Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Капцов, Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей,
Матем. сб., 1998, том 189, номер 12, 103–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 04:39:32

УДК 517.95

О. В. Капцов

Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей

Работа посвящена построению дифференциальных связей, совместных с уравнениями в частных производных. Для нахождения дифференциальных связей используются некоторые линейные определяющие уравнения, зависящие от параметров. Эти уравнения обобщают классические определяющие уравнения, служащие для нахождения допускаемых операторов Ли. В качестве приложений данного подхода рассмотрены уравнения идеальной несжимаемой жидкости и нелинейной теплопроводности.

Библиография: 13 названий.

Введение

Исследования переопределенных систем уравнений с частными производными восходят к прошлому веку. Хорошо известно, что значительное число точных решений уравнений можно получить, выделяя эти решения с помощью дифференциальных связей [1], [2]. Это обстоятельство является одной из причин интереса, проявляемого к поиску дифференциальных связей. Проблема нахождения всех дифференциальных связей, совместных с некоторыми уравнениями, может оказаться сложнее решения этих уравнений. Поэтому приходится ограничиваться поиском только определенных классов связей, причем соответствующие классы необходимо заранее задавать, исходя из каких-либо дополнительных соображений.

В данной работе для построения дифференциальных связей применяются некоторые линейные уравнения. Эти уравнения обобщают классические определяющие уравнения, используемые для нахождения допускаемых инфинитезимальных операторов Ли [3]. Ранее в [4] были введены B -определяющие уравнения, которые также использовались для построения дифференциальных связей. B -определяющие уравнения содержат некоторые функции, подлежащие определению одновременно с решением самих уравнений, а уравнения, рассматриваемые в настоящей работе, могут включать только произвольные параметры. Поэтому находить решения последних уравнений проще.

Необходимость изучения более общих структур, чем классические определяющие уравнения, можно проиллюстрировать следующим примером. Несложно показать, что уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{a}{x}u_x + \frac{b}{y}u_y = \sin u$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 96-0770) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00047).

при $ab \neq 0$ не допускает нетривиальных преобразований. Однако это уравнение имеет решение вида

$$u = V(x^2 + y^2).$$

Функция V удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$4\xi V'' + 2(a + b + 2)V' = \sin V, \quad (0.1)$$

где $\xi = x^2 + y^2$. Обычно такого типа решения связаны с инвариантностью уравнений относительно преобразований вращения [3]. Рассмотренные в данной работе линейные определяющие уравнения позволяют найти дифференциальные связи, задающие решение (0.1).

Статья имеет следующую структуру. В первом параграфе вводятся необходимые понятия, в том числе понятие инвариантного многообразия системы эволюционных уравнений с двумя независимыми переменными, доказывается теорема об инвариантных многообразиях. В теореме получено нелинейное определяющее уравнение, которому должны подчиняться все инвариантные многообразия (зависящие от производных выше четвертого порядка) уравнения

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}).$$

Вид этого нелинейного определяющего уравнения подсказывает структуру линейных определяющих уравнений (кратко ЛОУ), решения которых также позволяют находить инвариантные многообразия. Рассмотрены различные примеры инвариантных многообразий, явным или неявным образом присутствующие в работах [5]–[7]. Функции, задающие эти инвариантные многообразия, удовлетворяют соответствующим ЛОУ. Второй параграф посвящен построению решений ЛОУ для уравнения на функцию тока

$$u_{xx} + u_{rr} - \frac{1}{r} u_r = F(u).$$

Доказывается, что ЛОУ имеет более широкое множество решений, чем классические определяющие уравнения. В заключительном параграфе найдены решения ЛОУ для известного уравнения нелинейной теплопроводности

$$u_t = (u^m u_x)_x,$$

доказывается, что ЛОУ имеет нетривиальные решения, зависящие от производных выше второго порядка, при особых показателях m . Эти показатели могут принимать значения $0, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

§1. Основные понятия и теорема об инвариантных многообразиях. Примеры

Сначала введем некоторые понятия и обозначения, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть S – система уравнений с частными производными относительно

функций $u^1, \dots, u^m$, зависящих от двух переменных t, x . Обозначим через $[S]$ систему S и ее дифференциальные следствия относительно x . Для операторов полного дифференцирования по t и x используются обозначения D_t и D_x [8].

Рассмотрим систему эволюционных уравнений E :

$$u_t^i = F^i(t, x, u^1, \dots, u^m, u_x^1, u_x^2, \dots), \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.1)$$

Правые части системы (1.1) могут зависеть от производных по x любого порядка. Для простоты функции F^i считаются бесконечно дифференцируемыми. Дополним систему E дифференциальными связями H :

$$h_j(t, x, u^1, \dots, u^m, u_x^1, u_x^2, \dots) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.2)$$

где $p \leq m$. Гладкие функции h_j также могут зависеть от производных по x любого порядка, но не должны содержать производных по t .

