Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, И. П. Борисовский, Интегральные многообразия контактных распределений, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 12, 119–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:56:31

УДК 513.74

В. Ф. Кириченко, И. П. Борисовский

Интегральные многообразия контактных распределений

Доказано, что через каждую точку произвольного контактного многообразия M^{2n+1} в любом n -мерном вполне вещественном направлении проходит интегральное многообразие контактного распределения (*подмногообразие Лежандра*). Доказано, что подмногообразие Лежандра с такими начальными данными, вообще говоря, не единственно, однако, совокупность таких подмногообразий в случае K -контактного многообразия размерности выше пяти при любых начальных данных содержит вполне геодезическое подмногообразие, названное нами *подмногообразием Блэра*, тогда и только тогда, когда это K -контактное многообразие является сасакиевой пространственной формой. Показано, что всякое подмногообразие Блэра сасакиевой пространственной формы Φ -голоморфной секционной кривизны c является пространством постоянной кривизны $(c + 3)/4$. Найдены приложения этих результатов к геометрии главных тороидальных расслоений.

Библиография: 9 названий.

Одним из наиболее интересных вопросов контактной геометрии является вопрос об интегрируемости контактного распределения почти контактной метрической структуры и геометрических свойствах его интегральных многообразий. Очевидно, контактное распределение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда контактная форма η почти контактного метрического многообразия M^{2n+1} замкнута, т.е. это многообразие является многообразием косимплектического типа. В этом случае через каждую точку многообразия проходит интегральное многообразие максимальной размерности $2n$, равной размерности контактного распределения. В случае незамкнутой контактной формы это уже не так. Тем не менее Блэр доказал, что даже в полярном случае контактного метрического многообразия, когда форма $d\eta$ имеет максимальный ранг, контактное распределение имеет интегральные многообразия размерности, равной половине размерности контактного распределения, и не имеет интегральных многообразий большей размерности. Эти интегральные многообразия оказываются вполне вещественными, и они представляют собой не что иное, как подмногообразия Лежандра данной контактной структуры [1]. Информация о геометрии таких подмногообразий имеется лишь в случае сасакиевых пространственных форм, т.е. многообразий Сасаки постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Так, Блэром доказано, что если контактное многообразие является нечетномерной сферой S^{2n+1} , снабженной канонической сасакиевой структурой, то через каждую его точку в любом n -мерном вполне вещественном направлении проходит n -мерная сфера, вложенная в S^{2n+1} как вполне геодезическое подмногообразие и являющаяся интегральным многообразием контактного распределения [2].

В настоящей работе мы докажем, что через каждую точку *произвольного* контактного многообразия M^{2n+1} в любом n -мерном вполне вещественном направлении проходит подмногообразие Лежандра (естественно назвать такое свойство

контактного многообразия *полуинтегрируемостью его контактного распределения*). Более того, будет доказано, что через каждую точку K -контактного многообразия M^{2n+1} , $n > 2$, в любом n -мерном вполне вещественном направлении проходит единственное вполне геодезическое подмногообразие Лежандра (это свойство мы назовем *геодезической интегрируемостью контактного распределения*) тогда и только тогда, когда M^{2n+1} – сасакиева пространственная форма. Вполне геодезические подмногообразия Лежандра мы назовем *подмногообразиями Блэра*. Эти результаты существенно обобщают и проясняют упомянутые результаты Блэра. Наконец, мы рассмотрим приложения этих результатов к геометрии главных тороидальных расслоений, в частности, докажем, что горизонтальное распределение расслоения Бутби–Вана над обобщенным многообразием Ходжа M^{2n} , $n > 2$, положительной голоморфной секционной кривизны геодезически интегрируемо тогда и только тогда, когда база расслоения локально голоморфно изометрична комплексному проективному пространству, а само расслоение с точностью до перенормировки метрики типового слоя локально изоморфно классическому расслоению Хопфа.

Пусть M – гладкое многообразие, $X(M) – C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Напомним [2], что *почти контактной метрической* (короче, *АС-)* *структурой* на M называется совокупность $(\Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ тензорных полей на M , где Φ – тензор типа $(1, 1)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, ξ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, *структурным вектором* и *контактной формой*, g – риманова метрика. При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad \eta(\xi) &= 1; & 2) \quad \Phi(\xi) &= 0; & 3) \quad \eta \circ \Phi &= 0; \\ 4) \quad \Phi^2 &= -\text{id} + \eta \otimes \xi; & 5) \quad \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

$X, Y \in X(M)$. Легко проверить, что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ кососимметричен, т. е. является 2-формой на M . Он называется *фундаментальной формой структуры*. Хорошо известно, что необходимыми условиями существования АС-структуры на многообразии является его нечетномерность и ориентируемость. Многообразие, на котором фиксирована АС-структура, называется *АС-многообразием*. В случае, когда $d\eta = \Omega$, АС-структура называется *контактной метрической* (короче, *С-)* *структурой*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Напомним [3], что *контактной структурой* на многообразии M^{2n+1} называется 1-форма η максимального ранга, фиксированная на этом многообразии. Такая структура всегда может быть (неоднозначно) дополнена до контактной метрической, для которой форма η является контактной формой. В самом деле, на таком многообразии внутренним образом определены два распределения $\mathcal{L} = \ker \eta$, $\dim \mathcal{L} = 2n$, и $\mathcal{M} = \ker d\eta$, $\dim \mathcal{M} = 1$. Выберем вектор $\xi \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\eta(\xi) = 1$. Тогда на M определяется пара взаимно дополнительных проекторов $m = \eta \otimes \xi$ и $l = \text{id} - m$ на распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$, соответственно. Пусть g_0 – какая-либо риманова метрика на M . Исходя из ее сужения на $\mathcal{L}$, нетрудно построить риманову метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на M такую, что эндоморфизм $J: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, определенный тождеством $\langle X, JY \rangle = d\eta(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{L}$, будет антиинволютивным, т. е. $J^2 = -\text{id}$, и значит, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$. Положим $\Phi = J \circ l$. Очевидно, (Φ, ξ, η, g) – С-структура на M .

