Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 2, 93–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 03:01:06

УДК 517.51

А. С. Романюк

Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных

Получены порядковые оценки наилучших приближений классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространствах L_1 и L_∞ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. Установлены порядки ортопроекционных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ и линейных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_1 .

Библиография: 22 названия.

Введение

В настоящей работе изучаются вопросы приближения классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q , $q = 1, \infty$, где в отличие от приближения этих классов функций в пространстве L_q при $q \in (1, \infty)$ многие задачи аппроксимации остаются нерешенными.

Полученные здесь результаты дополняют оценки соответствующих аппроксимативных характеристик функциональных классов, которые исследовались в работах [1]–[6]. Кроме того, в дополнение к установленным оценкам линейных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_1 получены порядки линейных поперечников классов функций $W_{p,\alpha}^r$ также в пространстве L_1 , которые, по-видимому, оставались неизвестными. Более подробно о рассматриваемых аппроксимативных характеристиках будет идти речь в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d -мерное пространство с элементами

$$x = (x_1, \dots, x_d), \quad (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d,$$

и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, – пространство 2π -периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далее будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\pi_d)$, для которых выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций условимся обозначать через $L_p^0(\pi_d)$.

Для функции $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j -й переменной с шагом h

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l -го порядка

$$\Delta_{h,j}^l f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \cdots \Delta_{h,j}}^l f(x)$$

в точке x_j с шагом h .

Далее, если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \cdots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы вектор $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, и параметры $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int_{\pi_d} \|\Delta_h^k f(x)\|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

и

$$\sup_h \|\Delta_h^k f(x)\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \leq 1, \quad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = \overline{1, d}$. Напомним, что классы $B_{p,\theta}^r$ являются аналогами классов функций, введенных О. В. Бесовым в [7], и при $\theta = \infty$ выполняется $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r – аналоги классов, введенных С. М. Никольским (см., например, [8; гл. 4, § 4.3]). Далее нам будет удобно пользоваться определением классов $B_{p,\theta}^r$ в несколько другом виде.

Для векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, и $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ введем обозначение

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда классы $B_{p,\theta}^r$ можно определить следующим образом (см., например, [9]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \{f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1\}.$$

Отметим, что при соответствующем видоизменении “блоков” $\delta_s(f, x)$ приведенное определение классов $B_{p,\theta}^r$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$ (см., например, [9; замечание 2.1]).

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, положим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где “ $*$ ” обозначает операцию свертки. Тогда при $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$,

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1 \}.$$

Всюду ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, которые содержатся в определениях рассматриваемых классов функций, упорядочены следующим образом: $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = \overline{1, d}$, которому в свою очередь сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$. Таким образом, $r' = (r'_1, \dots, r'_d)$ – вектор с координатами $r'_j = r_1 \gamma'_j$, $j = \overline{1, d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu_1(N) \leq C \mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Если $\mathfrak{X}$ – некоторое конечное множество, то через $|\mathfrak{X}|$ будем обозначать количество его элементов.

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 получены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $B_{p,\theta}^r$, $1 < p < \infty$, в метрике пространства L_1 тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. В § 2 установлены оценки сверху наилучших приближений классов $B_{p,\theta}^r$, $2 < p < \infty$, в равномерной метрике также тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. Важно отметить, что полученные оценки не могут быть реализованы с помощью приближения соответствующими линейными методами. Наконец в § 3 найдены порядки ортопроекционных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$,

$1 < p \leq \infty$, и линейных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$, $2 \leq p < \infty$, и $W_{p,\alpha}^r$, $1 < p < \infty$, в пространстве L_1 (определение этих классов приведено ниже). Здесь же исследовано приближение классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, линейными операторами, подчиненными определенным ограничениям. Полученные оценки соответствующих величин в сочетании с известными результатами позволили записать порядки приближения классов функций $B_{p,\theta}^r$, $1 < p \leq \infty$, в метрике пространства L_1 их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье.

При доказательстве оценок снизу рассматриваемых аппроксимативных характеристик используются и развиваются методы, которые применялись в работах [10]–[12] при исследовании соответствующих величин на классах $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r .

§ 1. Наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ в метрике пространства L_1

Для формулировки и доказательства полученных здесь результатов нам понадобятся еще некоторые дополнительные обозначения и определения.

Пусть Q_n^r обозначает множество

$$Q_n^r = \bigcup_{(s,\gamma) \leq n} \rho(s),$$

которое называют *ступенчатым гиперболическим крестом*.

Положим

$$T(Q_n^r) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)} \right\},$$

c_k – произвольные числа, и через $T^\perp(Q_n^r)$ обозначим множество

$$T^\perp(Q_n^r) = \left\{ f : f(x) = \sum_{k \notin Q_n^r} c_k e^{i(k,x)} \right\}.$$

Для $f \in L_p^0(\pi_d)$ определим величину

$$E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t \in T(Q_n^r)} \|f - t\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

– наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатого гиперболического креста Q_n^r . Для функционального класса $F \subset L_p^0(\pi_d)$ положим

$$E_{Q_n^r}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{Q_n^r}(f)_p.$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $1 < p \leq 2$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда имеет место соотношение

$$E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)_+}, \quad (1)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Прежде чем перейти к доказательству, заметим, что порядок величины $E_{Q_n^{r'}}(B_{1,\theta}^r)_1$ установлен в [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (1) реализуется при приближении функций из классов $B_{p,\theta}^r$ в метрике пространства L_q , $1 < q < p \leq 2$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum_{(s, \gamma') \leq n} \delta_s(f, x)$. Соответствующий результат получен в [13].

Переходя к установлению в (1) оценки снизу, заметим, что при этом достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. Для векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$ с натуральными координатами введем обозначения

$$\Omega_n = \{s : s = (s_1, \dots, s_d), \|s\|_1 = n\},$$

$$\overline{\Omega}_n = \left\{s : s \in \Omega_n, s_j \geq \frac{n}{2d}, j = \overline{1, d}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что для количества элементов множества $\overline{\Omega}_n$ справедливо соотношение

$$|\overline{\Omega}_n| \asymp n^{d-1}.$$

Далее, положим $v = \lceil |\overline{\Omega}_n|^{1/d} \rceil$ и разобьем куб π_d на v^d кубов с ребром $2\pi/v$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\overline{\Omega}_n' \subset \overline{\Omega}_n$, $|\overline{\Omega}_n'| = v^d$, и получившимся множеством кубов. При этом для $s \in \overline{\Omega}_n'$ точка $x^s = (x_1^s, \dots, x_d^s)$ есть центр соответствующего куба.

