Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:36:28

УДК 512.667.7

В. А. Артамонов**О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа**

Классифицируются конечномерные полупростые алгебры Хопфа над алгебраически замкнутым полем в предположении, что алгебра имеет только одно неоднородное неприводимое представление.

Библиография: 9 названий.

Введение

Одной из важных задач в теории алгебр Хопфа является задача классификации конечномерных алгебр Хопфа над алгебраически замкнутым полем. Среди алгебр Хопфа выделяются два больших класса – точечные и полупростые алгебры. В рамках первого направления в последнее время Н. Андрушкиевичем и Х.-Ю. Шнейдером достигнут существенный прогресс в классификации конечномерных точечных алгебр Хопфа. Поэтому возрастает интерес к описанию конечномерных полупростых алгебр Хопфа. В отличие от точечного случая пока нет гипотез, позволяющих получить описание. В связи с этим любые новые серии таких алгебр представляют интерес. В работе при некоторых предположениях показывается, что данным условиям удовлетворяют две серии полупростых алгебр Хопфа.

Пусть k – основное алгебраически замкнутое поле характеристики, отличной от 2. Предположим, что H – конечномерная алгебра Хопфа над k , причем H как алгебра имеет только одно неприводимое представление размерности $n > 1$. Одномерные простые слагаемые в H соответствуют групповым элементам двойственной алгебры Хопфа H^* (т.е. гомоморфизмам алгебр $H \rightarrow k$). Поэтому число таких слагаемых в полупростом разложении H равно порядку группы $G = G(H^*)$ групповых элементов H^* и является делителем размерности алгебры H [1; § 3.1]. Заметим, что размерность $\dim H = |G| + n^2$, и поэтому порядок $|G|$ делит n^2 . В работе описывается коумножение в H в предположении, что порядок группы G максимально возможный, равный n^2 . В этом случае $\dim H = 2n^2$. При этих предположениях и условии, что характеристика поля взаимно проста с размерностью $\dim H$, в теореме 5.1 показывается, что H принадлежит с точностью до изоморфизма одному из классов – симметрическому или симплектическому, причем каждый класс определяется проективным представлением степени n группы G .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00037) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5666.2006.1).

Напомним серию близких результатов. Если характеристика поля нулевая, то следующие условия эквивалентны [2]–[4]:

- 1) H полупроста;
- 2) H кополупроста;
- 3) S^2 тождественно в H .

Если H – (ко)коммутативная алгебра Хопфа, то H – либо групповая, либо дуальная к групповой алгебра Хопфа [1; теорема 2.3.1]. Поэтому в работе рассматривается “минимальный” не (ко)коммутативный случай. Подробный обзор результатов о строении конечномерных алгебр Хопфа можно найти в [5].

Пусть комплексная групповая алгебра H конечной группы F удовлетворяет рассматриваемым условиям. В работах [6], [7] дано описание строения группы F . Во всех случаях группа F метабелева. В [6] показано, что выполнено одно из условий:

- 1) группа F имеет нормальный абелев делитель A индекса n , где n – размерность единственного неоднмерного неприводимого представления группы F ;
- 2) единственное неоднмерное неприводимое представление группы F имеет размерность $n = p^a$, где p – простое число, группа F нильпотентна и обладает прямым разложением $F = P \times A$, где P – неабелева p -группа, а A – абелева p' -группа.

В [7] показано, что выполнено одно из условий:

- 1) F является экстраспециальной 2-группой порядка $|F| = 2^{2k+1}$, имеющей 2^{2k} одномерных представлений и одно представление размерности $n = 2^k$;
- 2) $|F| = p^f(p^f - 1)$, $|F'| = p^f$, где p – простое число, и группа F обладает $p^f - 1$ одномерными представлениями и одним представлением размерности $n = p^f - 1$.

Автор благодарит Н. Андрушкиевича и И. А. Чубарова за полезные обсуждения. Все необходимые определения можно найти в [1].

§ 1. Полупростые биалгебры

Пусть H – полупростая биалгебра (алгебра Хопфа) с полупростым разложением

$$H = \bigoplus_{i=0}^m \text{Mat}(n_i, k) e_i. \quad (1)$$

Здесь $e_0, \dots, e_m$ – ортогональная система центральных идемпотентов, причем $1 = e_0 + \dots + e_m$, $\varepsilon(e_i) = \delta_{i0}$. Кроме того, $1 = n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_m$. Алгебра $H \otimes H$ полупроста и имеет прямое разложение

$$H \otimes H = \bigoplus_{i,j=0}^m [\text{Mat}(n_i, k) e_i \otimes \text{Mat}(n_j, k) e_j].$$

Напомним, что существует изоморфизм алгебр

$$\text{Mat}(n_i, k)e_i \otimes \text{Mat}(n_j, k)e_j \simeq \text{Mat}(n_i n_j, k)(e_i \otimes e_j). \quad (2)$$

Проекция $H \otimes H$ на (2) имеет вид

$$x \rightsquigarrow (e_i \otimes e_j)\Delta(x). \quad (3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть H – конечномерная биалгебра с разложением (1). Предположим, что $1 = n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{r-1} \leq n_{r-1}^2 < n_r \leq \dots \leq n_m$ для некоторого $1 \leq r \leq m$. Тогда

$$J = \bigoplus_{i \geq r} \text{Mat}(n_i, k)e_i \quad (4)$$

является биидеалом в H . Если H является алгеброй Хопфа, то J является идеалом Хопфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ограничение проекции (3) на компоненту $\text{Mat}(n_s, k)e_s$. Оно является ненулевым в том и только том случае, если

$$(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s) \neq 0.$$

Тогда указанное отображение является вложением алгебр, не обязательно сохраняющим единичный элемент. Поэтому $n_s \leq n_i n_j$.

Предположим, что для некоторой пары индексов $0 \leq i, j \leq m$ и $t \geq r$ выполнено неравенство $(e_i \otimes e_j)\Delta(e_t) \neq 0$. Тогда $n_i n_j \geq n_t$. По предположению либо $i \geq r$, либо $j \geq r$, и поэтому J является биидеалом. Поскольку антипод S является антиавтоморфизмом в H , то J инвариантно относительно S .

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть H – конечномерная биалгебра с полупростым разложением (1). Предположим, что

$$1 = n_0 = \dots = n_{r-1} < n_r \leq \dots \leq n_m. \quad (5)$$

Тогда J из (4) является биидеалом (идеалом Хопфа).

Пусть $G = G(H^*)$ – группа групповых элементов дуальной алгебры Хопфа H^* . Каждый элемент $g \in G \subset H^*$ является гомоморфизмом алгебр $g: H \rightarrow k$ и наоборот (см. [1; с. 5]). Именно, существует такой центральный идемпотент e_g , что $xe_g = e_g x = \langle g, x \rangle e_g$ для всех $x \in H$. В частности, $\langle g, J \rangle = 0$. Поэтому можно отождествить множество индексов $\{0, 1, \dots, r-1\}$ в разложении (1) с условием (5) с множеством элементов группы G , а множество индексов $\{r_1, \dots, r_m\}$ – с символом ∞ . Тогда $H_g = ke_g$, $g \in G$, и $H_\infty = J$. Таким образом,

$$(e_g \otimes e_h)\Delta(e_f) = \begin{cases} e_g \otimes e_h, & g, h, f \in G, gh = f, \\ 0, & g, h, f \in G, gh \neq f, \end{cases} \quad (6)$$

и поэтому $(e_g \otimes e_h)\Delta(J) = 0$ для всех $g, h \in G$. Более того,

$$S(e_g) = e_{g^{-1}} + S_g, \quad S_g \in J. \quad (7)$$

Напомним, что имеются левое и правое действия $f \rightharpoonup x$, $x \leftharpoonup f$ элементов $f \in H^*$ на $x \in H$, которые задаются по следующему правилу: если

$$\Delta(x) = \sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)}, \quad (8)$$

то

$$f \rightharpoonup x = \sum_x x_{(1)} \langle f, x_{(2)} \rangle, \quad x \leftharpoonup f = \sum_x \langle f, x_{(1)} \rangle x_{(2)}.$$

В этих обозначениях конволютивное умножение в $f * g$ принимает вид

$$\begin{aligned} \langle f * g, x \rangle &= m(f \otimes g) \Delta(x) = \sum_x \langle f, x_{(1)} \rangle \langle g, x_{(2)} \rangle \\ &= \langle f, x \leftharpoonup g \rangle = \langle g, f \rightharpoonup x \rangle, \end{aligned}$$

где $x \in H$, $f, g \in H^*$ и $m: H \otimes H \rightarrow H$ — умножение в H . В частности, $\langle gh, x \rangle = \langle g * h, x \rangle$ для всех $x \in H$ и $g, h \in G = G(H^*)$. Кроме того, для любых $x \in H$ и $f, g \in H^*$ получаем

$$f \rightharpoonup (x \leftharpoonup g) = \sum_x \langle g, x_{(1)} \rangle x_{(2)} \langle f, x_{(3)} \rangle = (f \rightharpoonup x) \leftharpoonup g. \quad (9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Порядок группы G делит $\dim H$. Если $J \simeq \text{Mat}(n, k)$ является простой алгеброй, то порядок G делит n^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [1] элементы $G(H^*)$ линейно независимы, и поэтому подалгебра в H^* , порожденная G , есть групповая алгебра kG , являющаяся подалгеброй Хопфа в H^* , причем $\dim kG = |G|$. Порядок G делит $\dim H^* = \dim H$ (см. [1; § 3.1]).

Если $J \simeq \text{Mat}(n, k)$, то $\dim H = |G| + \dim J = |G| + n^2$, поэтому $|G|$ делит n^2 .

