой. Значит, мы должны рассмотреть лишь случаи 5, 8 ($n = 11$).

Рассмотрим случай 5 из таблицы 7. В этом случае $\widehat{\mathfrak{h}}_1$ -модуль $\mathfrak{g}/\widehat{\mathfrak{h}}_1$ изоморфен тензорному произведению тавтологических $\mathfrak{so}_k$ - и $\mathfrak{so}_{2n+1-k}$ -модулей. Согласно [7] $l_1 \subset \mathfrak{so}_k$.

В случае 8 алгебра $\widehat{\mathfrak{h}}_1$ имеет два простых идеала и вложена (с точностью до сопряженности) в $\mathfrak{so}_8 \times \mathfrak{so}_3$. По предыдущему абзацу проекция подалгебры l_1 на идеал $\mathfrak{so}_3 \subset \widehat{\mathfrak{h}}_1$ нулевая.

Напомним, что *сложностью* неприводимого G -многообразия X называется коразмерность общей B -орбиты, или, эквивалентно, степень трансцендентности $K(X)^B$. Мы обозначаем сложность многообразия X через $c_G(X)$. Нормальное G -многообразие X сложности 0 называется *сферическим*. Алгебраическая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется сферической, если многообразие G/H сферическое.

В дальнейшем мы используем следующее стандартное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Пусть $H \subset \tilde{H} \subset G$ – связные редуктивные алгебраические группы, для которых $\tilde{H} \subset N_G(H)$ и $\tilde{H}/H$ тор. Отметим, что группа $\tilde{H}/H$ действует на G/H G -автоморфизмами. Тогда представление группы $\tilde{H}/H$ в $K[G/H]^U$ эффективно. Далее, следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}_G(G/\tilde{H}) + \dim \tilde{H}/H$;
- (2) $c_G(G/H) = c_G(G/\tilde{H})$;
- (3) действие группы $\tilde{H}/H$ на $K(G/H)^B$ тривиально;
- (4) для любого старшего веса λ группа $\tilde{H}/H$ действует на $K[G/H]_{(\lambda)}^U$ умножением на характер;
- (5) для любого старшего веса λ группа $\tilde{H}/H$ действует на $V(\lambda)^H$ умножением на характер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если элемент $h \in \tilde{H}$ действует тривиально на $K[G/H]^U$, то он действует тривиально и на $K[G/H]$, поскольку h действует как G -автоморфизм, а G -модуль $K[G/H]$ порожден $K[G/H]^U$. Отсюда следует, что $h \in H$.

Эквивалентность условий (4) и (5) следует из двойственности Фробениуса. Эквивалентность условий (2) и (3) следует из равенства $K(G/\tilde{H})^B = (K(G/H)^B)^{\tilde{H}/H}$. Следствие (4) $\Rightarrow$ (3) тавтологично. Согласно [3; теорема 3.14] $K[G/H]_{\lambda}^U$ – конечномерное векторное пространство. Поэтому оно порождается

векторами, собственными для $\tilde{H}/H$. Для доказательства импликации (3) $\Rightarrow$ (4) остается заметить, что $f_1/f_2 \in K(G/H)^B$ для любых $f_1, f_2 \in K[G/H]_{(\lambda)}^U$.

Остается доказать эквивалентность (1) и (2).

Из результатов работы [2; гл. 7] имеем

$$\begin{aligned} c_G(G/H) &= \frac{1}{2}(2(\dim G - \dim H) - (\dim G - \dim L_{0,G,G/H}) - \text{rk}_G(G/H)) \\ &= \frac{1}{2}(\dim G + \dim L_{G,G/H}) - \dim H - \text{rk}_G(G/H). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Коммутанты алгебр $\mathfrak{l}_{G,G/H}$, $\mathfrak{l}_{G,G/\tilde{H}}$ сопряжены коммутантам с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и $\tilde{\mathfrak{h}}$ -модуля $\mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{h}}$ соответственно. Поскольку два последних коммутанта совпадают, мы видим, что $L_{G,G/H} = L_{G,G/\tilde{H}}$ и что

$$c_G(G/H) - c_G(G/\tilde{H}) = \dim \tilde{H}/H + \text{rk}_G(G/\tilde{H}) - \text{rk}_G(G/H).$$

Эквивалентность (1) и (2) доказана.

В следующей таблице 7 мы приводим нормализаторы $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ подалгебр $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$, перечисленных в таблице 5 (в столбце $\mathfrak{h}$), $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ -модули $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ и идеалы алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$, порожденные своими пересечениями с $\mathfrak{l}_1$, где $\mathfrak{l}_1$ обозначает с.п.о.п. для $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$.

В первом и втором столбцах таблицы 7 даны номер соответствующей подалгебры $\mathfrak{h}_1$ в таблице 5 и подалгебра $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$. Первым идеалом алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ во втором столбце является $\mathfrak{h}_1$. Во всех случаях $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)) \leq 1$. Если выполняется равенство, то, сопрягая при необходимости $\mathfrak{h}_1$ элементом группы G , мы можем считать, что подпространство $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))$ содержится в $\mathfrak{t}$ и натянута на двойственный фундаментальный вес.