Если некоторое равенство $G = 0$ выполняется на множестве M , то будем писать

$$G|_M = 0.$$

Согласно [2] дифференциальные связи H задают инвариантное многообразие системы E , если имеют место равенства

$$D_t(h_j)|_{[E] \cap [H]} = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.3)$$

Если число дифференциальных связей равно m и они разрешены относительно старших производных от всех функций $u^1, \dots, u^m$, то, как показано в [2], из условия инвариантности (1.3) следует существование гладкого решения системы (1.1), (1.2).

Условие инвариантности (1.3) можно переформулировать в виде некоторых нелинейных уравнений. Докажем соответствующую теорему для уравнения

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}) \quad (1.4)$$

и дифференциальной связи

$$h = u_n + g(t, x, u, \dots, u_{n-1}) = 0, \quad (1.5)$$

где $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$. Уравнение (1.4) обозначим через U , а дифференциальную связь (1.5) — через H .

ТЕОРЕМА 1. Пусть задано уравнение (1.4). Дифференциальная связь (1.5) при $n > 4$ является инвариантным многообразием для (1.4) тогда и только тогда, когда функция h на множестве $[U]$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} D_t(h) = & F_{u_2} D_x^2(h) + (F_{u_1} + n D_x(F_{u_2})) D_x(h) \\ & + \left(F_u + n D_x(F_{u_1}) - h_{u_{n-1}} D_x(F_{u_2}) + \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u_2}) \right. \\ & \left. + F_{u_2} h h_{u_{n-1} u_{n-1}} - 2 F_{u_2} D_x(h_{u_{n-1}}) \right) h. \end{aligned} \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h удовлетворяет уравнению (1.6). Все слагаемые в правой части (1.6) обращаются в нуль на множестве $[H]$. Значит,

$$D_t(h)|_{[U] \cap [H]} = 0,$$

т.е. (1.5) является инвариантным многообразием для (1.4). Докажем теперь обратное утверждение. Пусть (1.5) является инвариантным многообразием. Легко видеть, что

$$D_t(h)|_{[U]} \simeq D_x^n(F) + h_{u_{n-1}} D_x^{n-1}(F) + h_{u_{n-2}} D_x^{n-2}(F). \quad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем запись $\alpha \simeq \beta$ означает, что разность $\alpha - \beta$ не содержит членов с u_n, u_{n+1}, u_{n+2} . Поскольку $n > 4$, то слагаемые, стоящие в правой части (1.7), можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{u_{n-2}} D_x^{n-2}(F) &\simeq u_n F_{u_2} h_{u_{n-2}}, \\ h_{u_{n-1}} D_x^{n-1}(F) &\simeq h_{u_{n-1}} (u_n (F_{u_1} + (n-1) D_x(F_{u_2})) + u_{n+1} F_{u_2}), \\ D_x^n(F) &= D_x D_x^{n-1}(F) \simeq F_{u_2} u_{n+2} + (F_{u_1} + n D_x(F_{u_2})) u_{n+1} \\ &\quad + \left(F_u + n D_x(F_{u_1}) + \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u_2}) \right) u_n. \end{aligned}$$

Значит, соотношение (1.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D_t(h)|_{[U]} &\simeq F_{u_2} u_{n+2} + u_{n+1} (F_{u_1} + n D_x(F_{u_2}) + F_{u_2} h_{u_{n-1}}) \\ &\quad + \left(F_u + \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u_2}) + n D_x(F_{u_1}) \right. \\ &\quad \left. + h_{u_{n-1}} (F_{u_1} + n D_x(F_{u_2})) + F_{u_2} h_{u_{n-2}} \right) u_n. \end{aligned}$$

Теперь представим последнее выражение через $h, D_x(h), D_x^2(h)$. Несложно видеть, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} D_x(h) &\simeq u_{n+1} + u_n h_{u_{n-1}}, \\ D_x^2(h) &\simeq u_{n+2} + u_{n+1} h_{u_{n-1}} + u_n (h_{u_{n-2}} + 2 D_x(h_{u_{n-1}}) - u_n h_{u_{n-1}} u_{n-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, разность

$$D_t(h)|_{[U]} - F_{u_2} D_x^2(h)$$

не содержит членов с u_{n+2} , а разность

$$D_t(h)|_{[U]} - F_{u_2} D_x^2(h) - (F_{u_1} + n D_x(F_{u_2})) D_x(h) \quad (1.8)$$

не содержит членов с u_{n+2} и u_{n+1} . Для того чтобы формула (1.8) не содержала членов с u_n , необходимо из нее вычесть некоторое выражение вида $[ru_n + q]h$.

