Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, A -решения с особенностями как почти решения, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 11, 31–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:08:31

УДК 517.53/.57

В. М. Миклюков

A-решения с особенностями как почти решения

Вводятся почти решения квазилинейных уравнений с частными производными эллиптического типа. Рассматриваемый класс уравнений включает в себя, в частности, уравнения для p -гармонических функций, уравнение газовой динамики и др. Указаны условия, при которых решения с особенностями являются почти решениями. Даются приложения к проблеме устранения особенностей решений эллиптических уравнений и квазирегулярных отображений. Доказательства базируются на взаимосвязях с дифференциальными формами.

Библиография: 32 названия.

§ 1. Почти решения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и пусть $w(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая по Лебегу функция такая, что

$$0 < \operatorname{ess\,inf}_{D'} w(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{D'} w(x) < \infty \quad (1.1)$$

для всякой подобласти $D' \Subset D$.

Пусть $A: D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

- (i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \rightarrow A(x, \xi)$ определено и непрерывно;
- (ii) отображение $x \in D \rightarrow A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\mu_1 w(x) |\xi|^p \leq \langle \xi, A(x, \xi) \rangle, \quad (1.2)$$

$$|A(x, \xi)| \leq \mu_2 w(x) |\xi|^{p-1}, \quad (1.3)$$

где $\mu_1, \mu_2 > 0$ и $p \geq 1$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\mu = \mu_2/\mu_1$. Ясно, что всегда $\mu \geq 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0. \quad (1.4)$$

Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W_{p, \operatorname{loc}}^1(D)$ является в D *обобщенным решением уравнения (1.4)*, если для всякой непрерывной функции $\varphi(x) \in W_q^1(D)$, $1/(p-1) + 1/q = 1$ (при $p = 1$ величина $q = \infty$), с компактным носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset D$ выполнено

$$\int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle dx = 0, \quad (1.5)$$

где $dx = dx_1 \cdots dx_n$ – элемент объема.

Предположения (i) и (ii) гарантируют измеримость отображения $x \in D \rightarrow A(x, g(x))$ для произвольного измеримого на D векторного поля g . Предположение (iii) говорит об эллиптичности (1.4) (детали см. в [1; § 3]). Обобщенные решения всевозможных уравнений описанного вида будем называть A -решениями. Множество A -решений содержит, в частности, класс p -гармонических функций и при $p = 2$ – гармонических. Отметим, что при определении A -решений в [1] предполагается, что $p > 1$ и класс A -уравнений не содержит, к примеру, уравнения газовой динамики (см. ниже § 8).

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W_{p,\text{loc}}^1(D)$ является *почти решением* уравнения (1.4), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W_q^1(D), \quad 0 \leq |\varphi(x)| \leq 1,$$

с компактным носителем $\text{supp } \varphi \subset D$ выполнено

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle dx \right| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти решения h .

В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями, но с почти решениями. Ниже устанавливается, что при определенных условиях всякое A -решение с особенностями является почти решением. Даются оценки его уклонения.

§ 2. Примеры применения

Один из ключевых вопросов, возникающих при анализе перспективности приложений теории “почти решений” в практических разработках, – это вопрос об объеме информации, содержащейся в неравенствах вида (1.6) по сравнению с соотношениями (1.5). Мы проиллюстрируем содержательность неравенств (1.6) на примере стандартного принципа максимума–минимума.

Итак, пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, пусть $h \in W_{p,\text{loc}}^1(D) \cap C^0(\bar{D})$ – почти решение уравнения (1.4), удовлетворяющего предположению (iii) в D . Пусть $\varepsilon > 0$ – его уклонение.

Пусть $h|_{\partial D} < 0$. Предположим, что множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) > 0\}$$

непусто. В силу условия $h|_{\partial D} < 0$ имеем

$$\bar{\mathcal{O}} \cap \partial D = \emptyset.$$

Положим

$$M = \sup_{x \in \bar{D}} h(x).$$

Зафиксируем произвольно функцию $\psi \in W_p^1(D)$ со свойствами

$$0 \leq \psi(x) \leq 1, \quad \text{supp } \psi \text{ – компакт.} \quad (2.7)$$

Функция

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{h(x)}{M} & \text{при } x \in \overline{\mathcal{O}}, \\ 0 & \text{при } x \in D \setminus \overline{\mathcal{O}} \end{cases}$$

имеет носителем $\overline{\mathcal{O}}$, принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(D)$ и удовлетворяет условию

$$0 \leq \tilde{h}(x) \leq 1.$$

Указанными свойствами обладает функция $\varphi = \psi^p \tilde{h}$, причем ее носитель компактен и содержится в D . Тем самым, на основании (1.6) мы можем записать

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle dx \right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= p \psi^{p-1} \tilde{h} \nabla \psi + \frac{\psi^p}{M} \nabla h & \text{при } x \in \mathcal{O}, \\ \nabla \varphi &= 0 & \text{при } x \in D \setminus \overline{\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

то находим

$$\frac{1}{M} \int_{\mathcal{O}} \psi^p \langle \nabla h, A(x, \nabla h) \rangle dx \leq p \int_{\mathcal{O}} \psi^{p-1} |\tilde{h}| |\langle \nabla \psi, A(x, \nabla h) \rangle| dx + \varepsilon.$$

Пользуясь предположением (iii), получаем

$$\frac{\mu_1}{M} \int_{\mathcal{O}} \psi^p w(x) |\nabla h(x)|^p dx \leq p \mu_2 \int_{\mathcal{O}} \psi^{p-1} w(x) |\nabla \psi(x)| |\nabla h(x)|^{p-1} dx + \varepsilon.$$

Пусть $p > 1$. В силу неравенства

$$ab \leq \frac{1}{p} \left(\frac{a}{\delta} \right)^p + \frac{p-1}{p} (\delta b)^{p/(p-1)}, \quad a, b > 0,$$

