Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кругликов, О некоторых классификационных задачах в четырехмерной геометрии: распределения, почти комплексные структуры и обобщенные уравнения Монжа–Ампера, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 11, 61–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:59:58

УДК 514.763

Б. С. Кругликов

**О некоторых классификационных
задачах в четырехмерной геометрии:
распределения, почти комплексные структуры
и обобщенные уравнения Монжа–Ампера**

В работе рассматриваются три взаимосвязанные задачи классификации на четырехмерных многообразиях. Сперва мы рассматриваем и локально описываем регулярные распределения. Затем мы даем классификацию почти комплексных структур общего положения в терминах распределений. Наконец, мы классифицируем невырожденные обобщенные уравнения Монжа–Ампера в терминах $\{e\}$ -структур. Приложение посвящено симплектическим алгебрам Ли.

Библиография: 18 названий.

Введение

Понятие G -структуры [1], [2] обобщает понятие тензорного поля на многообразии. В частности, такие объекты, как векторные поля, распределения, почти комплексные структуры, метрики, ориентации (и многие другие), являются примерами G -структур. Некоторые из перечисленных G -структур допускают более простую классификацию, чем другие. В данной работе мы устанавливаем некоторые связи между различными G -структурами, что также может рассматриваться как классификация (в специальных терминах). Эта статья является продолжением и расширением опубликованной ранее работы [3].

Содержание работы следующее.

В §1 мы рассматриваем и описываем регулярные распределения на четырехмерных многообразиях. Результаты в большинстве своем хорошо известны, и для нужд §2 мы даем их краткий обзор.

В п. 2.1 мы локально классифицируем почти комплексные структуры общего положения (накладывая более строгие условия, чем в работе [4]) на четырехмерных многообразиях в терминах распределений, метрик и ориентаций. Мы показываем, что любое регулярное 2-распределение может быть локально образом тензора Ниенхейса. Это утверждение является теоремой о частичной реализации для инвариантов-распределений почти комплексной структуры. В п. 2.2 разрабатывается техника проектирования для почти комплексных структур, что также является обобщением так называемых (см. [5], [6]) кокомплексных структур на нечетномерных многообразиях. Мы называем соответствующие структуры прокомплексными и вводим в размерности три оператор Ниенхейса, который может быть легко обобщен до тензора-оператора Ниенхейса в любой нечетной размерности.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант № 96-0713).

В §3 мы рассматриваем эллиптические уравнения Монжа–Ампера на двумерных многообразиях. Уравнения гиперболического и смешанного типов исследовались ранее в [7] и [8]. В силу работы [9] эллиптическое уравнение Монжа–Ампера может быть рассмотрено как пара ортогональных 2-форм, одна из которых замкнута и невырождена, на четырехмерном многообразии или как почти комплексная структура на симплектическом многообразии. Используя инварианты почти комплексной структуры, мы вводим понятие невырожденного обобщенного эллиптического уравнения Монжа–Ампера и даем классификацию таких уравнений в терминах $\{e\}$ -структур. Соответствующая $\{e\}$ -структура является канонической в том смысле, что она удовлетворяет каноническим уравнениям для симплектической и почти комплексной структур. Кроме того, $\{e\}$ -структура является полным инвариантом, так что она дает критерий эквивалентности невырожденных уравнений Монжа–Ампера.

В приложении мы изучаем симплектические алгебры Ли, естественно возникающие при изучении однородных обобщенных уравнений Монжа–Ампера, т.е. уравнений с постоянными структурными функциями соответствующих $\{e\}$ -структур. Мы даем классификацию четырехмерных алгебр Ли, допускающих симплектическую структуру.

Автор глубоко признателен профессору В. В. Лычагину за внимание к работе.