Представление алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ записано как сумма неприводимых подпредставлений. Порядок неприводимых представлений простых подалгебр в тензорных произведениях совпадает с порядком простых идеалов алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ в столбце 2. Нижний индекс равен константе, умножением на которую элемент из $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))$, приведенный в столбце 2 в треугольных скобках, действует на соответствующий неприводимый модуль. Через $\tau_1, \dots, \tau_k$ мы обозначаем тавтологические представления простых идеалов алгебры $[\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)]$, а через 1 одномерное тривиальное представление.

Идеалы алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$, порожденные своими пересечениями с $\mathfrak{l}_1$, перечислены в столбце 4. Во всех случаях, кроме случая 4, любая первичная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, для которой $\mathfrak{h}_1$ является идеалом в $\mathfrak{h}$, совпадает с одним из перечисленных идеалов (предложения 4.2, 4.6). Такой идеал задан последовательностью чисел. Последовательности разделяются символом “;”. Последовательность $i_1, \dots, i_j$ отвечает сумме идеалов с номерами $i_1, \dots, i_j$. Здесь номер идеала – это его позиция в столбце 2. К примеру, для $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k} \times \langle \pi_k^\vee \rangle$ идеалом, соответствующим последовательности “1, 3”, является $\mathfrak{sl}_k \times \langle \pi_k^\vee \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Идеалы $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$, содержащие $\mathfrak{h}_1$ и порожденные $\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{h}$, суть в точности перечисленные в таблице 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ проста или $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ -модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ неприводим, то используем результаты работ [5], [7] соответственно. Отметим, что в случае 17 в работе [7] допущена ошибка. Покажем, что с.п.о.п. содержится в D_6 .

ТАБЛИЦА 7. Представления $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$

№	$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$	$\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$	$\mathfrak{h}$
1	$\mathfrak{sl}_k \times \mathfrak{sl}_{n-k} \times \langle \pi_k^\vee \rangle$	${}_1\tau_1 \otimes \tau_2^* + {}_{-1}\tau_1^* \otimes \tau_2$	$1 (k \neq \frac{n+1}{2}); 1, 2;$ $1, 3 (k \neq n/2); 1, 2, 3$
2	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$R(\pi_2)$	1
3	$\mathfrak{sp}_{2n} \times \langle \pi_{2n}^\vee \rangle$	$R(\pi_2) + {}_1\tau + {}_{-1}\tau$	1, 2
4	$\mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2n-2k}$	$\tau_1 \otimes \tau_2$	$1 (n \neq 2k); 1, 2$
5	$\mathfrak{so}_k \times \mathfrak{so}_{n-k}$	$\tau_1 \otimes \tau_2$	1
6	$\mathfrak{sl}_n \times \langle \pi_n^\vee \rangle$	${}_1\bigwedge^2 \tau + {}_{-1}\bigwedge^2 \tau^*$	$1; 1, 2 (n = 2m + 1)$
7	$\mathfrak{sl}_n \times \langle \pi_n^\vee \rangle$	${}_2\bigwedge^2 \tau + {}_{-2}\bigwedge^2 \tau + {}_1\tau + {}_{-1}\tau^*$	
8	$\mathfrak{so}_7 \times \mathfrak{so}_{n-8}$	$\tau_1 + R(\pi_3) \otimes \tau_2$	$1 (n \leq 10)$
9	$G_2 \times \mathfrak{so}_{n-7}$	$R(\pi_1) \otimes (\tau_2 + \mathbf{1})$	$1 (n \leq 8)$
10	A_2	$\tau + \tau^*$	1
11	B_4	$R(\pi_4)$	1
12	D_4	$\tau + R(\pi_3) + R(\pi_4)$	1
13	$B_3 \times \langle \pi_1^\vee \rangle$	${}_1\tau + {}_{-1}\tau + {}_1R(\pi_3) + {}_{-1}R(\pi_3)$	
14	F_4	$R(\pi_1)$	1
15	$D_5 \times \langle \pi_1^\vee \rangle$	${}_1R(\pi_4) + {}_{-1}R(\pi_5)$	$1; 1, 2$
16	$B_4 \times \langle \pi_1^\vee \rangle$	${}_1R(\pi_4) + {}_{-1}R(\pi_4) + \tau$	1
17	$E_6 \times \langle \pi_1^\vee \rangle$	${}_1R(\pi_1) + {}_{-1}R(\pi_5)$	1
18	$D_6 \times A_1$	$R(\pi_5) \otimes \tau$	1
19	$E_7 \times A_1$	$R(\pi_1) \otimes \tau$	1

Рассмотрим линейное действие редуктивной группы $H_1 \times H_2$, где группа H_1 полупроста, на векторном пространстве V . Проекция с.о.п. этого действия на H_2 является с.о.п. для действия $H_2 : V//H_1$. Это следствие следующего факта: общий слой морфизма факторизации для действия $H_1 : V$ содержит плотную орбиту (см., к примеру, [8; гл. 2, § 4, D]).

