Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Жуковский, Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 33–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:47:04

УДК 517.988.6

Е. С. Жуковский

Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра

Сформулировано определение вольтерровости на системе отношений эквивалентности. При соответствующем выборе системы отношений из этого определения могут быть получены известные определения, трактующие свойство эволюции, причинности операторов, в том числе классическое определение А. Н. Тихонова. Рассмотрены утверждения о существовании, единственности, продолжаемости локальных решений нелинейных уравнений с вольтерровыми операторами, даны оценки области определения решений, доказаны теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров. Полученные результаты применены к исследованию корректности и приближенному нахождению решения задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения.

Библиография: 21 название.

Введение

Операторы Вольтерра возникают при описании динамики явлений, процессов, поскольку они отражают зависимость настоящего состояния объекта от его развития, его “прошлого” и независимость от “будущего”. Приведем наиболее известную формулировку этого свойства, данную А. Н. Тихоновым [1]: “Функциональный оператор $V(t, \varphi)$ мы будем называть функциональным оператором типа Volterra, если его величина определена значениями функции $\varphi(\tau)$ в промежутке $0 \leq \tau < t$.” Операторы, удовлетворяющие приведенному определению, многие авторы называют вольтерровыми по А. Н. Тихонову. Среди операторов, обладающих таким свойством, назовем, прежде всего, интегральный оператор Вольтерра

$$(K\varphi)(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t, s)\varphi(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

являющийся родоначальником класса вольтерровых операторов. По-видимому, впервые свойство вольтерровости было отделено от интегрального оператора (1) в тридцатых годах прошлого века в работах L. Tonelli [2], D. Graffi [3] и S. Cinquini [4]. Большое влияние на развитие представлений о вольтерровых операторах оказала цитированная выше статья А. Н. Тихонова [1], вышедшая в 1938 г. Современные абстрактные трактовки свойства вольтерровости операторов предложены в работах М. С. Бродского, А. Л. Бухгейма, И. Ц. Гохберга, С. А. Гусаренко, Ю. А. Дядченко, П. П. Забрейко, Г. Э. Киселевского, М. С. Крейна, В. Г. Курбатова, М. С. Лившица, В. И. Сумина, С. Corduneanu,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00324) и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования – NUFU (проект № PRO06/2002).

© Е. С. Жуковский, 2006

А. Feintuch, R. Saeks. Большинство рассматриваемых определений относятся к линейным операторам и означают, что вольтерров оператор обладает цепочкой инвариантных подпространств. Для линейных вольтерровых по А. Н. Тихонову операторов такие цепочки образуют подпространства функций, равных нулю на $[0, t]$, $t \geq 0$. Литература, посвященная обобщению свойства вольтерровости для нелинейных операторов, немногочисленна. Как правило, рассматриваются отображения, получаемые композицией линейных абстрактных вольтерровых операторов и оператора Немыцкого [5].

§ 1. Обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов (столбцов), имеющих n вещественных компонент, с нормой $|x|$; $L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство суммируемых в p -й степени, $1 \leq p < \infty$, вектор-функций $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|y\|_{L_p} = \left(\int_a^b |y(s)|^p ds \right)^{1/p};$$

$L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство измеримых ограниченных в существенном вектор-функций $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|y\|_{L_\infty} = \text{vraisup}_{s \in [a, b]} |y(s)|;$$

$AC_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство таких абсолютно непрерывных вектор-функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $x' \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой

$$\|x\|_{AC_p} = \|x'\|_{L_p} + |x(c)|, \quad c \in [a, b];$$

$C([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных вектор-функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_C = \max_{s \in [a, b]} |x(s)|.$$

В обозначениях пространств будем опускать индексы $n = 1$, $p = 1$; в обозначениях функциональных пространств не будем писать, где определены и в каких множествах имеют значения функции – элементы пространств, если это не вызовет недоразумений.

§ 2. Основные понятия

Предлагается следующее определение вольтеррова оператора. Пусть каждому $\gamma \in [0, 1]$ поставлено в соответствие отношение эквивалентности $v(\gamma)$ на множестве B . Назовем элементы $x, y \in B$, удовлетворяющие этому бинарному отношению, $v(\gamma)$ -эквивалентными. Предположим, что совокупность $v = \{v(\gamma) \mid \gamma \in [0, 1]\}$ рассматриваемых отношений удовлетворяет трем условиям:

- V_0 $\gamma = 0$ соответствует отношению $v(0) = B^2$ (т.е. любые два элемента являются $v(0)$ -эквивалентными);
- V_1 $\gamma = 1$ соответствует отношению равенства (т.е. никакие два разных элемента не вступают в отношение $v(1)$);

V_2) если $\gamma > \eta$, то $v(\gamma) \subset v(\eta)$ (другими словами, любые два $v(\gamma)$ -эквивалентных элемента $x, y \in B$ будут $v(\eta)$ -эквивалентными, если $\gamma > \eta$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $F: B \rightarrow B$ будем называть *вольтерровым на системе v* , если для каждого $\gamma \in (0, 1)$ и любых $x, y \in B$ из $(x, y) \in v(\gamma)$ следует $(Fx, Fy) \in v(\gamma)$. Таким образом, вольтерров оператор сохраняет отношение эквивалентности $v(\gamma) \forall \gamma \in (0, 1)$, отображая эквивалентные элементы пространства B в эквивалентные.

Отметим общность приведенного определения. Ему, например, удовлетворяет линейный оператор F , действующий в векторном пространстве B , обладающий упорядоченной по вложению системой инвариантных подпространств B_γ , $\gamma \in (0, 1)$. Для такого оператора следует определить отношение эквивалентности $v(\gamma)$ следующим образом: $(x, y) \in v(\gamma) \Leftrightarrow x - y \in B_\gamma$. Вольтерровость по А. Н. Тихонову оператора F , действующего в множестве B функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, равносильна вольтерровости на системе отношений

$$(x, y) \in v(\gamma) \Leftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \in [a, a + \gamma(b - a)]. \quad (2)$$

При соответствующем выборе системы отношений эквивалентности из приведенного определения могут быть получены и другие известные определения вольтерровости. Более того, ему удовлетворяет любой оператор, если взять систему v , состоящую лишь из двух тривиальных отношений эквивалентности $v(\gamma) = B^2$, $\gamma \in [0, 0.5]$, и $v(\gamma) = \{(x, x) \in B^2\}$, $\gamma \in (0.5, 1]$. Но, конечно же, такая вольтерровость совершенно бесполезна при изучении операторов. Очевидно, что чем “шире” система отношений, тем большей информацией о вольтерровом операторе мы располагаем.

Непосредственно из определения получаем следующие утверждения.

- 1) Пусть на множестве B задана система v отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям V_0 – V_2). Выберем любое подмножество $\Gamma \subset [0, 1]$ такое, что $\{0, 1\} \subset \Gamma$, и для каждой убывающей последовательности (или для всякой возрастающей последовательности) $\{\gamma_i\} \subset \Gamma$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i \in \Gamma$. Пусть $\omega = \{v(\gamma) \in v \mid \gamma \in \Gamma\}$. Определим функцию $\eta: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ равенством $\eta(\gamma) = \inf\{\xi \in \Gamma \mid \xi \geq \gamma\}$ (соответственно $\eta(\gamma) = \sup\{\xi \in \Gamma \mid \xi \leq \gamma\}$) и построим отображение $[0, 1] \rightarrow \omega$, поставив в соответствие каждому числу γ отношение эквивалентности $v(\eta(\gamma))$. Если оператор $F: B \rightarrow B$ является вольтерровым на системе v , то он будет вольтерровым и на ее подсистеме ω .
- 2) Композиция вольтерровых на фиксированной совокупности v операторов также обладает таким свойством.
- 3) Тождественный оператор вольтерров на любой совокупности отношений эквивалентности.

Пусть на множестве B задана система v отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям V_0 – V_2). При каждом фиксированном $\gamma \in (0, 1)$ обозначим через $B/v(\gamma)$ фактормножество, а через $\bar{x}_\gamma$ – класс элементов, $v(\gamma)$ -эквивалентных элементу $x \in B$, т.е. $\bar{x}_\gamma \in B/v(\gamma)$. Оператор $F: B \rightarrow B$ является *вольтерровым на системе v* , если для каждого $\gamma \in (0, 1)$ и любых $x, y \in B$ из $y \in \bar{x}_\gamma$ следует $Fy \in \overline{Fx}_\gamma$. Здесь $\overline{Fx}_\gamma$ – класс $v(\gamma)$ -эквивалентности элемента Fx . Если для некоторых $\gamma_0 \in (0, 1)$, $u \in B$ окажется выполненным

включение $Fu \in \bar{u}_{\gamma_0}$, то множество $\bar{u}_{\gamma_0}$ будет инвариантным для вольтеррова оператора F . Отношение $v(\gamma)$ можно рассматривать не на всех элементах B , а лишь на элементах подмножества $\bar{u}_{\gamma_0}$. Таким образом, на $\bar{u}_{\gamma_0}$ оказывается заданной система отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям V_0 – V_2). Из вольтерровости оператора $F: B \rightarrow B$ на совокупности v следует вольтерровость его сужения $F^{\gamma_0}: \bar{u}_{\gamma_0} \rightarrow \bar{u}_{\gamma_0}$ на (сужении) v .

Определим при любом $\gamma \in (0, 1)$ каноническую проекцию $\Pi_\gamma: B \rightarrow B/v(\gamma)$ равенством $\Pi_\gamma x = \bar{x}_\gamma$. Для вольтеррова на системе v оператора $F: B \rightarrow B$ обозначим $F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$, $F_\gamma \bar{x}_\gamma = \Pi_\gamma Fx$, где x – любой элемент класса $\bar{x}_\gamma$. Это определение корректно, поскольку вследствие вольтерровости оператора F образы любых двух $v(\gamma)$ -эквивалентных элементов $x, y \in B$ принадлежат одному классу $v(\gamma)$ -эквивалентности, т.е. $\Pi_\gamma Fx = \Pi_\gamma Fy$. Отметим, что натуральную степень $(F_\gamma)^i: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$ оператора F_γ можно находить с помощью равенства $(F_\gamma)^i \bar{x}_\gamma = \Pi_\gamma F^i x$, $x \in \bar{x}_\gamma$, т.е. $(F_\gamma)^i = (F^i)_\gamma$.

