Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 12, 83–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 04:38:20

УДК 512.538+512.542+519.1

Д. Н. Иванов

Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов

В статье доказывается гипотеза о делимости для коммутативных ортогональных разложений. Кроме этого, рассматриваются адамаровы разложения и сбалансированные системы идемпотентов.

Библиография: 8 названий.

Введение

Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, $\text{Tr}_A = \text{Tr}$ – след регулярного правого (или левого) представления алгебры $\mathbf{A}$, $\text{Tr}_A xy$ – билинейная симметричная инвариантная форма на $\mathbf{A}$, которую будем называть *формой следа*. Как известно, алгебра $\mathbf{A}$ полупроста тогда и только тогда, когда форма следа невырождена на $\mathbf{A}$. В дальнейшем *ограничимся рассмотрением полупростых* алгебр. Таким образом, в силу теоремы Веддербарна $\mathbf{A}$ изоморфна конечной прямой сумме матричных алгебр $M_n(\mathbb{C}) = M_n$. Напомним определение ортогонального разложения алгебры $\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство собственных неединичных подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i \in I\}$ образует *ортогональное разложение (ОР)* алгебры $\mathbf{A}$, если

- (1) все подалгебры $\mathbf{B}_i$ полупросты и содержат единичный элемент $\mathbf{1}_A$ алгебры $\mathbf{A}$;
- (2) алгебра $\mathbf{A}$ линейно порождается подалгебрами $\mathbf{B}_i$, т.е. $\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{B}_i$;
- (3) (условие ортогональности) ортогональные дополнения к $\mathbf{1}_A$ в каждой из подалгебр семейства $\mathcal{D}$ ортогональны между собой, т.е. если $x \in \mathbf{B}_i, y \in \mathbf{B}_j, i, j \in I, i \neq j$, то

$$\text{Tr } x = \text{Tr } y = 0 \Rightarrow \text{Tr } xy = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. (а) Условие полупростоты подалгебры $\mathbf{B}_i$ равносильно невырожденности ограничения на эту подалгебру формы следа. Поэтому из условия ортогональности вытекает, что каждые две различные подалгебры из $\mathcal{D}$ пересекаются по единичной подалгебре $\langle \mathbf{1}_A \rangle$.

(б) На практике для проверки условия ортогональности часто бывает удобно использовать его эквивалентную формулировку: если $x \in \mathbf{B}_i, y \in \mathbf{B}_j, i, j \in I, i \neq j$, то

$$\frac{\text{Tr } x}{n} \cdot \frac{\text{Tr } y}{n} = \frac{\text{Tr } xy}{n},$$

где $n = \text{Tr } \mathbf{1}_A = \dim \mathbf{A}$.

Ортогональное разложение $\mathcal{D}$, все подалгебры которого коммутативны, будем называть *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то будем называть $\mathcal{D}$ *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто “*ОР типа $\mathbf{B}$* ”). Через kM_n обозначим прямую сумму k экземпляров алгебры M_n .

Понятие ортогонального разложения объединяет такие известные темы, как конечные аффинные плоскости, классические матрицы Адамара, конечные расщепляемые группы, ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр (см. [1]). Именно:

- 1) конечная аффинная плоскость порядка n соответствует однородному ОР типа nM_1 коммутативной алгебры n^2M_1 ;
- 2) матрица Адамара порядка n соответствует однородному ОР типа $2M_1$ алгебры nM_1 ;
- 3) если подгруппы $\{H_i\}$ расщепляют группу G , то подалгебры $\{C[H_i]\}$ образуют ОР групповой алгебры $C[G]$;
- 4) ортогональному разложению простой алгебры Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр соответствует однородное ОР типа $(n+1)M_1$ алгебры матриц M_{n+1} .

Одной из фундаментальных проблем теории ортогональных разложений ассоциативных алгебр является

ГИПОТЕЗА 1 (гипотеза о делимости). *Алгебра является свободным модулем (левым или правым) над каждой подалгеброй из семейства, образующего ее ортогональное разложение.*

Название “гипотеза о делимости” объясняется тем, что, как показано в [2], алгебра $\mathbf{A}$ является свободным модулем над полупростой подалгеброй $\mathbf{B}$, содержащей единичный элемент 1_A , тогда и только тогда, когда ограничение Tr_A на $\mathbf{B}$ пропорционально Tr_B . Коэффициент пропорциональности в этом случае будет целым числом, равным отношению размерностей $\dim \mathbf{A} / \dim \mathbf{B}$.

С гипотезой о делимости связана (точнее является ее прямым следствием)

ГИПОТЕЗА 2 (гипотеза об измельчении). *Если подалгебры $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{D}\}$ образуют ОР алгебры $\mathbf{A}$ и подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k\}$ образуют ОР алгебры $\mathbf{B}$, то подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{D}\}$ образуют ОР алгебры $\mathbf{A}$.*

Отметим, что доказательство гипотезы о делимости, приведенное в [2], оказалось ошибочным, о чем автору сообщили А. И. Кострикин и Фам Хыу Тьеп.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Гипотеза о делимости справедлива для коммутативных ортогональных разложений.*

Теорема 1 усиливает предыдущий результат автора о справедливости гипотезы 1 в случае однородных ОР коммутативных алгебр (см. [3]). Новое продвижение в гипотезе о делимости позволяет утверждать, что гипотеза об измельчении выполняется для коммутативных ОР. Изложению доказательства теоремы 1 посвящен первый параграф статьи.

В §2 рассматриваются приложения теоремы 1 к однородным ОР типа $2M_1$ — так называемым *адамаровым разложениям*. Алгебры, допускающие адамаровы разложения, будем называть *адамаровыми*. В §2, в частности, доказывается теорема о тензорном произведении и о прямой сумме адамаровых алгебр.

Также в §2 исследуются гипотеза о делимости размерности адамаровой алгебры на 4 и адамаровы разложения в алгебре матриц M_n .

В §3 вводится понятие сбалансированных систем идемпотентов, которое обобщает комбинаторные блок-схемы. Исследуются связи сбалансированных систем с ортогональными разложениями и кратно транзитивными группами.

Автор приносит благодарность А. И. Кострикину за поддержку и внимание к работе.

§1. Гипотеза о делимости

В этом параграфе доказывается центральная теорема данной статьи.

ТЕОРЕМА 1. *Гипотеза 1 справедлива для коммутативных ортогональных разложений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра $\mathbf{A} \cong \bigoplus_{p=1}^q M_{n_p}$ допускает коммутативное ОР $\mathcal{D} = \{\mathbf{A}_s, s = \overline{1, r}\}$. Будем считать, что $\mathbf{A}$ реализована как блочно-диагональная подалгебра в алгебре матриц M_d , где $d = \sum_{p=1}^q n_p$. Таким образом, $\mathbf{1}_A = E_d$ — единичная матрица порядка d .

Положим $n_1 + \dots + n_p = \sigma_p$, $p = \overline{1, q}$ (таким образом, $\sigma_q = d$), и если натуральное число i таково, что $\sigma_{p-1} < i \leq \sigma_p$, то определим $n(i) = n_p$.

Как и раньше, Tr обозначает след регулярного представления алгебры $\mathbf{A}$. Через E_{ij} обозначим матричные единицы в M_d , $X = (x_{ij})$ — матрица в M_d с коэффициентами x_{ij} , т.е. $X = \sum_{i,j=1}^d x_{ij} E_{ij}$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

- ЛЕММА 1.1.** (1) Если $X = (x_{ij}) \in \mathbf{A}$, то $\text{Tr } X = \sum_{i=1}^d n(i) x_{ii}$.
 (2) $E_{ij} \in \mathbf{A} \iff i, j \in (\sigma_{p-1}, \sigma_p]$ для некоторого p .
 (3) $E_{ij} \in \mathbf{A} \iff E_{ji} \in \mathbf{A} \Rightarrow n(i) = n(j)$.
 (4) $\mathbf{1}_A = \sum_{i=1}^d E_{ii}$.