Пусть $K_{l-1}(x)$ обозначает одномерное ядро Фейера порядка $l-1$:

$$K_{l-1}(x) = \sum_{|m| \leq l-1} \left(1 - \frac{|m|}{l}\right) e^{imx}.$$

Напомним, что при этом имеет место соотношение

$$\|K_{l-1}\|_q \asymp l^{1-1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Положим $u = 2^{[(d-1) \log_2 n/d]}$ и рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sum_{s \in \overline{\Omega}_n'} e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_u(x_j - x_j^s),$$

где $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, $k_j^{s_j} = 2^{s_j} + 2^{s_j-1}$, $j = \overline{1, d}$.

Заметим, что согласно определению множества $\overline{\Omega}_n'$ имеем $g_1 \in T^\perp(Q_n^r)$, где $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$.

Теперь, отталкиваясь от функции $g_1(x)$, построим функцию, которая принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$. Поскольку для $s \in \overline{\Omega}_n'$ в силу выбора числа u и свойства ядра Фейера справедливы соотношения

$$\|A_s(g_1, x)\|_p \ll \left\| \prod_{j=1}^d K_u(x_j) \right\|_p \asymp u^{d(1-1/p)} \asymp n^{(d-1)(1-1/p)},$$

то согласно определению $\|g_1\|_{B_{p,\theta}^r}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_1, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp \left(\sum_{s \in \overline{\Omega}_n'} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_1, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll n^{(d-1)(1-1/p)} \left(\sum_{s \in \overline{\Omega}_n'} 2^{(s,r)\theta} \right)^{1/\theta} \asymp 2^{nr_1} n^{(d-1)(1-1/p)} \left(\sum_{s \in \overline{\Omega}_n'} 1 \right)^{1/\theta} \\ &\asymp 2^{nr_1} n^{(d-1)(1-1/p+1/\theta)}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция

$$f_1(x) = C_1 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} g_1(x) \quad (2)$$

с соответствующей постоянной $C_1 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$.

Пусть

$$t_n^*(x) = \sum_{k \in Q_n^r} c_k^* e^{i(k,x)}$$

— полином наилучшего приближения функции $g_1(x)$ в метрике пространства L_1 . Тогда, с одной стороны, имеем

$$(g_1, g_1) = \|g_1\|_2^2 \gg n^{2(d-1)}. \quad (3)$$

С другой стороны, принимая во внимание, что $g_1 \in T^\perp(Q_n^r)$, в силу неравенства Гёльдера можем записать

$$(g_1, g_1) = (g_1 - t_n^*, g_1) \leq \|g_1 - t_n^*\|_1 \|g_1\|_\infty = E_{Q_n^r}(g_1)_1 \|g_1\|_\infty. \quad (4)$$

Далее, поскольку в силу свойства ядра Фейера $K_u(t) \ll \min\{u, 1/(ut^2)\}$ и, следовательно,

$$\|g_1\|_\infty \leq \sum_{s \in \overline{Q}_n'} \prod_{j=1}^d K_u(x_j - x_j^s) \ll u^d \ll n^{d-1}, \quad (5)$$

то сопоставив (4) и (5), приходим к соотношению

$$E_{Q_n^r}(g_1)_1 \gg (g_1, g_1) n^{-(d-1)}.$$

Отсюда в сочетании с (3) находим

$$E_{Q_n^r}(g_1)_1 \gg n^{(d-1)}.$$

Следовательно, согласно определению функции $f_1(x)$ можем записать

$$E_{Q_n^r}(f_1)_1 \gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} E_{Q_n^r}(g_1)_1 = 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/p-1/\theta)}.$$

Обратим внимание, что полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $\theta \in [p, \infty)$. Если же $\theta \in [1, p)$, то заметим следующее. С одной стороны, установленная выше оценка сверху величины $E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_1$ в этом случае не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$ и, значит, требуемую оценку снизу достаточно установить при $d = 1$. С другой стороны, в одномерном случае проведенные выше рассуждения позволяют получить нужную оценку для всех $\theta \in [1, \infty)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае $\theta = \infty$, т.е. для классов H_p^r , порядок величины $E_{Q_n^r}(H_p^r)_1$, $1 < p \leq 2$, получен В. Н. Темляковым [11] (см. также [12; гл. 3, § 3]).

Пусть $F_r(x, \alpha)$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме содержатся только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Обозначим (см., например, [14; гл. 2, § 1]) через $W_{p, \alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

В принятых обозначениях справедливо соотношение

$$E_{Q_n^{r'}}(W_{p, \alpha}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1}, \quad r_1 > 0, \quad 1 < p \leq 2. \quad (6)$$

Оценка сверху в (6) следует из соответствующей оценки приближения функций из класса $W_{p, \alpha}^r$ в пространстве L_q , $1 < q \leq p < \infty$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n'(f, x)$ (см. [15]).

Соответствующая оценка снизу следует из теоремы 1.1 при $\theta = p$ согласно вложению $B_{p, p}^r \subset W_{p, \alpha}^r$, $1 < p \leq 2$. Отметим, что эта оценка ранее получена в [12; гл. 3, § 3].

В заключение параграфа приведем два утверждения, которые легко получить как следствие теоремы 1.1 и известных результатов.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $2 < p < \infty$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta \leq 2$. Тогда

$$E_{Q_n^{r'}}(B_{p, \theta}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (7) следует из работы [1], где установлен порядок величины $E_{Q_n^{r'}}(B_{p, \theta}^r)_q$, $1 < q \leq 2 < p < \infty$. Соответствующая оценка снизу следует из одномерного случая, который, в частности, рассмотрен при доказательстве оценки снизу в теореме 1.1.

Следующее утверждение относится к одномерному случаю, поэтому нам понадобятся соответствующие обозначения.

Пусть $T(2^n)$ обозначает множество тригонометрических полиномов

$$T(2^n) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Для $f \in L_1[-\pi, \pi]$ через

$$E_{2^n}(f)_1 = \inf_{t \in T(2^n)} \|f(x) - t(x)\|_1$$

обозначим ее наилучшее приближение полиномами из $T(2^n)$. Соответственно, если $F \subset L_1[-\pi, \pi]$ – некоторый класс функций, то положим

$$E_{2^n}(F)_1 = \sup_{f \in F} E_{2^n}(f)_1.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $d = 1$. Тогда при $1 < p \leq \infty$, $r_1 > 0$ и $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оценка

$$E_{2^n}(B_{p, \theta}^{r_1})_1 \asymp 2^{-nr_1}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (8) следует из теоремы 1.1 при $1 < p \leq 2$ и [1; теорема 3] при $2 < p \leq \infty$.

Для получения в (8) оценки снизу рассмотрим функцию

$$g_2(x) = 2^{-nr_1} e^{i2^{n+1}x}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Легко видеть, что функция $g_2(x)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^{r_1}$, $1 \leq p \leq \infty$, и кроме того она ортогональна тригонометрическим полиномам из множества $T(2^n)$.