§1. Распределения на четырехмерных многообразиях

Напомним, что p -распределением (в смысле Шевалле, см. [2]) или *регулярной p -дифференциальной системой* (в смысле Картана, см. [1]) на многообразии M^m называется сечение $\Pi^p \in \Gamma(\text{Gr}_p(M))$ расслоения Грассмана p -подпространств касательного расслоения T_*M . *Симметрией* распределения Π^p на M называется векторное поле v такое, что соответствующий поток диффеоморфизмов-сдвигов сохраняет распределение: $(\varphi_t)_*(\Pi_x^p) = \Pi_{\varphi_t(x)}^p$. Симметрия $v \in \text{Sym } \Pi^p$ называется *характеристической* [7], если она касательна к распределению: $v \in \text{Sym } \Pi^p \cap \Gamma(\Pi^p)$, где $\Gamma(\Pi^p)$ обозначает модуль сечений Π^p .

Напомним основные факты о 2-распределениях на $\mathbb{R}^3$. Каждое 2-распределение задано 1-формой $\alpha \neq 0$. Распределение является локально *регулярным*, если в некоторой окрестности форма $\alpha \wedge d\alpha$ имеет постоянный ранг. В случае $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ распределение интегрируемо, т.е. является касательным к слоению в силу теоремы Фробениуса. А в случае $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ по теореме Дарбу [1], [2] распределение локально изоморфно стандартному контактному. Легко видеть, что в каждом случае распределение имеет две трансверсальные симметрии, а характеристические симметрии существуют только в интегрируемом случае.

Вернемся к распределениям на $\mathbb{R}^4$. Все 1-распределения стандартны, а в силу обобщенной теоремы Дарбу [1], [2] каждое регулярное 3-распределение изоморфно надстройке над регулярным 2-распределением на $\mathbb{R}^3$. Остается только случай 2-распределений. Он также допускает канонические формы (см. [10]): в интегрируемом случае $\Pi^2 = \{dx_1 = dx_2 = 0\}$, в контактном — $\Pi^2 = \{dx_1 = 0, x_2 dx_3 - dx_4 = 0\}$, а в общем регулярном — распределение Π^2 определено в специальных координатах формами

$$\begin{cases} dx_1 + x_2 dx_4 = 0, \\ dx_2 + x_3 dx_4 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в каждом случае распределение Π^2 обладает двумя независимыми трансверсальными симметриями. В последнем случае симметриями являются поля $\partial_1 \pm \partial_4$. Мы используем этот факт в §2 и ниже доказываем его с помощью инварианта Танаки.

Напомним, что *инвариант Танаки* [11] регулярного распределения Π^p на многообразии M – это набор градуированных алгебр Ли $\mathcal{Q}(x)$ для каждой точки $x \in M$, ассоциированных с фильтрованными алгебрами $\{D^p(x) \subset T_x\}_{p \geq 1}$, где модуль сечений $\mathcal{Q}^{(p)}$ распределения D^p определен как $(p-1)$ -я производная $\mathcal{Q}^{(p)} = \partial^{(p-1)}\mathcal{Q}^{(1)} = \partial^{(p-2)}\mathcal{Q}^{(1)} + [\mathcal{Q}^{(1)}, \partial^{(p-2)}\mathcal{Q}^{(1)}]$ (здесь $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор векторных полей), $\partial^{(0)}\mathcal{Q}^{(1)} = \mathcal{Q}^{(1)}$ – модуль сечений начального распределения $D^1 = \Pi^p$, а произведение Ли индуцируется коммутатором векторных полей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каждое регулярное 2-распределение на $\mathbb{R}^4$ обладает локально двумя независимыми трансверсальными полями симметрии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим 2-распределение Π^2 на $\mathbb{R}^4$. Назовем распределение Π^2 *распределением общего положения*, если вторая производная распределения Π^2 не совпадает с первой, $\partial^{(2)}\Pi^2 \neq \partial^{(1)}\Pi^2 \neq \Pi^2$, т.е. $(\partial^{(2)}\Pi^2)_x = T_x\mathbb{R}^4$. В этом случае инвариант Танаки – градуированная алгебра Ли – имеет подлежащее пространство вида

$$\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}_1(x) \oplus \mathcal{Q}_2(x) \oplus \mathcal{Q}_3(x) \simeq \Pi_x^2 \oplus \Theta_x^1 \oplus \Xi_x^1.$$

