Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Гришухин, Сумма параллелоэдра и отрезка по Минковскому, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 15–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:57:02

УДК 511.6+514.174.6

В. П. Гришухин

Сумма параллелоэдра и отрезка по Минковскому

Не для всякого параллелоэдра P его сумма Минковского $P + S_e$ с отрезком S_e прямой вдоль вектора e является параллелоэдром. Если $P + S_e$ есть параллелоэдр, то P называется *свободным вдоль e* . Параллелоэдр $P + S_e$ не всегда есть многогранник Вороного. Хорошо известна гипотеза Вороного об аффинной эквивалентности всякого параллелоэдра многограннику Вороного. Предпринимается попытка доказательства гипотезы Вороного для $P + S_e$. Для этого вводится класс $\mathcal{P}(e)$ канонически заданных параллелоэдров, свободных вдоль e . Доказывается, что $P + S_e$ аффинно эквивалентен многограннику Вороного тогда и только тогда, когда P есть прямая сумма параллелоэдров класса $\mathcal{P}(e)$.

Этот простой случай доказательства гипотезы Вороного является показательным примером для понимания общего случая.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Параллелоэдр есть такой многогранник, параллельные переносы которого заполняют все пространство без дыр и пересечений по внутренним точкам. Если это заполнение *нормально*, т.е. грань-в-грань, то эти переносы образуют группу трансляций, изоморфную точечной решетке центров всех параллелоэдров, заполняющих пространство.

Важным специальным случаем параллелоэдра является многогранник Вороного $P_V(t)$ некоторой точки t произвольной решетки L : $P_V(t)$ есть замыкание множества точек $\mathbb{R}^n$, более близких к t , чем к другим точкам L . В этом определении в качестве расстояния используется обычное евклидово расстояние.

Согласно О. К. Житомирскому [1] параллелоэдр называется *k -примитивным*, если в заполнении пространства его трансляционными копиями в каждой его k -мерной грани сходится минимально возможное число $n - k + 1$ его копий. Легко проверить, что k -примитивность влечет $(k + 1)$ -примитивность. 0-примитивный параллелоэдр называется *примитивным*. Очевидно, что всякий параллелоэдр $(n - 1)$ -примитивен.

Хорошо известна гипотеза Вороного, что всякий параллелоэдр аффинно эквивалентен многограннику Вороного. Сам Г. Ф. Вороной в [2] доказал свою гипотезу для примитивных параллелоэдров. О. К. Житомирский в [1] усилил этот результат для $(n - 2)$ -примитивных параллелоэдров.

В настоящей статье гипотеза Вороного изучается для простого частного случая параллелоэдра, являющегося суммой Минковского многогранника Вороного и отрезка. Но оказалось, что даже в этом очень частном случае доказательство гипотезы Вороного наталкивается на трудности.

Если сумма $P + S_e$ параллелоэдра P с отрезком S_e прямой, натянутой на вектор e , есть параллелоэдр, то P называется *свободным вдоль e* . Параллелоэдр $P + S_e$ не всегда является многогранником Вороного. Еще Г. Ф. Вороной [2] показал, что если параллелоэдр может быть задан *канонически*, то он аффинно эквивалентен многограннику Вороного. К сожалению, не для всех канонически заданных параллелоэдров, свободных вдоль e , удается доказать, что сумму $P + S_e$ можно привести к каноническому виду. Поэтому вводится особый класс $\mathcal{P}(e)$ канонически заданных параллелоэдров, свободных вдоль e . Доказывается, что $P + S_e$ можно привести к каноническому виду тогда и только тогда, когда P есть прямая сумма параллелоэдров класса $\mathcal{P}(e)$. Класс $\mathcal{P}(e)$ содержит все $(n-2)$ -примитивные параллелоэдры (а они неразложимы в прямую сумму). Так как сумма по Минковскому отрезка с прямой суммой $(n-2)$ -примитивных параллелоэдров может не быть $(n-2)$ -примитивным параллелоэдром, то тем самым несколько расширяется класс параллелоэдров, для которых доказана гипотеза Вороного.

В данном случае гипотеза Вороного сводится к гипотезе, что класс $\mathcal{P}(e)$ есть класс всех канонически заданных параллелоэдров, свободных вдоль e и неразложимых в прямую сумму. Этот простой случай доказательства гипотезы Вороного является поучительным примером для понимания общего случая.

§ 2. Основные свойства параллелоэдров

Для удобства грани максимальной размерности будем называть *фасетами*. Кроме того, ниже, для краткости, n -мерный многогранник называется n -многогранником. То же относится и к его граням. Так, например, $(n-1)$ -грань n -многогранника есть его фасета.

В статье [3] Б. А. Венков доказал, что n -многогранник P является параллелоэдром тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим трем условиям, которые для удобства будем называть *условиями Венкова*:

- (I) P центрально симметричен;
- (II) все его $(n-1)$ -грани центрально симметричны;
- (III) проекция P вдоль любой его $(n-2)$ -грани есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник.

Будем обозначать скалярное произведение двух вектор-столбцов $x, y \in \mathbb{R}^n$ как $x^T y = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha y_\alpha$ и положим $x^T x = x^2$. В этих обозначениях произведение xy^T есть $(n \times n)$ -матрица с элементами $(xy^T)_{\alpha\beta} = x_\alpha y_\beta$, где $1 \leq \alpha, \beta \leq n$. Назовем x^2 *нормой* вектора x .

Всякий n -параллелоэдр P в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть задан следующим образом:

$$P = P(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} p_i^T t_i \leq p_i^T x \leq \frac{1}{2} p_i^T t_i, \quad i \in I_P \right\}, \quad (1)$$

где $\frac{1}{2}t_i$ есть центр фасеты F_i , лежащей в аффинной гиперплоскости

$$\left\{ x : p_i^T x = \frac{1}{2} p_i^T t_i \right\},$$

ортогональной *фасетному* вектору p_i , а I_P есть множество всех пар параллельных фасет P .

Вектор t_i соединяет центр параллелеоэдра $P(0)$ с центром смежной с ним по фасете F_i сдвинутой копии $P(t_i)$. Векторы t_i , $i \in I_P$, порождают решетку L , точками которой являются центры параллелеоэдров, покрывающих пространство $\mathbb{R}^n$. Решетка L примитивного параллелеоэдра тоже называется примитивной. Б. А. Венков [4] называет векторы множества $\{\pm t_i : i \in I_P\}$ *основными* векторами.

Множество k -граней n -параллелеоэдра разбивается на *зоны* взаимно параллельных k -граней. Ребра многоугольников, упомянутых в условии Венкова (III), суть проекции четырех или шести фасет параллелеоэдра P . Назовем множество из четырех и шести таких фасет 4- и 6-*пояском* соответственно. Вершины этих многоугольников, которые являются проекциями, суть проекции $(n-2)$ -граней одной зоны. Легко видеть, что 2-плоскость, ортогональная $(n-2)$ -граням такой зоны, содержит, с точностью до знака, либо два, либо три фасетных вектора. Назовем два (соответственно три) фасетных вектора, лежащих в 2-плоскости и определяющих $(n-2)$ -зону и четыре (соответственно шесть) фасеты, *двойкой* (соответственно *тройкой*). Соответствующие множества основных векторов и их индексов тоже будем называть двойками и тройками.

Вспоминая определение $(n-2)$ -примитивности, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для n -параллелеоэдра P следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) P $(n-2)$ -примитивен;
- 2) P не имеет 4-поясков.

Кстати, в этих терминах предложение 3 из работы [5] утверждает, что число фасетных (или основных) векторов многогранника Вороного $P_V(0)$ максимально тогда и только тогда, когда $P_V(0)$ $(n-2)$ -примитивен. Но это верно только в одну сторону: максимальность числа фасетных векторов влечет $(n-2)$ -примитивность, но не наоборот.