Теперь заметим, что $Y = (\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))/\mathrm{Spin}(12)$ – аффинное пространство, действие $\mathrm{SL}(2)$ на Y линейно и $\mathrm{SL}(2)$ -модуль Y является прямой суммой тривиального двумерного и неприводимого 5-мерного $\mathrm{SL}(2)$ -модулей. Это следует из результатов работы [9]. Теперь остается заметить, что с.п.о.п. для $\mathrm{SL}(2)$ -модуля Y тривиальна.

Остается рассмотреть случаи 1, 3, 6, 7, 8 для $n \geq 10$, случай 9 для $n \geq 9$, 13, 15, 16.

В случаях 3, 6, 7, 15, 16 нужное утверждение следует из классификации в [10]. В самом деле, во всех случаях подалгебра $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathfrak{g}$ сферическая, ее центр

одномерен, а коммутант прост. По предложению 4.7 подалгебра $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$ сферическая в том и только том случае, когда $\dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1) > \dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))$, эквивалентно (см. следствие 2.8), с.п.о.п. для $\mathfrak{h}_1$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ и для $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ различны. Мы получаем нужный список идеалов, используя таблицу 1 из [10].

В дальнейшем мы обозначаем через H_1 связную подгруппу в G , соответствующую $\mathfrak{h}_1$.

Рассмотрим случай 1. По основной теореме из [8; гл. 2, § 4] для $k > n/2$ действие $N_G(H_1)/H_1 : (\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))/H_1$ является присоединенным представлением группы GL_{n-k} . Поскольку проекция $\mathfrak{l}_1$ на $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ – это с.п.о.п. для действия $N_G(H_1)/H_1 : (\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))/H_1$, получаем требуемое. В случае, когда $k = n/2$, $N_G(H_1)/H_1$ -многообразие $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))/H_1$ является прямой суммой присоединенного GL_{n-k} -модуля и нетривиального двумерного $\mathrm{GL}_{n-k}/\mathrm{SL}_{n-k}$ -модуля. Поэтому с.п.о.п. для $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ содержится в $[\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)]$, откуда следует требуемый результат.

В случае 13 действие тора $(N_G(H_1)/H_1)^\circ$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)/H_1$ нетривиально, поэтому $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{h}_1$. Из результатов работы [5] следует, что $\mathfrak{l}_0 = \{0\}$.

Аналогично мы видим, что $\mathfrak{l}_0 = \{0\}$ в случае 9 для $n = 9$.

Остается рассмотреть случай 8. Для $n = 11$ с.п.о.п. представления $R(\pi_3) \otimes \tau_2$ алгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ содержится в $\mathfrak{h}_1$ (см. [7]). Равенство $\mathfrak{l}_0 = \{0\}$ следует из [5]. Для $n = 10$ проекция подалгебры $\mathfrak{l}_0$ на $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)/\mathfrak{h}_1$ нулевая, одномерный тор $(N_G(H_1)/H_1)^\circ$ действует нетривиально на $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))/H_1$.

Остается классифицировать все первичные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, которые не имеют простого идеала $\mathfrak{h}_1$, удовлетворяющего условиям предложения 4.2 с простым идеалом $\mathfrak{g}_1$. Из предложения 4.6 следует, что любой простой идеал алгебры $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий условию (b1) предложения 4.1, изоморфен $\mathfrak{sp}_{2n}$, $n \geq 2$.

Сначала рассмотрим случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Мы классифицируем первичные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_{2n}$, содержащие идеал $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sp}_{2k}$, $k \geq n/2$. Предполагаем, что $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ (эти подалгебры первичны, кроме случая $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$, $k = n/2$; это следует из предложения 4.8). Отметим, что $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1) \cong \mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k)}$ и что $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ -модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ является тензорным произведением тавтологических $\mathfrak{sp}_{2k}$ - и $\mathfrak{sp}_{2(n-k)}$ -модулей.

Подалгебра $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{sp}_{2(n-k)}$ существенна (см. пункт 3), следствие 2.9). Поэтому она содержит идеал $\mathfrak{h}_2$, изоморфный $\mathfrak{sp}_{2l}$, $l \geq (n-k+1)/2$, а потому содержится в $\mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2l} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k-l)}$.

ЛЕММА 4.9. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2k} \times \mathfrak{sp}_{2l} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k-l)} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}_0$ – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{l}_0 \not\subset \mathfrak{h}_1$;
- 2) $\mathfrak{h}$ – существенная подалгебра;
- 3) $l = n - k - l = 1$.