Пусть $\text{Pr } \mathbf{A}_s = \{A_s, B_s, \dots, C_s\}$ — множество примитивных идемпотентов подалгебры $\mathbf{A}_s$, $s = \overline{1, r}$ (количество элементов в $\text{Pr } \mathbf{A}_s$ не меньше 2 и зависит от s). Положим $A_s = (a_{ij}(s))$, $B_s = (b_{ij}(s))$, $\dots$, $C_s = (c_{ij}(s))$, $k_s = \text{Tr } A_s$, $l_s = \text{Tr } B_s$, $\dots$, $m_s = \text{Tr } C_s$.

Так как ограничение Tr на подалгебры $\langle \mathbf{1}_A \rangle$, $\mathbf{A}_s$, $s = \overline{1, r}$, невырожденно, то алгебра $\mathbf{A}$ является ортогональной прямой суммой подпространств $\langle \mathbf{1}_A \rangle$, $\mathbf{A}_s = \{X \in \mathbf{A} : \text{Tr } X = 0\}$, $s = \overline{1, r}$. Отсюда следуют две леммы.

ЛЕММА 1.2. *Элементы $\mathbf{1}_A, B_s, \dots, C_s$, $s = \overline{1, r}$, линейно независимы и образуют базис алгебры $\mathbf{A}$.*

ЛЕММА 1.3 (тождество ортогональности). *Для любого $X \in \mathbf{A}$ имеет место равенство*

$$\text{Tr } X^2 + \frac{r-1}{n} (\text{Tr } X)^2 = \sum_{s=1}^r \left(\frac{(\text{Tr } X A_s)^2}{k_s} + \frac{(\text{Tr } X B_s)^2}{l_s} + \dots + \frac{(\text{Tr } X C_s)^2}{m_s} \right), \quad (1.1)$$

где $n = \text{Tr } \mathbf{1}_A = \dim \mathbf{A} = \sum_{p=1}^q n_p^2$.

Тождество ортогональности (1.1) будет основным инструментом в доказательстве теоремы 1. Нам понадобится также следующее утверждение из работы [2].

ЛЕММА 1.4. *Алгебра $\mathbf{A}$ является свободным $\mathbf{A}_s$ -модулем тогда и только тогда, когда ограничение Tr_A на $\mathbf{A}_s$ пропорционально Tr_{A_s} .*

Так как значения Tr_{A_s} на примитивных идемпотентах подалгебры $\mathbf{A}_s$ все равны 1, то для доказательства теоремы 1 в силу леммы 1.4 достаточно показать, что $k_s = l_s = \dots = m_s$ при любом $s = \overline{1, r}$.

Основная идея доказательства теоремы 1 заключается в выводе из тождества ортогональности (1.1) следующего равенства:

$$\left(1 + \frac{r-1}{n}\right) \cdot \mathbf{1}_A = \sum_{s=1}^r \left(\frac{A_s}{k_s} + \frac{B_s}{l_s} + \dots + \frac{C_s}{m_s}\right). \quad (1.2)$$

Теперь, вычитая из обеих частей равенства (1.2)

$$\sum_{s=1}^r \left(\frac{A_s}{k_s} + \frac{B_s}{k_s} + \dots + \frac{C_s}{k_s}\right) = \left(\sum_{s=1}^r \frac{1}{k_s}\right) \cdot \mathbf{1}_A,$$

получаем

$$\left(1 + \frac{r-1}{n} - \sum_{s=1}^r \frac{1}{k_s}\right) \cdot \mathbf{1}_A = \sum_{s=1}^r \left(\left(\frac{1}{l_s} - \frac{1}{k_s}\right)B_s + \dots + \left(\frac{1}{m_s} - \frac{1}{k_s}\right)C_s\right). \quad (1.3)$$

В силу леммы 1.2 матрицы $\mathbf{1}_A = E_d, B_s, \dots, C_s, s = \overline{1, r}$, линейно независимы. Значит, $k_s = l_s = \dots = m_s$.

Вывод равенства (1.2) из тождества ортогональности осуществим в следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Положим в (1.1) $X = E_{ij} \in \mathbf{A}, i \neq j$. Тогда $\text{Tr } X A_s = n(j)a_{ij}(s)$, $\text{Tr } X B_s = n(j)b_{ij}(s), \dots, \text{Tr } X C_s = n(j)c_{ij}(s)$, $\text{Tr } X = \text{Tr } X^2 = 0$. В результате получаем

$$0 = \sum_{s=1}^r \left(\frac{n^2(j)a_{ij}^2(s)}{k_s} + \frac{n^2(j)b_{ij}^2(s)}{l_s} + \dots + \frac{n^2(j)c_{ij}^2(s)}{m_s}\right).$$

Отсюда следует, что

$$0 = \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}^2(s)}{k_s} + \frac{b_{ij}^2(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ij}^2(s)}{m_s}\right). \quad (1.4)$$

Если $E_{ij} \notin \mathbf{A}$, то $a_{ij}(s) = b_{ij}(s) = \dots = c_{ij}(s) = 0$. Таким образом, (1.4) выполняется при любых $i \neq j$.

Шаг 2. Положим в (1.1) $X = E_{ij} + E_{ji} \in \mathbf{A}, i \neq j$. Тогда $\text{Tr } X = 0$, $\text{Tr } X^2 = \text{Tr}(E_{ii} + E_{jj}) = n(i) + n(j)$ и в результате имеем

$$n(i) + n(j) = \sum_{s=1}^r \left(\frac{(n(j)a_{ij}(s) + n(i)a_{ji}(s))^2}{k_s} + \dots + \frac{(n(j)c_{ij}(s) + n(i)c_{ji}(s))^2}{m_s}\right).$$

В силу (1.4) и леммы 1.1 (3) отсюда получаем

$$\frac{1}{n(i)} = \frac{1}{n(j)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(i)} + \frac{1}{n(j)} \right) = \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}(s)a_{ji}(s)}{k_s} + \dots + \frac{c_{ij}(s)c_{ji}(s)}{m_s} \right), \quad (1.5)$$

если $E_{ij} \in \mathbf{A}$ и $i \neq j$.

Шаг 3. Так как $A_s^2 = A_s$, то

$$a_{ii}(s) = a_{ii}^2(s) + \sum_{t \neq i} a_{it}(s)a_{ti}(s) = a_{ii}^2(s) + \sum_{t \neq i, E_{ti} \in \mathbf{A}} a_{it}(s)a_{ti}(s).$$

Поделим это равенство на k_s и просуммируем аналогичные равенства для $b_{ii}(s), \dots, c_{ii}(s)$. Затем, учитывая, что существует ровно $n(i) - 1$ индексов t таких, что $t \neq i, E_{ti} \in \mathbf{A}$, и равенство (1.5), суммируем по s и в результате получаем

$$\sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ii}(s)}{k_s} + \dots + \frac{c_{ii}(s)}{m_s} \right) = \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ii}^2(s)}{k_s} + \dots + \frac{c_{ii}^2(s)}{m_s} \right) + \frac{n(i) - 1}{n(i)}. \quad (1.6)$$

Шаг 4. Положим в (1.1) $X = E_{ii}$. Тогда имеем

$$n(i) + \frac{r-1}{n} \cdot n^2(i) = \sum_{s=1}^r \left(\frac{n^2(i)a_{ii}^2(s)}{k_s} + \frac{n^2(i)b_{ii}^2(s)}{l_s} + \dots + \frac{n^2(i)c_{ii}^2(s)}{m_s} \right).$$

Отсюда

$$\frac{1}{n(i)} + \frac{r-1}{n} = \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ii}^2(s)}{k_s} + \frac{b_{ii}^2(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ii}^2(s)}{m_s} \right). \quad (1.7)$$

Шаг 5. Из (1.6) и (1.7) следует, что

$$\sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ii}(s)}{k_s} + \frac{b_{ii}(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ii}(s)}{m_s} \right) = \frac{1}{n(i)} + \frac{r-1}{n} + \frac{n(i) - 1}{n(i)} = 1 + \frac{r-1}{n}. \quad (1.8)$$

Таким образом, равенство (1.2) доказано для диагональных элементов. Осталось проверить его для недиагональных элементов.