Пусть параллелеоэдр P задан в виде (1). Пусть I_P^* есть копия I_P с таким соответствием $i \leftrightarrow i^*$, что $p_{i^*} = -p_i$. Считаем, что $(i^*)^* = i$. Положим $J_P = I_P \cup I_P^*$. Напомним, что J_P есть множество индексов всех фасет параллелеоэдра P и $F_{j^*} = -F_j$. Введем множество

$$J_P^2 = \{(ij) : i, j \in J_P, \{t_i, t_j\} \text{ есть двойка } P\}.$$

Согласно предложению 1 $J_P^2 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда P $(n-2)$ -примитивен.

Рассмотрим три идущие подряд фасеты 6-пояска. Пусть t_i, t_j, t_k есть тройка соответствующих им основных векторов, взятых в том же порядке. Тогда эти

основные векторы удовлетворяют следующему линейному равенству:

$$t_i + t_k = t_j. \quad (2)$$

Очевидно, что каждый фасетный вектор определен с точностью до множителя. В частности, для данной тройки можно так подобрать множители, что фасетные векторы будут удовлетворять тому же равенству (2), что и основные векторы. В этом случае, следуя Г. Ф. Вороному [2], говорят, что фасетные векторы определены *канонически* для тройки (ijk) . Скажем, что параллелоэдр P *определен (или задан) канонически* (или *приведен к каноническому виду*), если множители всех фасетных векторов P подобраны так, что для каждой тройки фасетные векторы определены канонически.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения (ср. [6]).

ЛЕММА 1. *Всякое невырожденное линейное преобразование $x \rightarrow Ax$ переводит параллелоэдр P в параллелоэдр AP . Если t_i и p_i , $i \in I_P$, суть основные и фасетные векторы P , то At_i и $(A^T)^{-1}p_i$ суть основные и фасетные векторы AP .*

Заметим, что если A есть ортогональное преобразование, т.е. A есть вращение или отражение, то $(A^T)^{-1} = A$. Если $A = \lambda I$ есть подобие, где I – тождественное преобразование и $\lambda > 0$, то $(A^T)^{-1} = \lambda^{-1}I$.

Назовем два параллелоэдра *эквивалентными*, если один получается из другого линейным невырожденным преобразованием. Таким образом, множество всех параллелоэдров разбивается на классы эквивалентности.

§ 3. Многогранник Вороного

Подчеркнем, что в настоящей работе многогранником Вороного (или областью Дирихле–Вороного) $P_V(0)$ точки 0 решетки L называется замыкание множества точек $\mathbb{R}^n$ более близких к точке 0, чем к другим точкам L . Так же он определен, например, в [5] и многих других работах.

Важным свойством определенного таким образом многогранника Вороного P_V , выделяющим его из всего класса параллелоэдров, является ортогональность основных векторов соответствующим им фасетам. Поэтому многогранник Вороного $P_V(0)$ задается системой неравенств (1), где $p_i = t_i$ для всех $i \in I_P$. Очевидно, что любой многогранник Вороного определен канонически, так как для него $p_i = t_i$ для всех $i \in J_P$.

Гипотеза Вороного утверждает, что всякий класс эквивалентности содержит многогранник Вороного.

В [6] доказана теорема, часть эквивалентных утверждений которой приведена ниже.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть P есть n -параллелоэдр, определенный фасетными векторами p_i и основными векторами t_i , $i \in J_P$. Пусть A есть невырожденная $(n \times n)$ -матрица и $D = A^T A$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *аффинное отображение $x \rightarrow Ax$ переводит P в многогранник Вороного вида (1), у которого основные и фасетные векторы совпадают;*
- 2) *параллелоэдр P определен канонически;*

- 3) для всех $i \in J_P$ справедливо равенство $p_i = Dt_i$;
 4) для всех пар $i, j \in J_P$ справедливо равенство $p_i^T t_j = p_j^T t_i$.

В знаменитой работе [2] Г. Ф. Вороной ввел понятие L-типа примитивного параллелоэдра и области L-типа квадратичных форм примитивных многогранников Вороного. L-тип непримитивных многогранников Вороного он определил с помощью предельного перехода, при котором квадратичная форма многогранника выходит на границу замыкания L-области примитивного многогранника Вороного.

В работе [5] показано, что если P есть примитивный параллелоэдр, то преобразование A , переводящее P в многогранник Вороного, единственно до подобия и автоморфизма P . Более того, из этого результата статьи [5] следует, что любые два разных (т.е. не совмещающихся при движении и подобии) многогранника Вороного одного L-типа не эквивалентны.

Полезно продемонстрировать введенные понятия на следующем примере. Многогранник Вороного вида (1), где $p_i = t_i$ для $i \in I_P$, задан в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ относительно произвольного ортонормального базиса, задающего скалярное произведение $x^T y = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha y_\alpha$. Это описание многогранника Вороного никак не связано с квадратичной формой его решетки L . Решетка L входит в (1) только через основные векторы t_i , $i \in J_P$. Сам Г. Ф. Вороной в [2] рассматривал этот многогранник в виде, который явно связан с квадратичной формой $f(z)$. Это можно описать следующим образом.

Пусть $\mathcal{E} = \{e_\alpha : 1 \leq \alpha \leq n\}$ есть репер L , соответствующий квадратичной форме

$$f(z) = \left(\sum_{\alpha=1}^n z_\alpha e_\alpha \right)^2 = \sum_{\alpha, \beta} z_\alpha e_\alpha^T e_\beta z_\beta = z^T D_f z.$$

Здесь $D_f = (e_\alpha^T e_\beta)$ есть матрица Грама формы f , а z есть вектор-столбец с координатами z_α . Пусть основные векторы в этом репере имеют целочисленное представление $t_i = \sum_{\alpha=1}^n z_\alpha^i e_\alpha$. Тогда

$$t_i^2 = t_i^T t_i = \sum_{\alpha, \beta} z_\alpha^i e_\alpha^T e_\beta z_\beta^i = f(z_i),$$

где z_i есть вектор-столбец с координатами z_α^i .

Рассмотрим двойственный репер $\mathcal{E}^* = \{e_\alpha^* : 1 \leq \alpha \leq n\}$ такой, что $e_\alpha^T e_\beta^* = 0$, если $\alpha \neq \beta$, и $e_\alpha^T e_\alpha^* = 1$. Рассмотрим многогранник Вороного P из (1) относительно репера $\mathcal{E}^*$, т.е. считаем, что $x = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha e_\alpha^*$. Тогда имеем $t_i^T x = \sum_{\alpha=1}^n z_\alpha^i x_\alpha = z_i^T X$, где X есть вектор-столбец с координатами x_α в репере $\mathcal{E}^*$. В этих обозначениях многогранник Вороного, который обозначим через $P(f)$, получает следующее описание:

$$P(f) = \left\{ X : -\frac{1}{2}f(z_i) \leq z_i^T X \leq \frac{1}{2}f(z_i), i \in I_P \right\}. \quad (3)$$

Заметим, что, рассматривая X в описании (3) как точку евклидова пространства, мы получаем описание $P(f)$ в виде параллелоэдра (1) с каноническими параметрами $p'_i = z_i$ и $t'_i = D_f z_i$. Пусть $E = (e_\alpha)_1^n$, $E^* = (e_\alpha^*)_1^n$ суть базисные

матрицы реперов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$. Тогда $D_f = E^T E$, $E^* = (E^T)^{-1}$, $x = E^* X$ и $X = E^T x$. Применим к $P(f)$ отображение $A = E^*$, т.е. отображение $X \rightarrow x = E^* X$. Согласно лемме 1 основные и фасетные векторы параллелоэдра $E^* P(f)$ суть векторы $E^* t'_i = (E^T)^{-1} (E^T E) z_i = t_i$ и $(E^{*T})^{-1} p'_i = E z_i = t_i$. Таким образом, отображение E^* возвращает многогранник Вороного $P(f)$ к исходному виду $P_V(0)$, т.е. $P_V(0) = E^* P(f)$. Е. А. Большакова в [7] продемонстрировала взаимосвязи различных определений многогранника Вороного.