где $\delta > 0$ – произвольная постоянная, последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{M} \int_{\mathcal{O}} \psi^p w(x) |\nabla h(x)|^p dx &\leq \delta^{p/(p-1)} (p-1) \mu_2 \int_{\mathcal{O}} \psi^p w(x) |\nabla h(x)|^p dx \\ &\quad + \delta^{-p} \mu_2 \int_{\mathcal{O}} w(x) |\nabla \psi(x)|^p dx + \varepsilon, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \psi^p w(x) |\nabla h(x)|^p dx &\leq \delta^{p/(p-1)} (p-1) \mu M \int_{\mathcal{O}} \psi^p w(x) |\nabla h(x)|^p dx \\ &\quad + \delta^{-p} \mu M \int_{\mathcal{O}} w(x) |\nabla \psi(x)|^p dx + \frac{M}{\mu_1} \varepsilon. \end{aligned}$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $(p-1)M\mu\delta^{p/(p-1)} = 1/2$. Тогда выполнено

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \psi^p w(x) |\nabla h(x)|^p dx \leq \varepsilon \frac{M}{\mu_1} + 2^{p-1} \mu^p M^p (p-1)^{p-1} \int_{\mathcal{O}} w(x) |\nabla \psi(x)|^p dx. \quad (2.8)$$

Пусть $0 < r < R < \infty$. В частности, выбирая в (2.8) функцию $\psi \equiv 1$ на $\{|x| < r\} \cap \mathcal{O}$ и $\psi \equiv 0$ при $\{|x| > R\} \cap \mathcal{O}$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\{|x| < r\} \cap \mathcal{O}} w(x) |\nabla h|^p dx \\ & \leq 2\varepsilon \frac{M}{\mu_1} + 2^{p-1} \mu^p M^p (p-1)^{p-1} \int_{\mathcal{O} \cap \{r < |x| < R\}} w(x) |\nabla \psi(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Если обозначить через

$$\text{cap}_{p,w}(A, L) = \inf_u \int_D w(x) |\nabla u|^p dx, \quad u|_A \equiv 0, \quad u|_L \equiv 1,$$

взвешенную p -емкость конденсатора $(A, L; D)$ и через

$$\begin{aligned} \lambda_{p,w}(O) &= \inf_u \left\{ \int_O w(x) |\nabla u|^p dx \left(\int_O w(x) u^p dx \right)^{-1} \right\}, \\ u &\in C^1(O) \cap C^0(\overline{O}), \quad u|_{\partial O} = 0, \end{aligned}$$

основную частоту порядка $p \geq 1$ открытого множества $O \subset \mathbb{R}^n$, то в описанных предположениях имеем

$$\lambda_{p,w}(\mathcal{O}) \int_{\mathcal{O}} w(x) h^p(x) dx \leq \int_{\mathcal{O}} w(x) |\nabla h(x)|^p dx,$$

а в силу (2.8) получаем

$$\frac{1}{2} \int_{\{|x| < r\} \cap \mathcal{O}} w(x) |\nabla h(x)|^p dx \leq \varepsilon \frac{M}{\mu_1} + 2^{p-1} \mu^p M^p (p-1)^{p-1} \text{cap}_{p,w}(\mathcal{O}_r, \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_R), \quad (2.9)$$

где $\mathcal{O}_t = \{|x| < t\} \cap \mathcal{O}$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является (p, w) -узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{cap}_{p,w}(D_r, D \setminus D_R) = 0.$$

Тем самым, приходим к следующей форме принципа максимума для почти решений.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть h – почти решение с уклонением $\varepsilon > 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения (1.4) с ограничениями (1.2)–(1.3), удовлетворяющее на границе области предположению $h|_{\partial D} \leq 0$. Тогда либо $h \leq 0$ всюду в D , либо для всякой функции $\psi \in W_p^1(D)$ со свойствами (2.7) выполнено (2.9) и, в частности, если D ограничена или является узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int_{\{|x| < r\} \cap \mathcal{O}} w(x) h^p(x) dx \leq \frac{2\varepsilon M}{\mu_1 \lambda_{p,w}(\mathcal{O})}. \quad (2.10)$$

В случае, когда h есть обобщенное А-решение, т.е. уклонение $\varepsilon = 0$, мы имеем

$$\int_{\mathcal{O}} w(x) h^p(x) dx = 0.$$

Отсюда $h(x) \equiv 0$, что противоречит предположению $h|_{\partial D} < 0$, и мы приходим к стандартной форме принципа максимума для А-гармонических функций. Другими словами, свойство (2.10) для почти решений представляет собой специальную форму обобщенного принципа максимума для А-гармонических функций.

Соотношение (2.10) дает оценку размеров открытого множества $\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) > 0\}$ и характеризует, насколько почти решение h уравнения А-гармонических в области D функций со свойствами

$$h|_{\partial D} < 0, \quad \max_{x \in D} h(x) = M,$$

отличается от 0 на нем.

Величина $\lambda_{p,w}(O)$ не возрастает с расширением множества O , и потому

$$\lambda_{p,w}(D) \leq \lambda_{p,w}(\mathcal{O}).$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число. Подобласть $\Delta \subset D$ называется s -зоной (зоной стагнации) функции u , если существует постоянная C такая, что эта функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более чем на s .

К примеру, можно положить

$$\sup_{x \in \Delta} |u(x) - C| \leq s$$

(см. [2], [3]), или

$$\|u(x) - C\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int_{\Delta} |u(x) - C|^p \right)^{1/p} \leq s.$$

Соотношения (2.7), (2.10) служат также источниками оценок размеров областей стагнации почти решений h . Именно, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2.1. В условиях теоремы 2.1 выполнено

$$\int_{\mathcal{O}} w(x) h^p(x) dx \leq \frac{2\varepsilon M}{\mu_1 \lambda_{p,w}(D)}. \quad (2.11)$$

В частности, если величина $\varepsilon > 0$ столь мала, что

$$\frac{2\varepsilon M}{\mu_1 \lambda_{p,w}(D)} \leq s,$$

то

$$\int_{\mathcal{O}} w(x) h^p(x) dx \leq s$$

и множество $\mathcal{O}$ является s -зоной.