Пусть $t \in G$ и $x \in J$. Тогда

$$\Delta(x) = \sum_{g \in G} (x_g \otimes e_g + e_g \otimes x'_g) + \Delta'(x), \quad x_g, x'_g \in J, \quad (10)$$

в силу (6). Используя обозначения (8), получаем

$$\begin{aligned} x_g \otimes e_g &= (1 \otimes e_g) \Delta(x) = \sum_x (1 \otimes e_g) (x_{(1)} \otimes x_{(2)}) \\ &= \sum_x x_{(1)} \otimes \langle g, x_{(2)} \rangle e_g = \sum_x x_{(1)} \langle g, x_{(2)} \rangle \otimes e_g = (g \rightharpoonup x) \otimes e_g. \end{aligned}$$

Аналогично, $e_g \otimes x'_g = e_g \otimes (x \leftharpoonup g)$, т.е.

$$x_g = g \rightharpoonup x, \quad x'_g = x \leftharpoonup g. \quad (11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Отображения*

$$(g, x) \mapsto (g \rightharpoonup x), \quad (x, g) \mapsto (x \leftharpoonup g), \quad x \in J, \quad g \in H^*,$$

задают структуру $H^* - H^*$ -бимодульной алгебры на J . При этом

$$\Delta(x) = \sum_{g \in G} [(g \rightarrow x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftarrow g)] + \Delta'(x)$$

для всех $x \in J$. Кроме того, если $e_\infty = 1 - \sum_{g \in G} e_g$, то

$$(e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_\infty) = e_p \otimes e_\infty \quad \text{и} \quad (e_\infty \otimes e_q)\Delta(e_\infty) = e_\infty \otimes e_q$$

для всех $p, q \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое и второе утверждения вытекают из [1; с. 42] и (10), (11). В частности,

$$(e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_\infty) = e_p \otimes (e_\infty \leftarrow p).$$

Элемент e_∞ является единицей в J , а элемент $p \in G$ действует как автоморфизм в алгебре J . Поэтому $e_\infty \leftarrow p = e_\infty$. Аналогично проверяется последнее соотношение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Равенства $(e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_t) = (e_\infty \otimes e_a)\Delta(e_t) = 0$ выполняются при всех $a, t \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $x \mapsto (e_p \otimes e_\infty)\Delta(x)$ является гомоморфизмом алгебр $H \rightarrow H_p \otimes H_\infty$. В силу предложения 1.3

$$\begin{aligned} e_p \otimes e_\infty &= (e_p \otimes e_\infty)\Delta(1) = (e_p \otimes e_\infty)\Delta\left(e_\infty + \sum_{t \in G} e_t\right) \\ &= (e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_\infty) + \sum_{t \in G} (e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_t) \\ &= e_p \otimes e_\infty + \sum_{t \in G} (e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_t). \end{aligned}$$

Поэтому $\sum_{t \in G} (e_p \otimes e_\infty)\Delta(e_t) = 0$. Но множество $\{\Delta(e_t) \mid t \in G\}$ является ортогональной системой идемпотентов. Умножая последнее равенство слева на фиксированный элемент $\Delta(e_t)$, получаем первое искомое соотношение. Аналогично, $(e_\infty \otimes e_a)\Delta(e_t) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если $t \in G$, то

$$\Delta(e_t) = \sum_{g, h \in G, gh=t} e_g \otimes e_h + \Delta_t.$$

ТЕОРЕМА 1.1. Если $g \in G$, то $S(e_g) = e_{g^{-1}}$. Если $m: H \otimes H \rightarrow H$ – отображение умножения, то

$$\begin{aligned} m(1 \otimes S)\Delta_g &= m(S \otimes 1)\Delta_g = \delta_{g1}e_\infty, \\ m(1 \otimes S)\Delta'(x) &= m(S \otimes 1)\Delta'(x) = 0 \end{aligned}$$

для всех $g \in G$ и $x \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше отмечалось, что хопфов идеал J инвариантен относительно S . Поэтому $S(e_\infty) = e_\infty$, так как e_∞ – единица в J . Каждый элемент S_g , $g \in G$, из (7) является проекцией $S(e_g)$ в J . Таким образом,

$$\sum_{g \in G} S_g = e_\infty - S(e_\infty) = 0.$$

Элементы S_g , $g \in G$, также образуют ортогональную систему идемпотентов. Умножая последнее равенство на некоторый элемент S_g , получаем $S_g = 0$ при любом выборе $g \in G$.

Если $x \in J$, то по предложению 1.3 и (7) получаем

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon(x) &= m(1 \otimes S)\Delta(x) = \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x)S(e_g) + e_g S(x \leftharpoonup g)] + m(1 \otimes S)\Delta'(x) \\ &= \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x)e_{g^{-1}} + e_g S(x \leftharpoonup g)] + m(1 \otimes S)\Delta'(x) = m(1 \otimes S)\Delta'(x), \end{aligned}$$

поскольку $Je_{g^{-1}} = e_g J = 0$. Если $g \in G$, то в силу следствия 1.2

$$\begin{aligned} \delta_{g1} \left(e_\infty + \sum_{g \in G} e_g \right) &= \delta_{g1} 1 = \varepsilon(e_g) 1 = (1 \otimes S)\Delta(e_g) \\ &= m(1 \otimes S) \left[\sum_{p, q \in G, pq=g} (e_p \otimes e_q) + \Delta_g \right] = \sum_{p, q \in G, pq=g} e_p S(e_q) + m(1 \otimes S)\Delta_g \\ &= \sum_{p, q \in G, pq=g} e_p e_{q^{-1}} + m(1 \otimes S)\Delta_g = \delta_{g1} \sum_{p \in G} e_p + m(1 \otimes S)\Delta_g. \end{aligned}$$

Таким образом, $m(1 \otimes S)\Delta_g = \delta_{g1} e_\infty$. Аналогично, $m(S \otimes 1)\Delta_g = \delta_{g1} e_\infty$ и $m(S \otimes 1)\Delta'(x) = m(1 \otimes 1)\Delta'(x) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Существует такой элемент $g \in G$, что $\Delta_g \neq 0$, где Δ_g – элемент из следствия 1.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что $\Delta_h = 0$ для всех $h \in G$. Рассматривая проекции в $J \otimes J$, получаем

$$\begin{aligned} e_\infty \otimes e_\infty &= (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta(1) = \sum_{g \in G} (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta(e_g) + (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta(e_\infty) \\ &= (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta(e_\infty) = (e_\infty \otimes e_\infty) \sum_g [(g \rightharpoonup e_\infty) \otimes e_g + e_g \otimes (e_\infty \leftharpoonup e_g)] \\ &\quad + (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta'(e_\infty) = \Delta'(e_\infty). \end{aligned}$$

Поэтому по теореме 1.1

$$\begin{aligned} 0 &= m(1 \otimes S)\Delta'(e_\infty) = m(1 \otimes S)(e_\infty \otimes e_\infty) = m(e_\infty \otimes S(e_\infty)) \\ &= m(e_\infty \otimes e_\infty) = e_\infty, \end{aligned}$$

что невозможно.

§ 2. Условие коассоциативности

В этом параграфе будет указан критерий коассоциативности коумножения Δ в терминах Δ_1 и Δ' . Положим

$$\begin{aligned}\Delta_t &= (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta(e_t) = \sum_i y_i(t) \otimes y'_i(t), \\ \Delta'(x) &= (e_\infty \otimes e_\infty)\Delta(x) = \sum_j u_j(x) \otimes u'_j(x),\end{aligned}\tag{12}$$

где $y_i(t)$, $y'_i(t)$, $u_j(x)$, $u'_j(x) \in J$. По предложению 1.4, следствию 1.2 и (12) при любом $t \in G$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}(1 \otimes \Delta)\Delta(e_t) &= \sum_{g,h \in G, gh=t} e_g \otimes \Delta(e_h) + \sum_i y_i(t) \otimes \Delta(y'_i(t)) \\ &= \sum_{g,p,q \in G, gpq=t} e_g \otimes e_p \otimes e_q + \sum_{gh=t} e_g \otimes \Delta_h \\ &\quad + \sum_l [1 \otimes (l \rightharpoonup)] \Delta_t \otimes e_l \\ &\quad + \sum_{i,l} y_i(t) \otimes e_l \otimes [y'_i(t) \leftharpoonup l] + (1 \otimes \Delta')\Delta_t,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes 1)\Delta(e_t) &= \sum_{g,h \in G, gh=t} \Delta(e_g) \otimes e_h + \sum_i \Delta(y_i(t)) \otimes y'_i(t) \\ &= \sum_{g,p,q \in G, gpq=t} e_g \otimes e_p \otimes e_q + \sum_{gh=t} \Delta_g \otimes e_h \\ &\quad + \sum_{i,l} [l \rightharpoonup y_i(t)] \otimes e_l \otimes y'_i(t) \\ &\quad + \sum_l e_l \otimes \Delta_t[(\leftharpoonup l) \otimes 1] + (\Delta' \otimes 1)\Delta_t.\end{aligned}\tag{14}$$

Сравнивая в (13) и (14) коэффициенты при $* \otimes * \otimes e_g$, $e_g \otimes * \otimes *$, $* \otimes e_g \otimes *$ и в $J^{\otimes 3}$, получаем, что $(1 \otimes \Delta)\Delta(e_t) = (\Delta \otimes 1)\Delta(e_t)$ для любых t в том и только том случае, если для любых $g \in G$

$$\begin{aligned}[1 \otimes (g \rightharpoonup)]\Delta_t &= \Delta_{tg^{-1}}, & [(\leftharpoonup g) \otimes 1]\Delta_t &= \Delta_{g^{-1}t}, \\ [1 \otimes (\leftharpoonup g)]\Delta_t &= [(g \rightharpoonup) \otimes 1]\Delta_t, & (1 \otimes \Delta')\Delta_t &= (\Delta' \otimes 1)\Delta_t.\end{aligned}\tag{15}$$