Контактная метрическая структура с киллинговой контактной формой называется *K-контактной структурой*. АС-структура называется *нормальной*, если $N + 2d\eta \otimes \xi = 0$, где N – тензор Нейенхейса оператора Φ . Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой*. Хорошо известно, что всякая сасакиева структура является *K-контактной* [2]. Классическим примером сасакиевой структуры является АС-структура на нечетномерной сфере S^{2n+1} , канонически вложенной в комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^n$.

Пусть (Φ, ξ, η, g) – АС-структура на многообразии M^{2n+1} . В модуле $X(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = \text{id} - m = -\Phi^2$. Таким образом, $X(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \text{Im } m$ – линейная оболочка структурного вектора, $\mathcal{L} = \text{Im } l = \ker \eta$ – так называемое *контактное распределение*. Очевидно, распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что

$$\tilde{\Phi}^2 = -\text{id}, \quad \langle \tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{L},$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathcal{L}}$. Поэтому если $p \in M$, то в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить ортонормированный репер $(p, e_0, e_1, \dots, e_n, \Phi e_1, \dots, \Phi e_n)$, где $e_0 = \xi|_p$. Такой репер будем называть *вещественно адаптированным репером*. С другой стороны, пусть $\mathcal{L}^c = \mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ – комплексификация распределения $\mathcal{L}$. В ней внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi)$ на собственные подмодули эндоморфизма Φ , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, соответственно. Следовательно, можно построить репер $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ комплексификации пространства $T_p(M)$, где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$, состоящий из собственных векторов оператора Φ_p . Такой репер называется *A-репером*. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в *A-репере*, соответственно, имеют вид:

$$1) \quad (\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad 2) \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Хорошо известно [4], [5], что совокупность таких реперов определяет *G-структуру* на M со структурной группой $\{1\} \times U(n)$,

представленной матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$, где $A \in U(n)$. Эта *G-структура*

называется *присоединенной*. На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегает значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, f, g, \dots$ – значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{0} = 0$. Поскольку Φ и g – тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$, соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} d\Phi_j^i + \Phi_k^i \omega_j^k - \Phi_j^k \omega_k^i &= \Phi_{j,k}^i \omega^k, \\ dg_{ij} + g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k &= g_{ij,k} \omega^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\omega_j^i\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности ∇ , соответственно, $\Phi_{j,k}^i$, $g_{ij,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензоров Φ и g в

этой связности, соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \quad (3)$$

С учетом (1) и (3) соотношения (2) на пространстве присоединенной G -структуры переписутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} 1) \Phi_{b,k}^a &= 0; & 2) \Phi_{b,k}^{\hat{a}} &= 0; & 3) \Phi_{0,k}^0 &= 0; \\ 4) \omega_b^a &= -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi_{b,k}^a\omega^k; & 5) \omega_b^{\hat{a}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi_{b,k}^{\hat{a}}\omega^k; \\ 6) \omega_0^a &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,k}^a\omega^k; & 7) \omega_0^{\hat{a}} &= \sqrt{-1}\Phi_{0,k}^{\hat{a}}\omega^k; \\ 8) \omega_b^0 &= \sqrt{-1}\Phi_{b,k}^0\omega^k; & 9) \omega_b^0 &= -\sqrt{-1}\Phi_{b,k}^0\omega^k; \\ 10) \omega_j^i + \omega_{\bar{j}}^{\bar{i}} &\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega}^i \equiv \omega^{\bar{i}} \pmod{n}$, $\overline{\omega}_{\bar{j}}^i \equiv \omega_j^{\hat{i}} \pmod{n}$, $\overline{\nabla\Phi}_{j,k}^i \equiv \nabla\Phi_{\bar{j},\bar{k}}^{\hat{i}} \pmod{n}$, где $t \mapsto \bar{t}$ — оператор комплексного сопряжения. Несложно подсчитать, что AC -структура является C -структурой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры выполнено следующее:

$$\begin{aligned} 1) \Phi^{[ab,c]} &= 0; & 2) \Phi_{\hat{b},c}^a &= 0; & 3) \Phi_{0,b}^a &= -\delta_b^a; \\ 4) \Phi_{b,0}^{\hat{a}} - 2\Phi_{0,b}^{\hat{a}} &= \Phi_{a,0}^{\hat{b}} - 2\Phi_{0,a}^{\hat{b}}; & 5) \Phi_{[b,c]}^0 &= 0; & 6) \Phi_{b,0}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом она является K -контактной тогда и только тогда, когда

$$\Phi_{a,b}^0 = \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0, \quad (6)$$

и является сасакиевой тогда и только тогда, когда кроме того

$$\Phi_{[b,c]}^a = 0. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем по индексам, заключенным в квадратные (круглые) скобки, подразумевается альтернирование (симметризация).