Зафиксируем $\gamma \in (0, 1)$. Система отношений v множества B порождает отношения эквивалентности в фактормножестве $B/v(\gamma)$. Пусть $\xi \in (0, \gamma)$, и пусть элементы $x, y \in B$ $v(\xi)$ -эквивалентны. Тогда любые элементы $z \in \Pi_\gamma x = \bar{x}_\gamma$, $w \in \Pi_\gamma y = \bar{y}_\gamma$ будут также $v(\xi)$ -эквивалентными. Действительно, $(x, z) \in v(\gamma) \subset v(\xi)$, $(y, w) \in v(\gamma) \subset v(\xi)$ и поэтому $(z, w) \in v(\xi)$. Это позволяет говорить об эквивалентности классов $\bar{x}_\gamma, \bar{y}_\gamma$. Итак, $\bar{x}_\gamma, \bar{y}_\gamma \in B/v(\gamma)$ назовем $\bar{v}^\gamma(\xi)$ -эквивалентными, $\xi \in (0, 1)$, если существуют элементы $x \in \bar{x}_\gamma$, $y \in \bar{y}_\gamma$, удовлетворяющие отношению $v(\xi)$, $\xi = \gamma\zeta$ (значит, этому отношению удовлетворяют все элементы классов $\bar{x}_\gamma$ и $\bar{y}_\gamma$). Таким образом, на $B/v(\gamma)$ задана система $\bar{v}^\gamma = \{\bar{v}^\gamma(\zeta)\}$ отношений эквивалентности. Если оператор $F: B \rightarrow B$ вольтерров на системе v , то оператор $F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$ будет вольтерровым на системе $\bar{v}^\gamma$.

§ 3. Вольтерровость обратного оператора

Как известно [6], [7], оператор, обратный к вольтеррову по А. Н. Тихонову оператору, может и не обладать таким свойством.¹ Приведем критерий вольтерровости на системе v обратного оператора, являющийся аналогом известного утверждения о вольтерровых по А. Н. Тихонову операторах, предложенного А. И. Булгаковым (в дискуссии на Пермском семинаре в 1978 г.). По-прежнему, предполагаем, что на множестве B задана система v отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям V_0 – V_2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть вольтерров на системе v оператор $F: B \rightarrow B$ обратим. Для того чтобы обратный оператор F^{-1} был вольтерровым на v , необходимо и достаточно обратимости операторов $F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$ для каждого $\gamma \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть оператор $F^{-1}: B \rightarrow B$ вольтерров на системе v . Тогда можем определить оператор $(F^{-1})_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$,

¹В связи с этим для линейного оператора F , действующего в векторном пространстве, используется понятие вольтеррова спектра [7] – множества, состоящего из точек “традиционного спектра” и значений параметра λ , при которых существует, но не является вольтерровым оператор $(\lambda I - F)^{-1}$.

$(F^{-1})_\gamma \bar{y}_\gamma = \Pi_\gamma F^{-1} y$. Покажем, что этот оператор является обратным к оператору $F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$. Найдем композицию $(F^{-1})_\gamma F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$. Имеем $(F^{-1})_\gamma F_\gamma \bar{x}_\gamma = (F^{-1})_\gamma \Pi_\gamma Fx = \Pi_\gamma F^{-1} Fx = \Pi_\gamma x = \bar{x}_\gamma$. Аналогично доказывается, что композиция $F_\gamma (F^{-1})_\gamma$ также является тождественным оператором.

Достаточность. Выберем произвольно $g \in B$, $f \in \bar{g}_\gamma \subset B$. Определим элементы $x = F^{-1}f$, $y = F^{-1}g$, которые являются единственными решениями уравнений $Fx = f$, $Fy = g$ соответственно. Тогда классы $\bar{x}_\gamma$, $\bar{y}_\gamma$ эквивалентности этих элементов удовлетворяют уравнениям $F_\gamma \bar{x}_\gamma = \Pi_\gamma f$, $F_\gamma \bar{y}_\gamma = \Pi_\gamma g$. Так как $\Pi_\gamma f = \Pi_\gamma g = \bar{g}_\gamma$, то вследствие обратимости оператора F_γ получаем $\bar{x}_\gamma = \bar{y}_\gamma$, т.е. $x \in \bar{y}_\gamma$. Итак, оператор F^{-1} является вольтерровым.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве теоремы установлено, что если оператор F^{-1} вольтерров, то $(F^{-1})_\gamma = (F_\gamma)^{-1}$. Это позволяет обозначать

$$F_\gamma^{-1} = (F^{-1})_\gamma = (F_\gamma)^{-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть существует такое множество $\Gamma \subset [0, 1]$, что при каждом $\gamma \in \Gamma$ оператор $F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$ обратим. Пусть, далее, $\{0, 1\} \subset \Gamma$ и для каждой убывающей последовательности (или для всякой возрастающей последовательности) $\{\gamma_i\} \subset \Gamma$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i \in \Gamma$. Тогда обратный оператор F^{-1} будет вольтерровым на системе

$$\omega = \{v(\gamma) \in v \mid \gamma \in \Gamma\} = \{v(\eta(\gamma)) \in v \mid \gamma \in [0, 1]\},$$

где $\eta(\gamma) = \inf\{\xi \in \Gamma \mid \xi \geq \gamma\}$ (во втором случае $\eta(\gamma) = \sup\{\xi \in \Gamma \mid \xi \leq \gamma\}$).

§ 4. τ -вольтерровы операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\tau > 0$. Оператор $T: B \rightarrow B$ будем называть τ -вольтерровым на системе v , если для любых $x, y \in B$ выполнено $Ty \in \Pi_\tau Tx$ и для каждого $\gamma \in (\tau, 1]$ из $y \in \Pi_{\gamma-\tau} x$ следует $Ty \in \Pi_\gamma Tx$.

Отметим некоторые свойства τ -вольтерровых операторов.

- 1) Композиция (в любом порядке) вольтеррова и τ -вольтеррова на системе v операторов является τ -вольтерровым на v оператором.
- 2) Для любого τ -вольтеррова на системе v оператора $T: B \rightarrow B$ существует такое натуральное i , что $T^i(x) = \text{const}$ при всех $x \in B$.
- 3) Если оператор $T: B \rightarrow B$ является τ -вольтерровым на системе v , то уравнение $x = Tx$ однозначно разрешимо.
- 4) Для любого τ -вольтеррова на системе v оператора $T: B \rightarrow B$ оператор $T_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$, $T_\gamma \bar{x}_\gamma = \Pi_\gamma Tx$, при любом $\gamma \in (0, 1)$ является τ_γ -вольтерровым на системе $\bar{v}^\gamma$, где $\tau_\gamma = \tau/\gamma$.
- 5) Если оператор $T: B \rightarrow B$ является τ -вольтерровым на системе v , то при любом $\gamma \in (0, 1)$ уравнение $\bar{x}_\gamma = T_\gamma \bar{x}_\gamma$ однозначно разрешимо.

Сформулируем еще одно свойство, означающее сохранение вольтерровой обратимости операторов при τ -вольтерровых возмущениях. Пусть отображение $Q: B \times B \rightarrow B$ при каждом фиксированном втором аргументе $f \in B$ как оператор первого аргумента $Q(\cdot, f): B \rightarrow B$ является τ -вольтерровым на v . Нас

будет интересовать связь между разрешимостью “исходного” уравнения

$$Fx = f \quad (3)$$

и “возмущенного” уравнения

$$Fy = Q(y, f). \quad (4)$$

Однозначная разрешимость при любом $f \in B$ уравнения (3) означает существование оператора $F^{-1}: B \rightarrow B$. Если уравнение (4) однозначно разрешимо для любого $f \in B$, то обозначим через $F^{Q^{-1}}: B \rightarrow B$ отображение, ставящее в соответствие каждому $f \in B$ решение $y \in B$ уравнения (4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор $F: B \rightarrow B$ вольтерров на системе v , обратим и обратный оператор $F^{-1}: B \rightarrow B$ вольтерров на v ; оператор $Q(\cdot, f): B \rightarrow B$ при каждом фиксированном $f \in B$ является τ -вольтерровым на v . Тогда существует и является вольтерровым на v оператор $F^{Q^{-1}}: B \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим существование вольтеррова на системе v оператора $F^{-1}: B \rightarrow B$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде $y = F^{-1}Q(y, f)$. Композиция $F^{-1}Q(\cdot, f)$ является τ -вольтерровым оператором. Следовательно, при каждом $f \in B$ это уравнение однозначно разрешимо, его решение $y = F^{Q^{-1}}f$. Возьмем произвольно $\gamma \in (0, 1)$, пусть $g \in \bar{f}_\gamma$. Элемент $x = F^{Q^{-1}}g$ является решением уравнения $x = F^{-1}Q(x, g)$. Классы v_γ -эквивалентности элементов y, x удовлетворяют уравнениям $\bar{y}_\gamma = F_\gamma^{-1}Q_\gamma(\bar{y}_\gamma, \bar{f}_\gamma)$, $\bar{x}_\gamma = F_\gamma^{-1}Q_\gamma(\bar{x}_\gamma, \bar{g}_\gamma)$. Композиция $F_\gamma^{-1}Q_\gamma(\cdot, \bar{f}_\gamma)$ является τ_γ -вольтерровым оператором. Следовательно, эти уравнения однозначно разрешимы. А поскольку $\bar{f}_\gamma = \bar{g}_\gamma$, имеем $\bar{y}_\gamma = \bar{x}_\gamma$, т.е. оператор $F^{Q^{-1}}$ является вольтерровым.

В формулировке теоремы 2 существенно требование вольтерровости оператора F^{-1} , о чем свидетельствует следующий

ПРИМЕР. Зададим операторы $F, T, Q(\cdot, f): L([0, 3], \mathbb{R}) \rightarrow L([0, 3], \mathbb{R})$ равенствами

$$(Fx)(t) = \begin{cases} x(0.5t), & \text{если } t \in [0, 1], \\ x(t - 0.5), & \text{если } t \in (1, 2], \\ x(1.5t - 1.5), & \text{если } t \in (2, 3]; \end{cases}$$

$$(Tx)(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1], \\ x(t - 0.5), & \text{если } t \in (1, 3]; \end{cases}$$

$Q(x, f) = f + Tx$. Эти операторы вольтерровы на системе (2) (т.е. вольтерровы по А. Н. Тихонову), операторы $T, Q(\cdot, f)$ обладают свойством τ -вольтерровости, $\tau = 0.5$, оператор F обратим, но обратный оператор

$$(F^{-1}y)(t) = \begin{cases} y(2t), & \text{если } t \in [0, 0.5], \\ y(t + 0.5), & \text{если } t \in (0.5, 1.5], \\ y(\frac{2}{3}t + 1), & \text{если } t \in (1.5, 3], \end{cases}$$

не обладает свойством вольтерровости на системе (2). В то же время, так как при любом $y \in L([0, 3], \mathbb{R})$ на $[1, 2]$ выполнено $(Fy)(t) = (Ty)(t)$, то уравнение $Fx = f + Tx$ разрешимо не при всех $f \in L([0, 3], \mathbb{R})$, а в случае разрешимости имеет бесконечно много решений.