Пусть $t^*(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k^* e^{ikx}$ – полином наилучшего приближения функции $g_2(x)$ в пространстве $L_1[-\pi, \pi]$. Тогда, с одной стороны,

$$I = (g_2(x) - t^*(x), e^{i2^{n+1}x}) = (g_2(x), e^{i2^{n+1}x}) = 2^{-nr_1}. \quad (9)$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера

$$I \leq \|g_2(x) - t^*(x)\|_1 \|e^{i2^{n+1}x}\|_\infty = \|g_2(x) - t^*(x)\|_1 = E_{2^n}(g_2)_1. \quad (10)$$

Сопоставив (9) и (10), приходим к искомой оценке

$$E_{2^n}(g_2)_1 \geq 2^{-nr_1}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Вопрос о порядке величины

$$E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_1, \quad 2 < p \leq \infty, \quad 2 < \theta < \infty,$$

в многомерном случае, т.е. при $d \geq 2$, остается, по-видимому, открытым.

§ 2. Наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ в равномерной метрике

В работе [3] получена оценка сверху величины $E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty$, $1 \leq p \leq 2$, и там же показано, что при $1 < p \leq 2$ эта оценка не может быть реализована с помощью приближения классов $B_{p,\theta}^r$ соответствующими линейными методами. Здесь мы установим оценку сверху величины $E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_\infty$ в случае $2 < p < \infty$. Из этой оценки и результата, полученного в [3; теорема 4.1], также будет следовать, что приближение классов $B_{p,\theta}^r$, $2 < p < \infty$, в равномерной метрике соответствующими линейными методами не реализует наилучших приближений $E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_\infty$. Кроме того, в этом параграфе мы получим точную по порядку оценку наилучшего приближения классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, в метрике пространства L_∞ в одномерном случае, а также установим порядок величины $E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty$, $1 \leq p < 2$, $1 \leq \theta \leq 2$, в многомерном случае. Как отмечалось выше, оценка сверху в этом случае установлена в [3].

Перейдем к формулировке и доказательству утверждений.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $2 < p < \infty$, $r_1 > 1/p$, $1 < \theta < \infty$. Тогда при $d \geq 2$

$$E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_\infty \ll \begin{cases} 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\theta'-2/(p\theta'))}, & 1 < \theta \leq 2; \\ 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\theta'-1/p)}, & 2 < \theta < \infty, \end{cases}$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ – некоторое конечномерное линейное подпространство из L_p . Обозначим через $\Phi^\perp$ подпространство, ортогональное Φ , т.е. для каждой функции $\phi \in \Phi$ выполнено равенство $(\phi, g) = 0$, $g \in \Phi^\perp$. В принятых обозначениях как следствие общего утверждения, полученного С. М. Никольским, имеет место соотношение

$$\inf_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\|_p = \sup_{\substack{g \in \Phi^\perp \\ \|g\|_{p'} \leq 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x)g(x) dx \right|, \quad (11)$$

$1 \leq p \leq \infty$, $1/p' + 1/p = 1$.

Отметим, что это соотношение можно получить с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае (см., например, [16; гл. 1, § 1.4]).

Пусть $G_1^\perp(Q_n^{r'})$ обозначает множество функций $g \in L_1^0(\pi_d)$ таких, что $\|g\|_1 \leq 1$ и для всех $f \in T(Q_n^{r'})$ выполнено $(f, g) = 0$. В принятых обозначениях согласно (11) можем записать

$$\begin{aligned} E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_\infty &= \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \sup_{g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})} (f, g) = \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \sup_{g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s (\delta_s(f), \delta_s(g)) \\ &= \sup_{\substack{f, \{a_s\}: \|\delta_s(f)\|_p \leq a_s \\ (\sum_s a_s 2^{(s,r)\theta})^{1/\theta} \leq 1}} \sup_{g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s (\delta_s(f), \delta_s(g)) \\ &= \sup_{\{a_s\}: (\sum_s a_s^\theta 2^{(s,r)\theta})^{1/\theta} \leq 1} \sup_{g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \sum_s a_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(g)\|_{p'} 2^{-(s,r)} \\ &= \sup_{g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \left(\sum_s 2^{-(s,r)\theta'} \|\delta_s(g)\|_{p'}^{\theta'} \right)^{1/\theta'} \\ &\asymp \sup_{g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})} \left(\sum_s 2^{-(s,r)\theta'} \|A_s(g)\|_{p'}^{\theta'} \right)^{1/\theta'}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее мы будем использовать оценку, полученную в [3]:

$$E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty \ll 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)+}, \quad (13)$$

$1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta < \infty$, $r_1 > 1/p$.

Обратим внимание, что согласно принятым обозначениям такую же оценку сверху можно записать и для величины $E_{Q_n^{r'}}(B_{p,\theta}^r)_\infty$.

Следовательно, полагая в (13) $p = 2$ и вместо вектора $r = (r_1, \dots, r_d)$ – вектор $r/2 = (r_1/2, \dots, r_d/2)$, в силу (12) будем иметь

$$\left(\sum_s 2^{-(s,r/2)\theta'} \|A_s(g)\|_2^{\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll 2^{-n(r_1/2-1/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)+}. \quad (14)$$

Для дальнейшей оценки последней суммы в (12) проведем определенные преобразования. Так, воспользовавшись неравенством

$$\|f\|_a \leq \|f\|_1^\alpha \|f\|_b^{1-\alpha}, \quad f \in L_b, \quad 1 < a < b, \quad \alpha = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{b} \right)^{-1},$$

можем записать для $p' \in (1, 2)$

$$\|A_s(g)\|_{p'} \leq \|A_s(g)\|_1^{2/p'-1} \|A_s(g)\|_2^{2-2/p'}. \quad (15)$$

Следовательно, в силу (15) находим

$$\left(\sum_s 2^{-(s,r)\theta'} \|A_s(g)\|_{p'}^{\theta'} \right)^{1/\theta'} \leq \left(\sum_s (\|A_s(g)\|_1^{(2/p'-1)\theta'} 2^{-(s,r)\theta'/p'}) \times (\|A_s(g)\|_2^{(2-2/p')\theta'} 2^{-(s,r)(1-1/p')\theta'}) \right)^{1/\theta'} = I_1. \quad (16)$$

Далее, воспользовавшись неравенством Гёльдера с показателем $p'/(2-p')$ и выполнив элементарные преобразования, получим

$$I_1 \leq \left(\sum_s \|A_s(g)\|_1^{\theta'} 2^{-(s,r)\theta'/(2-p')} \right)^{(2/p'-1)/\theta'} \left(\sum_s \|A_s(g)\|_2^{\theta'} 2^{-(s,r/2)\theta'} \right)^{(2-2/p')/\theta'}. \quad (17)$$

Оценим каждый из сомножителей правой части (17). Принимая во внимание, что для $g \in G_1^\perp(Q_n^{r'})$ имеет место оценка $\|A_s(g)\|_1 \ll 1$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{(s,\gamma') > n} 2^{-\beta(s,\gamma')} \asymp 2^{-\beta n} n^{(\nu-1)}, \quad \beta > 0 \quad (18)$$