С учетом (5)–(7) нетрудно подсчитать, что первая группа структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j \quad (8)$$

на пространстве присоединенной G -структуры C -многообразия запишется в следующей форме, называемой *первой группой структурных уравнений C -многообразия*:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}\omega_b \wedge \omega + \sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega; \\ 2) \quad d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}\omega^b \wedge \omega - \sqrt{-1}\omega_a \wedge \omega; \\ 3) \quad d\omega &= -2\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\omega &= \omega^0, \quad \omega_i = g_{ij}\omega^j, \\ B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}, \quad B^{ab} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},0} - \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}}, \\ B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}, \quad B_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} + \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b}.\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}1) B^{a(bc)} &= 0; & 2) B^{[abc]} &= 0; & 3) B^{[ab]} &= 0; \\ 4) \overline{B^{abc}} &= B_{abc}; & 5) \overline{B^{ab}} &= B_{ab}; & 6) \overline{\omega^a_b} &= -\omega^b_a.\end{aligned}\tag{10}$$

Более того, с учетом (10.2)) нетрудно получить, что

$$\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}} = 4\sqrt{-1}B^{cab}.\tag{11}$$

Согласно (6) и (7) справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Почти контактная метрическая структура является K -контактной тогда и только тогда, когда $B^{ab} = 0$, и является сасакиевой тогда и только тогда, когда $B^{abc} = B^{ab} = 0$.*

Пусть, в частности, M — K -контактное многообразие. Стандартная процедура дифференциального продолжения соотношений (9) с учетом предложения 1 приводит ко второй группе структурных уравнений K -контактной структуры:

$$\begin{aligned}d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b + (2B^{adh}B_{hbc} + A^{ad}_{bc} + 2\delta^a_b\delta^d_c)\omega^c \wedge \omega_d \\ &\quad + B_{bcd}{}^a\omega^c \wedge \omega^d - B^{acd}{}_b\omega_c \wedge \omega_d,\end{aligned}\tag{12}$$

где $\{A^{ad}_{bc}\}$ — семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами так называемого тензора кривизны присоединенной Q -алгебры [4], или *структурного тензора второго рода*, причем

$$1) A^{ad}_{[bc]} = 0, \quad 2) A^{[ad]}_{bc} = 2B_{(bc)h}B^{had}.\tag{13}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}dB^{abc} - B^{hbc}\omega^a_h - B^{ahc}\omega^b_h - B^{abh}\omega^c_h &= B^{abc}{}_h\omega^h + B^{abch}\omega_h - 3iB^{abc}\omega, \\ dB_{abc} + B_{hbc}\omega^h_a + B_{ahc}\omega^h_b + B_{abh}\omega^h_c &= B_{abch}\omega^h + B_{abc}{}^h\omega_h + 3iB_{abc}\omega,\end{aligned}\tag{14}$$

где $B^{abc}{}_d$, B^{abcd} , B_{abcd} , $B_{abc}{}^d$ — подходящие функции на пространстве присоединенной G -структуры. Отсюда, в частности, следует, что наборы функций $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$ являются наборами компонент взаимно сопряженных тензоров на M , которые мы назовем *структурными тензорами первого рода*.

Сравнивая соотношения (12) со второй группой структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i_j = \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\tag{15}$$

где R^i_{jkl} – компоненты тензора Римана–Кристоффеля, в силу линейной независимости базисных форм получаем, что на пространстве присоединенной G -структуры справедливо следующее:

$$\begin{aligned} 1) R_{\hat{a}bc0} &= 0; & 2) R_{\hat{a}bcd} &= 2B_{bcd}{}^a; \\ 3) R_{\hat{a}bcd} &= 2B^{adh}B_{hbc} - 4B^{dah}B_{cbh} + A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a\delta_c^d + \delta_c^a\delta_b^d. \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, с учетом (5), (6) и (11) имеем

$$\begin{aligned} 1) \omega^{ab} &\equiv \omega_b^a = 2B^{hab}\omega_h; & 2) \omega_{ab} &\equiv \omega_b^{\hat{a}} = 2B_{hab}\omega^h; \\ 3) \omega_0^a &= +\sqrt{-1}\omega^a; & 4) \omega_a^0 &= +\sqrt{-1}\omega_a; \\ 5) \omega_0^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1}\omega_a; & 6) \omega_a^0 &= -\sqrt{-1}\omega^a. \end{aligned} \quad (17)$$

Дифференциальное продолжение этих соотношений с учетом (9), (14) и (15) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} 1) R_{abcd} &= 4B_{[d|ab|c]}; & 2) R_{\hat{a}bcd} &= 4B^{hab}B_{hcd} - \delta_{cd}^{ab}; \\ 3) R_{abc0} &= -4\sqrt{-1}B_{cab}; & 4) R_{\hat{a}0b0} &= -\delta_b^a; & 5) R_{abc0} &= R_{a0b0} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\delta_{bc}^{ad} = \delta_b^a\delta_c^d - \delta_c^a\delta_b^d$. Кроме того, справедливы соотношения, полученные из (16) и (18) с учетом классических свойств симметрии и вещественности тензора Римана–Кристоффеля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. AC -многообразие называется *многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c* , если

$$\forall X \in \mathcal{L} \implies \langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle = c\|X\|^4. \quad (19)$$

Многообразие Сасаки точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны называется *сасакиевой пространственной формой* [6].

Пусть M – AC -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . Соотношение (19) на пространстве присоединенной G -структуры запишется в форме

$$4R_{\hat{a}bf\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}} = -4cg_{ab}g_{f\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}}.$$

С учетом (1.1)) это соотношение можно переписать в виде

$$(R_{\hat{a}bf\hat{d}} + c\delta_b^a\delta_f^{\hat{d}})X^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}} = 0.$$

Поляризация этого соотношения приводит нас к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. AC -многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда

$$R^{(a}{}_{(bf)}{}^{d)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}, \quad (20)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bf}^{ad} = \delta_b^a\delta_f^d + \delta_f^a\delta_b^d.$$

Пусть, в частности, M – K -контактное многообразие. Тогда с учетом (16.3)) соотношение (20) принимает вид

$$A_{bf}^{(ad)} = 4B^{(ad)h}B_{(bf)h} - \frac{c+3}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}.$$

Используя это соотношение и (13.2)), после упрощений с учетом (10.2)) получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *K-контактное многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны с тогда и только тогда, когда*

$$A_{bf}^{ad} = 4B^{dah}B_{(bf)h} - \frac{c+3}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}. \quad (21)$$