Описание (3) удобно по многим соображениям. Если форма f пробегает область С-типа, определенного в [8], то множество представлений $\{z_i : i \in I_P\}$ основных векторов не меняется и лишь сужается, когда f выходит на границу области С-типа. Это значит, что для этих форм f многогранники Вороного $P(f)$ определены одним и тем же множеством фасет, но параллельно сдвинутых относительно друг друга. При выходе на границу некоторые фасеты могут быть отрезаны другими фасетами. Кроме того, разбиение пространства на многогранники Делоне, метрически и комбинаторно двойственное разбиению пространства на многогранники Вороного, одно и то же для всех форм одной области L-типа.

Именно используя представление (3), С. С. Рышков и Е. А. Большакова в [9] доказали сильный результат о том, что всякий многогранник Вороного $P(f)$ представим в виде суммы Минковского многогранников Вороного реберных форм L-области формы f .

§ 4. Параллелоэдры ненулевой толщины

В 1959 г. в статье [4] Б. А. Венков ввел понятие многогранника ненулевой толщины в направлении k -мерного подпространства. Он изучал параллелоэдры ненулевой толщины. Наиболее важными являются параллелоэдры ненулевой толщины в направлении прямой. Для краткости будем говорить о толщине *вдоль* прямой.

Параллелоэдр P имеет ненулевую толщину вдоль прямой l , если пересечение P с любой прямой, параллельной l , либо пусто, либо имеет ненулевую длину. Легко видеть (см. [10]), что всякий параллелоэдр, имеющий ненулевую толщину вдоль l , есть сумма Минковского отрезка прямой l и некоторого параллелоэдра P_0 , имеющего нулевую толщину вдоль l , т.е. существует прямая l' , параллельная l , такая, что пересечение $P_0 \cap l'$ есть точка.

Пусть e есть единичный вектор, т.е. $e^2 = 1$, и $l(e)$ – прямая, натянутая на e . Для удобства назовем толщину вдоль прямой $l(e)$ толщиной вдоль вектора e . Для $\mu \geq 0$ введем отрезок прямой $l(e)$

$$S_e(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda e, -\frac{1}{2}\mu \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\mu \right\}.$$

Конечно, $S_e(0)$ есть точка. Длина отрезка $S_e(\mu)$ равна μ .

Пусть

$$e^T p_i = \sigma_i w_i, \quad \text{где } \sigma_i = \text{sgn}(e^T p_i) - \text{знак скалярного произведения } e^T p_i. \quad (4)$$

Для $\sigma \in \{0, \pm\}$ положим

$$J_P^\sigma(e) = \{i \in J_P : \sigma_i = \sigma \cdot 1\}.$$

Очевидно, $J_P^-(e) = \{i \in J_P : i^* \in J_P^+(e)\}$ и J_P^0 есть множество индексов i фасетных векторов p_i , ортогональных e .

Не для всякого параллелоэдра P сумма Минковского P с отрезком является параллелоэдром. Скажем, что параллелоэдр P *свободен в направлении* (или *вдоль*) e , если сумма Минковского P с отрезком прямой $l(e)$ есть снова параллелоэдр. Легко проверить, что если параллелоэдр P имеет ненулевую толщину вдоль $l(e)$, то P свободен в направлении e .

Ниже мы переформулируем теорему 1 из [10] в следующем эквивалентном виде.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть P есть параллелоэдр. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *параллелоэдр P свободен в направлении e ;*
- 2) *$e^T p = 0$ хотя бы для одного вектора $p \in \{p_i, p_j, p_k\}$ каждой тройки P .*

Рассмотрим более подробно сумму параллелоэдра и отрезка. Итак, пусть параллелоэдр P свободен вдоль e . Напомним, что $\sigma_i = \text{sgn}(e^T p_i)$. Введем множество

$$J_P^2(e) = \{(ij) \in J_P^2 : \sigma_i \sigma_j = -1\}.$$

Важность этого множества состоит в том, что для $(ij) \in J_P^2(e)$ пересечение фасет F_i и F_j есть $(n-2)$ -грань P , принадлежащая 4-пояску и имеющая нулевую толщину вдоль e . Поэтому $J_P^2(e) = \emptyset$, если P имеет ненулевую толщину вдоль e .

ЛЕММА 2. *Пусть P есть параллелоэдр, определенный фасетными векторами p_i и основными векторами t_i , $i \in J_P$. Пусть P свободен вдоль e . Тогда векторы t'_i , p'_i , $i \in J_P$, и t_{ij} , p_{ij} , $(ij) \in J_P^2(e)$, суть основные и фасетные векторы суммы $P + S_e(\mu)$, где*

$$\begin{aligned} t'_i &= t_i + \sigma_i \mu e, & p'_i &= p_i, & i &\in J_P, \\ t_{ij} &= t_i + t_j, & p_{ij} &= w_i^{-1} p_i + w_j^{-1} p_j, & (ij) &\in J_P^2(e), \end{aligned} \tag{5}$$

и w_i определены в (4). В частности, фасетные векторы P остаются фасетными векторами параллелоэдра $P + S_e(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество фасет суммы $P + S_e(\mu)$ состоит из фасет P (может быть, сдвинутых параллельно себе) и новых фасет вида $G + S_e(\mu)$, где G есть некоторая $(n-2)$ -грань P , которая согласно теореме 2 должна принадлежать 4-пояску. Очевидно, что фасетные векторы p_i фасет P остаются фасетными векторами p'_i сдвинутых фасет. Но соответствующие основные векторы принимают вид $t'_i = t_i + \sigma_i \mu e$, потому что сами фасеты F_i сдвигаются на $\frac{1}{2} \sigma_i \mu e$.

Пусть $G = F_i \cap F_j$ есть пересечение фасет F_i и F_j . Сумма $G + S_e(\mu)$ есть фасета суммы $P + S_e(\mu)$ тогда и только тогда, когда G имеет нулевую толщину вдоль e , т.е. когда (ij) есть двойка P и $\sigma_i = -\sigma_j \neq 0$ (см. [10]).

Напомним, что $P(t)$ есть копия P , сдвинутая на вектор решетки t . Легко понять, что $(n-2)$ -грань $G = F_i \cap F_j$ параллелоэдра P , соответствующая двойке (ij) , есть общая $(n-2)$ -грань четырех параллелоэдров P , $P(t_i)$, $P(t_j)$ и $P(t_i + t_j)$. Поэтому концевая вершина вектора $\frac{1}{2}(t_i + t_j)$ есть центр грани G . В сумме $P + S_e(\mu)$ этот центр становится центром новой фасеты $G + S_e(\mu)$. Поэтому вектор $t_i + t_j$ становится основным вектором параллелоэдра $P + S_e(\mu)$. Так как вектор e параллелен фасете $G + S_e(\mu)$, то фасетный вектор фасеты $G + S_e(\mu)$ ортогонален e и есть линейная комбинация фасетных векторов фасет F_i и F_j . Поэтому, с точностью до множителя, он имеет вид $p_{ij} = w_i^{-1}p_i + w_j^{-1}p_j$, так как $e^T p_i = \sigma_i w_i \neq 0$, $e^T p_j = \sigma_j w_j \neq 0$ и $\sigma_i + \sigma_j = 0$.

Из формулы (5) видно, что если P есть многогранник Вороного, когда $p_i = t_i$ для всех $i \in J_P$, то $P + S_e(\mu)$ не является многогранником Вороного, если существуют $i \in J_P$ такие, что $\sigma_i \neq 0$. Для этих i не только $t'_i \neq p'_i$, но и вектор t'_i не пропорционален фасетному вектору p'_i . Заметим также, что в сумме $P + S_e(\mu)$ множество основных векторов может только увеличиться.