§ 3. Дифференциальные формы

Обозначим через $Q(x, t)$ куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и длиной ребра t . Пусть $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – калибровочная функция, т.е. непрерывная неубывающая функция, обладающая следующим свойством: для всякого $k \geq 1$ найдется постоянная $c(k, \omega)$ такая, что при всех $t \geq 0$ выполнено

$$\omega(kt) \leq c(k, \omega)\omega(t). \quad (3.12)$$

Через $C^\omega(D)$ мы обозначаем множество всевозможных функций $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых для всякого компактного множества $A \subset D$ и произвольного куба $Q(x, r)$ со свойствами

$$Q(x, r) \subset D, \quad x \in A, \quad (3.13)$$

выполнено

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq c(r, A)\omega(|x'' - x'|) \quad \text{при всех } x', x'' \in Q(x, r).$$

Здесь $c(r, A) > 0$ – некоторая постоянная.

Напомним некоторые факты теории дифференциальных форм. Ниже мы следуем обозначениям, используемым в [4] и [5]. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – координаты в $\mathbb{R}^n$. Каждая дифференциальная форма α степени $\deg \alpha = k$, $1 \leq k \leq n$, в $D \subset \mathbb{R}^n$ может быть записана в координатах $x_1, \dots, x_n$ в виде линейной комбинации

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Внутреннее (скалярное) произведение форм α и β одной и той же степени есть величина

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \vee \beta = *^{-1}(\alpha \wedge * \beta) = *(\alpha \wedge * \beta). \quad (3.14)$$

Скалярное произведение форм обладает обычными свойствами скалярного произведения. Мы полагаем

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Форма α степени k называется простой, если найдутся 1-формы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ такие, что

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k.$$

Отметим следующее полезное свойство евклидовой нормы: если $\alpha, \beta \in \bigwedge^*(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\alpha \wedge \beta| \leq |\alpha| |\beta|$$

в случае, когда хотя бы одна из форм α, β простая. Если формы α и β обе простые и ненулевые, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда ассоциированные с α и β подпространства $\mathbb{R}^n$ ортогональны.

В общем случае если $\deg \alpha = p$, $\deg \beta = q$, то

$$|\alpha \wedge \beta| \leq (C_{p+q}^p)^{1/2} |\alpha| |\beta| \quad (3.15)$$

(см. [6; § 1.7]).

Пусть α, β – дифференциальные формы степени $k \geq 1$ в D с коэффициентами $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in L_{\text{loc}}^p(D)$. Будем говорить, что α и β *интегрально зависимы* в D , если

$$\int_D \alpha \wedge * \beta = 0. \quad (3.16)$$

Дифференциальная форма α называется *слабо замкнутой* в D , если α является интегрально зависимой в D от всякой дифференциальной формы $d\beta$, $\deg \beta = \deg \alpha - 1$, с компактным носителем $\text{supp } \beta = \overline{\{x \in D : \beta \neq 0\}}$ в D и коэффициентами класса $W_{q,\text{loc}}^1(D)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Для гладких форм α условие слабой замкнутости вполне согласуется с традиционным условием замкнутости $d\alpha = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Будем говорить, что форма $\alpha \in L_{\text{loc}}^p(D)$, $\deg \alpha = n - 1$, *почти замкнута* в D с уклонением $\varepsilon > 0$, если

$$\left| \int_D d\varphi \wedge \alpha \right| < \varepsilon \quad (3.17)$$

для всех

$$\varphi \in C^1(D), \quad \text{supp } \varphi \subset D, \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Легко видеть, что если форма α почти замкнута со сколь угодно малым уклонением, то α слабо замкнута.

§ 4. Лемма о разбиении единицы

Пусть $k \geq 0$ и $p_1, \dots, p_n$ – целые. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство всевозможных замкнутых кубов

$$Q = [p_1 2^{-k}, (p_1 + 1) 2^{-k}] \times \dots \times [p_n 2^{-k}, (p_n + 1) 2^{-k}].$$

Каждый из кубов Q имеет стороны длины 2^{-k} , параллельные осям координат $\mathbb{R}^n$, и вершины вида $2^{-k}(p_1, \dots, p_n)$. Такие кубы далее будем называть *бинарными*. Два бинарных куба считаются *разъединенными*, если их пересечение не содержит внутренних точек.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и h – произвольная калибровочная функция. Для произвольного $\varepsilon > 0$ полагаем

$$\mathcal{D}_\varepsilon^h(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} h(s_i),$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям E счетными семействами бинарных кубов $\{Q_i\}$ с ребрами длины $s_i \leq \varepsilon$. Положим

$$\mathcal{D}^h(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{D}_\varepsilon^h(E).$$

Заметим, что семейство $\{Q_i\}$ может быть выбрано состоящим из попарно разъединенных кубов, поскольку непустота внутренности пересечения двух бинарных кубов влечет содержание одного куба другим. Величину $\mathcal{D}^h(E)$ будем называть *бинарной h -мерой* множества E .

Ясно, что бинарная h -мера $\mathcal{D}^h(E)$ сравнима с мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^h(E)$. Именно, существуют постоянные $C_1 = C_1(n, h)$, $C_2 = C_2(n, h)$, $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, такие, что для всякого компактного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выполнено

$$C_1 \mathcal{H}^h(E) \leq \mathcal{D}^h(E) \leq C_2 \mathcal{H}^h(E).$$

В частности, $\mathcal{D}^h(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

Для произвольного куба Q со стороной s пусть λQ , $\lambda > 0$, означает куб со стороной λs и тем же самым центром.