Пусть M^{2n+1} – контактное метрическое многообразие, $N^n \subset M^{2n+1}$ – подмногообразие Лежандра, т.е. n -мерное интегральное многообразие контактного распределения $\mathcal{L} = \ker \eta$. Тогда $\eta|_N = 0$, $d\eta|_N = 0$, и поскольку $d\eta = \Omega$, то $\Omega|_N = 0$, т.е. $\langle X, \Phi Y \rangle = 0$, $X, Y \in X(N)$. Подмногообразия AC -многообразия, обладающие последним свойством, называются *вполне вещественными* [2]. Заметим, что факт вполне вещественности интегральных многообразий контактного распределения C -многообразия был установлен Блэром в работе [2]. Зафиксируем точку $p \in N$. Пусть $(p, e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный репер касательного пространства $T_p(N)$. Этот репер однозначно достраивается до вещественно-адаптированного репера $(p, e_0 = \xi_p, e_1, \dots, e_n, \Phi e_1, \dots, \Phi e_n)$ касательного пространства $T_p(M)$. Пусть $(p, \theta^0 = \eta_p, \theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{\hat{1}}, \dots, \theta^{\hat{n}})$ – дуальный корепер. Очевидно, сужение на N семейства всех вещественно-адаптированных реперов многообразия M определяет G -структуру со структурной группой $\{1\} \times U(n)$, в котором семейство $\mathcal{B}$ вещественно-адаптированных реперов указанного выше вида образует подструктуру со структурной группой $O(n, \mathbb{R})$, пространство которой задается системой Пфаффа

$$1) \theta^0 = 0; \quad 2) \theta^{\hat{a}} = 0. \quad (22)$$

Нам, однако, удобнее будет иметь дело с главным расслоением A -реперов $(p, \varepsilon_0 = \xi_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, порожденных реперами семейства $\mathcal{B}$. Напомним, что $\varepsilon_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a - \sqrt{-1}\Phi e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a + \sqrt{-1}\Phi e_a)$. Поэтому матрица $C = (C_j^i)$ перехода от вещественно-адаптированного репера к соответствующему A -реперу имеет вид:

$$(C_j^i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & I_n & I_n \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n & \sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Следовательно, если $(p, \omega = \eta_p, \omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{\hat{1}}, \dots, \omega^{\hat{n}})$ – корепер, дуальный A -реперу, то $\omega^i = D_j^i \theta^j$, где $D = (D_j^i)$ – матрица, обратная матрице C . Очевидно,

$$(D_j^i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \sqrt{-1}I_n \\ 0 & I_n & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Следовательно,

$$1) \omega = \eta_p; \quad 2) \omega^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^a + \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}); \quad 3) \omega^{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^a - \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}). \quad (25)$$

В частности, система Пфаффа (22) может быть переписана в форме

$$1) \omega = 0; \quad 2) \omega^a = \omega_a. \quad (26)$$

Далее, первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве расслоения вещественно-адаптированных реперов многообразия M имеет вид:

$$d\theta^i = \theta_j^i \wedge \theta^j, \quad (27)$$

где $\{\theta_j^i\}$ – компоненты формы римановой связности на этом пространстве. Поскольку $\theta^i = C_j^i \omega^j$, это соотношение можно также переписать в форме $C_j^i d\omega^j = \theta_j^i \wedge C_k^j \omega^k$ или

$$d\omega^i = (D_m^i \theta_k^m C_j^k) \wedge \omega^j. \quad (28)$$

С другой стороны, в силу (8) $d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j$. Сравнивая (28) с этим соотношением, получаем, что $(D_m^i \theta_k^m C_j^k - \omega_j^i) \wedge \omega^j = 0$, и в силу леммы Картана

$$\omega_j^i = D_m^i \theta_k^m C_j^k + C_{jk}^i \omega^k, \quad (29)$$

где $\{C_{jk}^i\}$ – система функций на пространстве расслоения A -реперов, симметричная по нижним индексам.

ЛЕММА. В принятых обозначениях $C_{jk}^i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом параллельности метрического тензора в римановой связности имеем

$$1) d\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{kj} \theta_i^k + \tilde{g}_{ik} \theta_j^k = 0; \quad 2) dg_{ij} + g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k = 0, \quad (30)$$

где $\{\tilde{g}_{ij}\}$ и $\{g_{ij}\}$ – компоненты метрического тензора g многообразия M в вещественно-адаптированном репере и A -репере, соответственно. Поскольку g – тензор типа $(2, 0)$, $g_{ij} = C_i^k C_j^m \tilde{g}_{km}$. С учетом этого (30.2)) примет вид:

$$\tilde{g}_{ms} C_k^s C_j^m \omega_i^k + \tilde{g}_{ms} C_i^s C_k^m \omega_j^k = 0.$$

Подставляя сюда (29), после упрощений получаем

$$\tilde{g}_{ms} C_j^s \theta_t^m C_i^t + \tilde{g}_{ms} C_i^s \theta_t^m C_j^t + (\tilde{g}_{kj} C_{it}^k + \tilde{g}_{ik} C_{jt}^k) \omega^t = 0.$$

Но в силу (30.1)) сумма первых двух слагаемых равна нулю и в силу линейной независимости базисных форм $\tilde{g}_{kj} C_{it}^k + \tilde{g}_{ik} C_{jt}^k = 0$. Дважды делая в этом соотношении циклическую перестановку индексов i, j и t , почленно сложим первые два соотношения и почленно вычтем третье: $\tilde{g}_{kj} C_{it}^k = 0$. В силу невырожденности матрицы метрического тензора отсюда следует, что $C_{it}^k = 0$.