Следовательно, в силу градуировки произведение Ли определено 2-формой на Π_x^2 со значениями в Θ_x^1 и 1-формой на Π_x^2 со значениями в $\text{Hom}(\Theta_x^1, \Xi_x^1)$. Так как можно тривиализовать расслоения Θ^1 и Ξ^1 , мы имеем 2- и 1-форму на распределении Π^2 . В общем случае эти формы ненулевые, и мы имеем канонически определенное распределение Π^1 , являющееся ядром 1-формы. Обозначим: $\Pi^3 = \partial^{(1)}\Pi^2 \supset \Pi^2$ и $\Pi^4 = T_\bullet\mathbb{R}^4$. Заметим, что распределение Π^1 выделено свойством $[v, w] \in \Gamma(\Pi^3)$ для всех $v \in \Gamma(\Pi^1)$ и $w \in \Gamma(\Pi^3)$.

Из рассмотрения инварианта Танаки следует, что распределение Π^2 может быть или интегрируемым, или контактным (в $\mathbb{R}^3$), или общего положения. В первых двух случаях утверждение предложения очевидно. Рассмотрим последний. Выпрявим 1-распределение Π^1 , т.е. введем координаты x_i , $1 \leq i \leq 4$, в $\mathbb{R}^4$ такие, что Π^1 порождено $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}^3 = \{x_1 = \text{const}\}$ с параметром x_1 на нем. Обозначим дифференцирование по этому параметру точкой: $\frac{d}{dx_1}f = \dot{f}$. Подпространства Π^2 и $\mathbb{R}^3$ пересекаются трансверсально по одномерному подпространству, порожденному вектором $v = \sum_{i=2}^4 a_i \partial_i \in \mathbb{R}^3$. Итак, $\Pi^2 = \langle \partial_1, v \rangle$ и мы имеем: $[\partial_1, v] = \dot{v} = \sum_{i=2}^4 \dot{a}_i \partial_i \in \mathbb{R}^3$.

Введем 2-распределение $\Phi^2 = \langle v, \dot{v} \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Оно не зависит от параметра x_1 на $\mathbb{R}^3(x_2, x_3, x_4)$. Действительно, в силу выбора ∂_1 мы имеем: $\ddot{v} = [\partial_1, \dot{v}] \in \langle \partial_1, v, \dot{v} \rangle$. Поскольку Φ^2 – распределение общего положения, оно контактно на $\mathbb{R}^3$ и обладает двумя трансверсальными симметриями w_1 и w_2 . Так как w_i – симметрия, то $[w_i, v] \in \Gamma(\Phi^2)$, т.е. $[w_i, v] = \lambda_i v + \mu_i \dot{v}$, $\lambda_i, \mu_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Легко проверить, что векторные поля $\dot{w}_i = -\mu_i \partial_1 + w_i$ являются искомыми трансверсальными симметриями для Π^2 .

§ 2. Четырехмерная почти комплексная геометрия

2.1. Почти комплексные структуры в $\mathbb{R}^4$. Напомним, что *почти комплексной структурой* j на многообразии M называется эндоморфизм касательного расслоения $j \in T^*M \otimes TM$ такой, что $j^2 = -\mathbf{1}_M$. Тензор Ниеенхейса $N_j \in \wedge^2 T^*M \otimes TM$ этой структуры определяется формулой

$$N_j(\xi, \eta) = [j\xi, j\eta] - j[j\xi, \eta] - j[\xi, j\eta] - [\xi, \eta],$$

где ξ и η — произвольные векторные поля, продолжающие заданные в точке векторы. Теорема Ньюлендера–Ниренберга [12] утверждает, что структура j интегрируема (или комплексна), если и только если $N_j \equiv 0$. В действительности, как доказано в работе [4], единственным формальным инвариантом почти комплексной структуры является струя тензора Ниеенхейса (см. детали в цитированной работе).