§ 5. Класс параллелоэдров $\mathcal{P}(e)$

В этом параграфе вводится важный класс $\mathcal{P}(e)$ параллелоэдров. Будет доказано, что $P + S(e)$ аффинно эквивалентен многограннику Вороного тогда и только тогда, когда P есть прямая сумма многогранников класса $\mathcal{P}(e)$. Класс $\mathcal{P}(e)$ состоит из параллелоэдров P , обладающих следующими свойствами:

- 1) P задан канонически;
- 2) P свободен в направлении e ;
- 3) $e^T p_i = \sigma_i w$ для всех $i \in J_P$, где $w = w_P(e)$ не зависит от i , а σ_i определен в (4).

Наша цель – показать, что параллелоэдр $P + S_e(\mu)$ может быть определен канонически, если P определен канонически, что сводится к случаю, когда P есть многогранник Вороного. Следующая лемма описывает смысл определения класса $\mathcal{P}(e)$.

ЛЕММА 3. *Если параллелоэдр $P \in \mathcal{P}(e)$, то параллелоэдр $P + S_e(\mu)$ может быть определен канонически и поэтому эквивалентен многограннику Вороного. При этом*

$$\begin{aligned} t'_i &= t_i + \frac{\mu}{w}(e^T p_i)e, & p'_i &= p_i, & i &\in J_P, \\ t'_{ij} &= t_i + t_j, & p'_{ij} &= wp_{ij} = p_i + p_j, & (ij) &\in J_P^2(e), \end{aligned} \quad (6)$$

где p_{ij} определен в (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для “старых” троек $\{t_i, t_k, t_j\}$ справедливы равенства $t_i + t_j = t_k$ и $t'_i + t'_j = t'_k$. Поэтому фасетные векторы сдвинутых фасет определены канонически. Так как $P \in \mathcal{P}(e)$, то $w_i = w_j = w$ и, как видно из (5), вектор p_{ij} определяется канонически для тройки $\{t_i, t_j, t_{ij}\}$, если взять число w в качестве канонического множителя для всех фасетных векторов вида p_{ij} . Подставляя $\sigma_i = e^T p_i / w$ в (5), получаем (6). Согласно теореме 1 $P + S_e(\mu)$ эквивалентен многограннику Вороного.

Следующая лемма описывает подкласс параллелоэдров класса $\mathcal{P}(e)$, которому принадлежат все $(n-2)$ -примитивные параллелоэдры, свободные вдоль e .

ЛЕММА 4. Пусть параллелоэдр P определен канонически, свободен в направлении e и $J_P^2(e) = \emptyset$. Тогда параллелоэдр $P + S_e(\mu)$ определен канонически и $P \in \mathcal{P}(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $J_P^2(e) = \emptyset$, то новые 6-пояски не возникают. Так как P определен канонически, то для каждой тройки $\{t_i, t_j, t_k\}$, где $i \in J_P^+(e)$, $j \in J_P^0(e)$ и $k \in J_P^-(e)$, справедливы равенства

$$t_i + t_j + t_k = 0, \quad p_i + p_j + p_k = 0.$$

Используя (5), нетрудно проверить, что эти равенства справедливы также для t'_i и p'_i . Поэтому $P + S_e(\mu)$ определен канонически.

Так как $P + S_e(\mu)$ определен канонически, то согласно свойству 4) из теоремы 1 справедливы равенства $(p'_i)^T t'_j = (p'_j)^T t'_i$. Подставляя в эти равенства соответствующие значения t'_i и p'_i из (5) и учитывая, что для канонически определенного P справедливо $p_i^T t_j = p_j^T t_i$, получаем равенства $\sigma_i \mu e^T p_j = \sigma_j \mu e^T p_i$. Так как $e^T p_k = \sigma_k w_k$ для всех $k \in J_P$, то для $i, j \notin J_P^0$ это равенство дает $w_j = w_i$. Так как это верно для любой пары индексов, то w_i не зависит от i для $i \notin J_P^0$. Для $i \in J_P^0$ имеем $\sigma_i = 0$ и равенство $e^T p_i = \sigma_i w$ справедливо для любого w . Поэтому $P \in \mathcal{P}(e)$.

Чтобы понять, когда параллелоэдр P принадлежит классу $\mathcal{P}(e)$, нужно изучить связанный с P определяемый ниже граф G_P .

§ 6. Граф G_P

На множестве J_P как на множестве вершин построим граф G_P следующим образом. Две вершины $i, j \in J_P$ смежны в G_P тогда и только тогда, когда фасеты F_i и F_j принадлежат одному и тому же 6-пояску и смежны, т.е. пересечение $F_i \cap F_j$ есть $(n-2)$ -грань P . Граф G_P совпадает с графом $G(0)$, введенным в [6]. Полезно представлять граф G_P как граф на множестве параллелоэдров $P(t_i)$, $i \in J_P$, смежных с P по фасете. Две вершины $i, j \in J_P$ смежны, если параллелоэдры $P(t_i)$ и $P(t_j)$ смежны друг другу по фасете. Для $(n-2)$ -примитивного параллелоэдра P вершины i, j графа G_P смежны, если соответствующие фасеты смежны.

Шесть вершин графа G_P , соответствующих фасетам 6-пояска, порождают цикл C_6 из шести вершин и шести ребер. Пусть $B = \{i, j, k, i^*, j^*, k^*\}$ есть такое упорядоченное множество индексов шести фасет 6-пояска, что соседние индексы соответствуют соседним фасетам 6-пояска. Несоседние вершины B в графе G_P не смежны.

В общем случае граф G_P состоит из множества K несвязных компонент G_k . Пусть J_k есть множество вершин компоненты G_k . Тогда $J_P = \bigcup_{k \in K} J_k$ и $J_k \cap J_l = \emptyset$, если $k \neq l$. Очевидно, что любой пояска B принадлежит только одной компоненте. Поэтому умножение фасетных векторов p_i на некоторое ненулевое число β^k для всех $i \in J_k$ не нарушает каноническую определенность параллелоэдра P .

Пусть $\beta: J_P \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ есть некоторая ненулевая функция, определенная на вершинах графа G_P . Значение β_i этой функции на вершине $i \in J_P$ назовем *весом* вершины i . Пусть $\{\beta^k: k \in K(\beta)\}$ есть множество всех различных весов, т.е. для любого $i \in J_P$ имеем $\beta_i = \beta^k$ для некоторого $k \in K(\beta)$. Поэтому всякая весовая функция β разбивает множество J_P на множество $K(\beta)$ непересекающихся подмножеств $J_k(\beta)$ вершин с одинаковыми весами β^k , т.е.

$$J_P = \bigcup_{k \in K(\beta)} J_k(\beta), \quad J_k(\beta) = \{i \in J_P: \text{вершина } i \text{ имеет вес } \beta_i = \beta^k\}.$$

ЛЕММА 5. Пусть параллелоэдр P определен канонически. Пусть $\beta: J_P \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ есть весовая функция. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) каждое подмножество $J_k(\beta)$ есть объединение множеств вершин связанных компонент графа G_P ;
- 2) для фасетных векторов $p'_i = \beta_i p_i$ параллелоэдр P определен канонически;
- 3) для любых $l, m \in K(\beta)$, где $l \neq m$, и для всех $i \in J_l(\beta)$ и $j \in J_m(\beta)$ справедливы равенства $p_i^T t_j = p_j^T t_i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как, очевидно, всякий пояс B принадлежит только одному множеству $J_l(\beta)$, то канонические равенства для p'_i не нарушатся.

2) $\Rightarrow$ 3). Так как для обоих типов фасетных векторов p_i и $p'_i = \beta_i p_i$ параллелоэдр P канонически определен, то согласно утверждению 4) теоремы 1 для любых $i, j \in J_P$ справедливы равенства $p_i^T t_j = p_j^T t_i$ и $(p'_i)^T t_j = (p'_j)^T t_i$. Для $i \in J_l(\beta)$ и $j \in J_m(\beta)$ второе равенство принимает вид $\beta^l p_i^T t_j = \beta^m p_j^T t_i$. Учитывая первое равенство, имеем $p_i^T t_j (\beta^l - \beta^m) = 0$. Так как $\beta^l \neq \beta^m$, то $p_i^T t_j = p_j^T t_i = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1). Предположим противное, т.е. существует пояс $B = \{i, j, k, i^*, j^*, k^*\}$, не принадлежащий только одному из множеств $J_l(\beta)$, $l \in K(\beta)$. Обозначим через i' любой из индексов i или i^* . Аналогично определены j' и k' . Пусть $i \in J_q(\beta)$. Если $j, j^*, k, k^* \in J_q(\beta)$, то $i^* \notin J_q(\beta)$. Поэтому всегда существует пара вершин, скажем i' и j' , принадлежащая разным множествам, скажем $i' \in J_l(\beta)$ и $j' \in J_m(\beta)$. Тогда k' не принадлежит одному из этих множеств, скажем $k' \notin J_l(\beta)$.