Следующее утверждение представляет собой специальную модификацию леммы 3.1 из работы Харви и Полкинга [7].

ЛЕММА 4.1. Пусть $\{Q_i\}$, $1 \leq i \leq N$, – конечное семейство попарно разъединенных бинарных кубов с ребрами длины s_i , $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_N$, и пусть $\lambda > 1$ – некоторое произвольным образом фиксированное число. Для всякого i найдется функция $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, с носителем $\text{supp } \varphi_i \subset \lambda Q_i$ такая, что

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1 \quad \text{при всех } x \in \bigcup_{i=1}^N Q_i. \quad (4.18)$$

При этом для любых $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n$ и произвольной постоянной $c(n, \lambda)$, удовлетворяющей условию

$$c(n, \lambda) > 2^{n+2} \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad (4.19)$$

выполнено

$$|D_k \varphi_i(x)| \leq \frac{c(n, \lambda)}{s_i} \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.20)$$

Здесь обозначено $D_k = \partial/\partial x_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование разбиения единицы, подчиненного семейству $\{Q_i\}$, с оценкой вида (4.20) для $\lambda = 3/2$ следует из [7]. Для наших целей важен конкретный вид постоянной $c(n, \lambda)$ в неравенстве (4.20), поэтому мы приводим здесь самостоятельные построения.

Выберем $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы

$$\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \equiv 1 \quad \text{при} \quad |x_i| \leq 1$$

для всех $i = 1, \dots, n$ и

$$\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0 \quad \text{при} \quad |x_i| \geq \lambda$$

хотя бы для некоторого i .

Пусть

$$\psi_k(x) = \psi\left(\frac{2(x - a_k)}{s_k}\right),$$

где a_k есть центр куба Q_k . Пусть $\varphi_1 = \psi_1$, и пусть

$$\varphi_l = \psi_l \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \quad \text{для всякого} \quad l = 2, \dots, N.$$

Тогда $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и при любом $1 \leq k \leq N$ выполнено

$$\text{supp } \varphi_k \subset \text{supp } \psi_k \subset \lambda Q_k.$$

Из построения функций φ_k ясно, что $0 \leq \varphi_k \leq 1$ при всех $1 \leq k \leq N$. Пользуясь индукцией, выводим

$$\sum_{j=1}^k \varphi_j = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - \psi_j), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Поскольку $\psi_j|_{Q_j} = 1$, то $\prod_{j=1}^k (1 - \psi_j) = 0$ при $x \in \bigcup_{j=1}^N Q_j$ и, тем самым,

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in \bigcup_{j=1}^N Q_j.$$

Нам осталось найти оценку на производные функций φ_i . Уточним сначала выбор функции ψ . Введем в рассмотрение C^∞ -функцию $\xi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq 1 && \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R}, \\ \xi(t) &\equiv 1 && \text{при} \quad t \in [-1, 1], \\ \xi(t) &\equiv 0 && \text{при} \quad t \in \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda]. \end{aligned}$$

Выберем

$$\psi(x) \equiv \psi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \xi(x_k).$$

Тогда, полагая, что $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ есть центр куба Q_j , имеем

$$\psi_j(x) = \prod_{k=1}^n \xi\left(\frac{2(x_k - a_{jk})}{s_j}\right).$$

Отсюда получаем, что при любом $p = 1, \dots, n$ выполнено

$$|D_p \psi_j(x)| = \frac{2}{s_j} \left| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^n \xi \left(\frac{2(x_k - a_{jk})}{s_j} \right) \right| \left| \xi' \left(\frac{2(x_p - a_{jp})}{s_j} \right) \right| \leq \frac{2}{s_j} \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |\xi'(t)|. \quad (4.21)$$

Функция ξ может быть выбрана так, чтобы для произвольной наперед заданной постоянной $\mu > 1$ было выполнено

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |\xi'(t)| \leq \frac{2\mu}{\lambda - 1}. \quad (4.22)$$

Так как по построению $\varphi_1 = \psi_1$, то в силу (4.21) и (4.22) можем записать

$$|D_p \varphi_1(x)| \leq \frac{4\mu}{s_1(\lambda - 1)}, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (4.23)$$

При $l = 2, 3, \dots$ и $p = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} |D_p \varphi_l| &= \left| D_p \left(\psi_l \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right) \right| \\ &= \left| \psi_l D_p \left(\prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right) + \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) D_p \psi_l \right| \\ &= \left| \psi_l \sum_{q=1}^{l-1} (D_p \psi_q) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l-1} (1 - \psi_j) - (D_p \psi_l) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Нам потребуется следующее простое геометрическое утверждение.

ЛЕММА 4.2. *В условиях леммы 4.1 для любого $1 \leq q \leq N$ никакая точка $x \in \mathbb{R}^n$ не может принадлежать одновременно более чем $\lambda 2^n$ кубам системы попарно разведенных кубов $\{\lambda Q_i\}_{i=1}^q$ со сторонами $s_i \geq s_q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что точка x может служить не более чем 2^n вершинами бинарных кубов системы $\{Q_i\}_{i=1}^q$.