Шаг 6. Положим в (1.1) $X = E_{ji} + E_{vu} \in \mathbf{A}$, где $i \neq j, u \neq v$ и среди индексов i, j, u, v , по крайней мере, три различных. Тогда $\text{Tr } X = \text{Tr } X^2 = 0$ и

$$0 = \sum_{s=1}^r \left(\frac{(n(j)a_{ij}(s) + n(v)a_{uv}(s))^2}{k_s} + \dots + \frac{(n(j)c_{ij}(s) + n(v)c_{uv}(s))^2}{m_s} \right).$$

Отсюда в силу (1.4), после деления на $2n^2(j) \cdot n^2(v)$ получаем

$$0 = \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}(s)a_{uv}(s)}{k_s} + \frac{b_{ij}(s)b_{uv}(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ij}(s)c_{uv}(s)}{m_s} \right). \quad (1.9)$$

Ясно, что ограничение $E_{ji} + E_{vu} \in \mathbf{A}$ в (1.9) можно снять.

Шаг 7. Так как $A_s^2 = A_s$, то при $i \neq j$ имеем

$$a_{ij}(s) = (a_{ii}(s) + a_{jj}(s))a_{ij}(s) + \sum_{t \neq i,j} a_{it}(s)a_{tj}(s).$$

Поделим это равенство на k_s и просуммируем аналогичные равенства для $b_{ij}(s), \dots, c_{ij}(s)$. Затем суммируем по s и, учитывая (1.9), в результате получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}(s)}{k_s} + \frac{b_{ij}(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ij}(s)}{m_s} \right) \\ &= \sum_{s=1}^r \left(\frac{(a_{ii}(s) + a_{jj}(s))a_{ij}(s)}{k_s} + \frac{(b_{ii}(s) + b_{jj}(s))b_{ij}(s)}{l_s} \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{(c_{ii}(s) + c_{jj}(s))c_{ij}(s)}{m_s} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

при $i \neq j$.

Шаг 8. Положим в (1.1) $X = E_{ii} - E_{jj}$. Тогда $\text{Tr } X = 0$, $\text{Tr } X^2 = n(i) + n(j)$ и

$$n(i) + n(j) = \sum_{s=1}^r \left(\frac{(n(i)a_{ii}(s) - n(j)a_{jj}(s))^2}{k_s} + \dots + \frac{(n(i)c_{ii}(s) - n(j)c_{jj}(s))^2}{m_s} \right). \quad (1.11)$$

Шаг 9. Положим в (1.1) $X = E_{ii} - E_{jj} + E_{vu} \in \mathbf{A}$, $i \neq j$, $u \neq v$. Тогда $\text{Tr } X = 0$, $\text{Tr } X^2 = n(i) + n(j)$ и

$$\begin{aligned} n(i) + n(j) &= \sum_{s=1}^r \left(\frac{(n(i)a_{ii}(s) - n(j)a_{jj}(s) + n(v)a_{uv}(s))^2}{k_s} \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{(n(i)c_{ii}(s) - n(j)c_{jj}(s) + n(v)c_{uv}(s))^2}{m_s} \right) \\ &= \sum_{s=1}^r \left(\frac{(n(i)a_{ii}(s) - n(j)a_{jj}(s))^2}{k_s} + \dots \right) + n^2(v) \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{uv}^2(s)}{k_s} + \dots \right) \\ & \quad + 2n(v) \sum_{s=1}^r \left(\frac{(n(i)a_{ii}(s) - n(j)a_{jj}(s)) \cdot a_{uv}(s)}{k_s} + \dots \right). \end{aligned}$$

Учитывая (1.11) и (1.4), получаем

$$n(i) \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ii}(s)a_{uv}(s)}{k_s} + \dots \right) = n(j) \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{jj}(s)a_{uv}(s)}{k_s} + \dots \right). \quad (1.12)$$

Ясно, что условие $E_{uv} \in \mathbf{A}$ в (1.12) можно опустить.

Шаг 10. Из (1.10) и (1.12) следует, что при $i \neq j$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}(s)}{k_s} + \frac{b_{ij}(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ij}(s)}{m_s} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{n(i)}{n(j)} \right) \cdot \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ii}(s)a_{ij}(s)}{k_s} + \dots + \frac{c_{ii}(s)c_{ij}(s)}{m_s} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{n(i)}{n(j)} \right) \cdot \frac{n(t)}{n(i)} \cdot \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{tt}(s)a_{ij}(s)}{k_s} + \dots \right) \\
 &= \left(\frac{1}{n(i)} + \frac{1}{n(j)} \right) \cdot \sum_{s=1}^r \left(\frac{n(t)a_{tt}(s)a_{ij}(s)}{k_s} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Суммируем по t , учитывая, что $\sum_{t=1}^d n(t)a_{tt}(s) = \text{Tr } A_s = k_s$, и аналогичные соотношения для других идемпотентов,

$$\begin{aligned}
 & d \cdot \sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}(s)}{k_s} + \frac{b_{ij}(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ij}(s)}{m_s} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{n(i)} + \frac{1}{n(j)} \right) \\
 &\quad \times \sum_{s=1}^r \left(\left(\sum_{t=1}^d n(t)a_{tt}(s) \right) \cdot \frac{a_{ij}(s)}{k_s} + \dots + \left(\sum_{t=1}^d n(t)c_{tt}(s) \right) \cdot \frac{c_{ij}(s)}{m_s} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{n(i)} + \frac{1}{n(j)} \right) \cdot \sum_{s=1}^r \left(a_{ij}(s) + b_{ij}(s) + \dots + c_{ij}(s) \right) = 0
 \end{aligned}$$

(последнее равенство вытекает из того, что $A_s + B_s + \dots + C_s = E_d$). Значит,

$$\sum_{s=1}^r \left(\frac{a_{ij}(s)}{k_s} + \frac{b_{ij}(s)}{l_s} + \dots + \frac{c_{ij}(s)}{m_s} \right) = 0$$

и равенство (1.2) проверено для недиагональных элементов. Это завершает доказательство теоремы 1.

В качестве немедленного следствия теоремы 1 получаем подтверждение гипотезы об измельчении для коммутативных ортогональных разложений.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть коммутативные подалгебры $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_r\}$ образуют ОР алгебры $\mathbf{A}$ и подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k\}$ образуют ОР алгебры $\mathbf{B}$. Тогда подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_r\}$ образуют (коммутативное) ОР алгебры $\mathbf{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 ограничение функции Tr_A на подалгебру $\mathbf{B}$ пропорционально функции Tr_B . Поэтому если $x \in \mathbf{B}$, то

$$\text{Tr}_A x = 0 \iff \text{Tr}_B x = 0. \quad (*)$$

Так как условие ортогональности выполняется для подалгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}_s$, то в силу $(*)$ оно выполняется для подалгебр $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{C}_s$, $i = \overline{1, k}$. Также из $(*)$ вытекает выполнение условия ортогональности для подалгебр $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$. Следствие доказано.