Рассмотрим почти комплексную структуру j в $\mathbb{R}^4$ в окрестности нуля. Предположим, что $(N_j)_0 \neq 0$. В этом случае образ $\text{Im } N_j(\cdot, \cdot)$ двумерен и комплексно порожден вектором $N_j(\xi, \eta) \neq 0$ для любых двух комплексно независимых векторов ξ и η . Рассмотрим 2-распределение $\Pi_x^2 = \text{Im}(N_j)_x \subset T_x = T_x \mathbb{R}^4$. Это распределение является инвариантом почти комплексной структуры, и, следовательно, его инварианты порождают инварианты почти комплексной структуры.

Предположим, что первая производная распределения Π^2 нетривиальна в нуле: $(\partial^{(1)}\Pi^2)_0 \neq \Pi_0^2$. Тогда мы имеем локально 3-распределение $\Pi^3 = \partial^{(1)}\Pi^2$. Существуют векторы $\xi_i = \xi_i(x) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, в пространстве $\Pi_x^3 \subset T_x$ такие, что $N_j(\xi_1, \xi_3) = \xi_1$, $N_j(\xi_2, \xi_3) = -\xi_2$. Действительно, для любого $\xi_3 \in \Pi^3 \setminus \Pi^2$ отображение $\eta \mapsto N(\eta, \xi_3)$ является обращающим ориентацию изоморфизмом Π^2 и, следовательно, существуют два одномерных инвариантных подпространства. Рассмотрим вектор ξ_1 на одном из них. Имеем: $N(\xi_1, \xi_3) = f\xi_1$, $f \neq 0$. Заменим вектор ξ_3 на $\frac{1}{f}\xi_3$. Тогда $N(\xi_1, \xi_3) = \xi_1$ и $N(j\xi_1, \xi_3) = -j\xi_1$, т.е. мы выбираем $\xi_2 = j\xi_1$.

Обозначим через $\Upsilon_1 = \langle \xi_1 \rangle$ и $\Upsilon_2 = \langle \xi_2 \rangle$ одномерные подпространства, порожденные векторами ξ_1 и ξ_2 , $\Pi_x^2 = (\Upsilon_1)_x \oplus (\Upsilon_2)_x$. Заметим, что выбор полупространства $(\Pi_x^3)^+ \subset \Pi_x^3 \setminus \Pi_x^2$, в котором лежит вектор ξ_3 , определяет этот вектор с точностью до Π_x^2 -сдвигов: $\xi_3 \mapsto \xi_3 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$. Если изменить полупространство: $\xi_3 \mapsto \tilde{\xi}_3 = -\xi_3$, то векторы ξ_1 и ξ_2 (и, следовательно, распределения Υ_1 и Υ_2) поменяются местами: $\tilde{\xi}_1 = \pm\xi_2$, $\tilde{\xi}_2 = \pm\xi_1$. Выбор полупространства в $\Pi_x^3 \setminus \Pi_x^2$, т.е. ориентации на $\Theta_x^1 = \Pi_x^3/\Pi_x^2$, равносильен выбору нумерации распределений Υ_1 и Υ_2 ; изменение этой ориентации меняет нумерацию. Другими словами, существует каноническая ориентация на двумерном пространстве $\Theta_x^1 \times \mathbb{P}(\Pi_x^2)$. Назовем эту ориентацию Θ -ориентацией. Заметим также, что в пространстве Π_x^3 выделена пара аффинных подпространств: $\{\pm\xi_3 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\}$, т.е. на Θ_x^1 фиксирована метрика. Назовем ее Θ -метрикой.