Функции

$$(D_p \psi_q) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l-1} (1 - \psi_j), \quad q = 1, 2, \dots, l-1, \quad \text{и} \quad (D_p \psi_l) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j)$$

имеют носители, лежащие в λQ_q и λQ_l соответственно. Обозначим через $\chi_k(x)$, $1 \leq k \leq l$, характеристическую функцию куба λQ_k . В силу (4.24) мы имеем

$$\begin{aligned} D_p \varphi_l &= - \left(\psi_l \sum_{q=1}^{l-1} (D_p \psi_q) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l-1} (1 - \psi_j) - (D_p \psi_l) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right) \\ &= - \left(\psi_l \sum_{q=1}^{l-1} \chi_q(x) (D_p \psi_q) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l-1} (1 - \psi_j) - \chi_l(x) (D_p \psi_l) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right) \end{aligned}$$

и, далее, пользуясь оценками (4.21), (4.22), находим

$$\begin{aligned} |D_p \varphi_l| &= \left| \psi_l \sum_{q=1}^{l-1} \chi_q(x) (D_p \psi_q) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l-1} (1 - \psi_j) - \chi_l(x) (D_p \psi_l) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right| \\ &\leq \sum_{q=1}^l \chi_q(x) |D_p \psi_q| \leq \frac{4\mu}{\lambda - 1} \sum_{q=1}^l \chi_q(x) \frac{1}{s_q}. \end{aligned}$$

На основании леммы 4.2 в каждой фиксированной точке $y \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$|D_p \varphi_l(y)| \leq \frac{2^{n+2} \lambda \mu}{\lambda - 1} \max \left\{ \frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_l} \right\}, \quad l = 2, 3, \dots \quad (4.25)$$

Объединяя (4.23), (4.25) и учитывая, что постоянная $\mu > 1$ произвольна, убеждаемся в справедливости оценки (4.20) с постоянной $c(n, \lambda)$, подчиненной ограничению (4.19).

§ 5. Особенности дифференциальных форм

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Рассмотрим дифференциальную форму θ , $\deg \theta = n - 1$, с коэффициентами класса $L^p_{\text{loc}}(D \setminus E)$. Для произвольного куба $Q(a, r) \subset D$ такого, что $Q(a, r) \cup E \neq \emptyset$, полагаем

$$\kappa(Q(a, r), \theta) = \inf \int_{Q(a, r) \setminus E} |\theta - \theta_0| dx,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным слабо замкнутым формам $\theta_0 \in L^p(Q(a, r) \setminus E)$, $\text{supp } \theta_0 \subset \overline{Q(a, r)} \setminus E$.

Наш результат о почти замкнутых формах состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, пусть ω – калибровочная функция, обладающая свойством (3.12). Пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество.

Предположим, что θ , $\deg \theta = n - 1$, – дифференциальная форма в $D \setminus E$, почти замкнутая в $D \setminus E$ с уклонением ε_1 и такая, что для всякого куба $Q(x, r) \subset D$ выполнено

$$\kappa(Q(a, r), \theta) \leq \omega(r). \quad (5.26)$$

Тогда форма θ почти замкнута в D с уклонением

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + c(n, \lambda) c(\lambda, \omega) \varepsilon_2, \quad (5.27)$$

где

$$\varepsilon_2 = \mathcal{D}^h(E) \quad \text{и} \quad h(t) = \omega(t)t^{-1}.$$

§ 6. Доказательство теоремы 5.1

Пусть $\varphi \in C^\infty(D)$, $\text{supp } \varphi \subset D$. Нам необходимо доказать, что

$$\left| \int_D d\varphi \wedge \theta \right| < \varepsilon_3. \quad (6.28)$$

Зафиксируем постоянные $\lambda > 1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, функцию ω со свойством (3.12) и функцию $\varphi \in C^\infty(D)$, $\text{supp } \varphi \subset D$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

Пусть $\delta' = \max_D |\nabla \varphi|$. Так как $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2$ для $h(t) = \omega(t)t^{-1}$ и множество $E \cap \text{supp } \varphi$ компактно, то по определению бинарной меры $\mathcal{D}^h(E)$ множество $E \subset D$ может быть покрыто конечной системой бинарных кубов

$$\{Q(x_l, r_l)\}, \quad r_l \leq \delta < \delta', \quad 1 \leq l \leq m,$$

так, что

$$\text{int } Q(x_p, r_p) \cap \text{int } Q(x_q, r_q) = \emptyset \quad \text{при всех } p \neq q \quad (6.29)$$

и

$$\sum_{l=1}^m \omega(r_l) r_l^{-1} < \varepsilon_2 + \varepsilon', \quad (6.30)$$

где $\delta > 0$ и $\varepsilon' > 0$ – произвольные числа.

По лемме 4.1 найдется семейство функций $\varphi_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со свойствами (4.18)–(4.20). Положим

$$I[\varphi] \equiv \int_{D \setminus E} d\varphi \wedge \theta.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} I[\varphi] &= \int_D \sum_{l=1}^m d(\varphi \varphi_l) \wedge \theta + \int_D d\left(\varphi \left(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l\right)\right) \wedge \theta \\ &= \int_D \sum_{l=1}^m d(\varphi \varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) + \int_D d\left(\varphi \left(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l\right)\right) \wedge \theta. \end{aligned}$$

Здесь θ_0 есть слабо замкнутая в $Q(x_l, r_l) \setminus E$ форма описанного выше вида и мы использовали тот факт, что форма $d(\varphi \varphi_l) \wedge \theta_0$ финитна в $Q(x_l, r_l) \setminus E$, поэтому

$$\int_{Q(x_l, r_l)} d(\varphi \varphi_l) \wedge \theta_0 * \mathbf{1} = \int_{Q(x_l, r_l)} d(\varphi \varphi_l \wedge \theta_0) * \mathbf{1} = 0.$$

Однако

$$\text{supp } \varphi \left(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l\right) \subset D \setminus E, \quad 0 \leq \varphi \left(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l\right) \leq 1.$$

Форма θ почти замкнута с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$. Таким образом,

$$\left| \int_D d\left(\varphi \left(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l\right)\right) \wedge \theta \right| < \varepsilon_1$$

и мы получаем

$$|I[\varphi]| < \sum_{l=1}^m \left| \int_D d(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| + \varepsilon_1,$$

откуда

$$|I[\varphi]| < \sum_{l=1}^m \left| \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} d(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| + \varepsilon_1. \quad (6.31)$$

Нашей ближайшей целью теперь является доказательство следующего утверждения.