§ 5. Определение решения уравнения Вольтерра в нормированном пространстве

Всюду ниже предполагается, что B является линейным вещественным или комплексным нормированным пространством, на котором задана система v отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям $V_0)–V_2)$. Кроме того, будем считать, что отношения $v(\gamma) \in v$ сохраняются при сложении векторов и умножении их на числа, т.е. при каждом $\gamma \in (0, 1)$ для любых элементов $x, \hat{x}, y, \hat{y} \in B$ и всякого числа λ выполнено

$$(x, \hat{x}) \in v(\gamma), (y, \hat{y}) \in v(\gamma) \Rightarrow (x + y, \hat{x} + \hat{y}) \in v(\gamma), (\lambda x, \lambda \hat{x}) \in v(\gamma). \quad (5)$$

Предположение (5) превращает фактормножество $B/v(\gamma)$ в факторпространство. Нулевой элемент $\bar{0}_\gamma = \{y \in B \mid (y, 0) \in v(\gamma)\}$ этого факторпространства является подпространством пространства B . Зададим в факторпространстве $B/v(\gamma)$ норму [8; гл. IV, § 1, п. 1.8]

$$\|\bar{x}_\gamma\|_{B/v(\gamma)} = \inf_{x \in \bar{x}_\gamma} \|x\|_B.$$

При таком определении каноническая проекция $\Pi_\gamma: B \rightarrow B/v(\gamma)$ – это линейное ограниченное отображение, $\|\Pi_\gamma\| = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если пространство B банахово и для любого $\gamma \in (0, 1)$ всякая сходящаяся последовательность $v(\gamma)$ -эквивалентных элементов имеет пределом также $v(\gamma)$ -эквивалентный элемент, т.е.

$$\left. \begin{array}{l} \forall \{x_i\} \subset B, \forall x \in B \quad \|x_i - x\|_B \rightarrow 0, \\ \forall i \quad (x_i, x_1) \in v(\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow (x, x_1) \in v(\gamma),$$

то будем говорить, что пространство B удовлетворяет V -условию (относительно системы отношений v).

V -условие равносильно тому, что любые две сходящиеся последовательности, соответствующие члены которых $v(\gamma)$ -эквивалентны, сходятся к $v(\gamma)$ -эквивалентным элементам, т.е.

$$\left. \begin{array}{l} \|x_i - x\|_B \rightarrow 0, \\ \|y_i - y\|_B \rightarrow 0, \\ \forall i \quad (x_i, y_i) \in v(\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) \in v(\gamma).$$

Для того чтобы банахово пространство B удовлетворяло V -условию, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\gamma \in (0, 1)$ подпространство $\bar{0}_\gamma$ было замкнутым. Если выполнено V -условие, то факторпространство $B/v(\gamma)$ является банаховым. Согласно [8; гл. IV, § 1, п. 1.8] это следует из замкнутости подпространства $\bar{0}_\gamma$. Отметим, что V -условию удовлетворяют пространства $C([a, b], \mathbb{R})$, $L_p([a, b], \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, другие “традиционные” пространства

определенных на $[a, b]$ функций, в которых задана система отношений (2) (что существенно используется при исследовании вольтерровых по А. Н. Тихонову операторов). Пример функционального пространства, не удовлетворяющего V -условию относительно системы (2), приведен в [9; гл. I, п. 1.3].

Непосредственно из определения вольтерровости получаем следующий аналог утверждения о предельном переходе в классе вольтерровых по А. Н. Тихонову операторов, действующих в $L([a, b], \mathbb{R}^n)$ [10; § 5.2, теорема 2.1].

ТЕОРЕМА 3. Пусть в банаховом пространстве B выполнено V -условие; $\{F_i\}$ – последовательность вольтерровых на системе v операторов $F_i: B \rightarrow B$. Если $\|F_i u - F u\|_B \rightarrow 0$ при каждом $u \in B$, то и предельный оператор $F: B \rightarrow B$ также вольтерров на системе v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Рассмотрим уравнение

$$Fx = 0 \quad (6)$$

с вольтерровым на системе v оператором $F: B \rightarrow B$. Если для некоторого $\gamma \in (0, 1)$ существует класс эквивалентности $\bar{z}_\gamma \in B/v(\gamma)$, удовлетворяющий равенству $F_\gamma \bar{z}_\gamma = \bar{0}_\gamma$, то уравнение (6) будем называть *локально разрешимым*, а класс $\bar{z}_\gamma$ – его $v(\gamma)$ -*локальным решением*. Элемент $z \in B$, удовлетворяющий уравнению (6), назовем *глобальным решением*. Отождествляя элемент $z \in B$ с классом $v(1)$ -эквивалентности $\bar{z}_1 = \{z\}$, содержащим лишь один этот элемент, будем глобальным решением считать также класс $\bar{z}_1$. Если $0 < \xi < \gamma \leq 1$ и если $\bar{z}_\gamma, \bar{z}_\xi$ – соответственно $v(\gamma)$ -локальное (или глобальное при $\gamma = 1$) и $v(\xi)$ -локальное решения, удовлетворяющие включению $\bar{z}_\gamma \subset \bar{z}_\xi$, то будем называть решение $\bar{z}_\gamma$ продолжением решения $\bar{z}_\xi$, а решение $\bar{z}_\xi$ – частью решения $\bar{z}_\gamma$. Заметим, что вследствие условия V_2) для произвольного локального или глобального решения $\bar{z}_\gamma$ при любом $\xi \in (0, \gamma)$ существует единственный класс $\bar{z}_\xi \in B/v(\xi)$, для которого имеет место $\bar{z}_\gamma \subset \bar{z}_\xi$. Класс $\bar{z}_\xi$ будет частью решения $\bar{z}_\gamma$. Этот факт позволяет отождествить каждое локальное или глобальное решение $\bar{z}_\gamma$ с отображением, ставящим в соответствие числу $\xi \in (0, \gamma]$ такой класс $\bar{z}_\xi \in B/v(\xi)$, что $\bar{z}_\gamma \subset \bar{z}_\xi$. Имея в виду это отображение, будем говорить, что решение $\bar{z}_\gamma$ определено на $(0, \gamma]$. Отображение $\xi \in (0, \gamma) \mapsto \bar{z}_\xi \in B/v(\xi)$, удовлетворяющее условиям

$$\forall \eta, \xi \quad 0 < \eta < \xi < \gamma \Rightarrow \bar{z}_\xi \subset \bar{z}_\eta, \quad \lim_{\xi \rightarrow \gamma-0} \|\bar{z}_\xi\|_{B/v(\xi)} = \infty,$$

будем называть *предельно продолженным решением, определенным на $(0, \gamma)$* . Любое сужение такого отображения на $(0, \eta] \subset (0, \gamma)$ (конечно, являющееся локальным решением) будем называть *частью предельно продолженного решения*.

Определенные здесь понятия локального, глобального, предельно продолженного решений являются естественным обобщением понятий решений дифференциальных уравнений, интегральных уравнений Вольтерра, функционально-дифференциальных уравнений эволюционного типа, других уравнений с вольтерровыми по А. Н. Тихонову операторами. Для перечисленных уравнений решение ищется в каком-либо множестве функций, определенных на $[a, b]$. Под локальным решением понимают функцию z_c , определенную на $[a, c]$, $c < b$,

и удовлетворяющую на этом отрезке заданному уравнению. Функция z_c может считаться классом функций, являющихся всевозможными ее продолжениями на весь $[a, b]$. Таким образом, “классические” определения решений эволюционных уравнений равносильны приведенным выше, если на соответствующем множестве функций определить систему отношений (2). Следует отметить также, что определения глобального и предельно продолженного решений не охватывают всевозможных ситуаций, в которых “заканчиваются” продолжаемые решения. Например, рассмотрим в пространстве $C([0, 1], \mathbb{R})$ уравнение

$$y(t) = A(t)y(h(t)) + f(t), \quad (7)$$

где функции $h, A, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определены на рис. 1, 2, 3.

 Рис. 1. График функции $h(t)$

 Рис. 2. График функции $A(t)$

 Рис. 3. График функции $f(t)$

 Рис. 4. График решения $y(t)$

Уравнение (7) представим в виде $Fx = 0$. Здесь оператор

$$F: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}), \quad (Fy)(t) = y(t) - A(t)y(h(t)) - f(t),$$

является вольтерровым по А. Н. Тихонову. Решением является функция $y(\cdot)$ (см. рис. 4), непрерывная на полуоткрытом интервале $[0, 1)$, для которой сужение $y_\gamma(\cdot)$ на $[0, \gamma]$ при любом $\gamma \in [0.25, 1)$ имеет норму $\|y_\gamma\|_{C([0, \gamma], \mathbb{R})} = 1$. Однако решение $y(\cdot)$ не является частью глобального решения, поскольку в точке $t = 1$ терпит разрыв второго рода. Ниже будут получены условия, при которых для решений уравнений с вольтерровыми операторами подобные и другие “необычные” ситуации не возникнут, любое локальное решение обязательно будет частью предельно продолженного или глобального решения.

§ 6. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений с локально сжимающими операторами

Здесь B – это линейное вещественное или комплексное нормированное пространство, на котором задана система v отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям $V_0)–V_2)$ и (5).