(см. [14; введение]), будем иметь

$$\left(\sum_s \|A_s(g)\|_1^{\theta'} 2^{-(s,r)\theta'/(2-p')} \right)^{(2/p'-1)/\theta'} \ll \left(\sum_{(s,\gamma') > n} 2^{-(s,r)\theta'/(2-p')} \right)^{(2/p'-1)/\theta'} \ll 2^{-nr_1/p'} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'}. \quad (19)$$

Согласно оценке (14) для второго сомножителя (17) можем записать

$$\left(\sum_s \|A_s(g)\|_2^{\theta'} 2^{-(s,r/2)\theta'} \right)^{(2-2/p')/\theta'} \ll \left(2^{-n(r_1/2-1/2)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \right)^{2-2/p'} = 2^{-n(r_1/p-1/p)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+2/p}. \quad (20)$$

Таким образом, в случае $\theta \in (1, 2]$ после элементарных преобразований соотношений (20) и (19) в силу (17) будем иметь

$$I_1 \ll 2^{-nr_1/p'} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'} 2^{-n(r_1/p-1/p)} = 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'}. \quad (21)$$

Аналогично в случае $\theta \in (2, \infty)$ находим

$$I_1 \ll 2^{-nr_1/p'} n^{(\nu-1)(2/p'-1)/\theta'} 2^{-n(r_1/p-1/p)} n^{(\nu-1)(1/p-2/(p\theta))} = 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\theta'-1/p)}. \quad (22)$$

Наконец, сопоставив в зависимости от значения θ оценки (21), (16) и (12) или (20), (16) и (12), приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Поскольку $W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,p}^r$ при $2 < p < \infty$, то согласно второй оценке теоремы 2.1 при $\theta = p$ будем иметь

$$E_{Q_n^{r'}}(W_{p,\alpha}^r)_\infty \ll E_{Q_n^{r'}}(B_{p,p}^r)_\infty \ll 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1-2/p)}. \quad (23)$$

Аналогичная оценка для величины $E_{Q_n^r}(W_{p,\alpha}^r)_\infty$, $2 < p < \infty$, с множителем $n^{(d-1)(1-2/p)}$ вместо $n^{(\nu-1)(1-2/p)}$ в (23) получена Темляковым (см., например, [14; гл. 2, § 5]).

Теперь обсудим вопрос о возможности реализации оценок теоремы 2.1 соответствующими линейными методами приближения. В [3; теорема 4.1] в случае $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ и $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $r_1 > 1/p$, установлена оценка

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathfrak{L}_{Q_n^r}(f)\|_\infty \gg 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(d-1)(1-1/\theta)}, \quad (24)$$

где

$$\mathfrak{L}_{Q_n^r}(f) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x-y) L_{Q_n^r}(y) dy, \quad L_{Q_n^r}(y) = \sum_{k \in Q_n^r} c_{n,k} e^{i(k,y)},$$

$c_{n,k}$ – произвольные числа.

Сопоставив оценку (24) с результатом теоремы 2.1, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$, $d \geq 2$, $2 < p < \infty$ и $\mathfrak{L}_{Q_n^r}$ – последовательность линейных ограниченных операторов, определенных на $L_p^0(\pi_d)$ и сопоставляющих каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ тригонометрический полином $\mathfrak{L}_{Q_n^r}(f, x) \in T(Q_n^r)$. Тогда при $1 < \theta < \infty$ и $r_1 > 1/p$ выполнено соотношение

$$E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty = o\left(\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - \mathfrak{L}_{Q_n^r}(f, x)\|_\infty\right). \quad (25)$$

Таким образом, соотношение (25) свидетельствует о том, что при $d \geq 2$ приближение классов $B_{p,\theta}^r$, $2 < p < \infty$, линейными методами в равномерной метрике не реализует порядковых оценок соответствующих наилучших приближений.

В следующем утверждении получим точные по порядку оценки наилучших приближений в метрике пространства L_∞ классов $B_{p,\theta}^{r_1}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, периодических функций одной переменной.

Пусть $d = 1$ и

$$t_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx},$$

c_k – произвольные числа.

Для $F \subset L_\infty[-\pi, \pi]$ через

$$E_N(F)_\infty = \sup_{f \in F} \inf_{t_N} \|f(x) - t_N(x)\|_\infty$$

обозначим наилучшее приближение функционального класса F тригонометрическими полиномами $t_N(x)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r_1 > 1/p$ и $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда при $d = 1$

$$E_N(B_{p,\theta}^{r_1})_\infty \asymp N^{-(r_1-1/p)}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим в (26) сначала оценку сверху. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда искомая оценка следует из [3; теорема 2.1]. Рассмотрим случай $p = \infty$. Пусть $f \in B_{\infty,\theta}^{r_1}$. По заданному N подберем число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее соотношению $2^n \leq N < 2^{n+1}$, и рассмотрим приближающий полином $t_n(f, x)$ вида

$$t_n(f, x) = \sum_{s=1}^n A_s(f, x).$$

Тогда для $f \in B_{\infty, \theta}^{r_1}$ можем записать

$$\|f(x) - t_n(f, x)\|_{\infty} = \left\| \sum_{s>n} A_s(f, x) \right\|_{\infty} \leq \sum_{s>n} \|A_s(f, x)\|_{\infty}. \quad (27)$$

Рассмотрим два случая. Пусть $1 \leq \theta < \infty$. Тогда, применив к последней сумме (27) неравенство Гёльдера с показателем θ (с естественной модификацией при $\theta = 1$), будем иметь

$$\begin{aligned} E_N(B_{\infty, \theta}^{r_1})_{\infty} &\leq \left(\sum_{s>n} 2^{sr_1 \theta} \|A_s(f, x)\|_{\infty}^{\theta} \right)^{1/\theta} \left(\sum_{s>n} 2^{-sr_1 \theta'} \right)^{1/\theta'} \\ &\ll \|f\|_{B_{\infty, \theta}^{r_1}} 2^{-nr_1} \leq 2^{-nr_1} \asymp N^{-r_1}. \end{aligned}$$

Если же $\theta = \infty$, то, принимая во внимание, что в этом случае

$$\|A_s(f, x)\|_{\infty} \ll 2^{-sr_1},$$

из (27) находим

$$E_N(B_{\infty, \infty}^{r_1})_{\infty} \ll \sum_{s>n} 2^{-sr_1} \ll 2^{-nr_1} \asymp N^{-r_1}.$$

Оценка сверху в (26) установлена.

Переходя к доказательству в (26) оценки снизу, подберем по заданному N число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее соотношению $2N < 2^n \leq 4N$, и положим

$$v(x) = V_{2^{n+1}}(x) - V_{2^n}(x).$$

Поскольку

$$\|v\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (28)$$

то легко видеть, что функция

$$g_3(x) = 2^{-n(r_1+1-1/p)} v(x)$$

принадлежит классу $B_{p, \theta}^{r_1}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Далее, пусть

$$t_N^*(x) = \sum_{k=-N}^N c_k^* e^{ikx}$$

– полином наилучшего приближения функции $g_3(x)$ в метрике пространства $L_{\infty}[-\pi, \pi]$.