ЛЕММА 6.1. *В предположениях теоремы 5.1 для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ и всякого $l = 1, \dots, m$ имеет место соотношение*

$$\left| \int_{\lambda B(x_l, r_l)} d(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| \leq c(\omega, \lambda, \varphi) \omega(r_l), \quad (6.32)$$

где

$$c(\omega, \lambda, \varphi) = c(\lambda, \omega) \left(\max_D |\nabla \varphi| + c(n, \lambda) \frac{1}{r_l} \right)$$

– постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться соотношением (5.26) и заметить, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} d(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| &\leq \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} |d(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0)| dx \\ &\leq \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} |d(\varphi\varphi_l)| |\theta - \theta_0| dx \leq \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} (|\varphi| |\nabla \varphi_l| + |\nabla \varphi| |\varphi_l|) |\theta - \theta_0| dx \\ &\leq \left(\max_{\lambda Q(x_l, r_l)} |\nabla \varphi_l| + \max_D |\nabla \varphi| \right) \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} |\theta - \theta_0| dx. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можем считать форму θ_0 выбранной так, что

$$\int_{\lambda Q(x_l, r_l)} |\theta - \theta_0| dx \leq \kappa(\lambda Q(x_l, r_l), \theta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} d(\varphi\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) \right| &\leq \left(\max_{\lambda Q(x_l, r_l)} |\nabla \varphi_l| + \max_D |\nabla \varphi| \right) \omega(\lambda r_l) \\ &\leq c(\omega_1, \lambda) \omega(r_l) \left(\max_{\lambda Q(x_l, r_l)} |\nabla \varphi_l| + \max_D |\nabla \varphi| \right) \\ &\leq c(\omega_1, \lambda) \omega(r_l) \left(\max_D |\nabla \varphi| + c(n, \lambda) \frac{1}{r_l} \right) \\ &= c(\omega, \lambda, \varphi) \omega(r_l). \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 5.1, просуммируем (6.32) по всем $l = 1, \dots, m$. Тогда имеем

$$\sum_{l=1}^m \left| \int_{\lambda Q(x_l, r_l)} d(\varphi\varphi_l) \wedge \theta \right| \leq c(\omega, \lambda) \sum_{l=1}^m \omega(r_l) r_l^{-1} (\delta + c(n, \lambda)).$$

Пользуясь (6.30), (6.31) и полагая $\varepsilon', \delta \rightarrow 0$, получаем

$$|I[\varphi]| \leq \varepsilon_1 + c(n, \lambda)c(\lambda, \omega) \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{l=1}^m \omega(r_l) r_l^{-1} = \varepsilon_1 + c(n, \lambda)c(\lambda, \omega) \mathcal{D}^h(E).$$

Данное соотношение влечет (5.27).

Отметим следующий специальный случай доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, ω – калибровочная функция, обладающая свойством (3.12), и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть θ , $\deg \theta = n - 1$, – слабо замкнутая в $D \setminus E$ дифференциальная форма, удовлетворяющая (5.26).

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ для $h(t) = \omega(t)t^{-1}$, то форма θ слабо замкнута в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что предположение об обращении в нуль h -меры Хаусдорфа множества E влечет равенство нулю бинарной меры $\mathcal{D}^h(E)$.

§ 7. Особенности A -решений

Укажем некоторые применения полученных результатов для A -решений с особенностями.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – почти решение с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$ уравнения (1.4), удовлетворяющего предположению (iii).

Предположим также, что для всякого куба $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (3.12) выполнено

$$\mu_2 \int_{Q(x, r) \setminus E} w(x) |\nabla f(x)|^{p-1} dx \leq \Omega(r). \quad (7.33)$$

Тогда если $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2 < \infty$ для $h(t) = \Omega(t)t^{-1}$, то f является почти решением в D уравнения (1.4) с уклонением ε_3 , определенным, как в (5.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\theta(x) = * \sum_{i=1}^n A_i(x, \nabla f) dx_i.$$

Для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(D \setminus E)$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, имеем

$$d\varphi \wedge \theta = \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla f) \rangle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Тем самым, условие (1.6) влечет

$$\left| \int_{D \setminus E} d\varphi \wedge \theta \right| < \varepsilon_1,$$

и форма θ почти замкнута в $D \setminus E$ с уклонением ε_1 .

Так как

$$|\theta(x)| = |A(x, \nabla f)|,$$

то предположение (7.33) гарантирует выполнение (5.26) с функцией

$$\omega(t) = \frac{1}{\mu_2} \Omega(t).$$

На основании теоремы 5.1 заключаем, что f есть почти решение в области D с уклонением ε_3 .

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – обобщенное решение в $D \setminus E$ уравнения (1.4), удовлетворяющего предположению (iii).

Предположим также, что для всякого $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (3.12) выполнено

$$\mu_2 \int_{Q(x, r) \setminus E} w(x) |\nabla f(x)|^{p-1} dx \leq \Omega(r). \quad (7.34)$$

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ для $h(t) = \Omega(t)t^{-1}$, то f является обобщенным решением в D уравнения (1.4).

Некоторые весьма тонкие результаты, касающиеся проблемы устранимых особенностей p -гармонических функций, анонсированы А. В. Покровским [8]. Относительно других специальных случаев утверждения об устранимых особенностях решений эллиптических уравнений см. [9]–[20] и др. Постановка задачи о решениях эллиптических уравнений с особенностями как почти решениях, кажется, является новой.