Пусть операторы $F, F_i: B \rightarrow B$ являются вольтерровыми на v . Будем предполагать, что последовательность операторов $\{F_i\}$ равномерно сходится к оператору F , т.е. для любой сходящейся последовательности аргументов $\{x_i\} \subset B$, $\|x_i - x\| \rightarrow 0$, выполнено $\|F_i x_i - Fx\| \rightarrow 0$. Отметим, что для линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве, непрерывная сходимость равносильна поточечной. Нас будут интересовать условия разрешимости уравнений

$$x - Fx = 0, \quad (8)$$

$$x_i - F_i x_i = 0, \quad (9)$$

и сходимости последовательности решений уравнений (9) к решению уравнения (8). Такую сходимость часто называют непрерывной зависимостью решений уравнения (8) от параметров, или устойчивостью решений уравнения (8), а также корректностью уравнения (8). Проблема непрерывной зависимости решений уравнения от параметров возникает при обосновании математических моделей. Поскольку в прикладных задачах константы и функции могут быть найдены лишь с некоторой точностью, то необходимо, чтобы малые погрешности в определении параметров уравнения не приводили к большим отклонениям решений. Понятие корректности введено в математику Ж. Адамаром (1923 г.). Проблеме корректности абстрактных операторных и конкретных интегральных, дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений посвящены многие работы (описание результатов и библиография содержатся в обзоре Г. М. Вайнико [11]). В общей постановке вопрос о необходимых и достаточных условиях корректности уравнений был, по-видимому, впервые рассмотрен в работе Ц. Артштейна [12].

Зададим отображение $Z: (0, 1) \times B \rightarrow \mathbb{R}$, $Z(\gamma, y) = \|\Pi_\gamma y\|_{B/v(\gamma)}$. При каждом $y \in B$ функция $Z(\cdot, y)$ не убывает, и поэтому существует

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+0} Z(\gamma, y) = z_0(y).$$

Доопределим отображение Z значением $Z(0, y) = z_0(y)$. Далее, будем считать $Z(1, y) = \|y\|_B$. Таким образом, отображение Z теперь задано на $[0, 1] \times B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор $F: B \rightarrow B$ назовем *локально сжимающим на системе v* , если существуют такие числа $q < 1$, $\tau > 0$, что выполнены условия:

- 1) $\forall \gamma \in (0, \tau) \quad \forall x, y \in B \quad Z(\gamma, Fx - Fy) \leq q \cdot Z(\gamma, x - y);$
- 2) $\forall \xi, \gamma \in (0, 1] \quad \xi < \gamma < \xi + \tau \quad \forall x, y \in B$

$$x \in \bar{y}_\xi \Rightarrow Z(\gamma, Fx - Fy) \leq q \cdot Z(\gamma, x - y).$$

Класс локально сжимающих на системе v операторов достаточно широк. Ему, конечно же, принадлежат не только сжимающие операторы. К локально сжимающим операторам относятся еще, например, τ -вольтерровы операторы. Действительно, согласно определению 2 для любых $x, y \in B$ имеет место, во-первых, равенство $\Pi_\tau Fx = \Pi_\tau Fy$ и, во-вторых, из $\xi < \gamma < \xi + \tau$, $x \in \bar{y}_\xi$ следует $\Pi_\gamma Fx = \Pi_\gamma Fy$. Это означает, что τ -вольтерров оператор является улучшающим, причем $q = 0$. Важно заметить, что свойством локальной сжимаемости могут обладать операторы, не являющиеся непрерывными и ограниченными (соответствующий пример локально сжимающего на системе (2) оператора приведен в работе [13]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Операторы $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, назовем *в совокупности локально сжимающими на системе v* , если существуют такие числа $q < 1$, $\tau > 0$, что выполнены условия:

- 1) $\forall \gamma \in (0, \tau) \quad \forall x, y \in B \quad \forall i \quad Z(\gamma, F_i x - F_i y) \leq q \cdot Z(\gamma, x - y);$
- 2) $\forall \xi, \gamma \in (0, 1] \quad \xi < \gamma < \xi + \tau \quad \forall x, y \in B \quad \forall i$

$$x \in \bar{y}_\xi \Rightarrow Z(\gamma, F_i x - F_i y) \leq q \cdot Z(\gamma, x - y).$$

Предполагая выполнение V -условия в банаховом пространстве B , докажем, что если последовательность вольтерровых, в совокупности локально сжимающих на v операторов $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, поточечно сходится к оператору $F: B \rightarrow B$ (т.е. при каждом $x \in B$ выполнено $\|F_i x - Fx\|_B \rightarrow 0$), то оператор F будет локально сжимающим на v .

Прежде всего заметим, что оператор $F: B \rightarrow B$ вольтерров на v . Пусть $(x, y) \notin v(\gamma)$, т.е. $Z(\gamma, x - y) \neq 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер I , что при всех $i > I$ выполнено $Z(\gamma, F_i x - Fx) \leq \varepsilon Z(\gamma, x - y)$, $Z(\gamma, F_i y - Fy) \leq \varepsilon Z(\gamma, x - y)$. Используя эти оценки, получаем $Z(\gamma, Fx - Fy) \leq Z(\gamma, F_i x - Fx) + Z(\gamma, F_i x - F_i y) + Z(\gamma, F_i y - Fy) \leq (q + 2\varepsilon) \cdot Z(\gamma, x - y)$. В случае $(x, y) \in v(\gamma)$ получаем $(Fx, Fy) \in v(\gamma)$. Таким образом, $Z(\gamma, Fx - Fy) = 0$ и поэтому $Z(\gamma, Fx - Fy) \leq q \cdot Z(\gamma, x - y)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в банаховом пространстве B выполнено V -условие. Пусть, далее, последовательность вольтерровых, в совокупности локально сжимающих на системе v операторов $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, непрерывно сходится к оператору $F: B \rightarrow B$. Тогда при каждом i уравнение (9) имеет единственное глобальное решение z_i , всякое локальное решение этого уравнения будет частью глобального решения z_i ; уравнение (8) также имеет единственное глобальное решение z , а всякое локальное решение будет его частью, и имеет место соотношение

$$\|z_i - z\| \rightarrow 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем однозначную разрешимость уравнения (8). Из условий теоремы следует сходимость последовательности $\{F_i\}$ на каждом $x \in B$ к оператору F . Поэтому оператор F будет локально сжимающим и согласно теореме 3 вольтерровым на v . Так как выполнено V -условие, пространство $B/v(\gamma)$ при любом $\gamma \in (0, 1]$ является банаховым. Возьмем числа $q < 1$, $\tau > 0$, удовлетворяющие всем условиям из определения локальной сжимаемости оператора F . Пусть $\xi = \tau/2$. Уравнение $\bar{x}_\xi = F_\xi \bar{x}_\xi$ имеет единственное решение $\bar{z}_\xi \in B/v(\xi)$, так как оператор $F_\xi: B/v(\xi) \rightarrow B/v(\xi)$ является сжимающим. Пусть $z \in B$ – некоторый представитель класса $\bar{z}_\xi$. Для нахождения продолжения решения $\bar{z}_\xi$ в уравнении (8) сделаем замену $y = x - z$. Получим уравнение

$$y = F(y + z) - z. \quad (11)$$

Заданный равенством $F^\xi y = F(y + z) - z$ оператор F^ξ действует в подпространстве $\bar{0}_\xi \subset B$.

Определим оператор $F_{2\xi}^\xi: \bar{0}_\xi/v(2\xi) \rightarrow \bar{0}_\xi/v(2\xi)$, $F_{2\xi}^\xi \bar{y}_{2\xi} = \Pi_{2\xi} F^\xi y$, где y – любой представитель класса $\bar{y}_{2\xi} \in \bar{0}_\xi/v(2\xi)$. Класс $v(2\xi)$ -эквивалентности, которому априори принадлежит решение уравнения (11), удовлетворяет уравнению

$$\bar{y}_{2\xi} = F_{2\xi}^\xi \bar{y}_{2\xi}. \quad (12)$$

Поскольку оператор $F_{2\xi}^\xi: \bar{0}_\xi/v(2\xi) \rightarrow \bar{0}_\xi/v(2\xi)$ является сжимающим, уравнение (12) однозначно разрешимо. Обозначим его решение $\bar{w}_{2\xi}$. Тогда $\bar{z}_{2\tau} = \Pi_{2\tau} z + \bar{w}_{2\tau}$ является $v(2\xi)$ -локальным решением уравнения (8).

Проделав подобные построения $[(b-a)/\xi]$ раз (здесь символом $[\cdot]$ обозначена целая часть действительного числа), на последнем шаге найдем глобальное решение $\bar{z}_1 \in B/v(1)$ уравнения (8) (представляющее собой класс, содержащий только один элемент $z \in B$, который мы также считаем глобальным решением) и установим его единственность. Любое $v(\gamma)$ -локальное решение $\bar{z}_\gamma$ с помощью таких же построений может быть продолжено до глобального решения, единственность которого уже доказана.

Аналогично доказывается однозначная разрешимость уравнений (9) при всех i .

Теперь докажем, что для глобальных решений z_i , z уравнений (9), (8) имеет место соотношение (10). Возьмем числа $q < 1$, $\tau > 0$, удовлетворяющие условию совокупной локальной сжимаемости операторов F_i , F . Вследствие непрерывной сходимости последовательности $\{F_i\}$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\sigma_1 > 0$, $I_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $x \in B$, $i \in \mathbb{N}$ из неравенств $\|x - z\| < \sigma_1$, $i > I_1$ следует

$$\|F_i x - Fz\| = \|F_i x - z\| < \frac{(1-q)\varepsilon}{6}.$$

Без ограничения общности можем считать, что $\sigma_1 < (1-q)\varepsilon/6$. Определим $\sigma_2 > 0$, $I_2 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|F_i x - Fz\| = \|F_i x - z\| < (1-q)\sigma_1/6$ при всех $x \in B$, $i \in \mathbb{N}$, $\|x - z\| < \sigma_2$, $i > I_2$. Считаем $\sigma_2 < (1-q)\sigma_1/6$, $I_2 > I_1$. Далее, существуют такие $\sigma_3 > 0$, $I_3 \in \mathbb{N}$, что для любых $x \in B$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\|x - z\| < \sigma_3$, $i > I_3$, выполнено $\|F_i x - Fz\| = \|F_i x - z\| < (1-q)\sigma_2/6$, $\sigma_3 < (1-q)\sigma_2/6$, $I_3 > I_2$. И так далее. Всего сделаем $l = [(b-a)/\tau]$ вычислений и на последнем шаге найдем σ_l , I_l . Считаем $\sigma_l < (1-q)\sigma_{l-1}/6$, $I_l > I_{l-1}$.