§ 2. Адамаровы разложения и алгебры

Как показано в [3], понятие матрицы Адамара порядка $n > 2$ и однородного ортогонального разложения типа $2M_1$ коммутативной алгебры nM_1 эквивалентны. Именно: неединичные строки нормализованной матрицы Адамара можно рассматривать как координаты $(n - 1)$ -й инволюции в базисе из примитивных идемпотентов алгебры nM_1 и семейство подалгебр, порожденных этими инволюциями, образует однородное ОР типа $2M_1$. Это подсказывает следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Однородное ортогональное разложение типа $2M_1$ называется *адамаровым разложением*. Алгебра, допускающая адамарово разложение, называется *адамаровой*.

Теорема 1 и лемма 1.2, примененные к адамаровым разложениям, позволяют получить следующий важный результат.

ЛЕММА 2.1. Пусть подалгебры $\{B_1, \dots, B_r\}$ образуют адамарово разложение алгебры A . Пусть $\text{Pr}(B_i) = \{e_{i1}, e_{i2}\}$ – примитивные идемпотенты подалгебры B_i , $i = \overline{1, r}$. Тогда

- (1) число подалгебр в адамаровом разложении на единицу меньше размерности алгебры, т.е. $r = \dim A - 1$;
- (2) $\text{Tr}_A e_{i1} = \text{Tr}_A e_{i2} = \frac{1}{2} \dim A$ для любого $i = \overline{1, r}$, в частности, размерность адамаровой алгебры четна;
- (3) в каждой подалгебре адамарова разложения содержится ровно две инволюции с нулевым следом регулярного представления, причем эти инволюции, взятые по одной из всех подалгебр разложения, образуют базис пространства $A^\circ = \{x \in A : \text{Tr}_A x = 0\}$.

2.1. Прямые суммы и тензорные произведения адамаровых алгебр.

Как известно [4], кронекерово произведение двух матриц Адамара будет матрицей Адамара. В наших терминах этот результат переформулируется следующим образом: тензорное произведение двух коммутативных адамаровых алгебр есть адамарова алгебра. Кроме этого, самая старая и знаменитая гипотеза о матрицах Адамара, утверждающая, что для всякого натурального n кратного 4, существует матрица Адамара порядка n , эквивалентна следующему утверждению: прямая сумма двух коммутативных адамаровых алгебр есть адамарова алгебра. Зададимся вопросом: являются ли прямая сумма и тензорное произведение произвольных адамаровых алгебр адамаровыми алгебрами? Оказывается, что ответ на этот вопрос утвердительный в случае тензорного произведения. А в случае прямой суммы ответ будет утвердительным только при дополнительных ограничениях.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – адамаровы алгебры. Тогда

- (1) тензорное произведение $A \otimes B$ – адамарова алгебра;
- (2) если $\dim A = \dim B$, то прямая сумма $A \oplus B$ – адамарова алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть семейства подалгебр $\{A_i, i = \overline{1, n}\}$ и $\{B_j, j = \overline{1, m}\}$ образуют адамаровы разложения алгебр A и B , соответственно. Примитивные идемпотенты подалгебры A_i обозначим через a_{i1} и a_{i2} , подалгебры B_j – через b_{j1} и b_{j2} . По лемме 2.1

$$\text{Tr}_A a_{i1} = \text{Tr}_A a_{i2} = \frac{1}{2} \dim A, \quad \text{Tr}_B b_{j1} = \text{Tr}_B b_{j2} = \frac{1}{2} \dim B. \quad (2.1)$$

Из условия ортогональности имеем

$$\mathrm{Tr}_A a_{i\varepsilon} a_{i'\delta} = \frac{1}{4} \dim \mathbf{A}, \quad \mathrm{Tr}_B b_{j\varepsilon} b_{j'\delta} = \frac{1}{4} \dim \mathbf{B} \quad (2.2)$$

для $i \neq i', i, i' = \overline{1, n}, j \neq j', j, j' = \overline{1, m}, \varepsilon, \delta = 1, 2$.

(1) Рассмотрим следующие двумерные полупростые подалгебры в $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, содержащие $\mathbf{1}_{A \otimes B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j &= \langle \mathbf{1}_A \otimes b_{j1}, \mathbf{1}_A \otimes b_{j2} \rangle, & \mathbf{D}_i &= \langle a_{i1} \otimes \mathbf{1}_B, a_{i2} \otimes \mathbf{1}_B \rangle, \\ \mathbf{F}_{ij} &= \langle a_{i1} \otimes b_{j1} + a_{i2} \otimes b_{j2}, a_{i1} \otimes b_{j2} + a_{i2} \otimes b_{j1} \rangle, \end{aligned}$$

где $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, а угловые скобки обозначают, что подалгебры порождены заключенными в скобки элементами. Используя (2.1) и (2.2), легко проверить, что для этих подалгебр выполняется условие ортогональности. Так как число указанных подалгебр равно

$$n + m + nm = (n + 1)(m + 1) - 1 = \dim \mathbf{A} \cdot \dim \mathbf{B} - 1 = \dim \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} - 1,$$

то они линейно порождают алгебру $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$. Значит, семейство подалгебр

$$\{\mathbf{C}_j, \mathbf{D}_i, \mathbf{F}_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$$

образует адамарово разложение алгебры $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

(2) Пусть $\dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{B}$, т.е. $n = m$. Тогда, используя (2.1) и (2.2), легко показать, что подалгебры

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i &= \langle (a_{i1}, b_{i1}), (a_{i2}, b_{i2}) \rangle, & \mathbf{D}_i &= \langle (a_{i1}, b_{i2}), (a_{i2}, b_{i1}) \rangle, \\ \mathbf{E} &= \langle (\mathbf{1}_A, 0), (0, \mathbf{1}_B) \rangle, \end{aligned}$$

где $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют условию ортогональности. Так как их число равно

$$2n - 1 = \dim \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} - 1$$

и все указанные подалгебры двумерны, полупросты и содержат единичный элемент $\mathbf{1}_{A \oplus B}$, то они образуют адамарово разложение алгебры $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$. Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим алгебру $3M_2$. Как известно, алгебра M_2 обладает единственным с точностью до сопряженности адамаровым разложением, соответствующим ортогональному разложению простой алгебры Ли типа A_1 в сумму картановских подалгебр [5], [1]. Например, в качестве трех попарно ортогональных инволюций, порождающих подалгебры адамарова разложения, можно взять

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу п. (2) теоремы 2 получаем, что алгебра $2M_2$ также адамарова. Таким образом, алгебра $3M_2$ является прямой суммой двух адамаровых алгебр. Однако справедлива

ТЕОРЕМА 3. Алгебра $3M_2$ не является адамаровой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{A} = 3M_2 = \{(X_1, X_2, X_3) : X_i \in M_2\}$, $E = E_2$ — единичная матрица матрица 2-го порядка,

$$\text{Tr}_A(X_1, X_2, X_3) = 2(\text{tr } X_1 + \text{tr } X_2 + \text{tr } X_3),$$

где tr — след матрицы. Пусть $\alpha = (A_1, A_2, A_3)$ — инволюция и $\text{Tr}_A \alpha = 0$. Тогда α может принадлежать к одному из следующих типов:

1-й тип: $\text{tr } A_1 = 0, A_2 = -A_3 = \pm E$;

2-й тип: $\text{tr } A_2 = 0, A_1 = -A_3 = \pm E$;

3-й тип: $\text{tr } A_3 = 0, A_1 = -A_2 = \pm E$;

4-й тип: $\text{tr } A_1 = \text{tr } A_2 = \text{tr } A_3 = 0$.