С точностью до знаков справедливо равенство $t_i + t_j + t_k = 0$. Поэтому $p_i^T t_i + p_i^T t_j + p_i^T t_k = 0$. Так как $j, k \notin J_l(\beta)$, то согласно предположению 3) имеем $p_i^T t_j = p_i^T t_k = 0$. Эти равенства влекут $p_i^T t_i = 0$, т.е. основной вектор t_i лежит в гиперплоскости, параллельной фасете F_i , что невозможно. Это противоречие доказывает импликацию 3) $\Rightarrow$ 1).

Пусть P определен канонически. Напомним, что $e^T p_i = \sigma_i w_i$. Поэтому каждая вершина i графа G_P получает вес w_i . Пусть $B = \{i, j, k, i^*, j^*, k^*\}$, и пусть $i, j \in J_P^+(e)$. Тогда из определения множества 6-пояска B вытекает, что $i^*, j^* \in J_P^-(e)$, $k, k^* \in J_P^0(e)$ и $p_i + p_k = p_j$. Умножая это равенство на e и учитывая, что $e^T p_k = 0$, получаем $e^T p_i = e^T p_j$. Отсюда вытекает, что $w_{i^*} = w_i = w_j = w_{j^*}$. Обозначим это общее значение через $w(B)$. Так как $p_{i^*} = -p_i$, получаем

$$\sigma_i w_i = e^T p_i = \sigma_i w(B), \quad i \in B,$$

т.е. вершины 6-пояска получают одинаковый вес. Заметим, что вершинам $k, k^* \in J_P^0(e) \cap B$, для которых $w_k = w_{k^*} = 0$, мы приписываем тот же вес $w(B)$.

Если $B \subseteq J_P^0(e)$, то $e^T p_i = 0$ для всех $i \in B$ и $w(B) = 0$. Этот факт вынуждает рассмотреть подграф G_P^e в графе G_P , получаемый удалением ребер (ij) таких, что $i, j \in J_P^0(e)$.

ЛЕММА 6. *Для вершин связной компоненты графа G_P^e веса w_i одинаковы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любые две вершины i и j связной компоненты графа G_P^e соединены цепью ребер таких, что концевые вершины каждого из них принадлежат одному 6-пояску B , не лежащему в множестве $J_P^0(e)$, и имеют одинаковые ненулевые веса. Поэтому веса вершин i и j тоже одинаковы.

Заметим, что для графа G_P лемма 6 может быть неверна, так как в принципе разные компоненты графа G_P^e с разными значениями весов могут быть объединены в одну компоненту графа G_P 6-пояском $B \subseteq J_P^0(e)$.

Итак, вектор e определяет на вершинах графа G_P ненулевую весовую функцию $w = w_P(e)$. Эта весовая функция определяет разбиение множества вершин J_P на подмножества $J_k(w)$, где $k \in K(w)$. При этом $e^T p_i = \sigma_i w^k$ для $i \in J_k(w)$.

Обозначим через $G_P(e)$ граф G_P^e , в котором восстановлены ребра (ij) с $i, j \in J_P^0$ такие, что весовая функция $w_P(e)$ принимает одинаковое значение на вершинах i и j . Напомним, что согласно лемме 6 и определению графа $G_P(e)$ все вершины его связной компоненты получают одинаковые веса.

ЛЕММА 7. *Пусть $w = w_P(e)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $G_P(e) = G_P$;
- 2) для векторов $p'_i = p_i/w^k$, где $i \in J_k(w)$ и $k \in K(w)$, параллелоэдр P определен канонически.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Если $G_P(e) = G_P$, то согласно леммам 6 и 5 каждое множество $J_k(w)$ есть объединение множеств вершин связных компонент графа G_P . Очевидно, что $1/w$ есть тоже ненулевая весовая функция. Поэтому эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) леммы 5 для $\beta = 1/w$ дает искомую эквивалентность.

Если $G_P(e) \neq G_P$, то существует пара вершин i и j , получивших разные веса $w^k \neq w^l$ и принадлежащих одному пояску B . В этом случае фасетные векторы p_i/w не обеспечивают каноническую определенность P .

Если $G_P(e) = G_P$ и $|K| > 1$, то ниже будет показано, что в этом случае P есть прямая сумма параллелоэдров $P_k \in \mathcal{P}(e)$ для $k \in K$. Поэтому сначала изучим такие суммы.

§ 7. Прямая сумма параллелоэдров

Сумму параллелоэдра с отрезком можно рассматривать как сумму Минковского двух параллелоэдров, которая есть параллелоэдр. Рассмотрим еще один случай суммы параллелоэдров, заведомо являющейся параллелоэдром.

Рассмотрим два параллелоэдра P_1 и P_2 размерности n_1 и n_2 соответственно. Пусть пространства X^1 и X^2 , натянутые на P_1 и P_2 , пересекаются только

в одной точке 0, являющейся центром обоих параллелоэдров. Обозначим через $P_1 \dot{+} P_2$ прямую сумму Минковского такой пары P_1 и P_2 . Иногда $P_1 \dot{+} P_2$ называют произведением многогранников P_1 и P_2 . Если G_1 есть k_1 -грань P_1 и G_2 есть k_2 -грань P_2 , то $G_1 \dot{+} G_2$ есть $(k_1 + k_2)$ -грань $P_1 \dot{+} P_2$. В частности, каждая фасета $P_1 \dot{+} P_2$ имеет вид $F_1 \dot{+} P_2$ или $P_1 \dot{+} F_2$, где F_1 и F_2 суть фасеты P_1 и P_2 соответственно. Размерность $P_1 \dot{+} P_2$ равна $n = n_1 + n_2$.

Обозначим через pr_k проекцию на X^k , $k = 1, 2$, вдоль дополнительного подпространства. Легко понять, что $\text{pr}_k(P_1 \dot{+} P_2) = P_k$, $k = 1, 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $P_1 \dot{+} P_2$ есть параллелоэдр;
- 2) P_1 и P_2 суть параллелоэдры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что проекция и сумма центрально симметричных многогранников есть центрально симметричный многогранник. Поэтому выполнение условий Венкова (I) и (II) для $P_1 \dot{+} P_2$ эквивалентно выполнению этих условий для P_1 и P_2 .

Напомним, что условие Венкова (III) утверждает, что всякий параллелоэдр имеет только 6- и 4-пояски. Для любой фасеты F_1 параллелоэдра P_1 и фасеты F_2 параллелоэдра P_2 сумма $F_1 \dot{+} F_2$ есть $(n - 2)$ -грань $P_1 \dot{+} P_2$. Поэтому четыре фасеты $F_1 \dot{+} P_2$, $P_1 \dot{+} F_2$, $-F_1 \dot{+} P_2$ и $P_1 \dot{+} (-F_2)$ образуют 4-поясок многогранника $P_1 \dot{+} P_2$, так как пересечение двух соседних фасет этого множества есть $(n - 2)$ -грань $P_1 \dot{+} P_2$ вида $(\pm F_1) \dot{+} (\pm F_2)$. Таким образом, пояски $P_1 \dot{+} P_2$ бывают трех видов: (а) $F_i \dot{+} P_2$, где $i \in B_1$ и B_1 есть поясок P_1 , (б) $P_1 \dot{+} F_j$, где $j \in B_2$ и B_2 есть поясок P_2 , и (в) 4-поясок описанного выше вида. Отсюда вытекает, что условие Венкова (III) выполняется для $P_1 \dot{+} P_2$ тогда и только тогда, когда оно выполнено для P_1 и P_2 .