Рассмотрим локальные решения $\bar{z}_{i\tau}, \bar{z}_\tau \in B/v(\tau)$ уравнений (9), (8), являющиеся частями соответствующих глобальных решений z_i, z . Эти решения – неподвижные точки операторов $F_{i\tau}, F_\tau: B/v(\tau) \rightarrow B/v(\tau)$, $F_{i\tau}\bar{x}_\tau = \Pi_\tau F_i x$, $F_\tau\bar{x}_\tau = \Pi_\tau F x$, $x \in \bar{x}_\tau$. При всех $i > I_l$ выполнено $\|F_{i\tau}\bar{z}_\tau - \bar{z}_\tau\| < (1-q)\sigma_l/6$. Поэтому для каждого натурального n получаем

$$\begin{aligned} \|F_{i\tau}^n \bar{z}_\tau - \bar{z}_\tau\| &\leq \|F_{i\tau}^n \bar{z}_\tau - F_{i\tau}^{n-1} \bar{z}_\tau\| + \|F_{i\tau}^{n-1} \bar{z}_\tau - F_{i\tau}^{n-2} \bar{z}_\tau\| + \dots + \|F_{i\tau} \bar{z}_\tau - \bar{z}_\tau\| \\ &\leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) \frac{(1-q)\sigma_l}{6} \leq \frac{\sigma_l}{6}. \end{aligned}$$

Учитывая сходимостъ последовательных приближений $F_{i\tau}^n \bar{z}_\tau$ к неподвижной точке $\bar{z}_{i\tau}$ оператора $F_{i\tau}$, получаем оценку $\|\bar{z}_{i\tau} - \bar{z}_\tau\| \leq \sigma_l/6$.

Пусть $\bar{z}_{i2\tau}, \bar{z}_{2\tau} \in B/v(2\tau)$ – локальные решения уравнений (9), (8). Таким образом, $\{z_i\} \subset \bar{z}_{i2\tau} \subset \bar{z}_{i\tau}$, $\{z\} \subset \bar{z}_{2\tau} \subset \bar{z}_\tau$. Пусть, далее, операторы $F_{i2\tau}, F_{2\tau}: B/v(2\tau) \rightarrow B/v(2\tau)$ определены равенствами $F_{i2\tau}\bar{x}_{2\tau} = \Pi_{2\tau} F_i x$, $F_{2\tau}\bar{x}_{2\tau} = \Pi_{2\tau} F x$, $x \in \bar{x}_{2\tau}$. Найдем такой класс $\bar{w}_{i2\tau} \in B/v(2\tau)$, что $\bar{w}_{i2\tau} \subset \bar{z}_{i\tau}$ и $\|\bar{w}_{i2\tau} - \bar{z}_{2\tau}\| \leq \sigma_l$. При всех $i > I_l \geq I_{l-1}$ выполнено $\|F_{i2\tau}\bar{w}_{i2\tau} - F_{2\tau}\bar{z}_{2\tau}\| = \|F_{i2\tau}\bar{w}_{i2\tau} - \bar{z}_{2\tau}\| < (1-q)\sigma_{l-1}/6$. Следовательно, $\|F_{i2\tau}\bar{w}_{i2\tau} - \bar{w}_{i2\tau}\| < \sigma_l + (1-q)\sigma_{l-1}/6 < (1-q)\sigma_{l-1}/3$. Так как при каждом n любые элементы классов $F_{i2\tau}^n \bar{w}_{i2\tau}$, $\bar{w}_{i2\tau}$ являются $v(\tau)$ -эквивалентными, то можно пользоваться локальной сжимаемостью операторов $F_{i2\tau}^n$. Получаем

$$\begin{aligned} \|F_{i2\tau}^n \bar{w}_{i2\tau} - \bar{w}_{i2\tau}\| &\leq \|F_{i2\tau}^n \bar{w}_{i2\tau} - F_{i2\tau}^{n-1} \bar{w}_{i2\tau}\| \\ &\quad + \|F_{i2\tau}^{n-1} \bar{w}_{i2\tau} - F_{i2\tau}^{n-2} \bar{w}_{i2\tau}\| + \dots + \|F_{i2\tau} \bar{w}_{i2\tau} - \bar{w}_{i2\tau}\| \\ &\leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) \frac{(1-q)\sigma_{l-1}}{3} \leq \frac{\sigma_{l-1}}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда $\|F_{i2\tau}^n \bar{w}_{i2\tau} - \bar{z}_{2\tau}\| \leq \sigma_{l-1}/3 + \sigma_l \leq \sigma_{l-1}/3 + \sigma_{l-1}/6 = \sigma_{l-1}/2$. Так как последовательные приближения $F_{i2\tau}^n \bar{w}_{i2\tau}$ сходятся к неподвижной точке $\bar{z}_{i2\tau}$ оператора $F_{i2\tau}$, то получаем неравенство $\|\bar{z}_{i2\tau} - \bar{z}_{2\tau}\| \leq \sigma_{l-1}/2$.

На следующем шаге вычислений находим такой класс $v(3\tau)$ -эквивалентности $\bar{w}_{i3\tau} \in B/v(3\tau)$, что $\bar{w}_{i3\tau} \subset \bar{z}_{i2\tau}$ и $\|\bar{w}_{i3\tau} - \bar{z}_{3\tau}\| \leq \sigma_{l-1}$. Здесь $i > I_l \geq I_{l-1} \geq I_{l-2}$. Воспользовавшись сходимостью последовательных приближений $F_{i3\tau}^n \bar{w}_{i3\tau}$ к неподвижной точке $\bar{z}_{i3\tau}$ оператора $F_{i3\tau}: B/v(3\tau) \rightarrow B/v(3\tau)$, $F_{i3\tau}\bar{x}_{3\tau} = \Pi_{3\tau} F_i x$, $x \in \bar{x}_{3\tau}$, получаем оценку $\|\bar{z}_{i3\tau} - \bar{z}_{3\tau}\| \leq \sigma_{l-2}/2$. И так далее. На последнем l -м шаге вычислений докажем, что при всех $i > I_l$ имеет место $\|\bar{z}_i - \bar{z}\| < \varepsilon$.

Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в банаховом пространстве B выполнено V -условие. Если оператор $F: B \rightarrow B$ – вольтерров локально сжимающий на системе v , то уравнение (8) имеет единственное глобальное решение, а всякое локальное решение будет его частью.

§ 7. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений с улучшающими вполне непрерывными операторами

Рассмотрим теперь условия сходимости решений уравнений (9) к решению уравнения (8) в случае, когда операторы F_i не являются в совокупности локально сжимающими.

Пусть B – это линейное вещественное или комплексное нормированное пространство. Операторы $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, называют в совокупности компактными [14], если для всякого ограниченного множества $U \subset B$ множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i U$ компактно. Отметим, что если последовательность в совокупности компактных операторов $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, поточечно сходится к оператору $F: B \rightarrow B$, то и оператор F будет компактным.

Нам потребуется следующее утверждение из работы В. П. Максимова [14].

ЛЕММА 1. Пусть последовательность в совокупности компактных операторов $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, непрерывно сходится к оператору $F: B \rightarrow B$. Тогда любая ограниченная последовательность $\{z_i\}$ неподвижных точек операторов F_i является компактной, всякая ее предельная точка является неподвижной для оператора F . Если неподвижная точка z оператора F единственна, то $\|z_i - z\| \rightarrow 0$.

Отметим существенность в этом утверждении условия ограниченности последовательности неподвижных точек операторов F_i (подтверждением этого служит пример, приведенный в [13]). Проверка ограниченности последовательности неподвижных точек z_i операторов F_i бывает достаточно сложной. Для уравнений общего вида обычно предполагаются выполненными априорные оценки решений [14], [15], из которых следует ограниченность последовательности z_i . Нахождению таких неравенств на основе теорем о неподвижных точках монотонных вольтерровых операторов в банаховых полуупорядоченных пространствах посвящена работа [16]. Еще одним препятствием к применению леммы в случае вольтерровости операторов F_i является тот факт, что уравнения (9) могут не обладать глобальными решениями, а иметь предельно продолженные решения, более того, определенные на разных множествах. Наличие априорной оценки исключает такую ситуацию и гарантирует продолжаемость любого локального решения до глобального. Однако многие практические задачи, связанные, например, с исследованием асимптотики решений, подразумевают именно поиск предельно продолженных решений. Исследование корректности таких задач можно проводить с помощью предлагаемых ниже методов и результатов, не требующих наличия априорных оценок.

Далее вновь предполагается, что B – это линейное вещественное или комплексное нормированное пространство, на котором задана система ν отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям V_0 – V_2) и (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Оператор $F: B \rightarrow B$ назовем *улучшающим на системе ν* , если

$$\exists \mathcal{Z} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in B \quad Z(0, Fx) \leq \mathcal{Z}, \quad (13)$$

$$\forall \varrho > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau > 0 \quad \forall x \in B \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} |\gamma_2 - \gamma_1| < \tau, \\ \|x\| \leq \varrho \end{array} \right\} \Rightarrow |Z(\gamma_2, Fx) - Z(\gamma_1, Fx)| < \varepsilon. \quad (14)$$

Термин “улучшающий” употреблялся в близком смысле применительно к оператору Немыцкого в пространстве суммируемых функций в книге [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Операторы $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, будем называть в совокупности улучшающими на системе v , если

$$\exists \mathcal{Z} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in B \quad \forall i \quad Z(0, F_i x) \leq \mathcal{Z}, \quad (15)$$

$$\forall \varrho > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau > 0 \quad \forall x \in B \quad \forall i \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} |\gamma_2 - \gamma_1| < \tau, \\ \|x\| \leq \varrho \end{array} \right\} \Rightarrow |Z(\gamma_2, F_i x) - Z(\gamma_1, F_i x)| < \varepsilon. \quad (16)$$