При выполнении этих эквивалентных условий проекция $\mathfrak{l}_0$ на $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_1$ одномерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через τ_1, τ_2 тавтологические представления алгебр $\mathfrak{sp}_{2l}, \mathfrak{sp}_{2(n-k-l)}$ соответственно. По теореме 7 из [7] проекция с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ на $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_1) \cong \mathfrak{sp}_{2l} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k-l)}$ является с.п.о.п. для представления $\bigwedge^2(\tau_1 + \tau_2) = \tau_1 \otimes \tau_2 + \bigwedge^2 \tau_1 + \bigwedge^2 \tau_2$ алгебры $\mathfrak{sp}_{2l} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k-l)}$. Поэтому

проекция с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_1)$ совпадает со с.п.о.п. для представления $2\tau_1 \otimes \tau_2 + \bigwedge^2 \tau_1 + \bigwedge^2 \tau_2$ алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_1)$. С.п.о.п. для представления $\bigwedge^2 \tau_1 + \bigwedge^2 \tau_2$ есть $\mathfrak{l}_1 = (n-k)\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{sp}_{2l} \times \mathfrak{sp}_{2(n-k-l)}$. Индекс ограничения представления $2\tau_1 \otimes \tau_2$ на любой простой идеал алгебры $\mathfrak{l}_1$ не меньше 1. Если $\mathfrak{s}$ – простой идеал алгебры $\mathfrak{l}_1$, содержащийся в $\mathfrak{sp}_{2l}$, то этот индекс равен 1 если и только если $n-k-l=1$. Для доказательства неравенств $l, n-k-l \leq 1$ осталось применить пункт 2) предложения 3.1 и тот факт, что с.п.о.п. для суммы четырех копий тавтологического $\mathfrak{sl}_2$ -модуля тривиален. Оставшиеся утверждения теперь понятны.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. *Существует единственная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$, которая существенна в $\mathfrak{g}$ и отлична от $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$. Эта подалгебра – $\mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме мы можем предположить, что $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$. Утверждение следует из леммы 4.3, примененной к $(\tilde{\mathfrak{h}}, \mathfrak{h}, \mathfrak{f})$, где $\mathfrak{f}$ – с.п.о.п. для $\tilde{\mathfrak{h}}$ -модуля $\mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{h}}$.

Перейдем к общему случаю. Осталось классифицировать все первичные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ непроста и для любого простого идеала $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ имеет место в точности одна из следующих возможностей:

- 1) существуют простые идеалы $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2 \neq \mathfrak{g}_1$, для которых $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{h}_1$ проектируется изоморфно на $\mathfrak{g}_1$;
- 2) $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{sp}_{2n}$ и существует идеал $\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{sp}_{2k} \subset \mathfrak{h}, k \geq n/2$.

Если в $\mathfrak{g}$ не найдется простого идеала, удовлетворяющего условию 2), то $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}_1$ и подалгебра $\mathfrak{h}$ вложена в $\mathfrak{g}$ диагонально. Это следует из неразложимости подалгебры $\mathfrak{h}$.

ЛЕММА 4.11. *Предположим, что $\mathfrak{h}$ – первичная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и существует идеал $\mathfrak{g}_1^1 \subset \mathfrak{g}$, удовлетворяющий условию 2). Если $\mathfrak{g} \not\cong \mathfrak{sp}_{2n}$, то*

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sp}_{2m} \times \mathfrak{sp}_{2n}, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{2m-2} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2n-2}, \quad n > 1, \quad m \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{h}_1^1$ единственный идеал в $\mathfrak{h}$, вложенный в $\mathfrak{g}_1^1$ как $\mathfrak{sp}_{2n_1}, 2n_1 \geq n$. Пусть $\mathfrak{a}$ – простой идеал алгебры $\mathfrak{h}$, не содержащийся ни в $\mathfrak{g}_1$, ни в $\mathfrak{g}_1^1$. Существование такого идеала следует из леммы 4.4. По следствию 2.10 существует простой идеал $\mathfrak{g}_1^2 \subset \mathfrak{g}$, для которого $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_1 := \mathfrak{g}_1^1 \oplus \mathfrak{g}_1^2$.

Если для $\mathfrak{g}_1^2$ имеет место первая из перечисленных выше возможностей, мы положим $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_1^1 \oplus \mathfrak{a}, \mathfrak{h}_1^2 = \{0\}$. В противном случае $\mathfrak{g}_1^2 \cong \mathfrak{sp}_{2m}$ и найдется идеал $\mathfrak{h}_1^2 \subset \mathfrak{h}$, вложенный в $\mathfrak{g}_1^2$ как $\mathfrak{sp}_{2m_1}, 2m_1 \geq m$. Полагаем $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_1^1 \oplus \mathfrak{h}_1^2 \oplus \mathfrak{a}$. Мы покажем сейчас, что пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ удовлетворяет условиям предложения 4.2. Пусть $\hat{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{h}_1)$, $\mathfrak{f}$ – с.п.о.п. для $\hat{\mathfrak{h}}_1$ -модуля $\mathfrak{g}_1/\hat{\mathfrak{h}}_1$ и через $\pi_i, i = 1, 2$, обозначена проекция $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1^i$. Проверим, что $\pi_1([f, f]) \subset \pi_1(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^1$. Пусть $\hat{\mathfrak{h}}_1^i = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_1^i}(\pi_1(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^i), i = 1, 2$, а $\mathfrak{f}^1$ – с.п.о.п. для $\hat{\mathfrak{h}}_1^1$ -модуля $\mathfrak{g}_1^1/\hat{\mathfrak{h}}_1^1$. Напомним, что проекция $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{g}_1^1 \cong \mathfrak{sp}_{2n}$ является существенной подалгеброй (следствие 2.9). Включение $[\mathfrak{f}^1, \mathfrak{f}^1] \subset \pi_1(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^1$ следует из классификации существенных подалгебр в $\mathfrak{sp}_{2n}$, полученной ранее. Для доказательства включения $\pi_1([f, f]) \subset \pi_1(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^1$ остается заметить, что подалгебра $\pi_1(\mathfrak{f}) \text{ Int}(\mathfrak{g})$ -сопряжена в подалгебре $\mathfrak{f}^1$. Последнее следует из леммы 2.7. Включение $\pi_2([f, f]) \subset \pi_2(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^2$ очевидно, если $\mathfrak{h}_1^2 = \{0\}$, или доказывается аналогично. Таким образом, мы видим, что $\pi_i([f, f]) \subset \pi_i(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^i$. Поэтому $[f, f] \subset (\mathfrak{h}_1^1 \oplus \pi_1(\mathfrak{a}) \oplus \pi_2(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{h}_1^2) \cap \hat{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{h}_1$.