Аналогично, если $x \in J$, то

$$\begin{aligned}(1 \otimes \Delta)\Delta(x) &= \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes \Delta(e_g) + e_g \otimes \Delta(x \leftharpoonup g)] + \sum_j u_j(x) \otimes \Delta(u'_j(x)) \\ &= \sum_{p,q \in G, pq=g} (g \rightharpoonup x) \otimes e_p \otimes e_q + (g \rightharpoonup x) \otimes \Delta_g \\ &\quad + \sum_{g,l \in G} e_g \otimes [(l \rightharpoonup (x \leftharpoonup g)) \otimes e_l + e_l \otimes ((x \leftharpoonup g) \leftharpoonup l)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_g e_g \otimes \Delta'(x \leftarrow g) + \sum_l [1 \otimes (l \rightarrow)] \Delta'(x) \otimes e_l \\
& + \sum_l u_j(x) \otimes e_l \otimes [u'_j(x) \leftarrow l] + (1 \otimes \Delta') \Delta'(x),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes 1) \Delta(x) &= \sum_{g, l \in G} [(l \rightarrow (g \rightarrow x)) \otimes e_l + e_l \otimes ((g \rightarrow x) \leftarrow l)] \otimes e_g \\
& + \sum_g \Delta'(g \rightarrow x) \otimes e_g + \sum_{p, q \in G, pq=g} e_p \otimes e_q \otimes (x \leftarrow g) \\
& + \sum_g \Delta_g \otimes (x \leftarrow g) + \sum_l [l \rightarrow u_j(x)] \otimes e_l \otimes u'_j(x) \\
& + \sum_l e_l \otimes \Delta'(x) [(\leftarrow l) \otimes 1] + (\Delta' \otimes 1) \Delta'(x).
\end{aligned} \tag{17}$$

Сравнивая коэффициенты в (16) и (17), получаем, что для любых $x \in J$ и $g \in G$ равенство $(1 \otimes \Delta) \Delta(x) = (\Delta \otimes 1) \Delta(x)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
\Delta'(x \leftarrow g) &= [(\leftarrow g) \otimes 1] \Delta'(x), \\
[1 \otimes (g \rightarrow)] \Delta'(x) &= \Delta'(g \rightarrow x), \\
[1 \otimes \leftarrow g] \Delta'(x) &= [(g \rightarrow) \otimes 1] \Delta'(x), \\
\sum_{g \in G} (g \rightarrow x) \otimes \Delta_g + (1 \otimes \Delta') \Delta'(x) &= \sum_{h \in G} \Delta_h \otimes (x \leftarrow h) + (\Delta' \otimes 1) \Delta'(x).
\end{aligned} \tag{18}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Коумножение Δ , заданное в предложении 1.3 и следствии 1.2, коассоциативно в том и только том случае, если

$$\begin{aligned}
[1 \otimes (g \rightarrow)] \Delta_t &= \Delta_{tg^{-1}}, & [(\leftarrow g) \otimes 1] \Delta_t &= \Delta_{g^{-1}t}, \\
[1 \otimes (\leftarrow g)] \Delta_t &= [(g \rightarrow) \otimes 1] \Delta_t, & (1 \otimes \Delta') \Delta_1 &= (\Delta' \otimes 1) \Delta_1, \\
\Delta'(x \leftarrow g) &= [(\leftarrow g) \otimes 1] \Delta'(x), \\
[1 \otimes (g \rightarrow)] \Delta'(x) &= \Delta'(g \rightarrow x), \\
[1 \otimes (\leftarrow g)] \Delta'(x) &= [(g \rightarrow) \otimes 1] \Delta'(x), \\
(\Delta_1 \otimes e_\infty)[y \otimes \Delta_1] &= [\Delta_1 \otimes y](e_\infty \otimes \Delta_1), \\
[\Delta'(e_\infty) \otimes e_\infty][y \otimes \Delta_1] &= [(\Delta' \otimes 1) \Delta'(y)](e_\infty \otimes \Delta_1), \\
(\Delta_1 \otimes e_\infty)[(1 \otimes \Delta') \Delta'(y)] &= [\Delta_1 \otimes y][e_\infty \otimes \Delta'(e_\infty)], \\
[\Delta'(e_\infty) \otimes e_\infty][(1 \otimes \Delta') \Delta'(x)] &= [(\Delta' \otimes 1) \Delta'(x)][e_\infty \otimes \Delta'(e_\infty)]
\end{aligned} \tag{19}$$

при любых $x, y \in J$ и $g, t \in H$. В частности, если $\Delta' = 0$, то Δ коассоциативно тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
[1 \otimes (g \rightarrow)] \Delta_t &= \Delta_{tg^{-1}}, & [(\leftarrow g) \otimes 1] \Delta_t &= \Delta_{g^{-1}t}, \\
[1 \otimes (\leftarrow g)] \Delta_t &= [(g \rightarrow) \otimes 1] \Delta_t, \\
(\Delta_1 \otimes e_\infty)[y \otimes \Delta_1] &= [\Delta_1 \otimes y](e_\infty \otimes \Delta_1)
\end{aligned} \tag{20}$$

при всех $x, y \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые три равенства в (19) вытекают непосредственно из (15). Четвертое равенство в (15) эквивалентно

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta')\Delta_1 &= (1 \otimes \Delta')[1 \otimes (g^{-1} \rightharpoonup)]\Delta_g = [1 \otimes 1 \otimes (g^{-1} \rightharpoonup)][(1 \otimes \Delta')\Delta_g] \\ &= [1 \otimes 1 \otimes (g^{-1} \rightharpoonup)][(\Delta' \otimes 1)\Delta_g] \\ &= (\Delta' \otimes 1)[1 \otimes (g^{-1} \rightharpoonup)]\Delta_g = (\Delta' \otimes 1)\Delta_1. \end{aligned}$$

Необходимо доказать последнее равенство. Заметим, что

$$e_\infty \otimes e_\infty = \sum_g \Delta_g + \Delta'(e_\infty)$$

и элементы Δ_g , $g \in G$, $\Delta'(e_\infty)$ составляют ортогональную систему идемпотентов. Таким образом, $\Delta_g \Delta'(x) = \Delta'(x) \Delta_g = 0$ для всех $g \in G$ и всех $x \in J$. Следовательно, последнее равенство в (18) эквивалентно системе равенств, получаемых путем умножения слева на один из элементов $\Delta_h \otimes e_\infty$, $\Delta'(e_\infty) \otimes e_\infty$ и справа на один из элементов $e_\infty \otimes \Delta_g$, $e_\infty \otimes \Delta'(e_\infty)$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\Delta_h \otimes e_\infty)[(g \rightharpoonup x) \otimes \Delta_g] &= [\Delta_h \otimes (x \leftharpoonup h)](e_\infty \otimes \Delta_g), \\ [\Delta'(e_\infty) \otimes e_\infty][(g \rightharpoonup x) \otimes \Delta_g] &= [(\Delta' \otimes 1)\Delta'(x)](e_\infty \otimes \Delta_g), \\ [\Delta_h \otimes e_\infty][(1 \otimes \Delta')\Delta'(x)] &= [\Delta_h \otimes (x \leftharpoonup h)][e_\infty \otimes \Delta'(e_\infty)], \\ [\Delta'(e_\infty) \otimes e_\infty][(\Delta' \otimes 1)\Delta'(x)] &= [(1 \otimes \Delta')\Delta'(x)][e_\infty \otimes \Delta'(e_\infty)]. \end{aligned} \tag{21}$$

Применяя автоморфизм $(\leftharpoonup h) \otimes 1 \otimes (g \rightharpoonup)$ к первому равенству в (21), получаем

$$(\Delta_1 \otimes e_\infty)[(g \rightharpoonup x \leftharpoonup h) \otimes \Delta_1] = [\Delta_1 \otimes (g \rightharpoonup x \leftharpoonup h)](e_\infty \otimes \Delta_1).$$

Применяя $(\leftharpoonup g) \otimes 1 \otimes (g \rightharpoonup)$ ко второму равенству в (21), получаем

$$[\Delta'(e_\infty) \otimes e_\infty][(g \rightharpoonup x \leftharpoonup g) \otimes \Delta_1] = [(\Delta' \otimes 1)\Delta'(g \rightharpoonup x \leftharpoonup h)](e_\infty \otimes \Delta_1).$$

Применяя $(\leftharpoonup h) \otimes 1 \otimes (h \rightharpoonup)$ к третьему равенству в (21), получаем

$$(\Delta_1 \otimes e_\infty)[(1 \otimes \Delta')\Delta'(h \rightharpoonup x \leftharpoonup h)] = [\Delta_1 \otimes (h \rightharpoonup x \leftharpoonup h)][e_\infty \otimes \Delta'(e_\infty)].$$

Так как x – произвольный элемент, то элементы

$$g \rightharpoonup x \leftharpoonup h, \quad g \rightharpoonup x \leftharpoonup g, \quad h \rightharpoonup x \leftharpoonup h$$

при фиксированных $g, h \in G$ пробегает все элементы в J . Таким образом, мы получаем остающиеся равенства.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. $\Delta_g \neq 0$ при любом $g \in G$. Если $\Delta' = 0$, то $|G| > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый факт следует из предложения 1.5 и (20). Предположим, что $G = 1$. Тогда $\Delta_1 = e_\infty \otimes e_\infty$, и из последнего равенства в (20) вытекает, что $x \otimes e_\infty \otimes e_\infty = e_\infty \otimes e_\infty \otimes x$ для любых $x \in J$, что невозможно.