Если последовательность в совокупности улучшающих на v операторов $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, поточечно сходится к оператору $F: B \rightarrow B$, то оператор F тоже будет улучшающим. Доказательство этого утверждения следует из неравенств

$$\begin{aligned} Z(0, Fx) &\leq Z(0, F_i x) + |Z(0, F_i x) - Z(0, Fx)|, \\ |Z(\gamma_2, Fx) - Z(\gamma_1, Fx)| &\leq |Z(\gamma_2, Fx) - Z(\gamma_2, F_i x)| + |Z(\gamma_2, F_i x) - Z(\gamma_1, F_i x)| \\ &\quad + |Z(\gamma_1, F_i x) - Z(\gamma_1, Fx)| \\ &\leq |Z(\gamma_2, F_i x) - Z(\gamma_1, F_i x)| + 2\|F_i x - Fx\|. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть операторы $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, являются вольтерровыми и в совокупности улучшающими на системе v . Тогда для произвольного $r_0 > \mathcal{Z}$ существует такое $\delta > 0$, что для любого натурального i и любого локального решения $\bar{z}_i \gamma_i \in B/v(\gamma_i)$ уравнения (9) (являющегося классом $v(\gamma_i)$ -эквивалентности) из $\|\bar{z}_i \gamma_i\|_{B/v(\gamma_i)} \geq r_0$ следует $\gamma_i \geq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа ϱ, ε , $\varrho > r_0 > \mathcal{Z}$, $\varepsilon = 0.5(r_0 - \mathcal{Z})$, и найдем $\tau > 0$, отвечающее условию (16). Возьмем произвольное локальное решение $\bar{z}_i \gamma_i \in B/v(\gamma_i)$ уравнения (9), удовлетворяющее неравенству

$$\|\bar{z}_i \gamma_i\|_{B/v(\gamma_i)} \geq r_0.$$

Вследствие улучшения оператора F_i норма части $\bar{z}_i \xi \in B/v(\xi)$ решения $\bar{z}_i \gamma_i$ является непрерывной функцией аргумента $\xi \in [0, \gamma_i]$. Поэтому у решения $\bar{z}_i \gamma_i$ существует такая часть $z_i \xi_i \in B/v(\xi_i)$, что $\|\bar{z}_i \xi_i\|_{B/v(\xi_i)} = r_0$. Найдем элемент $u_i \in \bar{z}_i \xi_i$, норма которого $\|u_i\|_B \leq \varrho$. Тогда

$$Z(\tau, F u_i) = Z(0, F_i u_i) + (Z(\tau, F_i u_i) - Z(0, F_i u_i)) \leq \mathcal{Z} + \varepsilon < r_0.$$

Поэтому $\gamma_i \geq \xi_i > \tau$.

Теперь сформулируем утверждение о корректности уравнения (8) с вполне непрерывным улучшающим оператором F .

ТЕОРЕМА 5. Пусть в банаховом пространстве B выполнено V -условие. Пусть, далее, последовательность непрерывных в совокупности компактных вольтерровых и в совокупности улучшающих на системе v операторов $F_i: B \rightarrow B$, $i = 1, 2, \dots$, непрерывно сходится к оператору $F: B \rightarrow B$. Тогда при каждом i уравнение (9) и уравнение (8) локально разрешимы, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Кроме того, существует такое $\beta > 0$, что:

- для любого i и для каждого предельно продолженного решения $z_{i\eta_i}$ уравнения (9), определенного на $(0, \eta_i)$, выполнено $\eta_i > \beta$;
- для каждого предельно продолженного решения z_η уравнения (8), определенного на $(0, \eta)$, выполнено $\eta > \beta$;
- если при каждом i произвольно выбрать определенное на $(0, \beta]$ локальное решение $z_{i\beta}$ уравнения (9), то полученная последовательность будет компактна в пространстве $B/v(\beta)$, все ее предельные точки будут локальными решениями уравнения (8);
- если локальное определенное на $(0, \beta]$ решение z_β уравнения (8) единственно, то для любой последовательности локальных определенных на $(0, \beta]$ решений $z_{i\beta}$ уравнений (9) имеет место $\|z_{i\beta} - z_\beta\|_{B/v(\beta)} \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем разрешимость уравнения (8).

Прежде всего отметим, что при любом $\gamma \in (0, 1)$ оператор $F_\gamma: B/v(\gamma) \rightarrow B/v(\gamma)$ наследует от оператора $F: B \rightarrow B$ непрерывность, улучшаемость и компактность. Докажем, например, последнее из перечисленных свойств. Возьмем $r > 0$. Обозначим через $U_{[0,r]}^\gamma$, $U_{[0,2r]}$ замкнутые шары с центром в нуле соответственно радиуса r в пространстве $B/v(\gamma)$ и радиуса $2r$ в пространстве B . Для любого $\bar{x}_\gamma \in U_{[0,r]}^\gamma$ существует такой $x \in \bar{x}_\gamma$, что $\|x\| \leq 2r$. Поэтому вследствие вольтерровости оператора F выполнено $F_\gamma U_{[0,r]}^\gamma \subset \Pi_\gamma F U_{[0,2r]}$. Из компактности множества $\Pi_\gamma F U_{[0,2r]}$ следует компактность множества $F_\gamma U_{[0,r]}^\gamma$.

Покажем, что уравнение (8) локально разрешимо. Вследствие улучшаемости оператора F существует число $\mathcal{Z}$, для которого выполнено неравенство (13). Пусть $\varrho = 2\mathcal{Z}$, $\varepsilon = \mathcal{Z}/2$. Найдем τ , удовлетворяющее условию (14). Обозначим $\xi = \tau/2$. Для любого $x \in B$, $\|x\| < 2\mathcal{Z}$, имеем

$$Z(\xi, Fx) = (Z(\xi, Fx) - Z(0, Fx)) + Z(0, Fx) < \frac{\mathcal{Z}}{2} + \mathcal{Z} = \frac{3}{2}\mathcal{Z}. \quad (17)$$

В пространстве $B/v(\xi)$ выделим замкнутый шар $U_{[0,r]}^\xi$ с центром в нуле радиуса $r = 3\mathcal{Z}/2$. Для любого $\bar{x}_\xi \in U_{[0,r]}^\xi$ существует такой $x \in \bar{x}_\xi$, что $\|x\| \leq r + \mathcal{Z}/2 = \varrho$. Отсюда и из неравенства (17) следует включение $F_\xi U_{[0,r]}^\xi \subset U_{[0,r]}^\xi$. А так как оператор $F_\xi: B/v(\xi) \rightarrow B/v(\gamma)$ вполне непрерывен, то он имеет неподвижную точку $\bar{z}_\xi$, являющуюся $v(\xi)$ -локальным решением уравнения (8).

Теперь докажем, что любое $v(\gamma_1)$ -локальное решение $\bar{z}_{\gamma_1} \in B/v(\gamma_1)$ продолжаемо до глобального или предельно продолженного. Выберем $\varrho = \|\bar{z}_{\gamma_1}\| + \mathcal{Z}$, $\varepsilon = \mathcal{Z}/2$ и найдем τ_2 , являющееся точной верхней границей всевозможных чисел τ , удовлетворяющих условию (14). Обозначим $\gamma_2 = \gamma_1 + \tau_2/2$. Для любого такого $x \in \bar{z}_{\gamma_1}$, что $\|x\| < \|\bar{z}_{\gamma_1}\| + \mathcal{Z}$, выполнено

$$Z(\gamma_2, Fx) = (Z(\gamma_2, Fx) - Z(\gamma_1, Fx)) + Z(\gamma_1, Fx) < \frac{\mathcal{Z}}{2} + \|\bar{z}_{\gamma_1}\|. \quad (18)$$

В пространстве $B/v(\gamma_2)$ выделим замкнутый шар $U_{[0,r]}^{\gamma_2}$ радиуса $r = \|\bar{z}_{\gamma_1}\| + \mathcal{Z}$. Пусть $U_2 = \{\bar{x}_{\gamma_2} \subset U_{[0,r]}^{\gamma_2} \mid \bar{x}_{\gamma_2} \subset \bar{z}_{\gamma_1}\}$. Докажем выпуклость и замкнутость множества U_2 , для чего представим его в виде $U_2 = U_{[0,r]}^{\gamma_2} \cap \bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$. Пусть $\bar{x}_{\gamma_2 i} \in \bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$, $\|\bar{x}_{\gamma_2 i} - \bar{x}_{\gamma_2}\|_{B/v(\gamma_2)} \rightarrow 0$. Существуют такие $x_i \in \bar{x}_{\gamma_2 i}$, $x \in \bar{x}_{\gamma_2}$, что $\|x_i - x\|_B \rightarrow 0$. Так как $(x_i, z) \in v(\gamma_1)$, то согласно V -условию

$(x, z) \in v(\gamma_1)$, $x \in \bar{z}_{\gamma_1}$. Это значит, что $\bar{x}_{\gamma_2} \subset \bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$, т.е. множество $\bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$ замкнуто. Для доказательства его выпуклости возьмем любые два элемента $\bar{x}_{\gamma_2}, \bar{y}_{\gamma_2} \in \bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$ и любое $\lambda \in [0, 1]$. Для $x \in \bar{x}_{\gamma_2}$, $y \in \bar{y}_{\gamma_2}$ выполнено $(x, z) \in v(\gamma_1)$, $(y, z) \in v(\gamma_1)$. Следовательно, $(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda z + (1 - \lambda)z) \in v(\gamma_1)$ и $\lambda \bar{x}_{\gamma_2} + (1 - \lambda)\bar{y}_{\gamma_2} \in \bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$. Итак, множество $\bar{z}_{\gamma_1}/v(\gamma_2)$ выпукло и замкнуто, и поэтому такими же свойствами обладает множество U_2 . В любом классе $\bar{x}_{\gamma_2} \in U_2$ существует такой $x \in \bar{x}_{\gamma_2}$, что $\|x\| \leq r + \mathcal{L}/2$. Для таких представителей можем воспользоваться неравенством (18), из которого будет следовать включение $F_{\gamma_2} U_2 \subset U_2$. Так как, кроме того, оператор $F_{\gamma_2}: B/v(\gamma_2) \rightarrow B/v(\gamma_2)$ вполне непрерывен, то он имеет неподвижную точку $\bar{z}_{\gamma_2}$. Это $v(\gamma_2)$ -локальное решение уравнения (8), являющееся продолжением решения $\bar{z}_{\gamma_1}$. Аналогично найдем $v(\gamma_3)$ -локальное решение $\bar{z}_{\gamma_3}$ уравнения (8), являющееся продолжением решения $\bar{z}_{\gamma_2}$. И так далее.