Заметим, что инволюции первых трех типов могут быть ортогональны, только если они одинакового типа. Например, в случае инволюций 1-го и 2-го типов имеем

$$\text{Tr}_A((A_1, E, -E) \cdot (E, A_2, -E)) = \text{Tr}_A(A_1, A_2, E) = 4.$$

Таким образом, все инволюции в подалгебрах адамарова разложения алгебры $\mathbf{A}$ принадлежат либо к одному из первых трех типов, например, к 1-му, либо к 4-му типу. Значит, эти инволюции лежат в подпространстве

$$V = \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{A} : \text{tr } X_1 = 0, \text{tr } X_2 + \text{tr } X_3 = 0\},$$

которое строго содержится в подпространстве $\mathbf{A}^\circ = \{X \in \mathbf{A} : \text{Tr}_A X = 0\}$. Это противоречит п. (3) леммы 2.1. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1] неточно указано, что вопрос о существовании ОР в алгебре $3M_2$ эквивалентен вопросу о существовании в этой алгебре адамарова разложения. В то время как последний вопрос решается в теореме 3, первый — по-прежнему остается открытым. Наиболее вероятным представляется существование ОР, в котором одна подалгебра изоморфна $3M_1$ и является центром в $3M_2$, а остальные двумерны, причем порождаются инволюциями 4-го типа.

Подводя итог, отметим, что на сегодняшний день известно только два сравнительно общих условия на адамаровы алгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, позволяющих утверждать, что прямая сумма $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ будет адамаровой алгеброй:

- (1) (гипотетическое условие) коммутативность алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$;
- (2) (доказанное условие) равенство размерностей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

2.2. О делимости размерности адамаровой алгебры на 4. Теорема 1 позволяет утверждать, что размерность адамаровой алгебры четна. В некоторых случаях, например, если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна или проста, существование в $\mathbf{A}$ адамарова разложения влечет делимость $\dim \mathbf{A}$ на 4. Так, для коммутативных алгебр это равносильно хорошо известному и легко доказываемому свойству делимости порядка $n \neq 2$ матрицы Адамара на 4 (см. [4]). А для простых алгебр $\mathbf{A}$ этот факт вытекает из того, что $\dim \mathbf{A}$ является квадратом натурального числа. По-видимому, одной из центральных проблем в теории адамаровых разложений станет

ГИПОТЕЗА 3. Если алгебра адамарова, то ее размерность делится на 4.

В случае коммутативных алгебр предполагается, что справедливо также и обращение гипотезы 3. Однако в общем случае, как показывает пример алгебры $3M_2$, это не так.

В качестве одного из подтверждений гипотезы 3 приведем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Алгебра $\mathbf{A} = 2M_1 \oplus M_{2n_1} \oplus \dots \oplus M_{2n_k}$ не является адамаровой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подалгебры $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ образуют адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$, $\text{Pr}(\mathbf{A}_i) = \{E_{i1}, E_{i2}\}$ – примитивные идемпотенты в $\mathbf{A}_i$. Два примитивных идемпотента в $\mathbf{A}$ со следом 1 обозначим через e_1 и e_2 . Положим $\mathbf{B} = M_{2n_1} \oplus \dots \oplus M_{2n_k}$ и отождествим $\mathbf{B}$ с ее каноническим образом в $\mathbf{A}$, тогда $\mathbf{1}_A = e_1 + e_2 + \mathbf{1}_B$ – разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов.

По теореме 1 следы $\text{Tr}_A E_{i1}$ и $\text{Tr}_A E_{i2}$ равны и, значит, нечетны. Поэтому можно считать, что индексы идемпотентов E_{i1}, E_{i2} подобраны таким образом, что для некоторых идемпотентов $f_{i1}, f_{i2} \in \mathbf{B}$ имеем $E_{i1} = e_1 + f_{i1}$, $E_{i2} = e_2 + f_{i2}$.

Разложим e_2 по базису $\mathbf{1}_A, e_1 + f_{i1}, i = \overline{1, r}$:

$$e_2 = a \cdot \mathbf{1}_A + \sum_{i=1}^r b_i \cdot (e_1 + f_{i1}).$$

Рассматривая проекции этого равенства на e_2, e_1 и $\mathbf{B}$, последовательно получаем

- (1) $a = 1$;
- (2) $0 = 1 + \sum_{i=1}^r b_i$;
- (3) $0 = \mathbf{1}_B + \sum_{i=1}^r b_i f_{i1}$.

Так как $2 \cdot \text{Tr}_A f_{i1} = \text{Tr}_A \mathbf{1}_B$, то (2) противоречит (3). Теорема 4 доказана.

В коммутативном случае алгебра, размерность которой не делится на 4, не может содержать двух ортогональных инволюций с нулевым следом. В общем случае ситуация иная. Групповая алгебра группы диэдра $\mathbb{C}[D_{2n+1}]$ содержит множество из $2n+1$ попарно ортогональных инволюций с нулевым следом, но ее размерность не делится на 4. Кроме того, в силу теоремы 4 эта алгебра неадамарова.

Отметим, что неизвестно, обладает ли адамаровым разложением прямая сумма двух матричных алгебр одинаковой нечетной размерности.

2.3. Адамаровы разложения в алгебрах матриц. Из теоремы 1 следует, что алгебра матриц нечетного порядка неадамарова. Довольно правдоподобной выглядит

ГИПОТЕЗА 4. Алгебра матриц четного порядка адамарова.

Гипотеза 4 равносильна утверждению о существовании в пространстве матриц четного порядка с нулевым следом базиса из попарно ортогональных инволюций. Пока лучшим продвижением в этом направлении является

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbf{A} \cong 2nM_p$ – блочно-диагональная подалгебра в M_{2np} . Тогда ортогональное дополнение (относительно формы следа) к $\mathbf{A}$ в M_{2np} содержит базис из попарно ортогональных инволюций. В частности, алгебра M_{2np} допускает ОР, в котором одна подалгебра изоморфна $2nM_p$, а остальные двумерны. При этом получаем, что если алгебра $2nM_p$ адамарова, то M_{2np} – также адамарова алгебра.

Предположим доказательству теоремы 5 две леммы, в которых рассматриваются частные случаи $p = 1$ и $n = 1$.

Когда $p = 1$, $\mathbf{A}$ – диагональная подалгебра и ортогональное дополнение к $\mathbf{A}$ – пространство матриц с нулевой диагональю.

ЛЕММА 2.2. В пространстве матриц четного порядка с нулевой диагональю существует базис из попарно ортогональных инволюций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E_{ij} – матричные единицы в M_{2n} , E – единичная матрица порядка $2n$. В доказательстве будем использовать 1-факторизацию полного графа K_{2n} .

Рассмотрим множество пар $T = \{(1, 2), (3, 4), \dots, (2n-1, 2n)\}$, разбивающее множество чисел $\{1, 2, \dots, 2n\}$. В терминах теории графов T является 1-фактором полного графа K_{2n} . Две инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & & \\ x_1^{-1} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & x_n \\ & & & x_n^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & & & \\ y_1^{-1} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & y_n \\ & & & y_n^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (**)$$

очевидным образом связанные с 1-фактором T , ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1} + \dots + \frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n}{x_n} = 0.$$

Легко видеть, что существование $2n$ попарно ортогональных инволюций вида (**) эквивалентно существованию квадратной матрицы $X = (x_{ij})$ порядка $2n$ такой, что

- (1) X – подходящая матрица [5], т.е. $X \cdot X^* = 2nE$, где $X^* = (x_{ij}^*)$, $x_{ij}^* = x_{ji}^{-1}$;
- (2) строки матрицы X разбиваются на пары взаимобратных, т.е. соответствующие компоненты строк в каждой паре – обратные числа.

Именно: матрицей X с указанными свойствами будет матрица, столбцы которой суть координаты $2n$ попарно ортогональных инволюций вида (**) в базисе $E_{1,2}, E_{2,1}, \dots, E_{2n-1,2n}, E_{2n,2n-1}$.