С учетом леммы соотношение (29) можно переписать в форме

$$\theta_j^i = C_m^i \omega_k^m D_j^k. \quad (31)$$

Выясним условия интегрируемости системы (22). Заметим, что в A -репере форма Ω запишется в виде $\Omega = -2\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a$. Но по определению $\mathcal{C}$ -структуры $d\omega = \Omega$ и в силу (26) $d\omega|_N = 0$, т.е. $d\theta^0 = 0$. В то же время в силу (27) условия $d\theta^{\hat{a}}|_N = 0$

принимают вид $\theta_b^{\hat{a}} \wedge \theta^b = 0$, откуда в силу леммы Картана на подмногообразии N должно выполняться соотношение

$$\theta_b^{\hat{a}} = H_{bc}^{\hat{a}} \theta^c, \quad (32)$$

где $H_{bc}^{\hat{a}} = H_{cb}^{\hat{a}}$ — компоненты второй квадратичной формы погружения $N \subset M$. Заметим, что в силу (31)

$$\theta_b^{\hat{a}} = C_h^{\hat{a}} \omega_g^h D_b^g + C_h^{\hat{a}} \omega_g^{\hat{h}} D_b^g + C_h^{\hat{a}} \omega_g^h D_b^{\hat{g}} + C_h^{\hat{a}} \omega_g^{\hat{h}} D_b^{\hat{g}},$$

откуда в силу (23) и (24) получаем

$$\theta_b^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} (-\omega_b^a + \omega_b^{\hat{a}} - \omega_{\hat{b}}^a + \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}).$$

В частности, (32) можно переписать в форме

$$\omega_b^a - \omega_b^{\hat{a}} + \omega_{\hat{b}}^a - \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 2\sqrt{-1} H_{bc}^{\hat{a}} \theta^c. \quad (33)$$

Аналогично,

$$\theta_b^a = \frac{1}{2} (\omega_b^a + \omega_b^{\hat{a}} + \omega_{\hat{b}}^a + \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}). \quad (34)$$

Заметим, что (33) можно записать в форме

$$(\omega_b^a + \omega_a^b) + (\omega^{ab} - \omega_{ab}) = 2\sqrt{-1} H_{bc}^{\hat{a}} \theta^c.$$

Симметризуя и альтернируя это соотношение по индексам a и b , соответственно, получаем:

$$1) \omega_b^a + \omega_a^b = 2\sqrt{-1} H_{(ab)c} \theta^c, \quad 2) \omega^{ab} - \omega_{ab} = 2\sqrt{-1} H_{[ab]c} \theta^c, \quad (35)$$

где $H_{abc} = H_{bc}^{\hat{a}}$. Переписав теперь (34) в форме $\theta_b^a = \frac{1}{2} (\omega_b^a - \omega_a^b) + \frac{1}{2} (\omega^{ab} + \omega_{ab})$, с учетом (35), (17), (22) и (25) получим

$$\omega_b^a = \theta_b^a - \sqrt{2} B^{cab} \theta_c + \sqrt{-1} H_{abc} \theta^c. \quad (36)$$

Мы уже отмечали, что через каждую точку AC -многообразия M^{2n+1} косимплектического типа проходит единственное $2n$ -мерное интегральное многообразие контактного распределения. Иначе говоря, контактное распределение такого AC -многообразия вполне интегрируемо. В полярном случае контактных метрических многообразий можно лишь гарантировать существование n -мерного (с необходимостью вполне вещественного) интегрального многообразия контактного распределения C -многообразия, проходящего через произвольную точку этого многообразия. В связи с этим примем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Контактное распределение AC -многообразия (контактного многообразия) M^{2n+1} назовем *полуинтегрируемым*, если через каждую точку $p \in M^{2n+1}$ в каждом n -мерном вполне вещественном направлении (направлении, аннулирующем внешний дифференциал контактной формы) $L \subset T_p(M)$ проходит n -мерное интегральное многообразие (подмногообразие Лежандра).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Контактное распределение AC -многообразия M^{2n+1} назовем *геодезически интегрируемым*, если через каждую точку $p \in M^{2n+1}$ в каждом n -мерном вполне вещественном направлении $L \subset T_p(M)$ проходит единственное n -мерное вполне геодезическое интегральное многообразие (подмногообразие Блэра).

ТЕОРЕМА 1. *Контактное распределение контактного многообразия M^{2n+1} полунинтегрируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 1 достаточно ограничиться рассмотрением контактного метрического многообразия. Зафиксируем точку $p_0 \in M$ и n -мерное вполне вещественное подпространство $L \subset T_{p_0}(M)$. Пусть $N \subset M$ – подмногообразие Лежандра, проходящее через эту точку в направлении L . Это означает, что $p_0 \in N$, $T_{p_0}(N) = L$. Пусть $(p, e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный репер пространства $T_p(N)$, $p \in N$, $(p, \theta^1, \dots, \theta^n)$ – дуальный корепер. Как уже отмечалось, они порождают вещественно-адаптированный репер и дуальный ему корепер пространства $T_p(M)$, соответственно. Пусть, как и выше, $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ и $(p, \omega, \omega^1, \dots, \omega^n, \omega_1, \dots, \omega_n)$ – соответствующие им A -репер и дуальный ему корепер. Согласно (22) подмногообразие $N \subset M$ задается системой Пфаффа $\theta^0 = 0$, $\theta^{\hat{a}} = 0$ и в силу (25)

$$1) \omega^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^a; \quad 2) \omega_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^a; \quad 3) \omega = 0 \quad (37)$$

(для простоты сужение формы на N мы обозначаем той же буквой, что и саму форму). Систему (37) можно рассматривать как систему Пфаффа подмногообразия N . Найдем условия ее интегрируемости. Продифференцируем внешним образом (37.1)):

$$d\omega^a = \frac{1}{\sqrt{2}}d\theta^a.$$

С учетом (9.1)), (27) и (22) это соотношение примет вид:

$$\sqrt{2}(\omega_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c) = \theta_b^a \wedge \theta^b$$

или в силу (37)

$$(\omega_b^a - \theta_b^a) \wedge \theta^b + \frac{1}{\sqrt{2}}B^{abc}\theta_b \wedge \theta_c = 0.$$