Прямым вычислением проверяется, что функция

$$\gamma = D_t(h)|_{[U]} - M(h),$$

где

$$\begin{aligned} M(h) = & F_{u_2} D_x^2(h) + [F_{u_1} + n D_x(F_{u_2})] D_x(h) \\ & + \left(F_u + n D_x(F_{u_1}) - h_{u_{n-1}} D_x(F_{u_2}) + \frac{n(n-1)}{2} D_x^2(F_{u_2}) \right. \\ & \left. + F_{u_2} h h_{u_{n-1} u_{n-1}} - 2 F_{u_2} D_x(h_{u_{n-1}}) \right) h \end{aligned}$$

не содержит членов с u_n , т.е. $\gamma \simeq 0$. Покажем, что γ равна нулю.

Поскольку H — инвариантное многообразие, то

$$D_t(h)|_{[U] \cap [H]} = 0.$$

Значит, на множестве $[U] \cap [H]$ справедливо равенство

$$M(h) + \gamma = 0.$$

Очевидно, функция $M(h)$ обращается в нуль на этом множестве, поэтому

$$\gamma|_{[U] \cap [H]} = 0.$$

Так как γ не зависит от $u_t, u_{tx}, \dots$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\gamma|_{[H]} = 0. \quad (1.9)$$

Как было показано ранее, $\gamma \simeq 0$, т.е. γ может зависеть только от $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots$. С другой стороны, h зависит от u_n . Значит, соотношение (1.9) выполняется только тогда, когда $\gamma = 0$.

Используя рассуждения, подобные приведенным в доказательстве теоремы 1, можно вывести уравнения типа (1.6), соответствующие уравнениям порядка выше второго, а также системам дифференциальных уравнений. Однако решать такие уравнения трудно, поэтому для поиска инвариантных многообразий вместо нелинейных уравнений типа (1.6) предлагается использовать похожие на них линейные уравнения.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \dots, u_N), \quad (1.10)$$

где $u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейным определяющим уравнением* (или просто *ЛОУ*), соответствующим (1.10), называется уравнение вида

$$D_t(h) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i b_{ik} D_x^{i-k}(F_{u_{N-k}}) D_x^{N-i}(h), \quad (1.11)$$

где b_{ik} – некоторые константы. Уравнение (1.11) должно выполняться на решениях (1.10).

Очевидно, что если h удовлетворяет уравнению (1.11), то $h = 0$ есть инвариантное многообразие для (1.10). Множество решений уравнения (1.11) при фиксированных константах b_{ik} образует векторное пространство. Выбор уравнения (1.11) обусловлен тем, что оно близко по форме к уравнению (1.6) и классические определяющие уравнения, служащие для нахождения допускаемых операторов Ли [3], являются частным случаем (1.11). Кроме того, как показывают приводимые в работе результаты, решать уравнение (1.11) достаточно просто, а его решения порождают нетривиальные инвариантные многообразия. По аналогии с (1.11) можно написать некоторые ЛОУ, соответствующие достаточно общей системе уравнений с частными производными [9]. Однако выбор того или иного определяющего уравнения может быть сделан на основе большого числа конкретных результатов.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением эволюционных уравнений (1.10) и уравнений вида

$$u_{tt} = F(t, x, u, u_1, \dots, u_N). \quad (1.12)$$

ЛОУ, соответствующее (1.12), имеет вид:

$$D_{tt}(h) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i b_{ik} D_x^{i-k}(F_{u_{N-k}}) D_x^{N-i}(h). \quad (1.13)$$

Перейдем к рассмотрению примеров. ЛОУ позволяют с единой точки зрения пояснить происхождение некоторых инвариантных многообразий, найденных в работах [5]–[7]. Интересно отметить, что в ряде примеров, приводимых ниже, константы b_{ik} , входящие в уравнения (1.11) и (1.13), выражаются через биномиальные коэффициенты по формуле

$$b_{ik} = C_n^{i-k}, \quad (1.14)$$

где n – порядок старшей производной, входящей в h .

ПРИМЕР 1. Для уравнения

$$u_t = uu_{xx} - \frac{3}{4}u_x^2 + u^2$$

ЛОУ с коэффициентами b_{ik} , задаваемыми формулами (1.14), имеет вид:

$$D_t(h) = u D_x^2(h) + \left(n - \frac{3}{2}\right) u_x D_x(h) + \left(2u + \left(1 - \frac{3n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right) u_{xx}\right) h.$$

При $n = 5$ функция $h = u_5 + 5u_3 + 4u_1$ является его решением. Приравняв h к нулю, получаем инвариантное многообразие, приведенное в работе [7].

ПРИМЕР 2. Для уравнения

$$u_t = uu_{xx} - \frac{2}{3}u_x^2 + a_1u_x + a_2u \quad (1.15)$$

ЛОУ с коэффициентами b_{ik} , задаваемыми формулами (1.14), имеет вид:

$$D_t(h) = uD_x^2(h) + \left(a_1 - \frac{4}{3} + n\right)u_xD_x(h) + \left(a_2 + \left(1 - \frac{4n}{3} + \frac{n(n-1)}{2}\right)u_{xx}\right)h.$$

При $n = 4$ это ЛОУ имеет решение $h = u_4$. Значит, инвариантное многообразие задается уравнением $u_{xxxx} = 0$. Следовательно, уравнение (1.15) обладает решением вида

$$u = \sum_{i=0}^3 r_i(t)x^i.$$

Это представление для решения было найдено в работе [6]. Дифференциальные уравнения на функции r_i получаются в результате подстановки этого представления в уравнение (1.15).