Используя предложение 4.2, мы заключаем, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ и что $\mathfrak{h}$ – идеал в $\widehat{\mathfrak{h}}_1$, порожденный $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{h}$. В частности, проекция $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{a}$ ненулевая.

Покажем, что проекция $\mathfrak{f}^1 \rightarrow \pi_1(\mathfrak{a})$ сюръективна. Пусть $\mathfrak{a}_0$ – образ этой проекции. Имеется $\widehat{\mathfrak{h}}_1$ -подмодуль $V := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1^1/\widehat{\mathfrak{h}}_1^1$ в $\mathfrak{g}_1/\widehat{\mathfrak{h}}_1$. Для картановской подалгебры $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{a}$ общего положения пересечение $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{a}_0$ является проекцией с.п.о.п. для $\widehat{\mathfrak{h}}_1$ -модуля V на $\mathfrak{a}$. Пусть T, A, A_0 обозначают соответствующие связные подгруппы в G . Поскольку алгебра $\mathfrak{t}$ коммутативна, $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{a}_0$ является алгеброй Ли ядра неэффективности T_0 действия $T : A/A_0$. Но $T_0 \subset gA_0g^{-1}$ для всех $g \in A$. Если $\mathfrak{t}_0 \neq 0$, то A_0 – нормальная подгруппа в A . Но проекция $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{a}$ нетривиальна, поэтому $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{a}_0 \neq 0$. Отсюда мы заключаем, что $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$.

Поскольку проекция $\mathfrak{f}^1$ на $\pi_1(\mathfrak{a})$ сюръективна, то $\pi_1(\mathfrak{a}) \times \mathfrak{h}_1^1 \cong \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2n-2}$ (это вытекает из нашей классификации существенных подалгебр в $\mathfrak{sp}_{2n}$ и результатов [7]).

Поэтому $\mathfrak{g}_1^2 \cong \mathfrak{sp}_{2m}$, $m \geq 1$, $\pi_2(\mathfrak{a}) \times \mathfrak{h}_1^2 \cong \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sp}_{2m-2}$.

Значит, подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является первичной тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{z}_i)$, где пары $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ перечислены в таблице 2, или же $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является парой из таблицы 1, отличной от номеров 1 ($k \neq n/2$), 2, 10, 19.

§ 5. Вычисление картановских пространств и классификация существенных подалгебр

Для начала вычислим пространства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ для полупростых существенных подалгебр. Из предложения 4.8 следует, что все полупростые существенные неразложимые подалгебры перечислены в таблице 1.

Во-первых, мы рассмотрим случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ проста. Если $\mathfrak{h}$ является существенной частью сферической подалгебры $\mathfrak{g}$, то пространства $\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ могут быть вычислены с использованием таблицы 1 из [10]. Имеются лишь пять пар, не удовлетворяющих этому условию:

- 1) $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{sp}_6$;
- 2) $\mathfrak{sl}_k \subset \mathfrak{sl}_n$, $k \geq (n+2)/2$;
- 3) $\mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{sp}_{2n}$, $n > 3$;
- 4) $D_4 \subset F_4$;
- 5) $B_4 \subset E_6$.

В случаях 1), 3), 4) соответствующее однородное пространство имеет сложность 1. Пространства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ могут быть вычислены с использованием результатов из [11].

Для вычисления пространств $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в оставшихся случаях заметим, что по двойственности Фробениуса пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ порождено такими старшими весами λ , что $V(\lambda)^{*h} \neq 0$. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ редуктивна, пространства $V(\lambda)^h$, $V(\lambda)^{*h}$ двойственны друг другу. Поэтому для того чтобы вычислить $\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$, достаточно найти $k = \dim \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ независимых старших векторов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, для которых $V(\lambda_i)^h \neq 0$, $i = \overline{1, k}$. Отметим, что $\dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \text{rk } \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{l}_0$, где $\mathfrak{l}_0$ – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

В случае 2) $\dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 2(n-k)$, поскольку $\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{sl}_{2k-n}$. Отметим, что старшие векторы (для подходящего выбора борелевской подалгебры) в $V(\pi_i)$ для $i \leq n-k$ и $i \geq k$ являются $\mathfrak{h}$ -инвариантными.