§ 3. Ранг Δ_1

Напомним, что идеал J обладает прямым разложением (4). Для $i, j \geq r$ обозначим через I_{ij} множество всех индексов $s \geq r$ таких, что

$$(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s) \neq 0. \quad (22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $i, j \geq r$. Тогда $e_i \otimes e_j$ равно сумме всех таких $(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)$, что $s \in I_{ij} \cup G$ и выполнено условие (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $1 = \sum_{s \in G} e_s + \sum_{t \geq r} e_t$, откуда

$$e_i \otimes e_j = (e_i \otimes e_j)\Delta(1) = \sum_{s \in G} (e_i \otimes e_j)\Delta(e_s) + \sum_{t \geq r} (e_i \otimes e_j)\Delta(e_t).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Предположим, что

$$n_r < n_{r+1} < \dots \quad (23)$$

в (4). Тогда ранг $d_s = \text{rk}(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)$ не зависит от $s \in G$. Если $s \in I_{ij}$, то d_s делится на n_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое слагаемое $\text{Mat}(n_i, k)$, $i \geq r$, инвариантно относительно любого автоморфизма алгебры H . В частности, оно инвариантно относительно действия любого $g \in G$. В силу первого уравнения из (15) с $s = tg^{-1}$ получаем $\Delta_s = \Delta_{sg}[(\leftarrow g) \otimes 1]$. Заметим, что $(\leftarrow g) \otimes 1$ является автоморфизмом алгебры (2). Поэтому $(\leftarrow g) \otimes 1$ действует как сопряжение в (2) и сохраняет ранги матриц. Таким образом,

$$\text{rk}[(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)] = \text{rk}[(e_i \otimes e_j)\Delta(e_{sg})] = d_s$$

для всех $g \in G$. Идempotent $(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)$ сопряжен в (2) матрице

$$\begin{pmatrix} E_{d_s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n_i n_j, k),$$

и отображение (3) индуцирует гомоморфизм алгебр $\text{Mat}(d_s, k) \rightarrow \text{Mat}(n, k)$. По [8; теорема 12.7]

$$\text{Mat}(d_s, k) \simeq [(e_i \otimes e_j)\Delta(\text{Mat}(n_s, k))] \otimes \text{Mat}(m, k),$$

откуда следует, что $d_s = n_s m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $i, j \geq r$ и выполнено (23). Положим

$$d = \text{rk}(e_i \otimes e_j)\Delta(e_1).$$

Тогда

$$n_i n_j = |G|d + \sum_{s \in I_{ij}} \text{rk}(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)$$

и $\text{rk}(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s) = n_s t_s$ для всех $s \in I_{ij}$. Более того, существует естественный инъективный гомоморфизм алгебр (не обязательно сохраняющий единицы)

$$\begin{aligned} \Psi: \bigoplus_{s \in G} k e_s \oplus \left[\bigoplus_{s \in I_{ij}} \text{Mat}(n_s, k) \otimes \text{Mat}(t_s, k) \right] \\ \rightarrow \text{Mat}(n_i, k) \otimes \text{Mat}(n_j, k) \simeq \text{Mat}(n_i n_j, k), \end{aligned} \quad (24)$$

переводящий элемент $\sum_{s \in G} \alpha_s e_s + \sum_{l \in I_{ij}} a_l e_l$, где $\alpha_s \in k$, $a_l \in \text{Mat}(n_l, k)$, в блочно-диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_d & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_g E_d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_1} E_{n_{s_1}} \otimes E_{t_{s_1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{s_m} E_{n_{s_m}} \otimes E_{t_{s_m}} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Более того, имеется такой обратимый элемент

$$X \in \text{Mat}(n_i, k) \otimes \text{Mat}(n_j, k) \simeq \text{Mat}(n_i n_j, k),$$

что

$$(e_i \otimes e_j)\Delta\left(\sum_{s \in G} \alpha_s e_s + \sum_{s \in I_{ij}} a_s e_s\right) = X\Psi\left(\sum_{s \in G} \alpha_s e_s + \sum_{s \in I_{ij}} a_s e_s\right)X^{-1}, \quad (26)$$

где $\alpha_s \in k$, $a_s \in \text{Mat}(n_s, k)$. В частности, $n_i n_j = |G|d + \sum_{s \in I_{ij}} n_s t_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система идемпотентов $(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)$, $s \in G \cup I_{ij}$, ортогональна. По предложению 3.2 единичный элемент $e_i \otimes e_j$ алгебры (2) является суммой рассматриваемых идемпотентов. Следовательно, отображение (24) корректно задано, где

$$n_s t_s = \text{rk}[(e_i \otimes e_j)\Delta(e_s)]$$

для всех $s \in G \cup I_{ij}$. Более того, каждое e_s сопряжено с соответствующим диагональным блоком в (25). Как и в предложении 3.2, получаем, что выполнено (26).

§ 4. Свойства Δ_1

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $J = \text{Mat}(n, k)$. Тогда $e_\infty = E$ – единичная матрица из J . Положим

$$\Delta_1 = \sum_{i,j,p,q=1}^n E_{ij} \otimes w_{ipqj} E_{pq}, \quad w_{ipqj} \in k. \quad (27)$$

В силу следствия из предложения 2.1 $\Delta_1 \neq 0$. Обозначим через $A(x, z)$, $B(s, t)$ матрицы из $\text{Mat}(n, k)$, в которых на местах (qa) и (qb) стоят соответственно w_{xzqa} и w_{qbst} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Равенство*

$$(\Delta_1 \otimes E)(y \otimes \Delta_1) = (\Delta_1 \otimes y)(E \otimes \Delta_1)$$

из (19) выполнено для всех $y \in J$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_q w_{xzqa} w_{qbst} = \delta_{ab} \sum_q w_{xzcq} w_{qcst} \quad (28)$$

при любых индексах $x, a, b, c, t, s, z = 1, \dots, n$. Другими словами,

$${}^t A(x, z) B(s, t) = \xi_{xzt} E, \quad \xi_{xzt} \in k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y = E_{ab} \in J$, то

$$\begin{aligned} (\Delta_1 \otimes E)(E_{ab} \otimes \Delta_1) &= \sum_{i,p,q,j',p',q'} E_{ib} \otimes E_{pj'} \otimes w_{ipqa} w_{qp'q'j'} E_{p'q'}, \\ (\Delta_1 \otimes E_{ab})(E \otimes \Delta_1) &= \sum_{i,j,p,q,j',q'} E_{ij} \otimes E_{pj'} \otimes w_{ipqj} w_{qbq'j'} E_{aq'}. \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнивая коэффициенты при $E_{xy} \otimes E_{zt} \otimes E_{rs}$, получаем

$$\delta_{yb} \sum_q w_{xzqa} w_{qrst} = \delta_{ra} \sum_q w_{xzcq} w_{qcst},$$

что эквивалентно (28).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Элемент (27) является идемпотентом тогда и только тогда, когда*

$$w_{xzt} = \sum_{j,q} w_{xzcq} w_{jqty}, \quad (30)$$

или, другими словами, $w_{xzt} = \text{tr}(A(x, z) B(t, y))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= \sum_{i,j,p,q,i',j',p',q'} E_{ij} E_{i'j'} \otimes w_{ipqj} w_{i'p'q'j'} E_{pq} E_{p'q'} \\ &= \sum_{i,j,p,q,j',q'} E_{ij} \otimes w_{ipqj} w_{jq'q'j'} E_{pq'} = \Delta_1 = \sum_{x,y,z,t} E_{xy} \otimes w_{xzt} E_{zt}, \end{aligned}$$

что влечет выполнимость (30).

Далее нам потребуется матричный язык для описания действий $\rightharpoonup, \leftharpoonup$ группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Существует такое проективное представление $\rho: G \times G^{\text{op}} \rightarrow \text{GL}(n, k)$, что*

$$g \rightharpoonup x = A_g x A_g^{-1}, \quad x \leftharpoonup g = B_g x B_g^{-1} \quad (31)$$

для любых $x \in J$, где $A_g = \rho(g, 1)$, $B_g = \rho(1, g)$, $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группы G , G^{op} действуют с помощью $g \rightharpoonup x$ и $x \leftharpoonup g$ как группы автоморфизмов алгебры $\text{Mat}(n, k)$. По теореме Нётер–Сколема [8; § 12.6] для каждого $g \in G$ существуют такие матрицы $A_g, B_g \in \text{GL}(n, k)$, что справедливо равенство (31). В частности, для произвольного элемента $x \in \text{Mat}(n, k)$ получаем

$$A_g A_h x A_h^{-1} A_g^{-1} = A_{gh} x A_{gh}^{-1}.$$

Это означает, что $A_{gh}^{-1} A_g A_h$ – центральный элемент из $\text{Mat}(n, k)$. Поэтому $A_g A_h = \lambda_{gh} A_{gh}$, где $\lambda_{gh} \in k^*$. Аналогично, из (9) вытекает, что $A_g B_h = \mu_{gh} B_h A_g$, $\mu_{gh} \in k^*$, для всех $g, h \in G$. Следовательно, матрицы A_g, B_h задают проективное представление группы $G \times G^{\text{op}}$.

Отметим, что согласно [9; §§ 51–53] каждое проективное представление группы $G \times G^{\text{op}}$ эквивалентно обычному представлению универсального центрального расширения группы $G \times G^{\text{op}}$.

Введем следующие обозначения. Пусть

$$A_g = (a_{ij}(g)), \quad B_g = (b_{ij}(g)) \in \text{Mat}(n, k)$$

и $C(x, y)$ (соответственно $D(z, t)$) – матрица из $\text{Mat}(n, k)$, в которой на месте (ij) стоит w_{xijy} (соответственно w_{iztj}). Тогда

$$\Delta_1 = \sum_{z,t=1}^n D(z, t) \otimes E_{zt} = \sum_{x,y=1}^n E_{xy} \otimes C(x, y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Равенства*

$$[1 \otimes (g \rightharpoonup)] \Delta_t = \Delta_{tg^{-1}}, \quad [(\leftharpoonup g) \otimes 1] \Delta_t = \Delta_{g^{-1}t}$$

в (19) выполнены в том и только том случае, если

$$A_{g^{-1}} C(x, y) A_g = B_{g^{-1}} D(z, t) B_g \quad (32)$$

для всех $g \in G$ и $x, y, z, t = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предполагать, что $t = 1$. Более того, g можно заменить на g^{-1} . Используя матрицы A_g, B_h из предложения 4.3, в силу (19) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta_g &= \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes w_{ipqj}(g^{-1} \rightharpoonup E_{pq}) = \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes w_{ipqj} A_{g^{-1}} E_{pq} A_g \\ &= \sum_{i,j,p,q,r,s} E_{ij} \otimes w_{ipqj} a_{rp}(g^{-1}) a_{qs}(g) E_{rs} \\ &= \sum_{i',j',p',q'} (E_{i'j'} \leftharpoonup g^{-1}) \otimes w_{i'p'q'j'} E_{p'q'} \\ &= \sum_{i',j',p',q'} B_{g^{-1}} E_{i'j'} B_g \otimes w_{i'p'q'j'} E_{p'q'} \\ &= \sum_{i',j',p',q',r',s'} b_{r'i'}(g^{-1}) b_{j's'}(g) E_{r's'} \otimes w_{i'p'q'j'} E_{p'q'}. \end{aligned}$$