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение из работы [7]

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{u + u_x}.$$

В качестве ЛОУ, соответствующего данному уравнению, берем

$$D_t(h) = D_x^2(h) - \frac{1}{(u + u_x)^2}D_x(h) + \left(\frac{1}{(u + u_x)^2} + \frac{2(u_{xx} + u_x)}{(u_x + u)^3}\right)h.$$

Несложно проверить, что $h = u_{xx} - u$ удовлетворяет этому уравнению. Приравняв к нулю функцию h и находя решения получающегося уравнения, приходим к следующему представлению

$$u = r_1(t) \exp(x) + r_2(t) \exp(-x).$$

Подставляя представление в исходное уравнение, можно получить два дифференциальных уравнения на r_1, r_2 и решить их (см. [7]).

ПРИМЕР 4. Согласно (1.13) ЛОУ, соответствующее уравнению

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x^2 + u^2,$$

имеет вид:

$$D_{tt}(h) = D_x^2(h) + 2u_xD_x(h) + (2u + 2nu_{xx})h$$

(коэффициенты b_{ik} выбраны, исходя из соотношения (1.14)). При $n = 3$ это уравнение имеет решение $h = u_{xxx} + u_x$. Приравняв h к нулю и находя решения получающегося уравнения, приходим к представлению

$$u = r_0(t) + r_1(t) \cos x + r_2(t) \sin x.$$

Это представление было найдено в [5].

§ 2. Решения линейного определяющего уравнения для уравнения вращательно-симметричного течения идеальной жидкости

Рассмотрим уравнение на функцию тока u

$$u_{xx} + u_{rr} - \frac{1}{r} u_r = F(u), \quad (2.1)$$

функция F считается гладкой. Как известно [10], это уравнение описывает некоторые классы установившихся вращательно-симметричных течений идеальной несжимаемой жидкости. Групповой анализ этого уравнения был проделан в [11]. Было показано, что уравнение (2.1) инвариантно только относительно преобразования переноса по x , если функция F не равна cu^k или $c \exp(ku)$, $c, k \in \mathbb{R}$.

С помощью ЛОУ можно найти нетривиальные дифференциальные связи, совместные с (2.1) при произвольной функции F . ЛОУ, соответствующее (2.1), имеет вид:

$$D_x^2(h) + D_r^2(h) + \frac{b_1}{r} D_r(h) - \left(b_2 F' + \frac{b_3}{r^2} \right) h = 0, \quad (2.2)$$

$b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Это уравнение должно выполняться в силу (2.1). Будем искать решения уравнения (2.2) в виде

$$h = a^1 u_x + a^2 u_r + a^3, \quad (2.3)$$

где функции a^i могут зависеть от x, r, u , но a^1 и a^2 не должны одновременно тождественно равняться нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференцируемую функцию F , заданную на открытом множестве в $\mathbb{R}$, будем называть *функцией общего типа*, если она не удовлетворяет ни одному линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с полиномиальными коэффициентами.

ЛЕММА 1. *Для существования нетривиального решения ЛОУ вида (2.3) необходимо и достаточно, чтобы $b_2 = 1$ и константа b_3 выражалась через b_1 одной из формул*

$$(a) \quad b_3 = -\frac{b_1^2 - 2b_1 - 3}{4}, \quad (b) \quad b_3 = -\frac{(b_1 - 1)^2}{4}.$$

Если функция F – общего типа, то в случае (b) пространство решений уравнения (2.2) имеет базис:

$$h_1 = (-ru_x + xu_r)r^{-(b_1+1)/2}, \quad h_2 = u_r r^{-(b_1+1)/2},$$

а в случае (a) множество решений одномерно:

$$cu_x r^{-(b_1+1)/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Способ решения уравнения (2.2) аналогичен стандартному методу решения определяющих уравнений, применяемому в групповом анализе дифференциальных уравнений [3]. Сначала производную u_{xx} , встречающуюся в левой части уравнения (2.2), выражаем через

$$-u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + F. \quad (2.4)$$

Производные u_{xxr} , u_{xxx} можно выразить с помощью дифференцирования выражения (2.4). В результате левая часть уравнения (2.2) станет полиномом относительно u_{rr} , u_{xr} , u_r , u_x . Все коэффициенты при этих переменных должны обратиться в нуль. Приравнявая к нулю коэффициенты при $u_{rr}u_r$, $u_{rr}u_x$, u_x^2 , получаем три уравнения

$$a_u^2 = a_u^1 = a_{uu}^3.$$

Коэффициенты при u_r и u_x имеют вид:

$$a^2 F'(1 - b_2) + M_1, \quad a^1 F'(1 - b_2) + M_2,$$

здесь M_1 , M_2 — некоторые выражения, не зависящие от u . Поскольку функция F — общего типа и a^1 , a^2 не могут одновременно обращаться в нуль, то $b_2 = 1$.