Рассмотрим матрицу C – таблицу комплексных неприводимых характеров циклической группы порядка $2n$. Ясно, что C – подходящая матрица. Кроме этого, ее строки образуют циклическую группу порядка $2n$ относительно покомпонентного умножения. Значит, только две строки матрицы C обратны сами себе. С точностью до перестановки компонент это будут строки $(1, 1, \dots, 1)$ и $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$. Заменим их на строки $(1, i, 1, i, \dots, 1, i)$ и $(1, -i, 1, -i, \dots, 1, -i)$. Так как новые строки лежат в подпространстве,

порожденном удаленными строками, то новая матрица C' является подходящей и удовлетворяет условию (2).

Таким образом, используя матрицу C' , по каждому 1-фактору можно построить $2n$ попарно ортогональных инволюций. При этом инволюции, соответствующие непересекающимся 1-факторам, будут ортогональны. Для завершения доказательства леммы остается сослаться на существование $2n - 1$ попарно непересекающихся 1-факторов [6] (такие системы 1-факторов называются 1-факторизациями полного графа K_{2n}).

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathbf{A} \cong M_p \oplus M_p$ – блочно-диагональная подалгебра в M_{2p} . Тогда ортогональное дополнение к $\mathbf{A}$ в M_{2p} содержит базис из попарно ортогональных инволюций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицы p -го порядка

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$. Положим $U_{st} = D^s P^t$. Тогда легко видеть, что матрицы $2p$ -го порядка

$$\begin{pmatrix} 0 & U_{st} \\ U_{st}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & iU_{st} \\ -iU_{st}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad s, t = \overline{0, p-1},$$

образуют искомый базис. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $\{\alpha_i\}$ – базис из попарно ортогональных инволюций в пространстве матриц $2n$ -го порядка с нулевой диагональю, существование которого доказано в лемме 2.2, $\{\beta_j\}$ – базис из попарно ортогональных инволюций, существование которого доказано в лемме 2.3. Тогда, рассматривая M_{2np} как тензорное произведение M_{2n} и M_p , получаем, что инволюции $\alpha_i \otimes \beta_j$ образуют искомый базис. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что подходящие матрицы использовались ранее при конструировании ОР простых алгебр Ли типа A_n , а 1-факторизации полного графа K_{2n} – при конструировании так называемых E -разложений простых алгебр Ли типа D_n [7].

§ 3. Сбалансированные системы идемпотентов

3.1. Определение, мотивировка и первые результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – некоторое множество идемпотентов в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда

- (1) $\mathcal{E}$ называется *равноугольной t -системой* (предполагаем $t < v$), если для каждого подмножества из t идемпотентов $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ выполняется $\text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{i_1} \cdots e_{i_t} = \lambda_t$ для некоторого фиксированного $\lambda_t \neq 0$;
- (2) $\mathcal{E}$ называется *максимальной t -системой*, если $\mathcal{E}$ – равноугольная t' -система для всех $t' \leq t$, максимальная по включению;

- (3) равноугольная t -система $\mathcal{E}$ называется *сбалансированной t -системой*, если выполняется *условие сбалансированности*: $e_1 + \dots + e_v = k \cdot \mathbf{1}_A$;
- (4) $\mathcal{E}$ называется *полной t -системой*, если $\mathcal{E}$ – равноугольная t' -система для всех $t' \leq t$, линейно порождающая алгебру $\mathbf{A}$.

Будем называть $\mathcal{E}$ *порождающей системой*, если идемпотенты из $\mathcal{E}$ порождают алгебру $\mathbf{A}$.

Обозначения этого определения сохраним на протяжении всего параграфа. Кроме этого, положим $\dim \mathbf{A} = b$, $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \lambda$.

Следующий пример является главной мотивировкой приведенного определения.

ПРИМЕР. Напомним определение комбинаторной t -схемы [8]. Под t -схемой с параметрами (v, k, λ_t) понимается совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств (называемых *блоками*) множества $\mathcal{V}$, состоящего из v точек, такая, что

- (1) каждое подмножество из $\mathcal{B}$ содержит k точек;
- (2) каждое подмножество из t точек содержится ровно в $\lambda_t > 0$ подмножествах из $\mathcal{B}$.

Матрица инцидентности A t -схемы, в которой строки отвечают точкам, а столбцы – блокам, имеет размеры $v \times b$, где b – число блоков. Рассматривая строки матрицы A как координаты элементов алгебры bM_1 в базисе из примитивных идемпотентов этой алгебры, получаем сбалансированную t -систему идемпотентов в bM_1 . При этом условие сбалансированности вытекает из (1), а условие равноугольности из (2). Таким образом, комбинаторные t -схемы отвечают сбалансированным t -системам идемпотентов в коммутативных алгебрах.

Обозначения v, k, λ, b, r являются стандартными в комбинаторике, поэтому имеет смысл сохранить их для аналогичных величин в общей ситуации. Будем называть их *параметрами* соответствующих t -систем. Кроме того, t -систему, состоящую из v идемпотентов со следом r , будем называть t -(v, r) *системой*.

ЛЕММА 3.1. Пусть e, e_1, e_2 – идемпотенты в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда

- (i) $\dim \mathbf{A}e = \dim e\mathbf{A} = \text{Tr}_A e$;
- (ii) $\dim \mathbf{A}(e_1 + e_2), \dim(e_1 + e_2)\mathbf{A} \leq \text{Tr}_A e_1 + \text{Tr}_A e_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (i) вытекает из разложения $\mathbf{A} = e\mathbf{A} \oplus e'\mathbf{A} = \mathbf{A}e \oplus \mathbf{A}e'$, где $e' = \mathbf{1}_A - e$, и равенств $e'e = ee' = 0$.

Пункт (ii) следует из (i), так как, например, $\dim(e_1 + e_2)\mathbf{A} \leq \dim e_1\mathbf{A} + \dim e_2\mathbf{A}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированная 1-система в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда

- (i) $vr = kb$;
- (ii) $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя Tr_A к обеим частям равенства

$$e_1 + \dots + e_v = k \cdot \mathbf{1}_A, \quad (3.1)$$

получаем (i). В силу леммы 3.1 из (3.1) следует

$$\dim k\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{A} = b \leq \dim e_1\mathbf{A} + \dots + \dim e_v\mathbf{A} = \text{Tr}_A e_1 + \dots + \text{Tr}_A e_v = vr.$$

Учитывая (i), отсюда выводим $k \geq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированная 2-система в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда

- (i) $\mathcal{E}$ – сбалансированная 1-система;
- (ii) $(v-1)\lambda = r(k-1)$ и $k \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножая условие сбалансированности (3.1) справа на e_i , получаем $e_1 e_i + \dots + e_i^2 + \dots + e_v e_i = k \cdot e_i$. Отсюда следует, что

$$e_1 e_i + \dots + e_{i-1} e_i + e_{i+1} e_i + \dots + e_v e_i = (k-1) \cdot e_i. \quad (3.2)$$

Применяя Tr_A к (3.2), имеем $(v-1)\lambda = (k-1) \text{Tr}_A e_i$. Так как $\lambda \neq 0$, то $k \neq 1$, и значит, $\text{Tr}_A e_i = \text{const} = r \neq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированная t -система в алгебре $\mathbf{A}$ и $t > 2$. Тогда

- (i) если $t = 3$, то $\mathcal{E}$ – сбалансированная 2-система и $\lambda_3(v-2) = \lambda_2(k-2)$, при этом $k \neq 2$;
- (ii) если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна, то $\mathcal{E}$ – сбалансированная t' -система для всех $t' < t$ и

$$\lambda_{t-1}(k-t+1) = \lambda_t(v-t+1),$$

при этом $k \geq t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Домножая (3.2) слева на e_j , $j \neq i$, и вычитая из обеих частей $e_j e_i$, получаем

$$\sum_{s \neq j, i} e_j e_s e_i = (k-2) \cdot e_j e_i. \quad (3.3)$$

Применяя Tr_A к (3.3), имеем $\lambda_3(v-2) = (k-2) \text{Tr}_A e_j e_i$. Так как $\lambda_3 \neq 0$, то $k \neq 2$, и значит, $\text{Tr}_A e_j e_i = \text{const} = \lambda_2 \neq 0$.