Рассматривая коэффициенты при $E_{xy} \otimes E_{zt}$, получаем

$$\sum_{p,q} w_{xpqy} a_{zp}(g^{-1}) a_{qt}(g) = \sum_{i',j'} b_{xi'}(g^{-1}) b_{j'y}(g) w_{i'ztj'},$$

что эквивалентно (32).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Элементы Δ_g , $g \in G$, образуют ортогональную систему идемпотентов тогда и только тогда, когда*

$$\delta_{g1} w_{ips'j'} = \sum_{j,q,p',q'} w_{ipqj} w_{jp'q'j'} a_{qp'}(g^{-1}) a_{q's'}(g). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \delta_{g1} \Delta_1 &= \Delta_1 \Delta_g = \left(\sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes w_{ipqj} E_{pq} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i',j',p',q',r',s'} E_{i'j'} \otimes w_{i'p'q'j'} a_{r'p'}(g^{-1}) a_{q's'}(g) E_{r's'} \right) \\ &= \sum_{i,j',p,q,j,p',q',s'} E_{ij'} \otimes w_{ipqj} w_{jp'q'j'} a_{qp'}(g^{-1}) a_{q's'}(g) E_{ps'}. \end{aligned}$$

Поэтому для любых i, j', p, s' выполняется равенство (33).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Элемент Δ_1 из (27) как матрица из $J \otimes J = \text{Mat}(n^2, k)$ имеет ранг 1 в том и только том случае, если существуют такие матрицы $U = (u_{ij}), V = (v_{pq}) \in J$, что:*

- (i) $w_{ipqj} = u_{ip} v_{qj}$ для любых индексов i, j, p, q ;
- (ii) ${}^t V U = \zeta E$, $\zeta \in k$;
- (iii) $\text{tr}(V U) = 1$;
- (iv) $U {}^t A_g = \omega_g B_g U$, ${}^t A_g V = \omega_g^{-1} V B_g$ для любого элемента $g \in G$, где $\omega_g \in k^*$;
- (v) $\text{tr}(V U {}^t A_g) = \delta_{g1}$ при всех $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ранг Δ_1 равен 1 в том и только том случае, если найдется такая обратимая матрица

$$C = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes c_{ij}, \quad C^{-1} = \sum_{r,s=1}^n E_{rs} \otimes \bar{c}_{rs} \in \text{GL}(n^2, k),$$

где $c_{ij}, \bar{c}_{rs} \in \text{Mat}(n, k)$, что

$$\Delta_1 = C^{-1} (E_{11} \otimes E_{11}) C = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes (\bar{c}_{i1} E_{11}) (E_{11} c_{1j}).$$

Пусть

$$\bar{c}_{i1} E_{11} = \begin{pmatrix} u_{i1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{in} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{11} c_{1j} = \begin{pmatrix} v_{1j} & v_{nj} \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta_1 = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} \otimes (\bar{c}_{i1} E_{11})(E_{11} c_{1q}) = \sum_{i,j,p,q=1}^n E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} E_{pq},$$

и поэтому выполняется условие (i).

Заметим, что в рассматриваемом случае (28) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_q w_{xzqa} w_{qbst} &= \sum_q u_{xz} v_{qa} u_{qb} v_{qb} v_{st} = u_{xz} v_{st} \left(\sum_q v_{qa} u_{qb} \right) \\ &= \delta_{ab} \sum_q w_{xzqc} w_{qcst} = \delta_{ab} \sum_q u_{xz} v_{qc} u_{qc} v_{st} \\ &= \delta_{ab} u_{xz} v_{st} \left(\sum_q v_{qc} u_{qc} \right). \end{aligned}$$

Так как $U, V \neq 0$, то

$$\sum_q v_{qa} u_{qb} = \delta_{ab} \sum_q v_{qc} u_{qc},$$

откуда вытекает выполнимость условия (ii).

Отметим, что

$$A(x, z) = u_{xz} V, \quad B(s, t) = U v_{st}, \quad (34)$$

и поэтому Δ_1 является идемпотентом в силу (30) тогда и только тогда, когда $u_{xz} v_{st} = \text{tr}(VU) u_{xz} v_{st}$. Поскольку $U, V \neq 0$, то выполнено условие (iii).

Из условия (i) получаем, что

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} u_{x1} \\ \vdots \\ u_{xn} \end{pmatrix} (v_{1y} \quad \dots \quad v_{ny}), \quad D(z, t) = \begin{pmatrix} u_{1z} \\ \vdots \\ u_{nz} \end{pmatrix} (v_{t1} \quad \dots \quad v_{tn}),$$

и поэтому (32) переписывается как

$$\sum_{p,q} u_{xp} v_{qy} a_{zp} (g^{-1}) a_{qt} (g) = \sum_{i',j'} b_{xi'} (g^{-1}) b_{j'y} (g) u_{i'z} v_{tj'}.$$

Это означает, что $(U {}^t A_{g^{-1}})_{xz} ({}^t A_g V)_{ty} = (B_{g^{-1}} U)_{xz} (V B_g)_{ty}$, откуда

$$U {}^t A_{g^{-1}} \otimes {}^t A_g V = B_{g^{-1}} U \otimes V B_g. \quad (35)$$

Матрицы U, V, A_g, B_g ненулевые, поэтому из (35) вытекает что $U {}^t A_{g^{-1}}$ и $B_{g^{-1}} U$ линейно зависимы. Аналогично, зависимы матрицы ${}^t A_g V, V B_g$. Отсюда вытекает условие (iv).

Элементы $\Delta_g, g \in G$, ортогональны в том и только том случае, если выполнено (33). Из условия (i) вытекает, что (33) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_{g1} u_{ip} v_{s'j'} &= \sum_{j,q,p',q'} u_{ip} v_{qj} u_{jp'} v_{q'j'} a_{qp'} (g^{-1}) a_{q's'} (g) \\ &= u_{ip} ({}^t A_g V) \text{tr}(VU {}^t A_{g^{-1}}). \end{aligned}$$

Так как матрица U ненулевая, то мы получаем, что

$$\delta_{g1}V = ({}^tA_gV)\text{tr}(VU {}^tA_{g^{-1}}).$$

Если $g \neq 1$, то $0 = ({}^tA_gV)\text{tr}(VU {}^tA_{g^{-1}})$. Так как матрицы A_g, V обратимы, мы получаем, что $\text{tr}(VU {}^tA_g) = 0$. Если же $g = 1$, то $A_1 = E$ и $V = V\text{tr}(VU)$, что доказывает равенство $\text{tr}(VU) = 1$. Условие (v) доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Если $J = \text{Mat}(n, k)$, то выполнено одно из условий:

- (A) $d = \text{rk } \Delta_1 = 1$, причем выполнены условия (i)–(v) из предложения 4.6 и $\zeta \neq 0$ в условии (ii), что означает обратимость матриц U, V ;
- (B) выполняется равенство

$$(\Delta_1 \otimes E)(E \otimes \Delta_1) = (E \otimes \Delta_1)(\Delta_1 \otimes E) = 0; \quad (36)$$

пусть τ – автоморфизм алгебры $J \otimes J$, при котором $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a, b \in J$, тогда $\tau(\Delta_g)\Delta_h = \Delta_h\tau(\Delta_g) = 0$ для всех $g, h \in G$, кроме того, $\Delta'(E) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4.1

$${}^tA(x, z)B(s, t) = \xi_{xzs}E, \quad \xi_{xzs} \in k.$$

Рассмотрим случай (A), когда $\xi_{x'z's't'} \neq 0$ для некоторых индексов x', z', s', t' . Тогда ${}^tA(x', z') = \xi_{x'z's't'}B(s', t')^{-1}$. Следовательно, для любых индексов x, z получаем, что

$${}^tA(x, z) = u_{xz}B(s', t')^{-1}, \quad u_{xz} = \xi_{xzs's't'}, \quad (37)$$

даже если $\xi_{xzs's't'}$ обращается в нуль. Пусть v_{qa} – элемент, стоящий на месте (qa) в матрице $B(s', t')^{-1}$. Тогда матрица $V = (v_{qa})$ обратима и (37) влечет $w_{xza} = u_{xz}v_{qa}$. Значит, выполнено равенство

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes w_{ipq} E_{pq} = \left(\sum_{i,p} E_{it'} \otimes u_{ip} E_{ps'} \right) \left(\sum_{j,q} E_{t'j} \otimes v_{qj} E_{s'q} \right) \\ &= \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} E_{pq}. \end{aligned}$$

Это равенство означает, что $\text{rk } \Delta_1 = 1$, поскольку $\Delta_1 \neq 0$ в силу предложения 1.5 и первой формулы из (20). Поэтому справедливы все свойства из предложения 4.6. Более того, в силу (34) и (37) матрицы U, V обратимы.

В случае (B) предположим, что ${}^tA(x, z)B(t, s) = 0$ для всех индексов x, z, t, s . Тогда в (28) получаем $\sum_q u_{xza} u_{qbst} = 0$, откуда в силу (29) вытекает выполнимость (36).

Пусть Δ_1 удовлетворяет (36) и $\Delta_1 = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i$, где $a_i, b_i \in \text{Mat}(n, k)$, – представление с наименьшим числом слагаемых r . Тогда обе системы матриц $a_1, \dots, a_r$ и $b_1, \dots, b_r$ линейно независимы. Из (36) вытекает, что

$$0 = (\Delta_1 \otimes E)(E \otimes \Delta_1) = \sum_{i,j} a_i \otimes b_i a_j \otimes b_j.$$

Так как a_i и b_j независимы, то $b_i a_j = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, r$. Аналогично, из $(E \otimes \Delta_1)(\Delta_1 \otimes E) = 0$ следует $a_j b_i = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, r$. Поэтому

$$\begin{aligned} \tau(\Delta_g)\Delta_h &= \left(\sum_i (g^{-1} \rightharpoonup b_i) \otimes a_i \right) \left(\sum_j (a_j \leftharpoonup h^{-1}) \otimes b_j \right) \\ &= \sum_{i,j} (g^{-1} \rightharpoonup b_i)(a_j \leftharpoonup h^{-1}) \otimes a_i b_j = 0. \end{aligned}$$

Точно так же $\Delta_h \tau(\Delta_g) = 0$.