В случае 5) $\dim V(\pi_1)^{\mathfrak{h}} = 2$. Поскольку $V(\pi_2) = \bigwedge^2 V(\pi_1)$, откуда следует, что $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Далее, $\pi_5, \pi_4 \in \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, поскольку $V(\pi_5) = V(\pi_1)^*$, $V(\pi_4) = \bigwedge^2 V(\pi_2)$. Ясно, что $V(\pi_6) = \mathfrak{g}$ имеет $\mathfrak{h}$ -инвариантный ненулевой вектор. Поскольку $\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{sl}_2$, мы видим, что пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ порождено векторами $\pi_1, \pi_2, \pi_4, \pi_5, \pi_6$.

Остается рассмотреть пары 25–27. В случае 25 $\dim V(\lambda)^{\mathfrak{h}} \neq 0$, если и только если $V(\lambda)$ является тензорным произведением двух дуальных друг к другу $\mathfrak{h}$ -модулей.

Рассмотрим теперь пары 26, 27. В этих случаях $\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{sp}_{2n-4} \times \mathfrak{sp}_{2m-4} \times K$ и $\dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 3$. Остается заметить, что $\mathfrak{g}$ -модули $V(\pi_2)$, $V(\pi'_2)$, $V(\pi_1) \otimes V(\pi'_1)$ содержат ненулевые $\mathfrak{h}$ -инвариантные векторы.

Это завершает доказательство части (b) теоремы 1.3. Утверждение части (d) ясно из замечания 1.5.

Приступим к доказательству части (c). Здесь $\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ – ее неразложимая существенная неполупростая подалгебра. Доказательство проводится в несколько шагов.

Шаг 1. Из предложения 4.8 следует, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{sat}})$ является прямой суммой пар, перечисленных в (c1); (c2) проверяется по отдельности для каждого случая.

Шаг 2. Пусть $\tilde{\mathfrak{h}}$ – первичная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{h}})$. Из данного выше явного описания возможных $\tilde{\mathfrak{h}}$ мы видим, что $\dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]) = \dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{h}}) + \dim \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{h}})$. Из двойственности Фробениуса и изоморфизма $V(\lambda)^{[\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]} \cong V(\lambda^*)^{[\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]*}$ следует, что пространство $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}])$ натянуто на старшие веса λ , для которых $V(\lambda)^{[\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]} \neq 0$. Обозначим через $\alpha_x(\lambda)$ число, которым $x \in \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{h}}) \cong \tilde{\mathfrak{h}}/[\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]$ действует в $K[G/(\tilde{H}, \tilde{H})]_{(\lambda^*)}^U$. По двойственности Фробениуса это определение совпадает с данным в замечании 1.4. Непосредственно из определения следует, что α_x – это линейная функция на $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$, аннулирующая $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{h}})$ и зависящая линейно от x .

Шаг 3. Пусть теперь $\hat{\mathfrak{z}} \subset \mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{h}})$ – некоторая алгебраическая подалгебра и $\mathfrak{h}_0 = [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}] \oplus \hat{\mathfrak{z}}$. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ неразложима тогда и только тогда, когда $\hat{\mathfrak{z}}$ проектируется ненулевым образом на любой идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Характеризация существенных подалгебр с фиксированным насыщением, данная в конце § 2, влечет, что подалгебра $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}$ существенна как только пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ неразложима. Это доказывает (c3).

Шаг 4. Докажем (c4). Заметим, что $\mathfrak{h}^{\text{sat}} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]))$. Отображение

$$x \mapsto \alpha_x: \mathfrak{z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])) \rightarrow (\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z}))^*,$$

построенное на шаге 2, инъективно по предложению 4.7. Поскольку $\dim \mathfrak{z} = \dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \mathfrak{z})$ (шаг 2), мы видим, что отображение $x \mapsto \alpha_x$ является изоморфизмом.

Остается вычислить функции $\alpha_x \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]}^*$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ – разложение $\mathfrak{g}$ в прямую сумму центра и простых некоммутативных идеалов, $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{g}_i$, $\tilde{\mathfrak{h}}_i = \mathfrak{h}^{\text{sat}} \cap \mathfrak{g}_i$. По шагу 1 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \bigoplus_i \mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{h}^{\text{sat}} = \bigoplus_i \tilde{\mathfrak{h}}_i$, $\dim \tilde{\mathfrak{h}}_i/\mathfrak{h}_i = 1$. Понятно, что для вычисления α_x достаточно положить $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_i$ (отметим, что $\mathfrak{h}_i$ не обязательно является существенной подалгеброй в $\mathfrak{g}_i$, но это неважно). Во всех случаях $\mathfrak{h}$ содержится в аннуляторе старшего вектора модуля $V(\lambda_i)$,