Тогда, с одной стороны, согласно соотношению между числами N и n можем записать

$$(g_3 - t_N^*, v) = (g_3, v) = 2^{-n(r_1+1-1/p)} \|v\|_2^2 \asymp 2^{-n(r_1-1/p)}. \quad (29)$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера и оценки (28) будем иметь

$$(g_3 - t_N^*, v) \leq \|g_3 - t_N^*\|_{\infty} \|v\|_1 \ll \|g_3 - t_N^*\|_{\infty} = E_N(g_3)_{\infty}. \quad (30)$$

Сопоставляя (30) и (29), приходим к оценке

$$E_N(g_3)_{\infty} \gg 2^{-n(r_1-1/p)} \asymp N^{-(r_1-1/p)}.$$

Теорема доказана.

В заключение этого параграфа приведем утверждение, которое следует из теоремы 2.3 и известного результата.

Поскольку при $1 \leq \theta \leq 2$ оценка (13) не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}_+^d$, то в таком случае оценку снизу величины $E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty$ достаточно получить при $d = 1$.

Таким образом, воспользовавшись результатом теоремы 2.3 и оценкой (13), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $1 \leq p \leq 2$, $r_1 > 1/p$, $1 \leq \theta \leq 2$. Тогда при $d \geq 2$

$$E_{Q_n^r}(B_{p,\theta}^r)_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1/p)}.$$

§ 3. Поперечники классов $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_1

В этом параграфе мы исследуем ортопроекционные и линейные поперечники классов $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_1 . Параллельно изучаются также приближения классов $B_{p,\theta}^r$ в метрике L_1 линейными операторами, подчиненными определенным ограничениям. Полученные оценки соответствующих величин используются для установления оценок снизу ортопроекционных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$. Приведем сначала необходимые обозначения и определения.

Пусть $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ – ортонормированная система функций $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Каждой функции $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставим в соответствие аппарат приближения вида $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(x)$, т.е. ортогональную проекцию функции $f(x)$ на подпространство, порожденное системой функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$. Если $F \subset L_q(\pi_d)$ – некоторый функциональный класс, то величина

$$d_M^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(x) \right\|_q \quad (31)$$

называется *ортопроекционным поперечником этого класса в пространстве $L_q(\pi_d)$* . Поперечник $d_M^\perp(F, L_q)$ введен Темляковым (см. [17]).

Параллельно будем исследовать величины $d_M^B(F, L_q)$, также рассмотренные Темляковым (см. [17]), которые определяются следующим образом:

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(x) - Gf(x)\|_q. \quad (32)$$

Здесь через $L_M(B)_q$ обозначено множество линейных операторов, удовлетворяющих условиям:

а) область определения $D(G)$ этих операторов содержит все тригонометрические полиномы, а их область значений содержится в подпространстве размерности M пространства $L_q(\pi_d)$;

б) существует число $B \geq 1$ такое, что для всех векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ выполнено неравенство

$$\|Ge^{i(k,x)}\|_2 \leq B.$$

Отметим, что к $L_M(1)_2$ принадлежат операторы ортогонального проектирования на пространства размерности M , а также операторы, которые задаются на ортонормированной системе функций с помощью мультипликатора, определяющегося последовательностью $\{\lambda_l\}$ такой, что $|\lambda_l| \leq 1$ для всех l .

Легко видеть, что согласно определениям величины $d_M^\perp(F, L_q)$ и $d_M^B(F, L_q)$ связаны между собой неравенством

$$d_M^B(F, L_q) \leq d_M^\perp(F, L_q). \quad (33)$$

Следовательно, оценки величин $d_M^B(F, L_q)$ могут служить оценками снизу для ортопроекционных поперечников $d_M^\perp(F, L_q)$ и наоборот – оценки поперечников $d_M^\perp(F, L_q)$ можно использовать для оценок сверху величин $d_M^B(F, L_q)$. Это обстоятельство будет нами использоваться при доказательстве соответствующих утверждений.

Отметим, что в тех случаях, когда вместо F рассматриваются классы $W_{p,\alpha}^r$ либо H_p^r , величины (31) и (32) исследовались в работах [10], [13], [17]–[19] (см. также монографии [12], [14]), где можно ознакомиться и с соответствующей библиографией.

Перейдем к формулировке и доказательству полученных результатов, касающихся величин $d_M^\perp(B_{p,\theta}^r, L_1)$ и $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_1)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 < p \leq \infty$, $r_1 > 0$ и $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^r, L_1) \asymp d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_1) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(1/p^* - 1/\theta)_+}, \quad (34)$$

где $p^* = \min\{2, p\}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала оценку сверху ортопроекционного поперечника $d_M^\perp(B_{p,\theta}^r, L_1)$. Пусть $1 < p \leq 2$. В таком случае искомая оценка следует из результата, полученного Э. М. Галеевым [13]:

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(1/p - 1/\theta)_+},$$

$1 < q \leq p \leq 2$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Если же $p \in (2, \infty)$, то, подобрав по заданному M число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее соотношению $|Q_n^{r'}| \leq M < |Q_{n+1}^{r'}|$, достаточно воспользоваться оценкой (см. [1])

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Отметим, что согласно (33) такие же оценки сверху можно записать и для величин $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_1)$. Оценки сверху в теореме доказаны.

Для доказательства в (34) оценок снизу достаточно получить оценку снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_1)$ в случае $\nu = d$.

Нам понадобятся вспомогательные утверждения, которые, следуя Темлякову (см. [10]), сформулируем в виде примеров. При этом мы будем использовать обозначения, введенные в § 1 при доказательстве теоремы 1.1, и кроме этого через Q_n обозначим множество

$$Q_n = \bigcup_{s \in \Omega_n} \rho(s).$$

Заметим, что $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $G \in L_M(B)_1$. Тогда существуют число n и множество $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ такие, что $|Q_n| < C_1(B, d)M$, $|\tilde{\Omega}_n| \geq |\Omega_n|/2$, и в каждом $\rho(s)$, $s \in \tilde{\Omega}_n$, найдутся кубы $\Delta_s \subset \rho(s)$ с центрами k^s и ребрами $2u$ такие, что для функции

$$g_4(x) = \sum_{s \in \tilde{\Omega}_n} e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_u(x_j - x_j^s)$$

и некоторого вектора y^* имеет место оценка

$$\|g_4(x + y^*) - Gg_4(x + y^*)\|_1 \gg \log^{d-1} M. \quad (35)$$

ПРИМЕР 3.2. Пусть $G \in L_M(B)_1$ и число n таково, что $C_2(B, d)|Q_{n-1}| < M \leq C_3(B, d)|Q_n|$. Тогда существуют вектор $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0) \in Q_n$ и постоянная $C_4(d) > 0$ такие, что

$$\|e^{i(k^0, x)} - Ge^{i(k^0, x)}\|_1 \geq C_4(d). \quad (36)$$

Переходя к установлению оценки снизу величины $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_1)$, рассмотрим несколько соотношений между параметрами p и θ .