Члены в левой части уравнения (2.2), не зависящие от производных, представляются в виде

$$(2a_x^1 + a_u^3)F - a^3 F' + M_3,$$

здесь M_3 — выражение, не содержащее F . Так как функция F — общего типа, то

$$a^3 = a_x^1 = 0. \quad (2.5)$$

Приравнявая к нулю коэффициент при u_{rr} , получаем уравнение

$$2ra_r^2 + (b_1 + 1)a^2 = 0.$$

Значит,

$$a^2 = c(x)r^{-(b_1+1)/2}. \quad (2.6)$$

Если приравнять к нулю коэффициент при u_{rx} , то возникнет уравнение

$$a^1(b_1 + 1) + 2r(a_x^2 + 2a_r^1) = 0. \quad (2.7)$$

Поскольку согласно (2.5) a^1 не зависит от x , то с помощью (2.6), (2.7) находим

$$a^1 = (-c_1 r + c_0)r^{-(b_1+1)/2}, \quad a^2 = (c_1 x + c_2)r^{-(b_1+1)/2}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты при xu_r и u_r имеют вид:

$$-c_1(4b_3 + (b_1 - 1)^2), \quad -c_2(4b_3 + (b_1 - 1)^2).$$

Значит, либо $b_3 = -(b_1 - 1)^2/4$, либо $c_1 = c_2 = 0$.

Пусть $b_3 = -(b_1 - 1)^2/4$. Приравняв к нулю коэффициент при u_x , устанавливаем, что $c_0 = 0$. Больше уравнений нет. Следовательно, в данном случае функция h имеет следующий вид:

$$h = -c_1 r r^{-(1+b_1)/2} u_x + (c_1 x + c_2) r^{-(1+b_1)/2} u_r.$$

Если же $c_1 = c_2 = 0$, то $b_3 = -(b_1^2 - 2b_1 - 3)/4$, а $h = c_0 u_x r^{-(b_1+1)/2}$.

Полагая $b_1 = -1$, $b_3 = 0$, получаем единственное решение классического определяющего уравнения $h = u_x$. Существование этого решения связано с инвариантностью уравнения (2.1) относительно преобразования переноса по x .

Если приравнять к нулю $\tilde{h}_1 = -ru_x + xu_r$, то система, образованная уравнением (2.1) и $\tilde{h}_1 = 0$, имеет решение вида

$$u = U(x^2 + r^2). \quad (2.8)$$

Функция U должна удовлетворять уравнению

$$4z^2 U'' + 2U' = F(U),$$

где $z = x^2 + r^2$. Система, состоящая из (2.1) и $\tilde{h}_2 = u_r = 0$, обладает решением

$$u = V(x), \quad (2.9)$$

здесь V удовлетворяет уравнению

$$V'' = F(V).$$

Следует особо подчеркнуть тот факт, что решения (2.8), (2.9) не являются инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + u_{rr} + \frac{c_1}{x} u_x + \frac{c_2}{r} u_r = F(u) \quad (2.10)$$

и соответствующее ему ЛОУ

$$D_x^2(h) + D_r^2(h) + \frac{b_1}{x} D_x(h) + \frac{b_2}{r} D_r(h) = \left(b_3 F' + \frac{b_4}{x^2} + \frac{b_5}{r^2} \right) h.$$

Легко проверить, что ЛОУ имеет решения

$$-xu_r + ru_x, \quad u_x, \quad u_r.$$

Первому решению соответствуют следующие значения констант:

$$b_1 = b_4 = c_1, \quad b_2 = b_5 = c_2, \quad b_3 = 1,$$

второму

$$b_1 = b_4 = c_1, \quad b_2 = c_2, \quad b_3 = 1, \quad b_5 = 0,$$

а третьему

$$b_2 = b_5 = c_2, \quad b_1 = c_1, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0.$$

С другой стороны, стандартным образом показывается, что классическое определяющее уравнение для (2.10) не имеет решений, если F — общего типа.

§ 3. Уравнение нелинейной теплопроводности

Уравнение нелинейной теплопроводности

$$v_t = (Q(v)v_x)_x \quad (3.1)$$

возникает при описании различных физических процессов. Некоторые библиографические и иные сведения, связанные с данным уравнением, можно найти в [12]. Групповая классификация этого уравнения выполнена Л. В. Овсянниковым [3]. И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов и Н. Х. Ибрагимов дополнили классификацию, используя нелокальные симметрии [13].