Подставляя сюда (36), с учетом свойств симметрии второй квадратичной формы и линейной независимости базисных форм получаем, что

$$2B^{[b|a|c]} - B^{abc} = 0,$$

что ввиду (10.2)) выполняется тождественно. Аналогично, с учетом (9.1)) и того обстоятельства, что в ортонормированном репере $\theta_b^a + \theta_a^b = 0$, проверяется, что условие $d\omega_a = \frac{1}{\sqrt{2}}d\theta^a$ выполняется тождественно в силу (37). Наконец, из (9.3)) следует, что условие $d\omega = 0$ выполняется тождественно в силу (37). Таким образом, система (37) вполне интегрируема. Следовательно, через каждую

точку r пространства расслоения A -реперов, а значит, и пространства вещественно-адаптированных реперов над M проходит единственное интегральное многообразие максимальной размерности. Его проекция на M является n -мерным подмногообразием многообразия M , которое в силу (37) является подмногообразием Лежандра, касательное пространство которого в начале вещественно-адаптированного репера r совпадает с линейной оболочкой первых n векторов этого репера. В силу произвола в выборе r отсюда следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подмногообразие Лежандра, проходящее через данную точку p в направлении данного вполне вещественного подпространства $L \subset T_p(M)$, не обязательно единственно. Рассмотрим, например, стандартную контактную структуру на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданную контактной формой $\eta = x^1 dx^2 + dx^3$. Непосредственно проверяется, что подмногообразие $N_1 \subset \mathbb{R}^3$, заданное уравнениями

$$\begin{cases} x^2 = 3(x^1)^2, \\ x^3 = -2(x^1)^3, \end{cases}$$

равно как и подмногообразие $N_2 \subset \mathbb{R}^3$, заданное уравнениями

$$\begin{cases} x^2 = 4(x^1)^3, \\ x^3 = -3(x^1)^4, \end{cases}$$

являются одномерными интегральными многообразиями системы Пфаффа $\eta = 0$, т.е. подмногообразиями Лежандра, проходящими через точку $O(0, 0, 0)$. Очевидно, их касательные пространства в точке O совпадают и задаются уравнениями $x^2 = x^3 = 0$. Более обще, рассмотрим стандартную контактную структуру на пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$, заданную контактной формой

$$\eta = \sum_{i=1}^n x^i dx^{n+i} + dx^0. \quad (38)$$

Рассмотрим произвольную гладкую функцию $y = f(x^1, \dots, x^n)$. Построим n функций

$$x^{n+i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Подставив их в уравнение $\eta = 0$, с учетом (38) получим дифференциальное уравнение

$$dx^0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} x^i dx^j. \quad (39)$$

Очевидно, функции $g_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} x^i$ удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial g_j}{\partial x^k} = \frac{\partial g_k}{\partial x^j},$$

а значит, правая часть уравнения (39) является полным дифференциалом некоторой функции F (определенной с точностью до константы). Таким образом,

функция $x^0 = F(x^1, \dots, x^n)$ является интегралом уравнения (39). Рассмотрим n -мерное подмногообразие $N \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x^0 = F(x^1, \dots, x^n), \\ x^{n+i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Очевидно, оно является интегральным многообразием системы Пфаффа $\eta = 0$, т.е. подмногообразием Лежандра. С другой стороны, если фиксировать точку $p_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in N$, то касательное пространство к N в этой точке задается уравнениями

$$\begin{cases} dx^0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{p=p_0} x^i dx^j, \\ dx^{n+i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{p=p_0} dx^j, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

В частности, если f_1 и f_2 — две функции, имеющие одинаковый гессиан в точке p_0 , то они порождают, вообще говоря, различные подмногообразия Лежандра, имеющие одинаковый интегральный элемент в этой точке.

ТЕОРЕМА 2. *Контактное распределение K -контактного многообразия M^{2n+1} размерности выше пяти геодезически интегрируемо тогда и только тогда, когда многообразие M^{2n+1} — сасакиева пространственная форма Φ -голоморфной секционной кривизны s , и следовательно, локально эквивалентно одному из следующих многообразий:*

- 1) при $s > -3$ — нечетномерной сфере, снабженной канонической сасакиевой структурой или структурой, полученной из канонической преобразованием D -гомотетии;
- 2) при $s = -3$ — нечетномерному аффинному пространству, снабженному канонической сасакиевой структурой Φ -голоморфной секционной кривизны -3 ;
- 3) при $s < -3$ — нечетномерной сфере, снабженной структурой, полученной из канонической преобразованием D -инверсии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что AC -многообразие можно рассматривать как каноническое обобщенное почти эрмитово многообразие дефекта 1 [7], причем C -многообразие является обобщенным G_2 -многообразием, т.е. его присоединенная Q -алгебра является A -алгеброй [4]. Заметим также, что геодезическая интегрируемость контактного распределения C -многообразия M^{2n+1} равносильна тому, что это многообразие удовлетворяет аксиоме $(0, n)$ -плоскостей [7]. Согласно теореме 17 в [7] такое многообразие является обобщенно-эрмитовым, т.е. его присоединенная Q -алгебра абелева. Вычисляя компоненты композиционного тензора

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X} (\Phi) (\Phi Y) - \Phi \nabla_{\Phi^2(X)} (\Phi) (\Phi^2 Y) \}$$

этой Q -алгебры в A -репере, убеждаемся, что $B^{abc} = 0$, и в силу предложения 1 M — многообразие Сасаки. Более того, в силу теоремы 18 в [7] M — обобщенное почти эрмитово многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны, что в нашей терминологии означает, что M — сасакиева пространственная форма.

То, что она является одним из трех типов многообразий, указанных в формулировке теоремы, доказано в [4].