Предположим, что $\Delta'(E) = 0$. Тогда $E \otimes E = \sum_{g \in G} \Delta_g$. Домножая на $\tau(\Delta_h)$ слева, получаем по доказанному выше, что $\tau(\Delta_h) = 0$, откуда $\Delta_h = 0$ для любого $h \in G$, что противоречит утверждению предложения 1.5.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть H – полупростая алгебра Хопфа с разложением $H = (\bigoplus_{g \in G} ke_g) \oplus Je_\infty$, где $J = \text{Mat}(n, k)$, $n \geq 2$. Тогда $n^2 = |G|d + nt$ и $|G|$ делит n^2 . Кроме того, n делит $|G|d$ и антипод S обладает тем свойством, что $S(e_g) = e_{g^{-1}}$. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $\Delta' = 0$;
- (b) $|G| = n^2$;
- (c) $|G| = n^2$ и Δ_1 удовлетворяет условию (A) из предложения 4.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.3 $n^2 = |G|d + nt$, где $nt = \text{rk } \Delta'(E)$. Поэтому n делит $|G|d$. В силу предложения 1.2 порядок группы G делит n^2 . По теореме 1.1 $S(e_g) = e_{g^{-1}}$.

Из предложений 1.5, 3.3 и 3.2 вытекает, что $d \neq 0$, откуда

$$n^2 = |G|d + \text{rk } \Delta'(E).$$

Если $\Delta' = 0$, то получаем, что имеет место случай (A). Поэтому $d = 1$ и $|G| = n^2$, т.е. условие (a) влечет условие (b).

Предположим, что $|G| = n^2$. Тогда $d = 1$ и $\Delta' = 0$, т.е. условие (b) влечет условие (c) по предложению 3.3.

Пусть, наконец, выполнено условие (c). Тогда $\text{rk } \Delta'(E) = n^2 - |G|d = 0$.

§ 5. Случай (A) с $\Delta' = 0$

В этом параграфе мы будем предполагать, что $\Delta' = 0$. В силу предложения 4.7 тогда имеет место случай (A).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Если $\Delta' = 0$, то

$$\sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} = \sum_{g \in G} U {}^t A_{g^{-1}} \otimes {}^t A_g V. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\Delta' = 0$ следует, что $\sum_g \Delta_g = E \otimes E$, причем Δ_1 то же, что и в предложении 4.7, случай (A). Поэтому

$$\begin{aligned} E \otimes E &= \sum_g \Delta_g = \sum_g \sum_{i,j,p,q} E_{ij} u_{ip} v_{qj} \otimes (g^{-1} \rightharpoonup E_{pq}) \\ &= \sum_g \sum_{i,j,p,q,r,s} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} a_{rp}(g^{-1}) a_{qs}(g) E_{rs}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых индексов $i, j, r, s = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$\delta_{ij} \delta_{rs} = \sum_g \sum_{p,q} u_{ip} v_{qj} a_{rp}(g^{-1}) a_{qs}(g),$$

и поэтому выполнено равенство (38).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $\Delta' = 0$, а $\text{char } k$ и n взаимно просты. Тогда $UV = \frac{1}{n} E$. В частности, матрицы U, V (косо)симметричны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим отображение умножения $J \otimes J \rightarrow J$ к равенству (38). Получаем

$$nE = \sum_g U {}^t A_{g-1} {}^t A_g V = |G| UV = n^2 UV.$$

Следовательно, $UV = \frac{1}{n} E$ и $V^{-1} = nU$. В частности, матрицы V, U обратимы. Из предложения 4.6 следует, что ${}^t U = \zeta V^{-1} = n\zeta U$, где $\zeta \neq 0$. Таким образом, $n\zeta = \pm 1$ и ${}^t U = \pm U$.

Отметим, что если

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \text{Mat}(n, k) \otimes \text{Mat}(n, k),$$

то $\mathcal{R}^2 = E \otimes E$ и $(A \otimes B)\mathcal{R} = \mathcal{R}(B \otimes A)$ для всех $A, B \in \text{Mat}(n, k)$.

Рассмотрим автоморфизм $x \mapsto xZx^{-1}$ алгебры J , где $Z = (z_{ij}) \in \text{GL}(n, k)$. Пусть $Z^{-1} = (\bar{z}_{ij})$. Тогда

$$\begin{aligned} (Z \otimes Z)\Delta_1(Z \otimes Z)^{-1} &= \sum_{i,j,p,q=1}^n Z E_{ij} Z^{-1} \otimes u_{ip} v_{qj} Z E_{pq} Z^{-1} \\ &= \sum_{\alpha,\beta,i,j,p,q,\gamma,\delta} z_{\alpha i} \bar{z}_{j\beta} E_{\alpha\beta} \otimes u_{ip} v_{qj} z_{\gamma p} \bar{z}_{q\delta} E_{\gamma\delta} \\ &= \sum_{\alpha,\beta,i,j,p,q,\gamma,\delta} E_{\alpha\beta} \otimes z_{\alpha i} \bar{z}_{j\beta} u_{ip} v_{qj} z_{\gamma p} \bar{z}_{q\delta} E_{\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (39)$$

Поэтому матрицу U можно заменить на $ZU {}^t Z$. Если матрица U симметрична и характеристика поля не равна 2, то найдется такая обратимая матрица Z , что $ZU {}^t Z = E$. Если матрица U кососимметрична и обратима, то $n = 2m$ чётно и найдется такая обратимая матрица Z , что $ZU {}^t Z = \mathcal{S}$, где

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Если $\Delta' = 0$ и $\text{char } k$ не делит $\dim H$, то либо $U = E$, $V = \frac{1}{n}E$, либо $U = \mathcal{S}$, $V = -\frac{1}{n}\mathcal{S}$. В обоих случаях*

$$\begin{aligned}\Delta(e_g) &= \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g, & \Delta(x) &= \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)], \\ \varepsilon(e_g) &= \delta_{g1}, & \varepsilon(x) &= 0\end{aligned}$$

для всех $x \in J$, где

$$\begin{aligned}g \rightharpoonup x &= A_g x A_{g^{-1}}, \\ x \leftharpoonup g &= n^2 U {}^t A_g V x U {}^t A_{g^{-1}} V = U {}^t A_g U^{-1} x U {}^t A_{g^{-1}} U^{-1}, \\ A_g U {}^t A_h U^{-1} A_g^{-1} U {}^t A_h^{-1} U^{-1} &= [A_g, U {}^t A_h U^{-1}] = \mu_{gh} E, & \mu_{gh} &\in k^*, \\ \Delta_g &= \sum_{i,j,p,q} (E_{ij} \leftharpoonup g^{-1}) \otimes u_{ip} v_{qj} E_{pq} = \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} (g^{-1} \rightharpoonup E_{pq})\end{aligned}$$

при любых $g \in G$. Кроме того, $\text{tr } A_g = n\delta_{g1}$ и

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji} = \sum_{g \in G} U {}^t A_{g^{-1}} \otimes {}^t A_g V = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} U {}^t A_{g^{-1}} \otimes {}^t A_g U^{-1}.$$

В силу теоремы 5.1 алгебра Хопфа H полностью задается ограничением проективного представления ρ из предложения 4.3 на группу G , т.е. представлением $\rho(g, 1) = A_g$; см. предложение 4.6, (iv).

Отметим, что построенная в теореме 5.1 биналгебра является по теореме 6.1 (см. ниже) алгеброй Хопфа. Кроме того, в теореме 8.1 будет показано, что $G(H^*) = G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Алгебра Хопфа H из теоремы 5.1 является кокоммутативной в том и только том случае, если $g \rightharpoonup x = x \leftharpoonup g$ для всех $g \in G$ и $x \in J$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра H кокоммутативна. Тогда в силу теоремы 5.1 выполнено требуемое условие.

Предположим обратное, т.е. $g \rightharpoonup x = x \leftharpoonup g$ для всех $g \in G$ и $x \in J$. На языке матриц в силу теоремы 5.1 это означает, что $\eta_g U A_g V = {}^t A_g$, где $\eta_g \in k^*$. Если $U = E$, $V = \frac{1}{n}E$, то ${}^t A_g = \pm A_g$ для любого $g \in G$. Если же $U = \mathcal{S}$, $V = -\frac{1}{n}\mathcal{S}$, то ${}^t A_g = \eta_g \mathcal{S} A_g \mathcal{S}$, откуда $\eta_g = \pm 1$.

Достаточно показать, что $\tau(\Delta_g) = \Delta_g$ для всех $g \in G$, где $\tau: J \otimes J \rightarrow J \otimes J$ — перестановка множителей. По теореме 5.1

$$\begin{aligned}\Delta_g &= \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} (g^{-1} \rightharpoonup E_{pq}) = \sum_{i,j,p,q,r,s} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} a_{pr}(g^{-1}) a_{sq}(g) E_{rs}, \\ \tau(\Delta_g) &= \sum_{i,j,p,q,r,s} E_{ij} \otimes u_{rp} v_{qs} a_{pi}(g^{-1}) a_{jq}(g) E_{rs},\end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{p,q} u_{ip} v_{qj} a_{pr}(g^{-1}) a_{sq}(g) = \sum_{p,q} u_{rp} v_{qs} a_{pi}(g^{-1}) a_{jq}(g)$$

при любом $g \in G$. Это означает, что

$$U A_{g^{-1}} \otimes A_g V = {}^t A_{g^{-1}} U \otimes {}^t A_g V, \quad (40)$$

поскольку либо $U = E$, $V = \frac{1}{n} E$, либо $U = \mathcal{S}$, $V = -\frac{1}{n} \mathcal{S}$. В обоих случаях (40) вытекает из (35).