Функция Q , входящая в (3.1), в физических приложениях обычно считается степенной. Если сделать замену

$$v = u^{1/(m+1)}, \quad (3.2)$$

то уравнение со степенной функцией $Q(v) = v^m$ перейдет в уравнение

$$u_t = u^k u_{xx}, \quad (3.3)$$

где $k = m/(m+1)$.

ЛОУ, соответствующее уравнению (3.3), имеет вид

$$D_t(h) - u^k D_x^2(h) - kb_1 u_x D_x(h) - (kb_2 u^{k-1} u_{xx} + b_3 k(k-1) u^{k-2} u_x^2) h = 0, \quad (3.4)$$

где $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

В данном параграфе будем искать решения ЛОУ (3.4). Нас будут интересовать случаи $k \neq 0$ и $k \neq 2$, поскольку при $k = 2$ уравнение (3.3) можно линеаризовать с помощью нелокальной замены [12].

Решения ЛОУ (3.4) ищутся в виде, разрешенном относительно старшей производной,

$$h = u_n + g(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u),$$

где $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$. *Порядком решения* будем называть порядок старшей производной u_n , входящей в h .

Решения ЛОУ первого и второго порядка существуют, однако, они приводят к инвариантным решениям уравнения (3.3). Поэтому будем сразу искать решения третьего порядка. Сначала все производные по t , входящие в ЛОУ (3.4), выражаются с помощью (3.3). В результате левая часть (3.4) становится многочленом относительно u_4, u_3 . Этот многочлен должен тождественно обращаться в нуль. Собирая подобные члены при u_4 и u_3^2 , получаем соотношения

$$k(b_1 - 3) = 0, \quad g_{u_2 u_2} = 0.$$

Значит, $b_1 = 3$, а g представляется в виде

$$g = z^1 u_2 + z^2,$$

здесь функции z^1 и z^2 могут зависеть только от u и u_1 . Приводя подобные члены при $u_3 u_2$ и u_2^2 , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} 2uz_{u_1}^1 + k(b_2 - 4) &= 0, \\ 2u_1 u^2 z_{uu_1}^1 + 2kuu_1 z_{u_1}^1 - 3u_1 k^2 + 3ku_1 + u^2 z_{u_1 u_1}^2 + kuz^1 b_2 - ukz^1 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для функций z^1 и z^2 справедливы представления

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{k(4 - b_2)u_1}{2u} + a^4, \\ z^2 &= a^3 u_1^3 + a^2 u_1^2 + a^1 u_1 + a^0, \end{aligned}$$

причем функции a^i могут зависеть только от u .

Затем собираются члены с $u_1^2 u_3$, $u_1 u_3$, u_2^2 , $u_1 u_2^2$, u_2 . В результате получаем пять новых уравнений

$$\begin{aligned} 2(k - 1)b_3 &= kb_2 + 2k - 2b_2 + 2, \\ 2ua_u^4 + ka^4 &= 0, \\ 2ua^2 + ka^4(b_2 - 1) &= 0, \\ 12u^2 a^3 - k^2 b_2^2 + 3k^2 b_2 - 2k^2 + 2kb_2 - 2k &= 0, \\ a^0 b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из этих уравнений находим a^4 , a^2 , a^3 , b_3 :

$$\begin{aligned} a^4 &= ru^{-k/2}, \quad a^2 = \frac{(1 - b_2)kru^{-1-k/2}}{2}, \\ a^3 &= \frac{k^2 b_2^2 - 3k^2 b_2 + 2k^2 - 2kb_2 + 2k}{12u^2}, \\ b_3 &= \frac{b_2(k - 2) + 2(k + 1)}{2(k - 1)}, \end{aligned}$$

где r — константа.

Согласно соотношению (3.5) либо $a^0 = 0$, либо $b_2 = 0$. Рассмотрим сначала случай $a^0 = 0$. Члены, содержащие $u_1 u_2$, $u_1^3 u_2$, дают пару уравнений

$$\begin{aligned} 2ua_u^1 + ka^1(b_2 + 2) &= 0, \\ k^2 b_2^2 - 4k^2 - 8kb_2 + 8k + 12 &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Первое из этих уравнений позволяет найти a^1 :

$$a^1 = su^{-k(b_2+2)/2}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Рассматривая (3.6) как квадратное уравнение относительно b_2 , находим его корни: $2(k + 1)/k$, $2(3 - k)/k$. Анализируя члены с $u_2 u_1^2$, u_1^4 , u_1^3 , видим, что при любом