§ 8. Решения уравнения газовой динамики

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера обобщенные решения уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma(q) f_{x_i}) = 0, \quad q = |\nabla f|, \quad (8.35)$$

где

$$\sigma(q) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} q^2\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

При $n = 2$ мы имеем классическое уравнение газовой динамики. Данное уравнение описывает потенциал скоростей плоского установившегося течения идеального газа в адиабатическом режиме; γ , $-\infty < \gamma < +\infty$, – постоянная, характеризующая газ (см., например, [21; гл. IV, § 15]). Для $\gamma = 1 \pm 0$ имеем

$$\sigma(q) = \exp\left\{-\frac{1}{2}q^2\right\}.$$

В случае $n = 2$ данное уравнение имеет эллиптический тип при $\gamma \leq 1$. Для $\gamma > 1$ оно эллиплично при $q < \sqrt{2/(\gamma - 1)}$, параболично при $q = \sqrt{2/(\gamma - 1)}$ и гиперболично при $q > \sqrt{2/(\gamma - 1)}$. В общем случае $n \geq 2$ мы предполагаем, что

или $\gamma \leq 1$,

или $\gamma > 1$ и $\operatorname{ess\,sup}_{D'} q(x) < \sqrt{2/(\gamma - 1)}$ для всякой подобласти $D' \Subset D$. (8.36)

Если решение f фиксировано, то мы можем рассматривать σ как некоторую (наперед заданную) измеримую функцию переменной x . Решения уравнения (8.35), в котором весовая функция σ есть функция переменной x , называются σ -гармоническими функциями. Изучению таких функций посвящено значительное количество работ (см., например, [22], [23] и цитированную в них литературу).

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – почти решение с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$ уравнения (8.35), удовлетворяющего предположениям (8.36).

Предположим также, что для всякого $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (3.12) выполнено

$$\int_{Q(x, r) \setminus E} \sigma(|\nabla f(x)|) |\nabla f(x)| dx \leq \Omega(r). \quad (8.37)$$

Тогда если $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2 < \infty$ для $h(t) = \Omega(t)t^{-1}$, то f является почти решением в D уравнения (8.35) с уклонением ε_3 , определенным как в теореме (5.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mu_2 w(x) = \sigma(|\nabla f(x)|).$$

Предположение (8.36) влечет выполнение свойства (1.1) для весовой функции w . Для нужного заключения достаточно заметить, что из (8.37) следует (7.33), и воспользоваться теоремой 7.1.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – обобщенное решение уравнения (8.35) в $D \setminus E$, удовлетворяющего предположениям (8.36).

Предположим, что для всякого куба $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (3.12) выполнено

$$\int_{Q(x, r) \setminus E} \sigma(|\nabla f(x)|) |\nabla f(x)| dx \leq \Omega(r). \quad (8.38)$$

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ для $h(t) = \Omega(t)t^{-1}$, то f является обобщенным решением в D уравнения (8.35).

§ 9. Приложения к квазирегулярным отображениям

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Непрерывное отображение $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{p,\text{loc}}^1(U)$ называется *квазирегулярным*¹ [1; раздел 14], если почти всюду в U выполнено

$$|F'(x)|^n \leq K J_F(x). \quad (9.39)$$

Здесь $F': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – формальная производная F , $|F'(x)| = \max_{|h|=1} |F'(x)h|$. Символом $J_F(x)$ мы обозначаем якобиан F в точке $x \in U$.

Отметим специальный случай теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D подмножество. Пусть $F: D \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квазирегулярное отображение, имеющее непрерывное продолжение F^* на E .

Предположим, что для любого куба $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции ω со свойством (3.12) выполнено

$$\int_{Q(x,r) \setminus E} |F'|^{n-1} dx \leq \omega(r). \quad (9.40)$$

Если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ при $h(t) = \omega(t)t^{-1}$, то E устранимо и отображение F^* квазирегулярно в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\theta = dF_2 \wedge \cdots \wedge dF_n.$$

Мы имеем

$$\langle dF_1, * \theta \rangle = J_F(x).$$

Согласно теореме 6.4 из [4] неравенство (9.39) влечет

$$|\theta|^{n/(n-1)} \leq c(n, K) |F'|^n \leq c(n, K) |dF_1|^n.$$

На основании теоремы 5.1 заключаем, что для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C^\infty(D)$, $\text{supp } \varphi \subset D$, справедливо соотношение

$$\int_D d(\varphi^n F_1) \wedge \theta = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_D \varphi^n dF_1 \wedge \theta &= - \int_D F_1 d\varphi^n \wedge \theta, \\ \int_D \varphi^n J_F(x) dx &= n \int_D \varphi^{n-1} F_1 d\varphi \wedge \theta. \end{aligned}$$

Однако согласно (9.39)

$$\int_D \varphi^n |F'|^n dx \leq K \int_D \varphi^n J_F(x) dx$$

¹Отображением с ограниченным искажением [24; гл. II, § 5].

и потому

$$|F_1 d\varphi \wedge \theta| \leq |\nabla \varphi| |F_1| |\theta|,$$

откуда получаем

$$\int_D \varphi^n |F'|^n dx \leq \int_D \varphi^{n-1} |\nabla \varphi| |F_1| |\theta| dx.$$

Легко видеть, что

$$|\theta| \leq c(n) |F'|^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\int_D \varphi^n |F'|^n dx \leq c(n) \int_D \varphi^{n-1} |\nabla \varphi| |F_1| |F'|^{n-1} dx.$$

На основании неравенства Гёльдера можем записать

$$\int_D \varphi^{n-1} |\nabla \varphi| |F_1| |F'|^{n-1} dx \leq \left(\int_D |F_1|^n |\nabla \varphi|^n dx \right)^{1/n} \left(\int_D \varphi^n |F'|^n dx \right)^{n/(n-1)},$$

откуда выводим

$$\int_D \varphi^n |F'|^n dx \leq c(n) \int_D |F|^n |\nabla \varphi|^n dx. \quad (9.41)$$

Так как $\mathcal{H}^h(E) = 0$, то либо $|F'| = 0$ почти всюду в D , а потому $F \equiv \text{const}$, либо

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} > 0. \quad (9.42)$$

Соотношение (9.42) влечет $\mathcal{H}^n(E) = 0$. Но $F^* \in C^0(D)$ и потому F_1 принадлежит классу ACL в D . Так как φ произвольна, то из (9.41) вытекает $F' \in L^n_{\text{loc}}(D)$. Тем самым, мы заключаем, что $F_1 \in W^1_{n,\text{loc}}(D)$.