Докажем, что, продолжая описанные построения, мы получим глобальное или предельно продолженное решение. Вычислим $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = \eta$. Возьмем любое $\gamma \in (0, \eta)$ и найдем номер j , для которого $\gamma \in (\gamma_{j-1}, \gamma_j]$. Пусть $\bar{z}_{\gamma} \in B/v(\gamma)$, $\bar{z}_{\gamma} = \Pi_{\gamma} z$, где z – это некоторый представитель класса $\bar{z}_{\gamma_j}$ – локального решения уравнения (8). Таким образом, построено отображение $\gamma \in (0, \eta) \mapsto \bar{z}_{\gamma} \in B/v(\gamma)$. Если это отображение не является предельно продолженным решением, то найдется такое число N , что при всех натуральных j имеет место $\|\bar{z}_{\gamma_j}\| \leq N$. Возьмем $\varrho = N + \mathcal{L}$, $\varepsilon = \mathcal{L}/2$ и найдем $\bar{\tau}$, являющееся точной верхней границей всевозможных чисел τ , удовлетворяющих условию (14). Так как $\|\bar{z}_{\gamma_j}\| + \mathcal{L} \leq N + \mathcal{L}$, то $\tau_j \geq \bar{\tau}$ при любом j . Это означает, что за конечное число шагов будет построено глобальное решение уравнения (8).

Аналогично доказывается, что при любом i уравнение (9) локально разрешимо и всякое локальное решение продолжаемо. Существование числа β и сходимости последовательности $z_{i\beta}$ следуют из лемм 1, 2.

Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в банаховом пространстве B выполнено V -условие; оператор $F: B \rightarrow B$ является вполне непрерывным, вольтерровым и улучшающим на системе v . Тогда уравнение (8) локально разрешимо, любое локальное решение является частью либо глобального решения, либо предельно продолженного решения.

§ 8. Корректность задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений

Используем полученные результаты для исследования непрерывной зависимости от начального значения $\alpha \in \mathbb{R}^n$ решения задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения

$$x'(t) = f\left(t, x(c), \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x'(s) ds\right), \quad t \in [a, b], \quad (19)$$

с условием

$$x(c) = \alpha, \quad (20)$$

где $c \in [a, b]$. Под решением уравнения (19) понимаем абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению при почти всех $t \in [a, b]$. С помощью

подстановки $x(t) = x(c) + \int_c^t x'(s) ds$ в виде (19) можно записать обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнения с сосредоточенным и распределенным отклонением аргумента, интегро-дифференциальные и другие уравнения, разрешенные относительно производной [15].

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и в ее приложениях важную роль играют теоремы о непрерывной зависимости решений задачи Коши от начальных условий и других параметров уравнения. В наиболее общей постановке корректность задачи Коши изучена Я. Курцвейлем [18]. Для функционально-дифференциальных уравнений проблемы непрерывной зависимости решения задачи Коши и краевых задач от параметров исследованы Н. В. Азбелевым, В. П. Максимовым, Л. Ф. Рахматуллиной [14], [15]. Приведенный ниже результат отличается тем, что учитывает специфические особенности функционально-дифференциальных уравнений с вольтерровыми операторами.

Обозначим через $U_{(\alpha, \delta)}$ открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в $\alpha \in \mathbb{R}^n$ радиуса $\delta > 0$. Относительно функций $f: [a, b] \times U_{(\alpha, \delta)} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ будем предполагать выполненными следующие условия:

- (8.1) при каждой фиксированной паре $(\varsigma, x) \in U_{(\alpha, \delta)} \times \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, \varsigma, x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ измерима;
- (8.2) существует такая суммируемая функция $\bar{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что при любом $\varsigma \in U_{(\alpha, \delta)}$ выполнено неравенство $f(t, \varsigma, 0) \leq \bar{f}(t)$;
- (8.3) при почти всех значениях $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ функция $f(t, \cdot, x): U_{(\alpha, \delta)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна в точке α ;
- (8.4) существует такое число M , что для любых $\varsigma \in U_{(\alpha, \delta)}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство $|f(t, \varsigma, x_1) - f(t, \varsigma, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$;
- (8.5) матрица $\mathcal{K}: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет измеримые по совокупности аргументов компоненты;
- (8.6) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное τ , что для любых измеримых множеств $E, e \subset [a, b]$ из $\mu(e) < \tau$ следует неравенство

$$\int_e \int_E |\mathcal{K}(t, s)| ds dt \leq \varepsilon \mu(E);$$

- (8.7) $\mathcal{K}(t, s) = 0$ при почти всех $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$ таких, что

$$\begin{cases} s > c, \\ \frac{a-c}{b-c} \leq \frac{t-c}{s-c} \leq 1 \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} s < c, \\ \frac{b-c}{a-c} \leq \frac{t-c}{s-c} \leq 1. \end{cases}$$

Последнее условие означает [9; гл. III, п. 3.1, теорема 1.2], что оператор $K: L([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b], \mathbb{R}^n)$ (и вместе с ним вся правая часть уравнения (19)) является вольтерровым на совокупности v следующих отношений эквивалентности:

$$(x, y) \in v(\gamma) \Leftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \in [c - \gamma(c - a), c + \gamma(b - c)]. \quad (21)$$

При $c = a$ эта система отношений совпадает с (2), т.е. оператор K обладает свойством вольтерровости по А. Н. Тихонову. Если $c = b$, то условие (8.7) означает, что оператор K является “опережающим” [19].

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (8.5), (8.6). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau > 0$, что для каждого $y \in L$ и всякого измеримого множества $e \subset [a, b]$ с мерой $\mu(e) < \tau$ выполнено

$$\int_e \left| \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| y(s) ds \right| dt \leq \varepsilon \|y\|. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\tau > 0$, что выполнено условие (8.6). Выберем произвольно $y \in L$. Возьмем любое положительное Δ . Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$ обозначим $E_i = \{t \in [a, b] \mid i\Delta \leq |y(t)| < (i+1)\Delta\}$. Определим функции $y^\Delta, y_\Delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами $y^\Delta(t) = (i+1)\Delta$, $y_\Delta(t) = i\Delta$ при $t \in E_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что $y_\Delta(t) \leq |y(t)| \leq y^\Delta(t)$ почти всюду на $[a, b]$, и поэтому $\|y^\Delta - y\| \leq \|y^\Delta - y_\Delta\| \leq \Delta(b-a)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_e \left| \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| y(s) ds \right| dt &\leq \int_e \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| y^\Delta(s) ds dt \\ &\leq \int_e \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |\mathcal{K}(t, s)| (i+1)\Delta ds dt \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)\Delta \text{mes } E_i = \varepsilon \|y^\Delta\| \leq \varepsilon (\|y\| + \Delta(b-a)). \end{aligned}$$

Вследствие произвольности Δ отсюда следует неравенство (22).

Из доказанного утверждения следует, что при выполнении условий (8.5), (8.6) оператор $K: L \rightarrow L$ является регулярным, причем $|K|: L \rightarrow L$ ограничен. Кроме того, из леммы следует, что в этом случае оператор K является локально сжимающим на v , а коэффициент сжатия ε можно сделать сколь угодно малым за счет выбора τ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия (8.1)–(8.6). Тогда при любом $\varsigma \in U_{(\alpha, \delta)}$ задача Коши для уравнения (19) с условием $x(\varsigma) = \varsigma$ имеет единственное глобальное решение $z(\varsigma) \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$, частью которого является всякое локальное решение; если $|\varsigma - \alpha| \rightarrow 0$, то $\|z(\varsigma) - z(\alpha)\|_{AC} \rightarrow 0$, где $z(\alpha)$ – глобальное решение задачи (19)–(20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (8.2), (8.4) получаем

$$|f(t, \varsigma, x)| \leq M|x| + |f(t, \varsigma, 0)| \leq M|x| + \bar{f}(t).$$

Следовательно, при каждом $\varsigma \in U_{(\alpha, \delta)}$ оператор Немыцкого $y \mapsto f(t, \varsigma, y(t))$ непрерывно действует в пространстве L и ограничен [20; гл. VI, § 1, п. 4].

Возьмем последовательность $\{\varsigma_i\} \subset U_{(\alpha, \delta)}$, $|\varsigma_i - \alpha| \rightarrow 0$. Обозначим через $N_i, N, F_i, F: L \rightarrow L$ операторы, определяемые равенствами $(N_i y)(t) = f(t, \varsigma_i, y(t))$, $(Ny)(t) = f(t, \alpha, y(t))$, $F_i = N_i K$, $F = NK$. Задачу Коши для уравнения (19) относительно неизвестной функции $x_i \in AC$, удовлетворяющей условию $x_i(\varsigma) = \varsigma_i$, запишем в виде уравнения $y_i = F_i y_i$, где $y_i = x'_i$. Соответственно задачу (19)–(20) представим в виде $y = Fy$, где $y = x'$.

Проверим условия теоремы 4. Вначале докажем равномерную сходимость последовательности $\{F_i\}$ к оператору F . Пусть $\{y_i\} \subset L$, $\|y_i - y\| \rightarrow 0$. Воспользуемся неравенством $\|F_i y_i - Fy\| \leq \|F_i y_i - F_i y\| + \|F_i y - Fy\|$. Согласно

условию (8.4) имеем $\|F_i y_i - F_i y\| = \|N_i K y_i - N_i K y\| \leq M \|K\| \|y_i - y\| \rightarrow 0$. Вследствие непрерывности функции $f(t, \cdot, x)$ в точке α при почти всех $t \in [a, b]$ выполнено $|f(t, \varsigma_i, (Ky)(t)) - f(t, \alpha, (Ky)(t))| \rightarrow 0$. А так как имеет место оценка $|f(t, \varsigma_i, (Ky)(t))| \leq M |(Ky)(t)| + \bar{f}(t)$, то

$$\|F_i y - F y\| = \|f(\cdot, \varsigma_i, (Ky)(\cdot)) - f(\cdot, \alpha, (Ky)(\cdot))\| \rightarrow 0$$

согласно теореме Лебега [21; гл. III, 6, п. 16].

В заключение заметим, что операторы F_i в совокупности локально сжимающие. Это следует из условия (8.4) и неравенства (22), в котором можно взять $\varepsilon < 1/M$.

Теорема 6 доказана.

§ 9. Приближенное решение задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений

В качестве еще одного приложения результатов исследования корректности уравнений Вольтерра приведем метод приближенного решения задачи (19)–(20).