Предположим, что заданы алгебры Хопфа H , H_1 из теоремы 5.1 с разложениями

$$H = \left(\bigoplus_{g \in G} k e_g \right) \oplus \text{Mat}(n, k) e_\infty, \quad H_1 = \left(\bigoplus_{g_1 \in G_1} k e_{g_1} \right) \oplus \text{Mat}(n_1, k) e_\infty,$$

где $G = G(H^*)$, $G_1 = G(H_1^*)$. Изоморфизм алгебр Хопфа $\Psi: H \rightarrow H_1$ индуцирует двойственный изоморфизм алгебр Хопфа $\Psi^*: H_1^* \rightarrow H^*$ и изоморфизм групп $\Psi^*: G_1 \rightarrow G$. Нетрудно видеть, что $\Psi(e_{\Psi^*(g)}) = e_g$ для всех $g \in G_1$. Кроме того, $\Psi(\text{Mat}(n, k)) = \text{Mat}(n_1, k)$, откуда $n = n_1$ и найдется такая матрица $Z \in \text{Mat}(n, k)$, что $\Psi(x) = ZxZ^{-1}$ для всех $x \in \text{Mat}(n, k)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi(e_g)) &= \Delta(e_{(\Psi^*)^{-1}(g)}) = \sum_{h \in G_1} e_h \otimes e_{h^{-1}(\Psi^*)^{-1}(g)} + \Delta_{(\Psi^*)^{-1}(g)} \\ &= (\Psi \otimes \Psi) \Delta(e_g) = \sum_{f \in G} e_{(\Psi^*)^{-1}(f)} \otimes e_{(\Psi^*)^{-1}(f^{-1}g)} + (\Psi \otimes \Psi) \Delta_g. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_h = (\Psi \otimes \Psi) \Delta_{\Psi^*(h)} = (Z \otimes Z) \Delta_{\Psi^*(h)} (Z \otimes Z)^{-1} \quad (41)$$

для всех $h \in G_1$. Пусть $g = \Psi^*(h)$ и $Z = (z_{ij})$, $Z^{-1} = (\bar{z}_{ij})$. По теореме 5.1 и (41), как и в (39), получаем

$$\begin{aligned} (Z \otimes Z) \Delta_g (Z \otimes Z)^{-1} &= \sum_{\alpha, \beta, i, j, p, q, \gamma, \delta} E_{\alpha\beta} \otimes z_{\alpha i} \bar{z}_{j\beta} u_{ip} v_{qj} z_{\gamma p} \bar{z}_{q\delta} (g^{-1} \rightharpoonup E_{\gamma\delta}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, i, j, p, q, \gamma, \delta, \tau, \omega} E_{\alpha\beta} \otimes z_{\alpha i} \bar{z}_{j\beta} u_{ip} v_{qj} z_{\gamma p} \bar{z}_{q\delta} a_{\tau\gamma}(g^{-1}) a_{\delta\omega}(g) E_{\tau\omega} \\ &= \Delta_h = \sum_{\alpha, \beta, p, q} E_{\alpha\beta} \otimes u'_{\alpha p} v'_{q\beta} (h^{-1} \rightharpoonup E_{pq}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, p, q, \tau, \omega} E_{\alpha\beta} \otimes u'_{\alpha p} v'_{q\beta} a'_{\tau p}(h^{-1}) a'_{q\omega}(h) E_{\tau\omega}, \end{aligned}$$

где U' , V' , A'_g определены для H_1 . Отсюда для любых $\alpha, \beta, \tau, \omega$ и $g \in G$ имеем

$$\sum_{i, j, p, q} z_{\alpha i} \bar{z}_{j\beta} u_{ip} v_{qj} z_{\gamma p} \bar{z}_{q\delta} a_{\tau\gamma}(g^{-1}) a_{\delta\omega}(g) = \sum_{p, q} u'_{\alpha p} v'_{q\beta} a'_{\tau p}(h^{-1}) a'_{q\omega}(h),$$

или

$$ZU {}^tZ {}^tA_{g^{-1}} \otimes {}^tZ^{-1} {}^tVZ^{-1}A_g = U' {}^tA'_{h^{-1}} \otimes {}^tV' {}^tA'_h.$$

Полагая $g = 1$, получаем $h = 1$ и $ZU {}^tZ = \mu U'$, где $\mu \in k^*$. Так как поле k алгебраически замкнуто, то существует такое $\rho \in k^*$, что $\mu = \rho^2$. Заменяя Z на $\rho^{-1}Z$, можно считать, что $\mu = 1$. Если U симметрична, то и U' симметрична. Поэтому если $U = E$, то $U' = E$, и в этом случае матрица Z ортогональна. Если же $U = \mathcal{S}$, то, аналогично, $U' = \mathcal{S}$ и Z симплектична. Во всех случаях $A_g = \zeta_g A'_h$ для любых h , где $\zeta_h \in k^*$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi(x)) &= \sum_{h \in G_1} [(h \rightharpoonup \Psi(x)) \otimes e_h + e_h \otimes (\Psi(x) \leftharpoonup h)] \\ &= (\Psi \otimes \Psi)\Delta(x) = \sum_{g \in G} [\Psi(g \rightharpoonup x) \otimes e_{(\Psi^*)^{-1}g} + e_{(\Psi^*)^{-1}g} \otimes \Psi(x \leftharpoonup g)], \end{aligned}$$

т.е. если $\Psi^*(h) = g$, то $A'_h ZxZ^{-1}A_h^{-1} = ZA_gxA_g^{-1}Z^{-1}$ или $ZA_gZ^{-1} = \theta_g A'_h$, где $\theta_g \in k^*$. Так как $A_g = \zeta_g A'_h$, то $ZA_gZ^{-1} = \xi_g A_g$, где $\xi_g \in k^*$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 5.2. *Алгебра Хопфа H определена однозначно с точностью до автоморфизма группы G и изоморфизма проективного представления $g \mapsto A_g$, согласованного с изоморфизмом группы $G(H^*) = G$, с помощью ортогональной или симплектической матрицы Z .*

§ 6. Антипод

В теореме 1.1 было показано, что $S(e_g) = e_{g^{-1}}$ для всех $g \in G$. Вычислим $S(x)$ для $x \in J$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть H – алгебра из теоремы 5.1. Тогда $S(x) = nU {}^t x V = U {}^t x U^{-1}$ для любого $x \in J$. Поэтому алгебра H является инволютивной кополупростой алгеброй Хопфа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства $\Delta' = 0$ и теоремы 1.1 нужно показать, что $m(1 \otimes S)\Delta_g = m(S \otimes 1)\Delta_g = \delta_{g1}E$ для любого $g \in G$, где S задано в условии теоремы. Применяя теорему 5.1, получаем

$$\begin{aligned} m(1 \otimes S)\Delta_g &= n \sum_{i,j=1}^n (E_{ij} \leftharpoonup g^{-1}) u_{ip} v_{qj} U E_{qp} V \\ &= n \sum_{i,j,p,q=1}^n B_{g^{-1}} E_{ij} B_g u_{ip} v_{qj} U E_{qp} V \\ &= n \sum_{i,j,p,q,r,s,t=1}^n b_{ri}(g^{-1}) b_{js}(g) E_{rs} u_{ip} v_{qj} u_{tq} v_{pl} E_{tl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{i,j,p,q,r,s=1}^n b_{ri}(g^{-1})b_{js}(g)u_{ip}v_{qj}u_{sq}v_{pl}E_{rl} \\
&= n(B_{g^{-1}}UV)\text{tr}(B_gUV) = \frac{1}{n}B_{g^{-1}}\text{tr} B_g = \omega_g^{-2}\delta_{g1}B_{g^{-1}}.
\end{aligned}$$

Поэтому если $g \neq 1$, то $m(1 \otimes S)\Delta_g = 0$ по теореме 5.1. Если $g = 1$, то $m(1 \otimes S)\Delta_1 = E$. Аналогично, $m(S \otimes 1)\Delta_g = \delta_{g1}E$.

Инволютивность алгебры H означает, что $S^2 = 1$. Если $g \in G$, то $S^2(e_g) = e_g$. Если же $x \in J$, то

$$\begin{aligned}
S^2(x) &= S(nU^t x V) = n^2 U^t (u^t x V) V \\
&= n^2 U^t V x^t U V = n^2 (UV)x(UV) = x.
\end{aligned}$$

Для доказательства кополупростоты нужно воспользоваться [5; теорема 3.12].

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если $U = E$, то $S(x) = {}^t x$ для всех $x \in J$. Если же $U = \mathcal{S}$, то $S(x) = -\mathcal{S}^t x \mathcal{S}$.

§ 7. Групповые элементы в H

В [2] отмечено, что в нулевой характеристике дуальная алгебра Хопфа H^* полупроста, а ее одномерные слагаемые определяются групповыми элементами алгебры H .

ТЕОРЕМА 7.1. В условии теоремы 5.1 элемент $w = \sum_{g \in G} \chi_g e_g + x \in H$, $x \in J$, $\chi_g \in k$, является групповым тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $\chi_{gh} = \chi_g \chi_h$ для всех $g, h \in G$;
- 2) $g \rightharpoonup x = \chi_g x = x \leftharpoonup g$ для всех $g \in G$;
- 3) $xU^t x = U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 5.1, получаем

$$\begin{aligned}
\Delta(w) &= \sum_g \left[\chi_g \left(\sum_h e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g \right) + (g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g) \right] \\
&= w \otimes w = \sum_{h,g} \chi_h \chi_{h^{-1}g} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \sum_g \chi_g (e_g \otimes x + x \otimes e_g) + x \otimes x.
\end{aligned}$$

Поэтому условия 1) и 2) выполнены. Кроме того,

$$x \otimes x = \sum_g \chi_g \Delta_g. \quad (42)$$

Так как $\{\Delta_g \mid g \in G\}$ – ортогональная система идемпотентов, то последнее равенство эквивалентно набору равенств $(x \otimes x)\Delta_g = \chi_g \Delta_g$. Применяя $[1 \otimes (g \rightharpoonup)]$, мы получаем

$$[x \otimes (g \rightharpoonup x)]\Delta_1 = \chi_g (x \otimes x)\Delta_1 = \chi_g \Delta_1,$$

т.е. $(x \otimes x)\Delta_1 = \Delta_1$.