где вес λ_i содержится в столбце 3 таблицы 2. Теперь содержимое столбца 4 получается прямым вычислением. Пространства $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \tilde{\mathfrak{h}}_i)$ были вычислены в [10] во всех случаях, кроме $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_k)$. Для того чтобы вычислить $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}_i, \tilde{\mathfrak{h}}_i)$ в этом случае, достаточно заметить, что $\pi_{n-k}^\vee \in \tilde{\mathfrak{h}}_i$ умножает подходящий старший вектор $\mathfrak{g}_i$ -модуль $V(\pi_i)$ на ik/n для $i \leq n - k$ и на $(i - n)k/n$ для $i \geq k$.

Шаг 5. Остается доказать (c5). Пусть $\tilde{H}, H$ – связные подгруппы в G , соответствующие подалгебрам $\mathfrak{h}^{\text{sat}}, \mathfrak{h}$. Эти группы удовлетворяют условию (1) предложения 4.7. Непосредственно из определения α_x можно видеть, что $x \in \tilde{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ действует на $V(\lambda)^\mathfrak{h}$ умножением на $\alpha_{\tilde{x}}(\lambda)$, где $\tilde{x}$ – произвольный элемент из $\mathfrak{z}$, проектирующийся в x . В частности, α_x аннулирует $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ для $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Поэтому $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{sat}})$ лежит в аннуляторе пространства $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{sat}})$. Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) + \dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{sat}}) = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) + \dim \tilde{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h} = \dim \mathfrak{a}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])/\mathfrak{a}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{sat}}).$$

Это завершает доказательство теоремы 1.3.

В конце параграфа мы дадим приложение классификации существенных подалгебр. Имеется много работ, занимающихся классификацией редутивных подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ малой сложности (сложность подалгебры – это по определению сложность соответствующего однородного пространства).

Классификация сферических подалгебр в простых подалгебрах Ли была дана в [10]. Частичная классификация для непростых алгебр $\mathfrak{g}$ была дана в [12], [13]. Классификация редутивных сферических подалгебр была завершена в [14]. Классификация подалгебр сложности 1 в простых алгебрах Ли была проведена в [11]. Общий случай был разобран в [15].

Понятно, что $c_G(G/H) = c_{(G,G)}((G,G)/(G,G) \cap H)$. Поэтому для классификации всех редутивных подалгебр данной сложности достаточно ограничиться случаем полупростой алгебры $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть H – редутивная подгруппа в полупростой группе G . Тогда

$$c_G(G/H) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{l}_0 - \text{rk}_G(G/H)) - \dim \mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{l}_0$ – с.п.о.п. для $\mathfrak{h}^{\text{ess}}$ -модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}^{\text{ess}}$.

Доказательство следует из (4.1).

Итак, классификация подалгебр данной сложности сводится к классификации подалгебр данной размерности с заданной существенной частью.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. На самом деле при классификации существенных подалгебр мы использовали классификацию Крэмера всех сферических редутивных подалгебр в простых алгебрах.

§ 6. Соглашения и обозначения

Приведем список обозначений. Обозначения даны в алфавитном порядке, латинские буквы предшествуют греческим.

– $\mathfrak{a}_{G,X}$ – картановское пространство неприводимого G -многообразия X ;

- $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ (соответственно $\text{Int}(\mathfrak{g})$) – группа всех (соответственно внутренних) автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- $c_G(X)$ – сложность G -многообразия X ;
- (G, G) (соответственно $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) – коммутант группы G (соответственно алгебры Ли $\mathfrak{g}$);
- G° – связная компонента единицы алгебраической группы G ;
- G_x – стабилизатор точки $x \in X$ под действием $G : X$;
- $N_G(H)$ (соответственно $N_G(\mathfrak{h}), \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$) – нормализатор алгебраической подгруппы H в алгебраической группе G (соответственно подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебраической группе G , подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$);
- $\text{rk}_G(X)$ – ранг неприводимого G -многообразия X ;
- с.о.п. – стабилизатор общего положения;
- с.п.о.п. – стабильная подалгебра общего положения;
- $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid \mathfrak{g}v = 0\}$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, а V – $\mathfrak{g}$ -модуль;
- $V_{(\lambda)}$ – изотипная компонента $\mathfrak{g}$ -модуля V ($\mathfrak{g}$ – редуктивная алгебра Ли), соответствующая старшему весу λ ;
- $V(\mu)$ – неприводимый модуль старшего веса μ над редуктивной алгебраической группой или редуктивной алгеброй Ли;
- $\mathfrak{X}(G)$ – решетка весов алгебраической группы G ;
- $\mathfrak{X}_{G,X}$ – решетка весов неприводимого G -многообразия X ;
- X^G – множество неподвижных точек для действия группы G на X ;
- $\#X$ – количество элементов конечного множества X ;
- $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- $Z_G(H)$ (соответственно $Z_G(\mathfrak{h}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$) – централизатор алгебраической подгруппы H в алгебраической группе G (соответственно подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебраической группе G , подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$);
- $\alpha^\vee$ – двойственный корень к корню α ;
- $\Delta(\mathfrak{g})$ – система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- λ^* – двойственный старший вес к старшему весу λ .