Обратно, пусть M^{2n+1} – сасакиева пространственная форма. Надо доказать, что через каждую точку многообразия M^{2n+1} в любом n -мерном вполне вещественном направлении проходит единственное вполне геодезическое n -мерное интегральное многообразие. Заметим, что вполне геодезичность интегрального многообразия равносильна обращению в нуль его второй квадратичной формы [3], а поэтому требование вполне геодезичности интегральных многообразий системы (37) равносильно добавлению к этой системе уравнений (36) при $H_{abc} = 0$, которые мы запишем в форме

$$\theta_b^a = \omega_b^a. \quad (40)$$

Условие интегрируемости полученной системы Пфаффа задается соотношением

$$d\theta_b^a = d\omega_b^a$$

или с учетом (15)

$$\theta_c^a \wedge \theta_b^c + \frac{1}{2} \tilde{R}^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \omega_c^a \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \omega_0^a \wedge \omega_b^0 + \frac{1}{2} R^a_{bij} \omega^i \wedge \omega^j, \quad (41)$$

где $\tilde{R}^a_{bcd}$ – компоненты тензора Римана–Кристоффеля риманова многообразия N . Поскольку M – многообразие Сасаки, $\omega_b^{\hat{a}} = \omega_b^a = 0$ в силу (17.1)), (17.2)). Кроме того, заметим, что ввиду вполне геодезичности подмногообразия $N \subset M$ имеем $\tilde{R} = R|_N$, и значит,

$$\tilde{R}^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = C_i^a D_b^j D_c^k D_d^l R_{jkl}^i \theta^c \wedge \theta^d = C_i^a D_b^j D_c^k R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l.$$

Подставляя эти соотношения в (41), после необходимых сокращений с учетом (17), (40) и линейной независимости базисных форм получаем

$$C_i^a D_b^j R_{jcd}^i = -\delta_c^a \delta_b^d + \delta_d^a \delta_b^c + R^a_{bcd} + R^a_{bcd} + R^a_{bcd} + R^a_{bcd}.$$

С учетом (23) и (24) это соотношение можно переписать в форме

$$\begin{aligned} & -R_{abcd} - R_{ab\hat{c}\hat{d}} - R_{ab\hat{c}\hat{d}} - R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{abcd} + R_{abcd} + R_{abcd} + R_{abcd} \\ & + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} = -2\delta_c^a \delta_b^d + 2\delta_d^a \delta_b^c. \end{aligned}$$

С учетом (16) и (18) после необходимых сокращений окончательно получаем условия интегрируемости системы (37), (40)

$$A_{bc}^{ad} - A_{bd}^{ac} + A_{ac}^{bd} - A_{ad}^{bc} = 0. \quad (42)$$

Очевидно, на сасакиевой пространственной форме эти условия выполняются тождественно в силу предложений 1 и 3. Таким образом, система (37), (40) вполне интегрируема. Повторяя то же рассуждение, что и при завершении доказательства теоремы 1, получаем, что через каждую точку p многообразия M в направлении любого вполне вещественного подпространства $L \subset T_p(M)$ проходит n -мерное

вполне геодезическое интегральное многообразие контактного распределения, т.е. подмногообразие Блэра. Его единственность непосредственно следует из его вполне геодезичности.

Пусть $N \subset M^{2n+1}$ – подмногообразие Блэра K -контактного многообразия. В этом случае (36) запишется в форме

$$\omega_b^a = \theta_b^a - \sqrt{2} B^{cab} \theta_c. \quad (43)$$

Запишем сужение второй группы структурных уравнений (12) K -контактной структуры на подмногообразии N . С учетом (43) имеем

$$\begin{aligned} d\theta_b^a - 2dB^{cab} \wedge \omega_c - 2B^{cab} d\omega_c &= (\theta_c^a - 2B^{hac} \omega_h) \wedge (\theta_b^c - 2B^{rcb} \omega_r) \\ &+ (2B^{adh} B_{hbc} + A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d) \omega^c \wedge \omega_d + B_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d - B^{acd}{}_b \omega_c \wedge \omega_d. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (9.2)) и (14) с учетом (37), после необходимых сокращений получаем

$$\begin{aligned} d\theta_b^a &= \theta_c^a \wedge \theta_b^c + \{ (B^{hag} B_{rbg} - B^{rag} B_{hbg}) \\ &+ \frac{1}{4} (2B^{arg} B_{gbh} - 2B^{ahg} B_{gbr} + A_{bh}^{ar} - A_{br}^{ah}) \\ &+ \frac{1}{2} (B_{bhr}^a - B^{ahr}{}_b + B^{rab}{}_h - B^{hab}{}_r \\ &+ B^{rabh} - B^{habr}) + B^{cab} B_{chr} \} \theta^h \wedge \theta^r. \end{aligned}$$

С другой стороны, с учетом (27), (32) и вполне геодезичности подмногообразия имеем

$$d\theta_b^a = \theta_c^a \wedge \theta_b^c + \frac{1}{2} \tilde{R}^a{}_{bhr} \theta^h \wedge \theta^r.$$

Следовательно, в ортонормированном репере подмногообразия N

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a{}_{bcd} &= 2B^{cag} B_{dbg} - 2B^{dag} B_{cbg} \\ &+ \frac{1}{2} (2B^{adg} B_{gbc} - 2B^{acg} B_{gbd} + A_{bc}^{ad} - A_{bd}^{ac}) \\ &+ B_{bcd}^a - B^{acd}{}_b + B^{dab}{}_c - B^{cab}{}_d + B^{dabc} - B^{cabd} + 2B^{hab} B_{hcd}. \end{aligned} \quad (44)$$

Пусть, в частности, M^{2n+1} – K -контактное многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . Тогда подставляя (21) в (44), после упрощений с учетом (10.2)) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a{}_{bfd} &= -\frac{c+3}{4} (\delta_f^a \delta_b^d - \delta_d^a \delta_b^f) + B^{haf} B_{hbd} - B^{had} B_{hbf} + 2B^{hab} B_{hfd} \\ &+ B_{bfd}^a - B^{afd}{}_b + B^{dab}{}_f - B^{fab}{}_d + B^{dabf} - B^{fabd}. \end{aligned}$$