значении корня b_2 константы s и r должны быть нулевыми. Таким образом, окончательно получаем, что в случае $a^0 = 0$ и $b_2 = 2(k+1)/k$ функция h равна

$$h_1 = u_3 + (k-1)u_1u_2u^{-1}, \quad (3.7)$$

а при $b_2 = 2(3-k)/k$ задается формулой

$$h_2 = u_3 + 3(k-1)u_1u_2u^{-1} + (k-1)(k-2)u^{-2}u_1^2. \quad (3.8)$$

Пусть теперь $b_2 = 0$. Приведение подобных членов при u_1^5 дает полиномиальное уравнение

$$k(k^3 - 4k^2 + k + 6) = 0,$$

решениями которого являются $k = 0$, $k = 2$, $k = -1$, $k = 3$. Остаются еще три уравнения, возникающие при приведении подобных членов с $u_1^2u_2$, u_1^3 , u_1^2 . Из этих уравнений в случае $k = -1$ находим

$$\begin{aligned} r = a^1 = 0, \quad a^0 = c_1 + c_2u^4, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ h \equiv h_3 = u_3 - 2u_1u_2u^{-1} + c_1 + c_2u^4, \end{aligned} \quad (3.9)$$

а в случае $k = 3$ имеем

$$\begin{aligned} r = a^1 = 0, \quad a^0 = c_1u^{-2} + c_2u^{-6}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ h \equiv h_4 = u_3 + 6u_1u_2u^{-1} + 2u_1^3u^{-2} + c_1u^{-2} + c_2u^{-6}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. ЛОУ (3.3) при любом k имеет решения (3.7), (3.8). Только при $k = 0$, $k = 2$, $k = -1$, $k = 3$ могут существовать дополнительные решения третьего порядка. В случае $k = -1$ это решение задается формулой (3.9), а при $k = 3$ — формулой (3.10).

Заметим, что с точки зрения высших симметрий, среди уравнений вида (3.3) выделяются только уравнения с константой k равной 0 или 2 [8]. Решение (3.7) связано с разделением переменных, допускаемым уравнением (3.3). Действительно, приравнявая (3.7) к нулю, получаем инвариантное многообразие

$$u_{xxx} + (k-1)u_xu_{xx}u^{-1} = 0.$$

Последнее уравнение с учетом (3.3) можно переписать так:

$$(u^k u_{xx} u^{-1})_x = (u_t u^{-1})_x = (\ln u)_{tx} = 0.$$

В этом случае u представляется в виде $u(t, x) = T(t)X(x)$, причем T , X удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$T'T^{-k-1} = X''X^{k-1} = \text{const}.$$

Легко показать, что решение (3.8) связано с инвариантностью уравнения (3.3) относительно растяжения. Если приравнять функцию (3.8) к нулю, то получим уравнение, которое можно записать в виде

$$(u^k)_{xxx} = 0. \quad (3.11)$$

Решением системы, состоящей из уравнений (3.3) и (3.11), является функция

$$u = \left(\frac{kx^2}{2(k-2)t} \right)^{1/k}.$$

Это решение принадлежит к классу решений, инвариантных относительно преобразования $t \mapsto \alpha^2 t$, $x \mapsto \alpha x$.

Следует отметить, что уравнение (3.3) при $k = -1$ с помощью некоторой нелокальной замены приводится к уравнению (3.3) с $k = 3$. Действительно, если $k = -1$, то замена (3.2) переводит уравнение (3.3) в уравнение

$$v_t = (v^{-1/2}v_x)_x.$$

Если же $k = 3$, то соответствующее уравнение (3.3) переходит в уравнение

$$v_t = (v^{-3/2}v_x)_x.$$

Остается вспомнить [12], что уравнение

$$v_t = (v^m v_x)_x$$

нелокальной заменой

$$\xi = \int_{x_0}^x v(y, t) dy, \quad w = u^{-1} \quad (3.12)$$

переводится в уравнение

$$w_t = (w^{-m-2}w_x)_x.$$

Указанная последовательность замен также переводит инвариантное многообразие $h_3 = 0$ в инвариантное многообразие $h_4 = 0$.

Теперь кратко остановимся на решениях четвертого порядка. Такие решения существуют, но они не являются принципиально новыми по отношению к решениям (3.9), (3.10).

ЛЕММА 2. *ЛОУ (3.4) имеет следующие решения четвертого порядка:*

$$\begin{aligned} h &\equiv h_5 = u_4 - 6u^{-1}u_1u_3 - 2u^{-1}u_2^2 + 10u_2u_1^2u^{-2} + cu_1u^{-1}, \\ h &\equiv h_6 = u_4 - 2u^{-1}u_1u_3 - 2u^{-1}u_2^2 + 2u_2u_1^2u^{-2} + cu_1u^3, \\ h &\equiv h_7 = u_4 + 12u^{-1}u_1u_3 + 6u^{-1}u_2^2 + 36u_2u_1^2u^{-2} + cu_1u^{-3} + 8u_1^4u^{-3}, \\ h &\equiv h_8 = u_4 + 8u^{-1}u_1u_3 + 6u^{-1}u_2^2 + 12u_2u_1^2u^{-2} + cu_1u^{-7}, \end{aligned}$$

где $c \in \mathbb{R}$. Решения h_5, h_6 соответствуют значению $k = -1$, а h_7, h_8 — значению $k = 3$.