(ii) Достаточно доказать, что $\mathcal{E}$ – сбалансированная $(t-1)$ -система. Пусть алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна, тогда для $t-1$ различных идемпотентов имеем

$$\begin{aligned} e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} &= \frac{1}{k} \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} (e_1 + \dots + e_v) \\ &= \frac{t-1}{k} \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} + \frac{1}{k} \cdot \sum_{s \neq i_1, \dots, i_{t-1}} e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} e_s. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применяя Tr_A к (3.4), получаем $(k-t+1) \text{Tr}_A e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} = \lambda_t(v-t+1)$. Так как $\lambda_t \neq 0$, то $k \neq t-1$ и $\text{Tr}_A e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} = \text{const} = \lambda_{t-1} \neq 0$, т.е. $\mathcal{E}$ – сбалансированная $(t-1)$ -система.

Неравенство $k \geq t$ следует из того, что k – целое и $k \neq t-1, t-2, \dots, 1$. Лемма доказана.

Следующая лемма содержит обобщение известного неравенства Фишера [4].

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированная 2-система в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда

- (i) $r \neq \lambda$;
- (ii) $r + \lambda(v - 1) \neq 0$;
- (iii) $\mathcal{E}$ – линейно независимая система, в частности, $v \leq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если $r = \lambda$, то из леммы 3.3 (ii) следует, что $v = k$. Значит, в силу леммы 3.3 (i) и леммы 3.2 (i) получаем $r = b$. Так как e_i – идемпотенты, то из леммы 3.1 (i) вытекает, что $e_1 = \dots = e_v = \mathbf{1}_A$. Противоречие, так как $\mathcal{E}$ – система из, по крайней мере, двух различных идемпотентов.

(ii) Домножая условие сбалансированности (3.1) на e_i (справа или слева) и применяя к получившемуся равенству Tr_A , получаем $r + \lambda(v - 1) = kr \neq 0$.

(iii) Вычисляя определитель Грама $G(e_1, \dots, e_v)$, находим

$$G(e_1, \dots, e_v) = \det(\text{Tr}_A e_i e_j) = \begin{vmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{vmatrix} = (r - \lambda)^{v-1} (r + \lambda(v - 1)).$$

В силу доказанного в предыдущих пунктах $G(e_1, \dots, e_v) \neq 0$. Значит, $\mathcal{E}$ – линейно независимая система. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Имеют место следующие включения классов 2-систем идемпотентов:

равноугольные $\supset$ максимальные $\supset$ сбалансированные $\supset$ полные.

В частности, полная 2-система является базисом исходной алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждаются только последние два включения.

1) Докажем включение *максимальные $\supset$ сбалансированные*.

Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – сбалансированная 2-система в алгебре $\mathbf{A}$. Предположим, что $\mathcal{E}$ – не максимальна. Тогда существует идемпотент $e \in \mathbf{A}$ такой, что $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{e\}$ – равноугольная 2, 1-система. Домножив условие сбалансированности (3.1) для системы $\mathcal{E}$ на e и применив к полученному равенству Tr_A , получим $v\lambda = kr$. Так как в силу леммы 3.3 (ii) $(v - 1)\lambda = r(k - 1)$, то отсюда выводим $r = \lambda$. Это противоречит лемме 3.5 (i).

2) Докажем включение *сбалансированные $\supset$ полные*.

Пусть $\mathcal{E}$ – полная 2-система в алгебре $\mathbf{A}$, $\mathcal{E}'$ – максимальная линейно независимая подсистема в $\mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E}'$ – полная 2-система, являющаяся базисом в $\mathbf{A}$. Легко видеть, что все коэффициенты в разложении $\mathbf{1}_A$ по базису $\mathcal{E}'$ одинаковы. Значит, $\mathcal{E}'$ – сбалансированная 2-система и в силу 1) $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Теорема доказана.

Полные 2-системы в коммутативных алгебрах отвечают симметричным 2-схемам. Последние занимают центральное место в комбинаторном анализе. Особенно актуальна проблема существования симметричных 2-схем с определенными параметрами. Отметим здесь известную теорему Брука–Райзера–Човлы [4]. Каких-либо общих результатов такого же характера для полных 2-систем в произвольных алгебрах пока не получено. Было бы интересно выяснить, какие из матричных алгебр допускают полные 2-системы идемпотентов. Вопрос этот открыт уже в случае M_3 .

Отметим, что не существует полных t -систем при $t > 2$. Так как если $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ – полная 3-система, то в разложении любого произведения $e_i e_j$ по базису $\mathcal{E}$ все коэффициенты будут одинаковы. Это значит, что $e_i e_j = \alpha \cdot \mathbf{1}_A$ для некоторого числа $\alpha \neq 0$. Таким образом, e_i, e_j – обратимые элементы. Противоречие.

3.2. Ортогональные разложения и сбалансированные 2-системы. Если $\mathcal{D}$ – однородное ОР коммутативной алгебры vM_1 , то в силу теоремы 1 все примитивные идемпотенты подалгебр из $\mathcal{D}$ имеют одинаковый след. В этом случае, как показано в [1], рассматривая примитивные идемпотенты алгебры $\mathbf{A}$ как точки, а примитивные идемпотенты подалгебр из $\mathcal{D}$ как блоки, разложению $\mathcal{D}$ отвечает 2-схема¹ $\mathcal{S}$, которой, в свою очередь, согласно примеру п. 3.1 соответствует сбалансированная 2-система идемпотентов в алгебре bM_1 , где b – число блоков в $\mathcal{S}$. Описанное соответствие удобно интерпретировать, используя матрицу инцидентности A 2-схемы $\mathcal{S}$. Столбцы A суть координаты примитивных идемпотентов подалгебр разложения $\mathcal{D}$ алгебры vM_1 , а строки A – это координаты идемпотентов сбалансированной 2-системы в алгебре bM_1 .

Кроме указанного выше, существуют иные способы связывать некоторые ортогональные разложения и сбалансированные 2-системы. Например, по адямарову разложению алгебры $4nM_1$ можно построить полную 2-систему (т.е. симметричную 2-схему) в алгебре $(4n - 1)M_1$. А однородному ОР типа nM_1 алгебры n^2M_1 (это аффинная плоскость порядка n) соответствует полная 2-система в алгебре $(n^2 + n + 1)M_1$ (проективная плоскость). Последний пример имеет также следующий аналог.

ТЕОРЕМА 7. *Существует взаимнооднозначное соответствие между однородными ОР типа nM_1 алгебры M_n и полными 2-системами идемпотентов со следом $n + 1$ в алгебре $(n + 1)M_1 \oplus M_n$.*

Нам понадобится

ЛЕММА 3.6. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ – примитивные идемпотенты в M_n такие, что $e_1 + \dots + e_n = E$, где E – единичная матрица n -го порядка. Тогда $e_i e_j = e_j e_i = 0$ при $i \neq j$ и идемпотенты e_i порождают подалгебру, изоморфную nM_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся двумя хорошо известными свойствами примитивных идемпотентов в M_n :

- (a) $\dim e_i M_n = n$;
- (b) $\dim e_i M_n e_j = 1$.

Из этих свойств следует

$$e_i M_n = e_i M_n (e_1 + \dots + e_n) = e_i M_n e_1 \oplus \dots \oplus e_i M_n e_n. \quad (***)$$

Так как $0 = e_i (E - e_i) = e_i e_1 + \dots + e_i e_{i-1} + e_i e_{i+1} + \dots + e_i e_n$, то из (***) получаем $e_i e_j = 0$. Лемма доказана.