Пусть сначала $1 < p \leq 2$ и $p \leq \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$g_5(x) = C_5 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} g_4(x), \quad C_5 > 0.$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись по отношению к функции $f_1(x)$ (см. (2)), легко убедиться, что функция $g_5(x)$ с соответствующей постоянной $C_5 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$. Следовательно, воспользовавшись оценкой (35), будем иметь

$$\begin{aligned} & \|g_5(x + y^*) - Gg_5(x + y^*)\|_1 \\ & \gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} \|g_4(x + y^*) - Gg_4(x + y^*)\|_1 \\ & \gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1-1/p+1/\theta)} \log^{d-1} M \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/p-1/\theta)} \\ & \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/p-1/\theta}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $1 < p \leq 2$ и $1 \leq \theta < p$ или $2 < p \leq \infty$ и $1 \leq \theta \leq 2$.

Рассмотрим функцию

$$g_6(x) = 2^{-nr_1} e^{i(k^0, x)},$$

где $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0)$ – вектор из примера 3.2. Легко видеть, что функция $g_6(x)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, и согласно оценке (36) можем записать

$$\|g_6(x) - Gg_6(x)\|_1 = 2^{-nr_1} \|e^{i(k^0, x)} - Ge^{i(k^0, x)}\|_1 \gg 2^{-nr_1} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1}.$$

Наконец, если $2 < p \leq \infty$ и $2 < \theta < \infty$, то искомая оценка снизу для $d_M^B(B_{p,\theta}^r, L_1)$ будет получена ниже как следствие соответствующей оценки линейного поперечника классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_1 .

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Сопоставляя результаты теорем 1.1 и 3.1, приходим к выводу, что при $1 < p \leq 2$, $r_1 > 0$ и $1 \leq \theta < \infty$ экстремальными подпространствами для ортопроекторных поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_1 являются подпространства тригонометрических полиномов $T(Q_n^{r'})$ при надлежащем выборе числа $n \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $1 < p \leq \infty$, $r_1 > 0$ и $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^{r'}(f, x)\|_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p^*-1/\theta)_+}, \quad (37)$$

где $p^* = \min\{2, p\}$.

Оценки сверху в (37) следуют из приближения функций класса $B_{p,\theta}^r$ их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f, x)$ в пространстве L_q , $1 < q < p < \infty$ (см. [1]), а соответствующие оценки снизу – из теоремы 3.1.

Обратим внимание, что в теореме 3.1 не рассмотрен случай $p = 1$, для которого нам удалось установить порядок величины $d_M^B(B_{1,\theta}^r, L_1)$ для всех $d \geq 1$ и порядок ортопроекционного поперечника $d_M^\perp(B_{1,\theta}^r, L_1)$ в одномерном случае.

Сформулируем и докажем соответствующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $r_1 > 0$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда при $d \geq 1$

$$d_M^B(B_{1,\theta}^r, L_1) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-1/\theta}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим в (38) оценку сверху. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $B_{1,\theta}^r$. Подберем по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ согласно соотношению $|Q_n^{r'}| \leq M < |Q_{n+1}^{r'}|$ и рассмотрим для $f \in B_{1,\theta}^r$ приближающий полином вида

$$\tilde{t}_n(f, x) = \sum_{(s, \gamma') < n} A_s(f, x).$$

Как отмечалось выше, оператор G , сопоставляющий функции $f(x)$ полином такого вида, принадлежит $L_M(1)_2$.

Итак, пусть сначала $\theta \in (1, \infty)$. Тогда согласно неравенствам Минковского и Гёльдера, а также соотношению (18) можем записать

$$\begin{aligned} \|f(x) - \tilde{t}_n(f, x)\|_1 &\leq \sum_{(s, \gamma') \geq n} \|A_s(f, x)\|_1 \\ &\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-(s,r)\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \\ &\leq \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-(s,\gamma)r_1\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-(s,\gamma)r_1\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \\ &\asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Отсюда согласно соотношению между числами M и n приходим к оценке

$$\|f(x) - Gf(x)\|_1 \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-1/\theta}.$$

В случае $\theta = 1$, воспользовавшись неравенством Минковского, находим

$$\begin{aligned} \|f(x) - Gf(x)\|_1 &\leq \|f(x) - \tilde{t}_n(f, x)\|_1 \leq \sum_{(s, \gamma') \geq n} \|A_s(f, x)\|_1 \\ &= \sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_1 2^{-(s,r)} \leq 2^{-nr_1} \sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_1 \\ &\leq 2^{-nr_1} \|f\|_{B_{1,1}^r} \leq 2^{-nr_1} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}. \end{aligned}$$

Оценка сверху доказана.

Переходя к установлению в (38) оценки снизу, напомним, что при этом достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. По заданному M подберем число $n \in \mathbb{N}$ согласно условиям примера 3.1 и рассмотрим функцию

$$g_7(x) = C_6 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} g_4(x), \quad C_6 > 0.$$

Поскольку для $s \in \tilde{\Omega}_n$ справедливо $\|A_s(g_4, x)\|_1 \ll \|\prod_{j=1}^d K_u(x_j)\|_1 \leq C_7$, то

$$\begin{aligned} \|g_4\|_{B_{1,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_4, x)\|_1^\theta \right)^{1/\theta} \asymp \left(\sum_{s \in \tilde{\Omega}_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_4, x)\|_1^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \left(\sum_{s \in \tilde{\Omega}_n} 2^{(s,r)\theta} \right)^{1/\theta} \asymp 2^{r_1 n} \left(\sum_{s \in \tilde{\Omega}_n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 2^{r_1 n} n^{(d-1)/\theta}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция $g_7(x)$ с соответствующей постоянной $C_6 > 0$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$.

Следовательно, воспользовавшись оценкой (35), будем иметь

$$\begin{aligned} \|g_7(x + y^*) - Gg_7(x + y^*)\|_1 &\gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \|g_4(x + y^*) - Gg_4(x + y^*)\|_1 \\ &\gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \log^{d-1} M \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1-1/\theta}. \end{aligned}$$

Оценка снизу, а вместе с ней теорема доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Порядки ортопроекторных поперечников $d_M^\perp(W_{1,\alpha}^r, L_1)$ и $d_M^\perp(H_1^r, L_1)$ установлены в [19] и при этом оказалось, что

$$d_M^\perp(W_{1,\alpha}^r, L_1) \asymp d_M^\perp(H_1^r, L_1).$$

Вопрос о порядках поперечников $d_M^\perp(B_{1,\theta}^r, L_1)$, $1 \leq \theta < \infty$, в случае $d \geq 2$ остается, по-видимому, открытым.