Если алгебраическая группа обозначается прописной латинской буквой, то ее алгебра Ли обозначается соответствующей строчной готической буквой.

Все гомоморфизмы редуктивных алгебраических алгебр Ли (к примеру, представления) считаются дифференциалами гомоморфизмов соответствующих редуктивных алгебраических групп.

Если $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, то α_i обозначает ее i -й простой корень, π_i – соответствующий фундаментальный вес. Для корней и весов мы используем обозначения из [16].

Теперь объясним обозначения для подалгебр в полупростых алгебрах. Для исключительных алгебр Ли мы используем обозначения из [6].

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, то под $\mathfrak{sl}_k, \mathfrak{so}_k, \mathfrak{sp}_k$ мы подразумеваем подалгебры, которые аннулируют некоторое подпространство размерности $n-k$ в $\mathbb{C}^n$ и сохраняют соответствующую форму на его дополнении (для $\mathfrak{so}_k, \mathfrak{sp}_k$). Подалгебры $\mathfrak{so}_k \subset \mathfrak{so}_n, \mathfrak{sp}_k \subset \mathfrak{sp}_n$ определены аналогично. Подалгебра $\mathfrak{gl}_k$ вложена в $\mathfrak{so}_n$ прямой суммой представлений τ, τ^* и тривиального представления (где τ обозначает тавтологическое представление алгебры $\mathfrak{gl}_k$). Вложения $\mathfrak{sl}_k, \mathfrak{sp}_k$ в $\mathfrak{so}_n$ суть композиции описанных вложений $\mathfrak{gl}_k \hookrightarrow \mathfrak{so}_n$ и вложений $\mathfrak{sp}_k \hookrightarrow \mathfrak{gl}_k, \mathfrak{sl}_k \hookrightarrow \mathfrak{gl}_k$. Подалгебра G_2 (соответственно $\mathfrak{spin}_7$) в $\mathfrak{so}_n$ – это образ G_2 (соответственно $\mathfrak{so}_7$) при

прямой сумме 7-мерного неприводимого (соответственно спинорного) и тривиального представлений.

Данное выше описание определяет подалгебры с точностью до сопряженности в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Список литературы

- [1] Th. Vust, “Plongements d’espaces symétriques algébriques: une classification”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **17**:2 (1990), 165–195.
- [2] F. Knop, “Weylgruppe und Momentabbildung”, *Invent. Math.*, **99**:1 (1990), 1–23.
- [3] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия 4*, ВИНТИ: Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундамент. напр., **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V.L. Popov, E.B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry IV. Linear algebraic groups, invariant theory*, Encyclopedia Math. Sci., **55**, 1994, 123–278.
- [4] Е.М. Андреев, Э.Б. Винберг, А.Г. Элашвили, “Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:4 (1967), 3–7; англ. пер.: E.M. Andreev, É.B. Vinberg, A.G. Élashvili, “Orbits of greatest dimension in semi-simple linear Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **1**:4 (1967), 257–261.
- [5] А.Г. Элашвили, “Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:1 (1972), 51–62; англ. пер.: A.G. Élashvili, “Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:1 (1972), 44–53.
- [6] Е.Б. Дынкин, “Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **30(72)** (1952), 349–462; англ. пер.: E.B. Dynkin, “Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **6** (1957), 111–243.
- [7] А.Г. Элашвили, “Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 65–78; англ. пер.: A.G. Élashvili, “Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:2 (1972), 139–148.
- [8] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987; пер. с нем.: H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects Math., Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [9] G. W. Schwarz, “Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants”, *Invent. Math.*, **49**:2 (1978), 167–191.
- [10] M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38**:2 (1979), 129–153.
- [11] D. Panyushev, “On homogeneous spaces of rank one”, *Indag. Math. (N.S.)*, **6**:3 (1995), 315–323.
- [12] M. Brion, “Classification des espaces homogènes sphériques”, *Compositio Math.*, **63**:2 (1987), 189–208.
- [13] И.В. Микитюк, “Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами”, *Матем. сб.*, **129(171)**:4 (1986), 514–534; англ. пер.: I.V. Mikityuk, “On the integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **57**:2, 527–546.
- [14] O. Yakimova, *Gelfand pairs*, Dissertation, Bonner Math. Schriften, **37**, Univ. Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2005.

- [15] И. В. Аржанцев, О. В. Чувашова, “Классификация аффинных однородных пространств сложности один”, *Матем. сб.*, **195**:6 (2004), 3–20; англ. пер.: I. V. Arzhantsev, O. V. Chuvashova, “Classification of affine homogeneous spaces of complexity one”, *Sb. Math.*, **195**:6 (2004), 765–782.
- [16] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988; англ. пер.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

И. В. Лосев (I. V. Losev)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ivanlosev@yandex.ru

Поступила в редакцию
08.09.2006