Будем предполагать, что выполнено условие (8.7), гарантирующее вольтерровость оператора $K: L([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b], \mathbb{R}^n)$ на совокупности отношений эквивалентности (21). Выберем точки $a = t_k \leq t_{k-1} \leq \dots \leq t_2 \leq t_1 \leq t_0 = c = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{k-1} \leq s_k = b$ так, чтобы $(b - c)(t_i - a) = (c - a)(b - s_i)$, $(s_{i+1} - t_{i+1}) - (s_i - t_i) > 0$ при всех $i = \overline{0, k-1}$. Обозначим

$$\tau_k = \max_{i=\overline{0, k-1}} (s_{i+1} - t_{i+1} - s_i + t_i).$$

Определим функции $g_k, d_k: [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\mathcal{K}_k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (см. рис. 5, 6) формулами:

$$g_k(s) = \begin{cases} s_{i+1}, & \text{если } s \in [t_{i+1}, t_i), \quad i = \overline{0, k-1}, \\ t_{i+1}, & \text{если } s \in (s_i, s_{i+1}], \quad i = \overline{0, k-1}, \end{cases}$$

$$d_k(s) = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{если } s \in [t_{i+1}, t_i), \quad i = \overline{0, k-1}, \\ s_{i+1}, & \text{если } s \in (s_i, s_{i+1}], \quad i = \overline{0, k-1}, \end{cases}$$

$$\mathcal{K}_k(t, s) = \begin{cases} 0 & \text{при почти всех } (t, s) \text{ таких, что } (t - d_k(s))(g_k(s) - t) \geq 0, \\ \mathcal{K}(t, s) & \text{при почти всех } (t, s) \text{ таких, что } (t - d_k(s))(g_k(s) - t) < 0. \end{cases}$$

Оператор

$$K_k: L([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L([a, b], \mathbb{R}^n), \quad (K_k y)(t) = \int_a^b \mathcal{K}_k(t, s) y(s) ds,$$

является τ -вольтерровым на подсистеме $\omega_k = \{v(\gamma_i) \mid i = \overline{0, k}\} \subset v$ отношений эквивалентности

$$(x, y) \in v(\gamma_i) \Leftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \in [t_i, s_i].$$

 Рис. 5. Ядро оператора K

 Рис. 6. Ядро оператора K_k

Предлагаемый приближенный метод решения задачи (19)–(20) состоит в замене уравнения (19) “приближенным” уравнением

$$x'_k(t) = f\left(t, x_k(c), \int_a^b \mathcal{K}_k(t, s) x'_k(s) ds\right), \quad t \in [a, b]. \quad (23)$$

При любом $k = 1, 2, \dots$ задача Коши с начальным условием

$$x_k(c) = \alpha \quad (24)$$

для уравнения (23) имеет единственное глобальное решение z_k . Это решение может быть вычислено с помощью рекуррентной формулы:

$$\begin{aligned} \text{при } t \in [t_1, s_1] \quad z_k(t) &= z_{k1}(t) = \alpha + \int_c^t f(s, \alpha, 0) ds; \\ \text{при } t \in [t_2, s_2] \quad z_k(t) &= z_{k2}(t) = \alpha + \int_c^t f\left(s, \alpha, \int_{t_1}^{s_1} \mathcal{K}(s, \xi) z'_{k1}(\xi) d\xi\right) ds; \\ &\dots \dots \dots \\ \text{при } t \in [t_k, s_k] \quad z_k(t) &= z_{kk}(t) = \alpha + \int_c^t f\left(s, \alpha, \int_{t_{k-1}}^{s_{k-1}} \mathcal{K}(s, \xi) z'_{k-1}(\xi) d\xi\right) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть

(9.1) при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, \alpha, x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ измерима,

(9.2) функция $f(\cdot, \alpha, 0): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ суммируема,

(9.3) существует такое число M , что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство $|f(t, \alpha, x_1) - f(t, \alpha, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$,

и, кроме того, выполнены условия (8.5)–(8.7). Тогда задача (19)–(20) имеет единственное глобальное решение z , частью которого является всякое локальное решение; последовательность построенных по формуле (25) функций $z_k \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ сходится к решению z , т.е. $\|z_k - z\|_{AC} \rightarrow 0$ при $\tau_k \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предельном случае, когда шар $U_{(\alpha, \delta)}$ вырождается в одну точку α , условия (8.1)–(8.4) совпадают с условиями (9.1)–(9.3). Таким образом, существование, единственность, глобальная продолжаемость решения задачи (19)–(20) следует из теоремы 6.

Обозначим $(Ny)(t) = f(t, \alpha, y(t))$. Как показано при доказательстве теоремы 6, оператор N непрерывно действует в пространстве L и ограничен. Пусть $F_k, F: L \rightarrow L$ – операторы, определяемые равенствами $F_k = NK_k$, $F = NK$. Задачу Коши (19)–(20) представим уравнением $y = Fy$, где $y = x'$. Приближенную задачу (23)–(24) запишем в виде $y_k = F_k y_k$, где $y_k = x'_k$.

Имеем $\|F_k y_k - Fy\|_L \leq M\|K_k y_k - Ky\|_L \leq M(\|K_k y_k - K_k y\|_L + \|K_k y - Ky\|_L)$. Оценивая первое слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} \|K_k y_k - K_k y\|_L &\leq \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}_k(t, s)| |y_k(s) - y(s)| ds \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| |y_k(s) - y(s)| ds \leq \|K\| \|y_k - y\|_L. \end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем $\tau > 0$, удовлетворяющее условию (8.5). Выберем $\tau_k \in (0, \tau)$. Для любого измеримого множества $E \subset [a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_E |\mathcal{K}_k(\cdot, s) - \mathcal{K}(\cdot, s)| ds \right\|_L \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{[t_i, t_{i-1}] \cup [s_{i-1}, s_i]} \left(\int_{([t_i, t_{i-1}] \cup [s_{i-1}, s_i]) \cap E} |\mathcal{K}(t, s)| ds \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon \text{mes}([t_k, t_{k-1}] \cup [s_{k-1}, s_k] \cap E) = \varepsilon \text{mes } E. \end{aligned}$$

Отсюда, используя [9; гл. 3, п. 3.1, теорема 1.1], получаем оценку $\|K_k - K\| \leq \varepsilon$. Итак, доказано, что $\|F_k y_k - Fy\|_L \rightarrow 0$ при $\|y_k - y\|_L \rightarrow 0$.

Для доказательства совокупной локальной сжимаемости операторов F_k воспользуемся леммой 3. Выберем $\tau > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство (22) с $\varepsilon = 1/(2M)$. Пусть $\gamma, \xi \in [0, 1]$, $0 < (\gamma - \xi)(b - a) < \tau$, $y, u \in L$, $y(t) = u(t)$ на $[c - \xi(c - a), c + \xi(b - c)]$. Тогда

$$\begin{aligned} Z_L(\gamma, F_k y - F_k u) &= \int_{c - \gamma(c - a)}^{c - \xi(c - a)} |(NK_k y)(t) - (NK_k u)(t)| dt \\ &\quad + \int_{c + \xi(b - c)}^{c + \gamma(b - c)} |(NK_k y)(t) - (NK_k u)(t)| dt \\ &\leq M \int_{c - \gamma(c - a)}^{c - \xi(c - a)} \int_a^b |\mathcal{K}_k(t, s)| |y(s) - u(s)| ds dt \\ &\quad + M \int_{c + \xi(b - c)}^{c + \gamma(b - c)} \int_a^b |\mathcal{K}_k(t, s)| |y(s) - u(s)| ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq M \int_{c-\gamma(c-a)}^{c-\xi(c-a)} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| |y(s) - u(s)| ds dt \\
 &\quad + M \int_{c+\xi(b-c)}^{c+\gamma(b-c)} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| |y(s) - u(s)| ds dt \\
 &\leq M\varepsilon \|y - u\| = \frac{1}{2} \|y - u\|.
 \end{aligned}$$

Рассматриваемое неравенство останется верным, если принять $y(t) = u(t) = 0$ при почти всех $t \in [a, c - \gamma(c - a)] \cup [c + \gamma(b - c), b]$. В этом случае $\|y - u\| = Z_L(\gamma, y - u)$ и, таким образом, $Z_L(\gamma, F_k y - F_k u) \leq 0.5 \cdot Z_L(\gamma, y - u)$.

Итак, все условия теоремы 4 выполнены. Утверждение доказано.

Автор благодарит участников Тамбовского семинара под руководством А. И. Булгакова за многочисленные полезные обсуждения результатов этой работы.

Список литературы

- [1] А. Н. Тихонов, “О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики”, *Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. Сер. матем. и мех.*, **1:8** (1938), 1–25.
- [2] L. Tonelli, “Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra”, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **20** (1930), 31–48.
- [3] D. Graffi, “Sopra una equazione funzionali e la sua applicazione a un problema di fisica ereditaria”, *Ann. Mat. Pura. Appl. IV, Ser. 9*, 1931, 143–160, 161–179.
- [4] S. Cinquini, “Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra”, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6)*, **17** (1933), 616–621.
- [5] В. И. Сумин, “Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами”, *Докл. АН СССР*, **305:5** (1989), 1056–1059.
- [6] Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, Л. Ф. Рахматуллина, “О линейном функционально-дифференциальном уравнении эволюционного типа”, *Дифференц. уравнения*, **13:11** (1977), 1915–1925.
- [7] В. Г. Курбатов, “Линейные функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа и запаздывающий спектр”, *Сиб. матем. журн.*, **16:3** (1975), 538–550.
- [8] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.
- [9] Е. С. Жуковский, *Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Изд-во ТГУ, Тамбов, 2003.
- [10] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991.
- [11] Г. М. Вайнико, “Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений”, *Итоги науки и техники. Математический анализ*, **16**, ВИНТИ, М., 1979, 5–53.
- [12] Z. Artstein, “Continuous dependence of solutions of operator equations. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **231:1** (1977), 143–166.
- [13] Е. С. Жуковский, “Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2005, № 10(521), 17–28.
- [14] В. П. Максимов, “О предельном переходе в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **17:11** (1981), 1984–1994.

- [15] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.
- [16] Е. С. Жуковский, “Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах”, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 3–18.
- [17] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустырник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [18] Я. Курцвейль, “О непрерывной зависимости от параметра в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и об обобщении понятия дифференциального уравнения”, *УМН*, **12**:5 (1957), 257–259.
- [19] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский, “Теория уравнения нейтрального типа”, *Итоги науки и техники. Математический анализ*, **19**, ВИНТИ, М., 1982, 55–126.
- [20] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [21] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

Е. С. Жуковский (E. S. Zhukovskii)

Тамбовский государственный университет
им. Г. Р. Державина

E-mail: aib@tsu.tmb.ru

Поступила в редакцию

16.05.2005 и 19.06.2006