Доказательство предложения 2 показывает, что каждый 6-поясок $P_1 \dot{+} P_2$ принадлежит одному слагаемому. Отсюда, в частности, вытекает, что граф $G_{P_1 \dot{+} P_2}$ не связан. Поэтому справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) параллелоэдр $P_1 \dot{+} P_2$ определен канонически;
- 2) параллелоэдры P_1 и P_2 определены канонически.

В частности, из предложения 3 следует, что прямая сумма $(n - 2)$ -примитивных параллелоэдров эквивалентна многограннику Вороного.

Легко видеть, что $J_{P_1 \dot{+} P_2} = J_{P_1} \cup J_{P_2}$ и $J_{P_1} \cap J_{P_2} = \emptyset$.

Свойство 4) теоремы 1 для двоек (ij) имеет следующий важный вид. Если $(ij) \in J_P^2$, то вектор $\frac{1}{2}(t_i + t_j)$ есть центр $(n - 2)$ -границы $F_i \cap F_j$. Поэтому

$$p_i^T \frac{1}{2}(t_i + t_j) = \frac{1}{2} p_i^T t_i \quad \text{и} \quad p_j^T \frac{1}{2}(t_i + t_j) = \frac{1}{2} p_j^T t_j.$$

Отсюда вытекает, что

$$p_i^T t_j = p_j^T t_i = 0 \quad \text{для} \quad (ij) \in J_P^2. \quad (7)$$

Подчеркнем, что эта ортогональность для двоек не зависит от того, задан ли P канонически или нет.

Заметим, что если t_1 и t_2 суть основные векторы P_1 и P_2 соответственно, то $\{t_1, t_2\}$ всегда есть двойка $P_1 \dot{+} P_2$. Если P_1 и P_2 суть многогранники Вороного, то согласно (7) $t_1^T t_2 = 0$. Так как это верно для любых пар основных векторов P_1 и P_2 , то это значит, что пространства X^1 и X^2 ортогональны. Отсюда легко следует, что $P_1 \dot{+} P_2$ есть многогранник Вороного.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть P есть ограниченный параллеледр и J_P есть множество индексов всех его фасетных и основных векторов. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $P = P_1 \dot{+} P_2$;
- 2) $J_P = J_1 \cup J_2$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ и $t_i^T p_j = p_i^T t_j = 0$ для любых $i \in J_1$ и $j \in J_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Положим $J_k = J_{P_k}$, $k = 1, 2$. Тогда $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ и для любых $i \in J_1$ и $j \in J_2$ пара (ij) есть двойка P . Поэтому формула (7) дает равенства в 2).

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть X^1 и X^2 суть подпространства, порожденные t_i для всех $i \in J_1$ и $i \in J_2$ соответственно. Тогда для всех $i \in J_1$ фасетные векторы $p_i \in (X^2)^\perp$. Если $X^1 \cap X^2 \neq \emptyset$, то любое $x \in X^1 \cap X^2$ ортогонально p_i для всех $i \in J_P$. Это значит, что P есть неограниченный цилиндр, что противоречит тому, что P есть ограниченный многогранник. Поэтому $X^1 \cap X^2 = \emptyset$ и система неравенств (1), определяющих P , разбивается на две независимые подсистемы, в которых для $i \in J_k$ вместо p_i нужно взять $\text{pr}_k p_i$, где $k = 1, 2$. Эти системы определяют многогранники P_1 и P_2 .

Рассмотрим фасету F_i параллеледра P для $i \in J_1$. Так как $p_i \in (X^2)^\perp$, то опорная гиперплоскость $p_i^T x = \frac{1}{2} p_i^T t_i$ фасеты F_i содержит сдвиг $\frac{1}{2} t_i + X^2$ всего пространства X^2 . Поэтому $F_i = F_i^1 \dot{+} P_2$, где F_i^1 есть фасета P_1 . Аналогично, для $i \in J_2$ имеем $F_i = F_i^2 \dot{+} P_1$, где F_i^2 есть фасета P_2 . Так как всякий многогранник полностью определен своими фасетами, то $P = P_1 \dot{+} P_2$. Теперь согласно предложению 2 P_1 и P_2 являются параллеледрами.

Используя индукцию по числу слагаемых, можно доказать утверждения, аналогичные предложениям 2 и 4, для прямой суммы произвольного числа слагаемых. Поэтому ниже рассматриваются прямые суммы $\sum_{k \in K} P_k$ для произвольного множества слагаемых K . В этом случае pr_l есть проекция на X^l вдоль $\sum_{k \in K \setminus \{l\}} X^k$.

ЛЕММА 8. Параллеледр $\sum_{k \in K} P_k$ свободен вдоль e тогда и только тогда, когда каждый параллеледр P_k свободен вдоль e для всех $k \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что условие 2) теоремы 2 касается только троек и каждая тройка параллеледра $\sum_{k \in K} P_k$ принадлежит только одному из подпространств X^k . Согласно предложению 4 если p_i есть фасетный вектор P_l , то $p_i \in (\bigcup_{k \in K \setminus \{l\}} X^k)^\perp$. Поэтому $p_i^T \text{pr}_k e = 0$ для всех $k \in K \setminus \{l\}$, и сумма $\sum_{k \in K} P_k$ свободна в направлении e тогда и только тогда, когда P_l свободен вдоль $\text{pr}_l e$, т.е. когда он свободен вдоль e , для каждого $l \in K$.

Очевидно, что если P свободен вдоль e , то он свободен и вдоль λe для любого действительного $\lambda > 0$. Поэтому если каждый P_k свободен вдоль e_k , где $e_k \in X^k$ и $k \in K$, то сумма $\sum_{k \in K} P_k$ свободна вдоль множества векторов вида $\sum_{k \in K} \lambda_k e_k$, где $\lambda_k \geq 0$ и $k \in K$.

Пусть $P_k \in \mathcal{P}(e_k)$ для всех $k \in K$, где $e_k \in X^k$ и $e = \sum_{k \in K} \lambda_k e_k$. Напомним, что для $i \in J_l(w)$ фасетный вектор $p_i \in (\bigcup_{k \in K(w) \setminus \{l\}} X^k)^\perp$, где $w = w_P(e)$. Поэтому для фасетных векторов p_i параллелоэдра P_l имеем $e^T p_i = \lambda_l e_l^T p_i = \lambda_l w^l$, где $w^l = w_{P_l}(e_l)$. Поэтому $P_l \in \mathcal{P}(e)$ для каждого $l \in K$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть P определен канонически и свободен вдоль e . Пусть $w = w_P(e)$ есть весовая функция, определяемая вектором e и определяющая множества $J_k(w)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $J_P = \bigcup_{k \in K(w)} J_k(w)$ и каждое $J_k(w)$ есть объединение множеств вершин связанных компонент графа G_P ;
- 2) для фасетных векторов $p'_i = p_i/w^k$, где $i \in J_k(w)$ и $k \in K(w)$, параллелоэдр P определен канонически;
- 3) $P = \sum_{k \in K(w)} P_k$, где $P_k \in \mathcal{P}(e)$ и сумма прямая;
- 4) $G_P(e) = G_P$;
- 5) $p_i^T t_j = p_j^T t_i = 0$ для любых $i \in J_k(w)$ и $j \in J_l(w)$ и любых $k, l \in K(w)$, где $k \neq l$;
- 6) параллелоэдр $P + S_e(\mu)$ определен канонически при условии, что P задан фасетными векторами p'_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 5) доказана в лемме 5. Эквивалентность 4) $\Leftrightarrow$ 2) доказана в лемме 7. Эквивалентность 3) $\Leftrightarrow$ 5) доказана в предложении 4. Включение $P_k \in \mathcal{P}(e)$ следует из определения множества $J_k(w)$.