В частности, пусть M – сасакиева пространственная форма Φ -голоморфной секционной кривизны c . Тогда в силу предложения 1 и соотношений (14) получаем, что

$$B^{abf} = B^{abf}{}_d = B^{abfd} = B_{abf} = B_{abf}^d = B_{abfd} = 0,$$

и значит,

$$\tilde{R}^a{}_{bfd} = -\frac{c+3}{4} (\delta_f^a \delta_b^d - \delta_d^a \delta_b^f),$$

т.е. N – пространство постоянной кривизны $(c+3)/4$. Доказана

ТЕОРЕМА 3. *Через каждую точку сасакиевой пространственной формы Φ -голоморфной секционной кривизны s в направлении любого вполне вещественного подпространства проходит единственное вполне геодезическое подмногообразие постоянной кривизны $(s+3)/4$, являющееся интегральным подмногообразием контактного распределения.*

СЛЕДСТВИЕ. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *сасакиева пространственная форма допускает плоское подмногообразие Блэра;*
- 2) *всякое подмногообразие Блэра сасакиевой пространственной формы плоско;*
- 3) *Φ -голоморфная секционная кривизна сасакиевой пространственной формы равна -3 .*

ПРИМЕР. Пусть M^{2n} – почти келерово многообразие [5] с целочисленной фундаментальной формой Ω (обобщенное многообразие Ходжа). Форма Ω задает симплектическую структуру на M , а ее класс когомологий является характеристическим классом главного T^1 -расслоения $\pi: P \rightarrow M$ над M (расслоения Бутби–Вана [2]). Это главное расслоение допускает каноническую связность с формой ω такой, что $d\omega = \pi^*\Omega$ (см. [8]). Почти келерова структура многообразия M внутренним образом порождает контактную метрическую структуру на пространстве P расслоения, контактная форма которой совпадает с формой ω , а контактное распределение – с горизонтальным распределением канонической связности. Более того, легко видеть, что производная Ли индуцированного на P метрического тензора в направлении вектора, дуального контактной форме, равна нулю, т.е. контактная форма является формой Киллинга, а индуцированная на P контактная метрическая структура – K -контактной структурой [2]. Но тогда согласно теореме 2 имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Горизонтальное распределение канонической связности в расслоении Бутби–Вана над обобщенным многообразием Ходжа полуинтегрируемо, а его n -мерные интегральные многообразия являются вполне вещественными подмногообразиями контактного метрического многообразия P .*

Более того, нетрудно проверить, что обобщенное многообразие Ходжа M будет комплексной пространственной формой, т.е. келеровым многообразием постоянной голоморфной секционной кривизны s (см. [3]) тогда и только тогда, когда пространство расслоения Бутби–Вана над ним будет сасакиевой пространственной формой Φ -голоморфной секционной кривизны $s - 3$. С учетом теоремы 2 справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Горизонтальное распределение канонической связности в расслоении Бутби–Вана над обобщенным многообразием Ходжа M размерности выше четырех геодезически интегрируемо тогда и только тогда, когда M – комплексная пространственная форма.*

Естественно назвать подмногообразия Блэра горизонтального распределения *горизонтальными подмногообразиями расслоения*.

Пусть M – комплексная пространственная форма голоморфной секционной кривизны $s \geq 0$. Как уже отмечалось, пространство расслоения Бутби–Вана над M является сасакиевой пространственной формой Φ -голоморфной секционной кривизны $s - 3$. В частности, пространство расслоения Бутби–Вана над произвольным

плоским, в частности, абелевым многообразием (т.е. четномерным тором, являющимся многообразием Ходжа [9]) является сасакиевой пространственной формой Φ -голоморфной секционной кривизны -3 . С учетом теоремы 3 получаем, что верна

ТЕОРЕМА 6. *Горизонтальные подмногообразия расслоения Бутби–Вана над комплексной пространственной формой голоморфной секционной кривизны s являются вполне геодезическими подмногообразиями постоянной кривизны $s/4$. В частности, такие подмногообразия плоски тогда и только тогда, когда база расслоения локально эквивалентна комплексному евклидову пространству.*

Заметим, что последнее утверждение отнюдь не тривиально, поскольку тотальное пространство расслоения при этом плоским не является.

В случае $s > 0$, как уже отмечалось, пространство расслоения локально эквивалентно либо сфере S^{2n+1} , наделенной канонической сасакиевой структурой либо структурой, полученной из канонической с помощью D -гомотетии ее метрики. Поскольку D -гомотетия может быть (с точностью до обычной гомотетии) достигнута перенормировкой метрики типового слоя, расслоение Бутби–Вана в этом случае локально эквивалентно классическому расслоению Хопфа $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 7. *Горизонтальное распределение расслоения Бутби–Вана над обобщенным многообразием Ходжа M^{2n} , $n > 2$, положительной голоморфной секционной кривизны геодезически интегрируемо тогда и только тогда, когда база расслоения локально голоморфно изометрична комплексному проективному пространству, а само расслоение с точностью до перенормировки метрики типового слоя локально изоморфно классическому расслоению Хопфа.*

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические основы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Blair D. Contact manifolds in geometry // Lecture Notes in Math. 1976. V. 509. P. 1–145.
3. Кобаяши Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
4. Кириченко В. Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 4. С. 711–734.
5. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геом. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
6. Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space forms // Kodai Math. J. 1979. V. 2. P. 171–186.
7. Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, I // Geom. Dedicata. 1994. V. 51. P. 75–104.
8. Kobayashi S. Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. (2). 1956. V. 8. P. 29–45.
9. Чжень Шэн-Шень. Комплексные многообразия. М.: ИЛ, 1961.