В одномерном случае для классов $B_{1,\theta}^{r_1}$ удалось получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $d = 1$, $r_1 > 0$ и $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$d_M^\perp(B_{1,\theta}^{r_1}, L_1) \asymp M^{-r_1}. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (39) следует из результата, полученного в [19]:

$$d_M^\perp(H_1^r, L_1) \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1}, \quad (40)$$

$r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$. Так, полагая в (40) $d = 1$ и используя вложение $B_{1,\theta}^{r_1} \subset H_1^{r_1}$, $1 \leq \theta < \infty$, приходим к искомой оценке сверху. Соответствующая оценка снизу в (39) следует из теоремы 3.2 при $\nu = 1$.

Теорема доказана.

В заключение работы исследуем вопрос о линейных поперечниках классов $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_1 . Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество в банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Линейный поперечник множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathcal{X}$ (обозначается через $\lambda_M(\mathfrak{M}, \mathcal{X})$) определяется формулой

$$\lambda_M(\mathfrak{M}, \mathcal{X}) = \inf_A \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - Af\|_{\mathcal{X}},$$

где $\inf$ берется по всем действующим в $\mathcal{X}$ линейным операторам A , размерность области значений которых не превышает M .

Поперечник $\lambda_M(\mathfrak{M}, \mathcal{X})$ был введен В. М. Тихомировым (см. [20]) и затем изучался в большом количестве работ для классов функций как одной, так и многих переменных. Здесь мы отметим только работы [21], [22], в которых изучались линейные поперечники классов $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r периодических функций многих переменных. В этих работах можно ознакомиться с соответствующей библиографией.

Согласно определениям между линейными и ортопроекционными поперечниками множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathcal{X}$ имеет место соотношение

$$\lambda_M(\mathfrak{M}, \mathcal{X}) \leq d_M^\perp(\mathfrak{M}, \mathcal{X}). \quad (41)$$

Установим сначала порядок линейного поперечника $\lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_1)$ в случае $2 \leq p \leq \infty$ и $2 \leq \theta < \infty$. Как отмечалось в замечании 1.2, порядок наилучшего приближения $E_{Q_n'}(B_{p,\theta}^r)_1$ в этой ситуации нам неизвестен.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta < \infty$ и $r_1 > 0$. Тогда

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_1) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (42) следует из теоремы 3.1 согласно соотношению (41).

Прежде чем перейти к доказательству оценки снизу, напомним, что ее достаточно установить при $\nu = d$. Для формулировки вспомогательного утверждения нам понадобятся привести необходимые обозначения.

Пусть S_n обозначает множество вида

$$S_n = \{s : (s, 1) = n, s_j - \text{четные числа, } j = \overline{1, d}\}.$$

Положим

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s), \quad \rho^+(s) = \{k : k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\},$$

и заметим, что при этом $|S_n| \asymp n^{d-1}$ и $|\overline{Q}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Через $RT(m)$, $m = (m_1, \dots, m_d)$, обозначим множество действительных тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq m_j} \hat{t}(k) e^{i(k, x)},$$

где m_j – целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$.

Пусть далее $\tilde{k}_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$ и

$$\tilde{T}(\overline{Q}_n) = \left\{ t(x) = \sum_{s \in S_n} e^{i(\tilde{k}^s, x)} t_s(x), t_s \in RT(2^{s-2}) \right\},$$

где $2^{s-2} = (2^{s_1-2}, \dots, 2^{s_d-2})$.

ЛЕММА 3.1 (см. [10]). Пусть $M \leq \frac{1}{4} |\overline{Q}_n|$. Тогда для любого подпространства $\Psi \subset L_1(\pi_d)$ размерности не больше M найдется функция $g(x) \in \tilde{T}(\overline{Q}_n)$ такая, что

$$\|\bar{\delta}_s(g, x)\|_\infty \leq |S_n|^{-1/2}, \quad s \in S_n, \quad \bar{\delta}_s(g, x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} \hat{g}(k) e^{i(k, x)},$$

$$\|g\|_2 \geq C_7(d) > 0$$

и для произвольного $\psi \in \Psi$ выполнено $(g, \psi) = 0$.

Теперь перейдем непосредственно к установлению искомой оценки. По заданному M выберем четное число n так, чтобы выполнялось двойное неравенство $|\bar{Q}_{n-2}| < 4M \leq |\bar{Q}_n|$. Пусть A – некоторый линейный оператор, действующий из L_∞ в L_1 , и $\dim(B_{\infty,\theta}^r) \leq M$. Тогда $\dim A(\tilde{T}(\bar{Q}_n)) \leq M$ и, поскольку $M \leq \frac{1}{4}|\bar{Q}_n|$, размерность подпространства $\Phi_1 \subset \tilde{T}(\bar{Q}_n)$ такого, что $A(\Phi_1) = 0$, будет больше M . Кроме того, так же, как и в лемме 3.1, найдется $g(x) \in \Phi_1$ такая, что

$$\begin{aligned} \|\bar{\delta}_s(g, x)\|_\infty &\leq |S_n|^{-1/2}, \quad s \in S_n, \\ \|g\|_2 &\geq C_8(d) > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = C_9 2^{-nr_1} |S_n|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} g(x),$$

где $g(x) \in \Phi_1$ и удовлетворяет приведенным выше условиям. Нетрудно убедиться, что функция $f(x)$ с соответствующей постоянной $C_9 > 0$ принадлежит классу $B_{\infty,\theta}^r$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\infty,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \ll \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll 2^{-nr_1} |S|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(g, x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{-(d-1)/\theta} n^{(d-1)/\theta} = 1, \end{aligned}$$

т.е. $f \in B_{\infty,\theta}^r$.

Теперь получим оценку снизу для величины $\|f - Af\|_1$. Прежде всего заметим, что поскольку $g(x) \in \Phi_1$ и $A(\Phi_1) = 0$, то

$$\|g - Ag\|_1 = \|g\|_1. \quad (43)$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$\|g\|_2 \leq \|g\|_1^{1/3} \|g\|_4^{2/3},$$

можем записать

$$\|g\|_1 \geq \|g\|_2^3 \|g\|_4^{-2}. \quad (44)$$

Принимая во внимание, что

$$\|g\|_2 \geq C_8(d) > 0,$$

из (44) находим

$$\|g\|_1 \gg \|g\|_4^{-2}. \quad (45)$$

Поскольку $g(x) \in \Phi_1 \subset \tilde{T}(\bar{Q}_n)$, то, воспользовавшись неравенством

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_q^2 \right)^{1/2}, \quad 2 \leq q < \infty,$$