Докажем эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 6). Фасетные векторы p_{ij} , принадлежащие новым тройкам $\{(ij), i, j\}$, согласно (5) удовлетворяют равенствам $p_{ij} = p'_i + p'_j$, которые согласуются с равенствами $t_{ij} = t_i + t_j = t'_i + t'_j$. Отсюда вытекает импликация 2) $\Rightarrow$ 6). Так как подмножество фасетных векторов $p'_i = p_i/w^k$ для $i \in J_k(w)$ и $k \in K(w)$ параллелоэдра $P + S_e(\mu)$ является множеством фасетных векторов параллелоэдра P , то импликация 6) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

Напомним, что если параллелоэдр P определен канонически, то существует линейное преобразование P в многогранник Вороного. Поэтому из эквивалентности пп. 3) и 6) теоремы 3 вытекает следующий важный результат, сформулированный в аннотации.

ТЕОРЕМА 4. Параллелоэдр $P + S_e$ аффинно эквивалентен многограннику Вороного тогда и только тогда, когда P есть прямая сумма параллелоэдров класса $\mathcal{P}(e)$.

Теорема 3 влечет следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Если параллелоэдр P определен канонически, свободен вдоль e и не разложим в прямую сумму, то $P \in \mathcal{P}(e)$, т.е. $e^T p_i = \sigma_i w_P(e)$ для всех $i \in J_P$.

Если P есть контрпример к этой гипотезе, то параллелоэдр $P + S_e(\mu)$ есть контрпример к гипотезе Вороного.

§ 8. Растяжение и сжатие пространства

Мы видели, что если сумма отрезка и многогранника Вороного есть параллелеоэдр, то он не всегда есть многогранник Вороного. Прибавление отрезка к параллелеоэдру P аналогично растяжению P вдоль этого отрезка, но не совпадает с ним. Аналогичным свойством обладают сжатие и растяжения многогранника Вороного вдоль некоторой прямой. Но, как мы увидим ниже, прибавление отрезка, сопровождаемое затем некоторым сжатием, переводит многогранник Вороного в некоторый другой многогранник Вороного.

В этом параграфе описываются свойства отображения $A(\gamma)$, которое является сжатием или растяжением, проекцией или отражением в зависимости от значения γ .

Пусть e есть единичный вектор и H есть гиперплоскость, ортогональная e . Тогда любой вектор x представим в виде $x = x_H + (e^T x)e$, где x_H есть проекция вектора x вдоль e на гиперплоскость H . Рассмотрим преобразование пространства $x \rightarrow A(\gamma)x$, где $A(\gamma) = I + \gamma ee^T$ и I есть единичная матрица. Имеем

$$A(\gamma)x = (I + \gamma ee^T)x = x_H + (1 + \gamma)(e^T x)e.$$

Из этого представления легко вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть e есть единичный вектор и H есть гиперплоскость, ортогональная e . Отображение $A(\gamma) = I + \gamma ee^T$ обладает следующими свойствами:

- $A(\gamma)A(\gamma') = A(\gamma')A(\gamma) = A(\gamma + \gamma' + \gamma\gamma')$, и если $\gamma \neq -1$, то $(A(\gamma))^{-1} = A(-\gamma/(1 + \gamma))$;
- если $\gamma > 0$, то $A(\gamma)$ есть $(1 + \gamma)$ -кратное растяжение вдоль e ;
- если $\gamma = 0$, то $A(0) = I$ есть тождественное отображение;
- если $-1 < \gamma < 0$, то $A(\gamma)$ есть $(1 + \gamma)$ -кратное сжатие вдоль e ;
- если $\gamma = -1$, то $A(-1)$ есть проекция на H вдоль e ;
- если $-2 < \gamma < -1$, то $A(\gamma) = A(|\gamma| - 2)A(-2)$ есть отражение $A(-2)$ в гиперплоскости H , умноженное на $(|\gamma| - 1)$ -кратное сжатие вдоль e ;
- если $\gamma = -2$, то $A(-2) = (A(-2))^{-1}$ есть отражение в гиперплоскости H ;
- если $\gamma < -2$, то $A(\gamma) = A(|\gamma| - 2)A(-2)$ есть отражение в гиперплоскости H , умноженное на $(|\gamma| - 1)$ -кратное растяжение вдоль e .

Пусть основные векторы t_i многогранника Вороного P порождают решетку L . Согласно лемме 1 основные и фасетные векторы параллелеоэдра $A(\gamma)P$ суть

$$t'_i = A(\gamma)t_i = t_i + \gamma(e^T t_i)e \quad \text{и} \quad p'_i = A^{-1}(\gamma)t_i = t_i - \frac{\gamma}{1 + \gamma}(e^T t_i)e. \quad (8)$$

Параллелеоэдр $A(\gamma)P$ тривиально эквивалентен P , но он не эквивалентен многограннику Вороного решетки $A(\gamma)L$. Ниже будет показано, что если $e^T t_i = \sigma_i w$, где $\sigma_i \in \{0, \pm 1\}$ и w не зависит от $i \in J_P$, то сумма P и отрезка $S_e(\mu)$ длины $\mu = \gamma(2 + \gamma)w$ вдоль e эквивалентна многограннику Вороного решетки $A(\gamma)L$.

§ 9. Эквивалентность суммы $P + S_e(\mu)$ многограннику Вороного

В этом параграфе явно описывается преобразование, переводящее $P + S_e(\mu)$ в многогранник Вороного, если P есть прямая сумма многогранников класса $\mathcal{P}(e)$.

Пусть $P = \sum_{k \in K} P_k$, где все $P_k \in \mathcal{P}(e)$ суть многогранники Вороного. Тогда $p_i = t_i$ для всех $i \in J_P$. Пусть множество компонент $K = K(w)$ определено весовой функцией $w = w_P(e)$. Пусть X^k есть пространство, натянутое на P_k , а I^k есть единичная матрица в пространстве X^k , и пусть $W = \sum_{k \in K} w^k I^k$ и $\Gamma = \sum_{k \in K} \gamma^k I^k$, где $\gamma^k = -1 \pm \sqrt{w^k/(w^k + \mu)}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если параллелоэдр $P + S_e(\mu)$ определен канонически, то линейным преобразованием $x \rightarrow W^{-1/2}(I + \Gamma ee^T)x$ он переводится в многогранник Вороного.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $p_i = t_i$ для всех i . Согласно п. 2) теоремы 3 и формулам (6) справедливы равенства

$$\begin{aligned} p'_i &= \frac{t_i}{w_i}, & t'_i &= t_i + \mu e \frac{e^T t_i}{w_i} = (w_i + \mu ee^T) p'_i, \\ t_{ij} &= t'_i + t'_j = t_i + t_j = w_i p'_i + w_j p'_j, & p_{ij} &= p'_i + p'_j. \end{aligned}$$

Так как $e^T p_{ij} = 0$, то $(W + \mu ee^T) p_{ij} = W p_{ij} = W(p'_i + p'_j) = w_i p'_i + w_j p'_j = t_{ij}$. Поэтому для любой пары соответствующих основного t' и фасетного p' векторов параллелоэдра $P + S_e(\mu)$ справедливо равенство $t' = (W + \mu ee^T) p'$. В частности, $t'_i = (W + \mu ee^T) p'_i = D^{-1} p'_i$, где D есть матрица из п. 3) теоремы 1. Легко находим, что $D = W^{-1}(I - \Theta ee^T)$, где Θ есть диагональная матрица $\sum_{k \in K} (\mu/(w^k + \mu)) I^k$. Нетрудно показать, что $D = A^T A$, где $A^T = A = W^{-1/2}(I + \Gamma ee^T)$, а диагональная матрица Γ находится из уравнения $(\Gamma + I)^2 = I - \Theta$. Поэтому

$$\Gamma = -I \pm (I - \Theta)^{1/2} = \sum_{k \in K} \gamma^k I^k, \quad \text{где} \quad \gamma^k = -1 \pm \sqrt{\frac{w^k}{w^k + \mu}}.$$

Согласно теореме 1 получаем утверждение теоремы 5.