Рассмотрим факторпространство $\Xi_x^1 = T_x^4/\Pi_x^3$. Существует вектор $\xi_4 \notin \Pi_x^3$ такой, что $N_j(\xi_1, \xi_4) = \xi_2$, $N_j(\xi_2, \xi_4) = \xi_1$. В своем полупространстве $T_x^4 \setminus \Pi_x^3$ он определен с точностью до Π_x^2 -сдвигов: $\xi_4 \mapsto \xi_4 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$; таким образом, на Ξ_x^1 существует метрика. Назовем ее Ξ -метрикой. При изменении полупространства $\xi_4 \mapsto \tilde{\xi}_4 = -\xi_4$ меняется ориентация в одном из двух подпространств Υ_1 или Υ_2 : $\xi_1 \mapsto -\xi_1$ или $\xi_2 \mapsto -\xi_2$. Следовательно, на пространстве $\Upsilon_1^1 \times \Upsilon_2^1 \times \Xi^1$ имеется естественная ориентация. Назовем ее Ξ -ориентацией.

Назовем пару распределений Υ_i и Θ -, Ξ -метрики и ориентации $\Upsilon\Theta\Xi$ -инвариантом. Имеет место следующее утверждение (см. [4]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть тензоры Ниемхейса почти комплексных структур j_1 в $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(x)$ и j_2 в $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(y)$ не равны нулю и первые производные распределений Π_i^2 нетривиальны, $\partial^{(1)}\Pi_i^2 \neq \Pi_i^2$, $i = 1, 2$. Псевдоголоморфное или антипсевдоголоморфное отображение $u: (\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(x), j_1) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(y), j_2)$ существует тогда и только тогда, когда существует отображение $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(x) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(y)$, переводящее один $\Upsilon\Theta\Xi$ -инвариант в другой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если v является полем симметрий 2-распределения $\Pi^2 = \text{Im } N_j$, то векторному полю $w = jv$ соответствует поле автоморфизмов: $L_w j \in \text{Aut } \Pi^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения тензора Ниемхейса:

$$L_w j(\xi) = L_w(j\xi) - jL_w(\xi) = [j\xi, jv] - j[\xi, jv] \in \Pi^2, \quad \xi \in \Pi^2.$$

Теперь если $w = jv$ — также поле симметрии, мы получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Любое регулярное 2-распределение на $\mathbb{R}^4$ является локально образом тензора Ниемхейса $\Pi^2 = \text{Im } N_j$ для некоторой почти комплексной структуры j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем два сечения $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Pi^2)$, и пусть $\eta_1, \eta_2 \in \text{Sym } \Pi^2$ — две трансверсальные симметрии. В каждой точке x четыре вектора $((\xi_1)_x, (\xi_2)_x, (\eta_1)_x, (\eta_2)_x)$ образуют базис. Определим почти комплексную структуру формулами:

$$\begin{aligned} j\xi_1 &= \xi_2, & j\xi_2 &= -\xi_1, \\ j\eta_1 &= \eta_2, & j\eta_2 &= -\eta_1. \end{aligned}$$

Тогда $N_j(\xi_1, \eta_1) = [\xi_2, \eta_2] - j[\xi_2, \eta_1] - j[\xi_1, \eta_2] - [\xi_1, \eta_1]$ и, так как $L_{\eta_r} \xi_s \in \Pi^2$, мы имеем $N_j(\xi_1, \eta_1) \in \Pi^2$. В силу j -инвариантности Π^2 отсюда следует равенство $\text{Im } N_j = \Pi^2$.