¹Если $\mathcal{D}$ – адямарово разложение, то получаем 3-схему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Положим $\mathbf{A} = (n+1)\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_n$ и будем отождествлять алгебры $(n+1)\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_n$ с их каноническими образами в $\mathbf{A}$. Обозначим через E и F единичные элементы, соответственно, в $\mathbf{M}_n$ и в $(n+1)\mathbf{M}_1$.

Пусть подалгебры $H_0, H_1, \dots, H_n$, изоморфные $n\mathbf{M}_1$, образуют однородное ОР алгебры $\mathbf{M}_n$ и $\text{Pr}(H_i) = \{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$ – множество примитивных идемпотентов в H_i . Пусть $\text{Pr}((n+1)\mathbf{M}_1) = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$. Тогда легко видеть, что идемпотенты $F, e_{ij} + f_i, i = \overline{0, n}, j = \overline{1, n}$, образуют полную 2-систему.

Обратно, пусть $\mathcal{E}$ – полная 2-система идемпотентов со следом $(n+1)$ в $\mathbf{A}$. Если $F \notin \mathcal{E}$, то, так как в силу условия сбалансированности каждый идемпотент f_i должен являться слагаемым одного и того же количества идемпотентов из $\mathcal{E}$, получаем, что $n+1$ делит $n^2 + n + 1$. Противоречие показывает, что $F \in \mathcal{E}$. Тогда каждый f_i является слагаемым ровно в n идемпотентах из $\mathcal{E}$: $f_i + e_{i1}, \dots, f_i + e_{in}$, где $e_{ij} \in \text{Pr}(\mathbf{M}_n)$. Положим $E_i = e_{i1} + \dots + e_{in}$. Тогда $\text{Tr}_A E_i e_{st} = \text{Tr}_A E e_{st}$ при всех s, t . Так как в силу полноты $\mathcal{E} e_{st}$ линейно порождают $\mathbf{M}_n$, то в силу невырожденности формы следа на $\mathbf{M}_n$ получаем, что $E_i = E$. В силу леммы 3.6 отсюда следует, что подалгебры $H_i = \langle e_{ij}, j = \overline{1, n} \rangle_{\mathbb{C}}$ образуют однородное ОР типа $n\mathbf{M}_1$ алгебры $\mathbf{M}_n$. Теорема 7 доказана.

3.3. Сбалансированные t -системы и t -транзитивные группы подстановок. Пусть G – t -транзитивная группа подстановок степени $n, n > t \geq 2, G_i$ – стабилизатор точки, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что в каждой из подгрупп G_i выбрана подгруппа H_i так, что

- 1) подгруппы $H_1, \dots, H_n$ образуют G -орбиту относительно действия сопряжением;
- 2) для любых различных индексов $i_1, \dots, i_t$ подмножества $H_{i_1} \cdots H_{i_t} = \{h_{i_1} \cdots h_{i_t} : h_{i_j} \in H_{i_j}\}$ сопряжены в G .

Очевидно, эти условия выполняются, если H_i – характеристическая подгруппа в G .

Рассмотрим идемпотенты

$$e_i = \frac{1}{h} \sum_{g \in H_i} g \in \mathbb{C}[G],$$

где h – порядок подгрупп H_i . Пусть $\varphi: G \rightarrow \mathbf{M}_d$ – неприводимое представление группы G с характером χ такое, что $H_i \not\subseteq \ker \varphi$ и

$$\sum_{g \in H_i} \chi(g) \neq 0.$$

Тогда множество идемпотентов $\mathcal{E} = \{\varphi(e_i), i = 1, \dots, n\}$ в силу 2) является равноугольной t -системой, а в силу 1) удовлетворяет условию сбалансированности, т.е. $\mathcal{E}$ – сбалансированная t -система в $\mathbf{M}_d$.

Отметим, что если взять $H_i = G_i$, условия 1) и 2) окажутся выполненными. Кроме того, подстановочный характер π группы G представляется в виде суммы $\pi = 1_G + \chi$, где 1_G – единичный, а χ – неприводимый характеры группы G . Пусть $\varphi: G \rightarrow \mathbf{M}_{n-1}$ – представление, отвечающее χ . Тогда получаем

$$\sum_{g \in G_i} \pi(g) = 2|G_i| \implies \sum_{g \in G_i} \chi(g) = |G_i|.$$

Значит, $\text{tr } \varphi(e_i) = 1$ и идемпотенты $\varphi(e_i)$, $i = \overline{1, n}$, образуют сбалансированную t -($n, n-1$) систему в M_{n-1} .

Рассматривая в качестве G симметрическую группу S_{n+1} в ее каноническом подстановочном представлении степени $n+1$, получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 8. *В M_n при $n \geq 2$ существует система идемпотентов, которая является сбалансированной t -($n+1, n$) системой при всех $t \leq n$.*

ПРИМЕРЫ. Сбалансированные t -системы в M_2 и M_3 .

1) Из канонического подстановочного представления степени 3 симметрической группы S_3 , полагая $H_i = G_i \cong S_2$, получаем 2-(3, 2) систему идемпотентов $\mathcal{E}_1$ в M_2 :

$$f_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведенная система единственна с точностью до сопряженности в $\text{Aut } M_2$ и имеет группу автоморфизмов $\text{Aut } \mathcal{E}_1 \cong S_3$.

2) Полная 2-(4, 2) система $\mathcal{E}_2$ в M_2 :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2\varepsilon^2 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Приведенная система единственна с точностью до сопряженности в $\text{Aut } M_2$. Группа $\text{Aut } \mathcal{E}_2$ не может быть изоморфна S_4 , так как, например, идемпотенты f_1 и f_2 порождают алгебру M_2 , и значит, $\text{Aut } \mathcal{E}_2$ не содержит транспозиции, переставляющей f_3 и f_4 . С другой стороны, $\text{Aut } \mathcal{E}_2$ содержит сопряжения матрицами

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

которые порождают в $\text{Aut } M_2$ подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_4 . Следовательно, $\text{Aut } \mathcal{E}_2 \cong A_4$.

3) Из канонического подстановочного представления степени 4 симметрической группы S_4 , полагая $H_i = G_i \cong S_3$, получаем сбалансированную 3-(4, 3) систему идемпотентов $\mathcal{E}_3$ в M_3 :

$$f_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\text{Aut } \mathcal{E}_3 \cong S_4$.

4) Рассмотрим знакопеременную группу A_5 и ее 2-транзитивное представление степени 6. В качестве подгрупп H_i возьмем семейство силовских 5-подгрупп. Используя линейное представление A_5 степени 3 (любое из двух), получим 2-(6, 3) систему идемпотентов $\mathcal{E}_4$ в M_3 . Можно показать, что $\text{Aut } \mathcal{E}_4 \cong A_5$.

Список литературы

1. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения полупростых ассоциативных алгебр // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 1. С. 9–14.
2. *Иванов Д. Н.* Теорема о подалгебрах, образующих ортогональное разложение ассоциативной алгебры // УМН. 1989. Т. 44. № 2. С. 231–232.
3. *Иванов Д. Н.* Однородные ортогональные разложения коммутативных алгебр и матрицы Адамара // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 1107–1110.
4. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
5. *Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А.* Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n) // Труды МИАН. 1981. Т. 158. С. 105–120.
6. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
7. *Kostrikin A. I., Pham Huu Tiep.* Orthogonal decompositions and integral lattices. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
8. *Камерон П., ван Линт Дж.* Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М.: Наука, 1980.

Тверской государственный университет
E-mail: Dmitry.Ivanov@tversu.ru

Поступила в редакцию
26.02.1998