Доказательство леммы получается прямой подстановкой функций h_5, h_6, h_7, h_8 в ЛОУ (3.4). Во всех четырех случаях $b_1 = 4, b_3 = (b_2(k-2) + 5k + 2)/(2(k-1))$, а b_2 принимает значения $-5, 3, -1, \frac{5}{3}$ для функций h_5, h_6, h_7, h_8 , соответственно. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при доказательстве теоремы 2, можно показать, что ЛОУ (3.4) не имеет решений четвертого порядка, если $k \notin \{0, 2, -1, 3\}$.

Заметим, что h_5 получается из h_3 умножением на u^{-4} и последующего дифференцирования, h_6 является производной от h_3 . Функции h_7, h_8 получаются из h_4 умножением на u^6 и u^2 , соответственно, и дальнейшего дифференцирования.

Решения пятого порядка для ЛОУ (3.4) связаны с новыми значениями k .

ЛЕММА 3. ЛОУ (3.4) имеет следующие решения пятого порядка:

$$\begin{aligned} h &\equiv h_9 = u_5 + \frac{15u_1u_4}{u} + \frac{30u_2u_3}{u} + \frac{60u_3u_1^2}{u^2} + \frac{90u_2^2u_1}{u^2} + \frac{60u_2u_1^3}{u^3}, \\ h &\equiv h_{10} = u_5 - \frac{18u_1u_4}{u} - \frac{15u_2u_3}{u} + \frac{111u_3u_1^2}{u^2} + \frac{72u_2^2u_1}{u^2} - \frac{231u_2u_1^3}{u^3}. \end{aligned}$$

Решение h_9 соответствует значению $k = 4$, а h_{10} — значению $k = -2$.

В справедливости леммы нетрудно убедиться, подставляя h_9 и h_{10} в (3.4). Функции h_9 отвечают следующие константы (входящие в ЛОУ): $b_1 = 5, b_2 = \frac{7}{2}, b_3 = \frac{15}{2}$, а функции h_{10} — $b_1 = 5, b_2 = -7, b_3 = -2$. Других решений пятого порядка при $k \notin \{0, 2, -2, 4\}$ ЛОУ не имеет. Это можно показать с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше.

Уравнения

$$u_t = u^4 u_{xx}, \quad u_t = u^{-2} u_{xx}, \quad (3.13)$$

(а также соответствующие инвариантные многообразия $h_9 = 0, h_{10} = 0$) нелокальной заменой можно переводить друг в друга. Действительно, уравнения (3.13) с помощью замены (3.2) преобразуются следующим образом:

$$v_t = (v^{-4/3} v_x)_x, \quad (3.14)$$

$$v_t = (v^{-2/3} v_x)_x. \quad (3.15)$$

Два последних уравнения переходят друг в друга при замене (3.12).

Овсянников в [3] показал, что среди всех уравнений вида (3.1) уравнение (3.14) допускает наиболее широкую группу точечных преобразований. Однако высшими симметриями уравнения (3.14) и (3.15) не обладают [8].

Если выполнить замену $w = u^4$, то первое из уравнений (3.13) будет иметь вид:

$$w_t = w w_{xx} - \frac{3}{4} w_x^2, \quad (3.16)$$

а функция h_9 преобразуется в $w^{-3/4} w_{xxxx} / 4$. Значит, уравнение (3.16) обладает инвариантным многообразием $w_{xxxx} = 0$ и имеет решение

$$w = \sum_{i=0}^4 c_i(t) x^i, \quad (3.17)$$

где $c_i(t)$ — функции, которые можно найти, подставляя (3.17) в (3.16). Представление (3.17) ранее было получено в работе [5].

Автор благодарит участников семинара под руководством Л. В. Овсянникова за внимание к работе.

Список литературы

1. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
2. Андреев В. К., Капцов О. В., Пугначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Kaptsov O. V. B-determining equations: applications to nonlinear partial differential equations // European J. Appl. Math. 1995. V. 6. P. 265–286.
5. Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1995. V. 125. P. 225–246.
6. Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 3. С. 373–383.
7. Свищевский С. Р. Нелинейные дифференциальные операторы первого и второго порядков, обладающие инвариантными линейными пространствами максимальной размерности // ТМФ. 1995. Т. 105. № 2. С. 198–207.
8. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
9. Kaptsov O. V. Determining Equations and Differential Constraints // J. Nonlinear Math. Phys. 1995. V. 4. № 1. P. 283–291.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
11. Капцов О. В. Стационарные вихревые структуры в идеальной жидкости // ЖЭТФ. 1992. Т. 98. № 2. С. 532–541.
12. Meirmanov A. M., Pukhnachov V. V., Shmarev S. I. Evolution Equations and Lagrangian Coordinates. New York: Walter de Gruyter, 1997.
13. Азатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Квазилокальные симметрии уравнений типа нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 75–78.

Вычислительный центр СО РАН, г. Красноярск
E-mail: kaptsov@cckr.krasnoyarsk.su

Поступила в редакцию
29.01.1998