которое является следствием теоремы Литтлвуда–Пэли (см., например, [8; гл. 1, § 5.2]), можем записать

$$\begin{aligned} 0 < C_8(d) &\leq \|g\|_4 \ll \left(\sum_{s \in S_n} \|\delta_s(g, x)\|_4^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{s \in S_n} \|\delta_s(g, x)\|_\infty^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |S_n|^{-1/2} \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{1/2} \asymp |S_n|^{-1/2} |S_n|^{1/2} = 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Сопоставляя (45) и (46), приходим к оценке

$$\|g\|_1 \geq C_{10}(d) > 0$$

и, таким образом, согласно (43) находим

$$\|g - Ag\|_1 \geq C_{10}(d). \quad (47)$$

Наконец, согласно определению функции $f(x)$ и в силу (47) приходим к итоговой оценке

$$\begin{aligned} \|f - Af\|_1 &\asymp 2^{-nr_1} |S_n|^{1/2} n^{-(d-1)/\theta} \|g - Ag\|_1 \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \\ &\asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1} (\log^{d-1} M)^{1/2-1/\theta}. \end{aligned} \quad (48)$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из (48) согласно (41) следует оценка снизу для ортопроекторного поперечника $d_M^\perp(B_{p,\theta}^r, L_1)$, $2 < p \leq \infty$, $2 < \theta < \infty$, который рассматривался в теореме 3.1.

Теперь, воспользовавшись результатом теоремы 3.4, а также известной оценкой приближения функций из классов $W_{p,\alpha}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^\gamma(f, x)$, можно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тогда

$$\lambda_M(W_{p,\alpha}^r, L_1) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (49) следует из приближения функций из класса $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^\gamma(f, x)$. Так, подобрав по заданному M число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее соотношению $|Q_n^r| \leq M < |Q_{n+1}^r|$, и воспользовавшись результатом из [15], будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda_M(W_{p,\alpha}^r, L_1) &\leq \lambda_M(W_{p,\alpha}^r, L_p) \leq \sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_p \\ &\asymp 2^{-nr_1} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}. \end{aligned}$$

При доказательстве в (49) оценки снизу рассмотрим два случая.

Пусть $2 \leq p < \infty$. Тогда, приняв во внимание, что $B_{p,2}^r \subset W_{p,\alpha}^r$, и воспользовавшись результатом теоремы 3.4 при $\theta = 2$, получим

$$\lambda_M(W_{p,\alpha}^r, L_1) \gg \lambda_M(B_{p,2}^r, L_1) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}. \quad (50)$$

Если же $p \in (1, 2)$, то согласно вложению $W_{p,\alpha}^r \supset W_{2,\alpha}^r$ и оценке (50) при $p = 2$ находим

$$\lambda_M(W_{p,\alpha}^r, L_1) \geq \lambda_M(W_{2,\alpha}^r, L_1) \gg (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] А. С. Романюк, “Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q ”, *Укр. матем. журн.*, **43**:10 (1991), 1398–1408; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Approximation of the Besov classes of periodic functions of several variables in a space L_q ”, *Ukrainian Math. J.*, **43**:10 (1991), 1297–1306.
- [2] А. С. Романюк, “Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 61–100; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Best M -term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables”, *Izv. Math.*, **67**:2 (2003), 265–302.
- [3] А. С. Романюк, “Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 91–116; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Approximability of the classes $B_{p,\theta}^r$ of periodic functions of several variables by linear methods and best approximations”, *Sb. Math.*, **195**:2 (2004), 237–261.
- [4] А. С. Романюк, “Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 69–98; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Bilinear and trigonometric approximations of periodic functions of several variables of Besov classes $B_{p,\theta}^r$ ”, *Izv. Math.*, **70**:2 (2006), 277–306.
- [5] А. С. Романюк, “Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных”, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 71–96; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Kolmogorov and trigonometric widths of the Besov classes $B_{p,\theta}^r$ of multivariate periodic functions”, *Sb. Math.*, **197**:1 (2006), 69–93.
- [6] Г. А. Акишев, “Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 17–40; англ. пер.: G. A. Akishev, “Approximation of function classes in spaces with mixed norm”, *Sb. Math.*, **197**:8 (2006), 1121–1144.
- [7] О. В. Бесов, “О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения”, *Докл. АН СССР*, **126**:6 (1959), 1163–1165.
- [8] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
- [9] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, ч. XIII, Тр. МИАН, **187**, Наука, М., 1989, 143–161; англ. пер.: P. I. Lizorkin, S. M. Nikol’skii, “Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **187** (1990), 163–184.
- [10] В. Н. Темляков, “Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью”, *Сборник трудов все-союзной школы по теории функций* (Душанбе, 1986), Тр. МИАН, **189**, Наука, М., 1989, 138–168; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Estimates of the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 161–197.
- [11] В. Н. Темляков, “Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, ч. XII, Тр. МИАН, **181**, Наука, М., 1988, 250–267; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Estimates of best bilinear approximations of periodic functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **181** (1989), 275–293.

- [12] V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Science Publ., Commack, NY, 1993.
- [13] Э. М. Галеев, “Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами”, *Матем. заметки*, **47**:3 (1990), 32–41; англ. пер.: É. M. Galeev, “Approximation of classes of periodic functions of several variables by nuclear operators”, *Math. Notes*, **47**:3 (1990), 248–254.
- [14] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН, **178**, Наука, М., 1986; англ. пер.: V. N. Temlyakov, *Approximation of functions with bounded mixed derivative*, Proc. Steklov Inst. Math., **178**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [15] Э. М. Галеев, “Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ ”, *УМН*, **32**:4 (1977), 251–252.
- [16] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: N. Korneïchuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [17] В. Н. Темляков, “Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных”, *Докл. АН СССР*, **267**:2 (1982), 314–317.
- [18] Э. М. Галеев, “Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных”, *Матем. заметки*, **43**:2 (1988), 197–202; англ. пер.: É. M. Galeev, “Orders of the orthoprojection widths of classes of periodic functions of one and of several variables”, *Math. Notes*, **43**:2 (1988), 110–118.
- [19] А. В. Андрианов, В. Н. Темляков, “О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 32–43; англ. пер.: A. V. Andrianov, V. N. Temlyakov, “On two methods of generalization of properties of univariate function systems to their tensor product”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219** (1997), 25–35.
- [20] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.: V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.
- [21] Э. М. Галеев, “О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **4** (1987), 13–16; англ. пер.: Eh. M. Galeev, “On linear diameters of classes of periodic functions of several variables”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **42**:4 (1987), 14–18.
- [22] Э. М. Галеев, “Линейные поперечники классов Гёльдера–Никольского периодических функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 189–199; англ. пер.: É. M. Galeev, “Linear widths of Hölder–Nicol’skii classes of periodic functions of several variables”, *Math. Notes*, **59**:2 (1996), 133–140.

А. С. Романюк (A. S. Romanyuk)

Институт математики НАН Украины, г. Киев

E-mail: funct@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию

12.09.2006 и 19.11.2007