2.2. Почти прокомплексные и кокомплексные структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем почти прокомплексной структурой на трехмерном многообразии Q однопараметрическую пару $(j^{(t)}, w^{(t)})_{t \in \mathbb{R}}$, где эндоморфизм $j^{(t)} \in T^*Q \otimes TQ$ имеет спектр $\text{Sp } j_x^{(t)} = \{0, \pm i\}$ и векторное поле $w^{(t)} \in \text{Ker } j^{(t)} \setminus \{0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Введенное понятие полностью эквивалентно понятию почти комплексной структуры j на $M^4 = \mathbb{R}^1 \times Q^3$. Чтобы получить одно из другого, надо выбрать координаты (t, x_1, x_2, x_3) в M^4 и положить $Q^3 \simeq Q_t^3 = \{t = \text{const}\}$. Можно считать, что $j\partial_t \in T_\bullet Q^3$. Обозначаем через pr проекцию на Q_t^3 вдоль ∂_t и полагаем $j^{(t)} := \text{pr} \circ j: T_\bullet Q_t^3 \rightarrow T_\bullet Q_t^3$ и $w^{(t)} := j\partial_t \in T_\bullet Q_t^3$.

Рассмотрим $j^{(t)}$ -инвариантное 2-распределение $\mathcal{C}_x^{(t)} = \text{Im } j_x^{(t)}$. Имеем: $T_x Q^3 = \mathcal{C}_x^{(t)} \oplus \mathbb{R}w_x^{(t)}$. Аналогом тензора Ниемхейса является оператор $\text{pr} \circ N_j(\partial_t, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *оператором Ниенхейса почти прокомплексной структуры* $(j^{(t)}, w^{(t)})$ оператор $A_j^{(t)} \in T^*Q^3 \otimes TQ^3$, определенный формулами:

$$A_j^{(t)}(w^{(t)}) = 0, \\ A_j^{(t)}(v) = (L_{w^{(t)}}j^{(t)})v - \left(j^{(t)} \circ \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} j^{(\tau)} \right) v, \quad v \in \mathcal{C}_x^{(t)}.$$

Определим 1-форму $\alpha^{(t)}$ на Q^3 следующим образом:

$$\alpha^{(t)}(v) = 0, \quad v \in \mathcal{C}_x^{(t)}; \quad \alpha^{(t)}(w_x^{(t)}) = 1.$$

Непосредственным вычислением проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $A_j^{(t)} \circ j^{(t)} = -j^{(t)} \circ A_j^{(t)} + L_{w^{(t)}}\alpha^{(t)} \otimes w^{(t)}.$

Напомним (см. [5]) определение *почти кокомплексной структуры*: это поле эндоморфизмов $j \in T^*Q \otimes TQ$ такое, что j имеет одномерное ядро и $j^2 = -1_Q$ на коядре. Мы используем слегка измененное определение из работы [6], где дополнительно требуется наличие ненулевого сечения ядра. Заметим, что почти комплексная структура – это то же самое, что и независимая от времени (от параметра t) почти прокомплексная структура. Легко проверить, что в кокомплексном случае оператором Ниенхейса является оператор $A_j = L_w j$.

Заметим также, что в рассмотренном случае условие вырождения оператора Ниенхейса не будет являться критерием интегрируемости. Действительно, чтобы увидеть это, можно рассмотреть границу строго псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^2$ и поле симметрии для соответствующей контактной структуры. Итак, в рассмотренном случае критерий интегрируемости сильнее: почти кокомплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда 2-распределение $\mathcal{C} = \text{Im } j$ интегрируемо и оператор Ниенхейса $A_j = L_w j$ равен нулю.

Докажем теперь, используя введенные понятия, частный случай теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2'. Каждое регулярное 2-распределение на $\mathbb{R}^3$, тривиально продолженное до 2-распределения $\Pi^2 = \Pi^2 \times \{\text{pt}\}$ на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, является образом тензора Ниенхейса $\Pi^2 = \text{Im } N_j$ для некоторой почти комплексной структуры j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем почти кокомплексную структуру. Пусть $\alpha^{(t)} = \alpha$ – ненулевая 1-форма на $\mathbb{R}^3$ с ядром $\Pi^2 = \text{Ker } \alpha$. Пусть $w^{(t)} = w$ – поле симметрии Π^2 и $\alpha(w) \equiv 1$, откуда следует равенство $L_w \alpha = 0$. Определим произвольным образом структуру $j: \Pi_\bullet^2 \rightarrow \Pi_\bullet^2$, удовлетворяющую условию $j^2(\xi) = -\xi$, $\xi \in \Pi_\bullet^2$. Из предложения 3 следует: $\text{Im } A_j = \text{Im } j = \Pi^2$. Итак, образ тензора Ниенхейса проектируется на Π^2 и, так как он j -инвариантен, то совпадает с Π^2 , что и требовалось доказать.