Отметим, что сумма $P + S_e(\mu)$ уже не является прямой суммой параллелоэдров. Но все изменения для слагаемых P_k многогранника Вороного P происходят независимо. Поэтому рассмотрим одну компоненту более подробно. В этом случае $W = wI$, $\Theta = (\mu/(w + \mu))I$ и $\Gamma = \gamma I$, где $\gamma = -1 \pm \sqrt{w/(w + \mu)}$. Поэтому

$$p' = Dt' = w^{-1} \left(I - \frac{\mu}{w + \mu} ee^T \right) t.$$

Так как фасетные векторы определены с точностью до множителя, то в качестве p' удобно рассматривать вектор

$$wp' = \left(I - \frac{\mu}{w + \mu} ee^T \right) t.$$

Преобразование $x \rightarrow W^{-1/2}(I + \Gamma ee^T)x$ принимает вид $x \rightarrow (I + \gamma ee^T)x = A(\gamma)x$, а теорема 5 принимает следующую форму.

ТЕОРЕМА 6. Пусть многогранник Вороного $P \in \mathcal{P}(e)$ и не разложим в прямую сумму. Тогда параллелеодр $P + S_e(\mu)$ линейным преобразованием

$$x \rightarrow A(\gamma^1)x,$$

где $\gamma^1 = -1 \pm \sqrt{w/(w + \mu)}$, переводится в многогранник Вороного. Отображение $A(-1 + \sqrt{w/(w + \mu)})$ есть $\sqrt{w/(w + \mu)}$ -кратное сжатие вдоль e . Отображение со знаком минус перед корнем в γ^1 есть сжатие $A(-1 + \sqrt{w/(w + \mu)})$, помноженное на отражение в гиперплоскости, ортогональной e .

Последнее утверждение теоремы следует из предложения 5 для γ такого, что $-2 < \gamma < -1$.

Напомним, что в настоящей работе многогранником Вороного называется параллелеодр, заданный неравенствами (1), где $p_i = t_i$ для всех $i \in I_P$. Пусть многогранник Вороного $P \in \mathcal{P}(e)$. Тогда согласно теореме 6 многогранник $P_e(\mu) = A(\gamma^1)(P + S_e(\mu))$, где $\gamma^1 = -1 + \sqrt{w/(w + \mu)}$, есть многогранник Вороного. Проверим это явно. Пусть L есть решетка многогранника Вороного P , порожденная основными векторами t_i , $i \in J_P$. Согласно (6) основные и фасетные векторы параллелеоэдра $P + S_e(\mu)$ суть векторы

$$t'_i = \left(t_i + \frac{\mu}{w}(e^T t_i)e \right) = A\left(\frac{\mu}{w}\right)t_i \quad \text{и} \quad p'_i = t_i.$$

Тогда векторы

$$t_i(\gamma^1) = A(\gamma^1)A\left(\frac{\mu}{w}\right)t_i \quad \text{и} \quad p_i(\gamma^1) = (A(\gamma^1))^{-1}t_i$$

являются основными и фасетными векторами параллелеоэдра $P_e(\mu)$. Имеем

$$t_i(\gamma^1) = A(\gamma^1)A\left(\frac{\mu}{w}\right)t_i = A(\gamma)t_i, \quad p_i(\gamma^1) = (A(\gamma^1))^{-1}t_i = A(\gamma')t_i,$$

где согласно первому пункту предложения 5

$$\gamma = \gamma^1 + \frac{\mu}{w} + \gamma^1 \frac{\mu}{w} = \sqrt{\frac{w + \mu}{w}} - 1 \quad \text{и} \quad \gamma' = -\frac{\gamma^1}{1 + \gamma^1} = \sqrt{\frac{w + \mu}{w}} - 1,$$

т.е.

$$\gamma = \gamma' = \sqrt{\frac{w + \mu}{w}} - 1 > 0 \quad \text{и} \quad t_i(\gamma^1) = p_i(\gamma^1).$$

Мы имеем следующую ситуацию. Пусть L есть решетка многогранника Вороного P . Прибавление к P отрезка $S_e(\mu)$ дает параллелеодр $P + S_e(\mu)$, который порождает решетку $L'_e(\mu)$ с основными векторами $t'_i = A(\mu/w)t_i$ и $t'_{ij} = A(\mu/w)(t_i + t_j) = t'_i + t'_j$. Таким образом, решетка $L'_e(\mu)$ есть растяжение решетки L преобразованием $A(\mu/w)$. Но $P + S_e(\mu)$ не является многогранником Вороного решетки $L'_e(\mu)$. Только дополнительное сжатие пространства преобразованием $A(\gamma^1)$ превращает параллелеодр $P + S_e(\mu)$ в многогранник Вороного $A(\gamma^1)(P + S_e(\mu)) = P_e(\mu)$, а решетку $L'_e(\mu)$ – в решетку $L_e(\mu) = A(\gamma^1)L'_e(\mu) = A(\gamma^1)A(\mu/w)L = A(\gamma)L$.

Многогранник Вороного $P_e(\mu)$ получен из многогранника Вороного P сначала прибавлением отрезка $S_e(\mu)$, а затем сжатием $A(\gamma^1)$, где $\gamma^1 = \sqrt{w/(w + \mu)} - 1 < 0$. Но так как $A(\gamma^1)$ есть сжатие в $\gamma^1 + 1$ раз вдоль e , то

$$P_e(\mu) = A(\gamma^1)P + A(\gamma^1)S_e(\mu) = A(\gamma^1)P + S_e((1 + \gamma^1)\mu).$$

Поэтому многогранник Вороного $P_e(\mu)$ может быть получен сначала сжатием $A(\gamma^1)$ многогранника Вороного P и его решетки L , а затем прибавлением сжатого отрезка $S_e((1 + \gamma^1)\mu)$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, нетрудно проверить справедливость последнего утверждения. Заметим, что хотя решетка $L_e(\mu)$ получена линейным растяжением $A(\gamma)$ решетки L , многогранник Вороного $P_e(\mu)$ решетки $L_e(\mu)$ не может быть получен линейным преобразованием из многогранника Вороного P .

Список литературы

- [1] О. К. Zhitomirskii, “Verschärfung eines Satzes von Voronoi”, *Журн. ЛМО*, **2** (1929), 131–151.
- [2] G. F. Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques – Deuxième mémoire”, *J. Reine Angew. Math.*, **134** (1908), 198–287; **136** (1909), 67–178.
- [3] Б. А. Венков, “Об одном классе эвклидовых многогранников”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, **9:2** (1954), 11–31.
- [4] Б. А. Венков, “О проектировании параллелездров”, *Матем. сб.*, **49(91):2** (1959), 207–224.
- [5] L. Michel, S. S. Ryshkov, M. Senechal, “An extension of Voronoi’s theorem on primitive parallelotopes”, *European J. Combin.*, **16:1** (1995), 59–63.
- [6] M. Deza, V. Grishukhin, “Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi’s conjecture”, *European J. Combin.*, **25:4** (2004), 517–533.
- [7] Е. А. Большакова, “DV-разбиение и L-разбиение по Г. Ф. Вороному, Б. Н. Делоне и Б. А. Венкову”, *Чебышевск. сб.*, **5:2(10)** (2004), 30–41.
- [8] С. С. Рышков, Е. П. Барановский, *C-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелеэдры (с приложением к теории покрытий)*, Тр. МИАН, **137**, Наука, М., 1976.
- [9] С. С. Рышков, Е. А. Большакова, “К теории коренных параллелездров”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:6** (2005), 187–210.
- [10] В. П. Гришухин, “Параллелеэдры ненулевой толщины”, *Матем. сб.*, **195:5** (2004), 59–78.

В. П. Гришухин (V. P. Grishukhin)
 Центральный экономико-математический
 институт РАН, г. Москва
E-mail: grishuhn@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
 19.05.2005 и 23.03.2006