Используя те же самые аргументы для каждой функции $F_2, \dots, F_n$, легко убедиться, что отображение $F \in W^1_{n,\text{loc}}(D)$ и, следовательно, оно квазирегулярно во всей области D .

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество, и пусть $F: D \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квазирегулярное отображение. Если $F \in \text{Lip}(D \setminus E)$ и $\mathcal{H}^n(E) = 0$, то E устранимо для F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что предположение $F \in \text{Lip}(D \setminus E)$ влечет

$$\sup_{x \in D \setminus E} |F'| < \infty.$$

Утверждение следует из теоремы 9.1 при $\omega(t) = t$.

Другие признаки устранимости особого множества для квазирегулярных отображений см. в работах И. Н. Песина [25], В. М. Миклюкова [26], В. В. Асеева, А. В. Сычева [27], [28; с. 108–113], Кауфмана и Ву [29], Мартио, Миклюкова, Вуоринена [5] и др.

Автор признателен А. Н. Кондрашову, прочитавшему статью в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний.

Список литературы

- [1] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [2] В. М. Миклюков, “Зоны стагнации гармонической функции на поверхности и предлиувиллевы теоремы”, *Геометрический анализ и его приложения*, Тез. докл. Междунар. школы-конференции, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2004, 131–132.
- [3] V. M. Miklyukov, S.-S. Chow, V. P. Solovjov, “Stagnation zones of ideal flows in long and narrow bands”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **62** (2004), 3339–3356.
- [4] D. Franke, O. Martio, V. M. Miklyukov, M. Vuorinen, R. Wisk, “Quasiregular mappings and $\mathcal{WT}$ -classes of differential forms on Riemannian manifolds”, *Pacific J. Math.*, **202**:1 (2002), 73–92.
- [5] O. Martio, V. M. Miklyukov, M. Vuorinen, *Removable singularities of $\mathcal{WT}$ -differential forms and quasiregular mappings*, Preprint № 382, Univ. Helsinki, Helsinki, 2004.
- [6] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
- [7] R. Harvey, J. C. Polking, “Removable singularities of solutions of linear partial differential equations”, *Acta Math.*, **125**:1/2 (1970), 39–56.
- [8] A. V. Pokrovskii, “Removable singularities for p -harmonic functions”, *Междунар. школа-конф. по геометрии и анализу*, Тез. докл., Изд-во Ин-та матем. СО РАН, Новосибирск, 2004, 201–202.
- [9] Е. П. Долженко, “О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:5 (1964), 1113–1130.
- [10] Е. П. Долженко, “Об особых точках непрерывных гармонических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1251–1270.
- [11] L. Carleson, “Removable singularities for continuous harmonic functions in $\mathbb{R}^n$ ”, *Math. Scand.*, **12** (1963), 15–18.
- [12] J. Kral, “Removable singularities of solutions of semielliptic equations”, *Rend. Mat. (6)*, **6** (1973), 763–783.
- [13] Б. Ж. Ищанов, “Об устранимых особенностях функций классов BMO и их обобщений”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, **5** (1985), 77–80.
- [14] Б. Ж. Ищанов, “Незамкнутые особые множества для слабых решений линейных дифференциальных уравнений”, *Геометрические вопросы теории функций и множеств*, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1989, 41–49.
- [15] N. X. Uy, “A removable set for Lipschitz harmonic functions”, *Michigan Math. J.*, **37**:1 (1990), 45–51.
- [16] D. C. Ullrich, “Removable sets for harmonic functions”, *Michigan Math. J.*, **38**:3 (1991), 467–473.
- [17] G. David, P. Mattila, “Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **16**:1 (2000), 137–215.
- [18] В. М. Миклюков, “Множества особенностей решений уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:6 (1992), 131–140.
- [19] А. В. Покровский, “Локальные аппроксимации решениями гипоеллиптических уравнений и устранимые особенности”, *Докл. РАН*, **367**:1 (1999), 15–17.
- [20] T. Kilpeläinen, X. Zhong, “Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:6 (2002), 1681–1688.
- [21] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М., 1973.
- [22] G. Alessandrini, V. Nesi, “Univalent σ -harmonic mappings”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **158**:2 (2001), 155–171.
- [23] D. Faraco, *Beltrami operators and microstructure*, Thesis, University of Helsinki, 2002.

- [24] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [25] И. Н. Песин, “Множества устранимых особенностей аналитических функций и квазиконформные отображения”, *Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного*, Физматлит, М., 1960, 419–424.
- [26] В. М. Миклюков, “Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве”, *Докл. АН СССР*, **188**:3 (1969), 525–527.
- [27] В. В. Асеев, А. В. Сычев, “О множествах устранимых для пространственных квазиконформных отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **15**:6 (1974), 1213–1227.
- [28] А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Наука, Новосибирск, 1983.
- [29] R. Kaufman, J.-M. Wu, “On removable sets for quasiconformal mappings”, *Ark. Mat.*, **34**:1 (1996), 141–158.
- [30] Л. Берс, *Математические вопросы дозвуковой и околораздуковой газовой динамики*, ИЛ, М., 1961.
- [31] Е. П. Долженко, “О “стирании” особенностей аналитических функций”, *УМН*, **18**:4 (1963), 135–142.
- [32] А. В. Покровский, “Об устранимых особенностях решений однородных эллиптических уравнений в классах Никольского–Бесова”, *Докл. РАН*, **380**:2 (2001), 168–171.

В. М. Миклюков (V. M. Miklyukov)
Волгоградский государственный университет
E-mail: miklyuk@vlink.ru

Поступила в редакцию
12.09.2005 и 31.05.2006