Если $x = \sum_{i,j} x_{ij} E_{ij}$, то

$$\begin{aligned} (x \otimes x) \Delta_1 &= \left(\sum_{a,b,a',b'} x_{ab} x_{a'b'} E_{ab} \otimes E_{a'b'} \right) \times \frac{1}{n} \left(\sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} E_{pq} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{a,a',i,j,p,q} x_{ai} x_{a'p} E_{aj} \otimes u_{ip} v_{qj} E_{a'q} = \Delta_1 = \frac{1}{n} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} E_{pq}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $E_{\alpha\beta} \otimes E_{\gamma\delta}$, получаем

$$\sum_{i,p} x_{\alpha i} u_{ip} x_{\gamma p} v_{\delta\beta} = u_{\alpha\gamma} v_{\delta\beta}.$$

Поэтому для любых индексов α, γ получаем $\sum_{i,p} x_{\alpha i} u_{ip} x_{\gamma p} = u_{\alpha\gamma}$, т.е. $x U^t x = U$.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Если $U = E$, то матрица x из теоремы 7.1 ортогональна. Если $U = \mathcal{S}$, то матрица x из теоремы 7.1 симплектична.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть w – элемент из теоремы 7.1 и $w' = \sum_g \chi_g e_g + y$ – другой групповой элемент, $y \in J$. Тогда $y = \pm x$. В частности, порядок группы $G(H)$ всех групповых элементов из H является четным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (42) вытекает, что $x \otimes x = y \otimes y$. Поэтому $x = \lambda y$ и $y = \lambda x$, где $\lambda \in k$. Отсюда $\lambda = \pm 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть H – алгебра из теоремы 5.1. Следующие условия эквивалентны:

- (1) H – групповая алгебра;
- (2) $J = \text{Mat}(n, k)$ – прямая сумма одномерных пространств kx_i , где $i = 1, \dots, n^2$, причем для каждого элемента x_i выполнены условия 2), 3) из теоремы 7.1;
- (3) алгебра H кокоммутативна.

Для доказательства воспользоваться теоремой 7.1 и предложением 5.2.

Рассмотрим групповой гомоморфизм π_1 группы $G(H)$ в группу одномерных характеров группы G , при которых элементу w из теоремы 7.1 сопоставляется характер χ . В силу предложения 7.2 ядро π_1 состоит из $\pm E$. Таким образом, $|G(H)| = 2|\text{Im } \Omega|$. При этом $\text{Im } \Omega$ является абелевой группой. Отметим, что проекция π_2 группы $G(H)$ в $\text{Mat}(n, k)$ является вложением.

Пусть w – элемент из теоремы 7.1. Тогда $A_g x A_g^{-1} = \chi_g x$ для всех $g \in G$, причем матрица x невырождена. Таким образом, если $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – множество собственных значений x , включая кратности, то

$$\{\chi_g \lambda_1, \dots, \chi_g \lambda_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Если $\chi_g \lambda_s = \lambda_s$ для некоторого s , то $\chi_g = 1$, так как $\lambda_s \neq 0$. Таким образом, орбита действия каждого элемента $g \in G$ на $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ делит n .

Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. $|G(H)| = 2|\text{Im } \pi_1|$, причем порядок любого элемента из $\text{Im } \pi_1$ делит n . Группа $G(H)$ является расширением центральной подгруппы $\{\pm E\}$ с помощью абелевой группы $\text{Im } \pi_1$.

§ 8. Обратная задача

Пусть G – группа порядка n^2 с проективным n -мерным представлением $g \mapsto A_g \in \text{Mat}(n, k)$. Рассмотрим ассоциативную k -алгебру H с полупростым разложением

$$H = \left(\bigoplus_{g \in G} k e_g \right) \oplus \text{Mat}(n, k) E,$$

где e_g , $g \in G$, – система центральных ортогональных идемпотентов и E – единичная матрица из $\text{Mat}(n, k)$. При этом единица H является суммой $1 = \sum_g e_g + E$. Зададим в H коумножение Δ и коединицу ε , как в теореме 5.1, а антипод S – как в теореме 6.1. В силу результатов § 2 и теорем 5.1, 6.1 H является алгеброй Хопфа.

ТЕОРЕМА 8.1. В построенной алгебре Хопфа H имеем $G(H^*) = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_g , $g \in G$, и E_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, – базис в H . Рассмотрим дуальный базис g , $g \in G$, и E^{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, в H^* . Пусть

$$l = \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{i, j=1}^n \beta_{ij} E^{ij} \in G(H^*),$$

где $\alpha_g, \beta_{ij} \in k$. Отображение $l: H \rightarrow k$ является гомоморфизмом k -алгебр, и поэтому $\langle l, \text{Mat}(n, k) \rangle = 0$. Отсюда $\langle l, E_{ij} \rangle = \beta_{ij} = 0$ для всех i, j . Итак, $l = \sum_{g \in G} \alpha_g g$.

Если $f, h \in G$, то

$$\alpha_f \alpha_h = \langle l, e_f \rangle \langle l, e_h \rangle = \langle l, e_f e_h \rangle = \delta_{fh} \langle e_f \rangle = \delta_{fh} \alpha_f.$$

Пусть $\alpha_f \neq 0$. Тогда $\alpha_h = 0$ для всех $h \neq f$. Кроме того, $\alpha_f^2 = \alpha_f \neq 0$, откуда $\alpha_f = 1$ и $l = f$.

Обратно, каждый элемент $g \in G \subset H^*$ является групповым.

§ 9. Замечания относительно оставшихся случаев

В этом параграфе мы отметим случаи, не охваченные теоремой 5.1.

9.1. Случай (А) с $\Delta' \neq 0$. Предположим, что $\Delta' \neq 0$ в случае (А). Из предложений 4.7 и 3.3 вытекает, что $n^2 = |G| + nt$, где $t \geq 1$. Поэтому в силу теоремы 4.1 порядок группы G равен nq , где q делит n . Таким образом, q делит $t = n - q$ и $t = qs$. Итак, $n = q(1 + s)$.

Рассматриваемый класс алгебр Хопфа непуст. В нем лежит, например, комплексная групповая алгебра симметрической группы третьей степени.

9.2. Замечания относительно случая (B). В этом пункте приводятся простейшие свойства элемента Δ_1 в случае выполнимости условия (B) из предложения 4.7. Рассмотрим оператор $\tau: J \otimes J \rightarrow J \otimes J$, являющийся автоморфизмом алгебры, при котором $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a, b \in J$. По предложению 4.7 справедливы равенства $\Delta_h \tau(\Delta_g) = \tau(\Delta_g) \Delta_h = 0$ при любых $g, h \in G$. Отображение Δ является гомоморфизмом алгебр, и поэтому

$$E \otimes E = \sum_{g \in G} \Delta_g + \Delta'(E). \quad (43)$$

Применяя τ к (43), получаем

$$E \otimes E = \sum_{g \in G} \tau(\Delta_g) + \tau(\Delta'(E)). \quad (44)$$

Все слагаемые в правых частях равенств (43), (44) являются ортогональными идемпотентами. Поэтому $\text{rk } \tau(\Delta'(E)) = n^2 - |G|d$ по теореме 4.1. Умножая (44) на Δ_h слева и справа, получаем

$$\Delta_h = \Delta_h \tau(\Delta'(E)) = \tau(\Delta'(E)) \Delta_h.$$

Поэтому $d = \text{rk } \Delta_h = \text{rk } \Delta_h \tau(\Delta'(E))$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \tau(\Delta'(E)) &= (E \otimes E) \tau(\Delta'(E)) = \sum_{h \in G} \Delta_h \tau(\Delta'(E)) + \Delta'(E) \tau(\Delta'(E)) \\ &= \sum_{h \in G} \Delta_h + \Delta'(E) \tau(\Delta'(E)), \end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned} n^2 - |G|d = \text{rk } \tau(\Delta'(E)) &= \sum_{h \in G} \text{rk } \Delta_h \tau(\Delta'(E)) + \text{rk } \Delta'(E) \tau(\Delta'(E)) \\ &= |G|d + \text{rk } \Delta'(E) \tau(\Delta'(E)) \geq |G|d. \end{aligned}$$

Итак, с учетом теоремы 4.1 и предложения 1.5 доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. В случае (B) имеем $n^2 \geq 2d|G| \geq 2n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Пусть Δ_1 – элемент из предложения 4.7, случай (B). Тогда ${}^t VU = 0$, т.е. $\zeta = 0$ в (ii) из предложения 4.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (36) получаем

$$0 = (\Delta_1 \otimes E)(E \otimes \Delta_1) = \sum_{i,j,p,q,i',j',p',q'} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} u_{i'p'} v_{q'j'} E_{pq} E_{i'j'} \otimes E_{p'q'}.$$

Так как E_{ij} , $E_{p'q'}$ линейно независимы, то для любых индексов i, j, p', q' имеем

$$0 = \sum_{p,q,j'} E_{pj'} u_{ip} v_{qj} u_{qp'} v_{q'j'}.$$

Следовательно, для произвольных индексов i, j, p, p', q', j'

$$0 = u_{ip} v_{q'j'} \sum_q u_{qp} v_{qj},$$

или ${}^t VU = 0$, поскольку $U, V \neq 0$.

Список литературы

- [1] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences (University in Chicago, USA, 1992), CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [2] S. Montgomery, “Classifying finite-dimensional semisimple Hopf algebras”, *Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras* (Seattle, WA, 1997), Contemp. Math., **229**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 265–279.
- [3] R. G. Larson, D. E. Radford, “Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple”, *J. Algebra*, **117**:2 (1988), 267–289.
- [4] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras*, Trab. Mat., **31**, Univ. Nacional de Córdoba, Córdoba, 1995.
- [5] N. Andruskiewitsch, “About finite dimensional Hopf algebras”, *Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics* (Bariloche, 2000), Contemp. Math., **294**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 1–57.
- [6] I. M. Isaacs, D. S. Passman, “A characterization of groups in terms of the degrees of their characters”, *Pacific J. Math.*, **15**:3 (1965), 877–903.
- [7] G. Seitz, “Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:2 (1968), 459–461.
- [8] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. S. Pierce, *Associative algebras*, Grad. Texts in Math., **88**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [9] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969; пер. с англ.: Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley, New York–London, 1962.

В. А. Артамонов (V. A. Artamonov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: artamon@bk.ru

Поступила в редакцию

19.09.2006 и 05.03.2007