§3. Эллиптические уравнения Монжа–Ампера на двумерных поверхностях

В работе [9] была установлена глубокая связь между дифференциальными уравнениями Монжа–Ампера на многообразии L и эффективными формами на многообразии $M = T^*L$. В более общем случае (M – произвольное многообразие)

это позволяет рассматривать следующую конструкцию как модель для уравнения Монжа–Ампера (см. также [7], [13]). Мы затронем только четырехмерный случай, $\dim M = 4$, соответствующий уравнению Монжа–Ампера на двумерной поверхности, $\dim L = \frac{1}{2} \dim T^*L = 2$, но начальные рассуждения применимы и к общему случаю.

Рассмотрим симплектическое многообразие (M^4, ω) и 2-форму $\theta \in \Omega^2(M)$. Пара (ω, θ) определяет уравнение Монжа–Ампера по крайней мере локально, если $M = T^*L$. Рассмотрим эндоморфизм $j \in T^*M \otimes TM$, определенный формулой $\theta(X, Y) = \omega(jX, Y)$, $X, Y \in T_\bullet M$. Заметим, что в силу кососимметричности $\omega(jX, Y) = \omega(X, jY)$. Сформулируем хорошо известное утверждение [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\theta \wedge \omega = 0$, $\text{Pf}(\theta) = \frac{\theta \wedge \theta}{\omega \wedge \omega} > 0$;
2. j является конформно почти комплексной структурой, $j^2 = -f^2 \cdot \mathbf{1}$, $f \neq 0$.

Если потребовать дополнительно $\text{Pf}(\theta) \equiv 1$, что соответствует домножению θ на число, то j станет почти комплексной структурой. Случаю $\text{Pf}(\theta) \equiv -1$ отвечает структура j типа почти-произведение, $j^2 = \mathbf{1}$; случаю $\text{Pf}(\theta) \equiv 0$ – нильпотентная структура, $j^2 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем пару (ω, θ) на M^4 (или, что эквивалентно, пару (ω, j)), состоящую из симплектической формы ω и ортогональной 2-формы θ , $\theta \wedge \omega = 0$, обобщенным уравнением Монжа–Ампера (эллиптическим, гиперболическим или параболическим, если $\text{Pf}(\theta) > 0$, < 0 или $= 0$ соответственно).

Мы рассмотрим только эллиптический случай (предположим, что выполнено условие $\text{Pf}(\theta) \equiv 1$). Некоторые инварианты для гиперболического и смешанного случая содержатся в работах [7] и [8] соответственно (они не имеют канонической формы, как инварианты из теоремы 3).

Можно строить инварианты для обобщенного уравнения Монжа–Ампера (ω, j) , комбинируя инварианты для ω и j . По теореме Дарбу [1] симплектическая форма не имеет локальных инвариантов. Локальными (формальными) инвариантами для почти комплексной структуры j являются тензор Ниенхейса N_j (см. п. 2.1) и вышешие тензоры Ниенхейса $N_j^{(2)}, \dots$ (см. [4]).

Можно также строить инварианты для обобщенного уравнения Монжа–Ампера (ω, θ) следующим образом. По теореме Лепажа [7], [14] симплектическая форма ω делит 3-форму $d\theta = \omega \wedge \alpha$. По 1-форме α можно построить формы $\theta \wedge \alpha$, $d\alpha$ и т. д.

Объединим эти два подхода. Введем векторнозначную 2-форму:

$$R_j^\alpha(X, Y) = N_j(X, Y) - X\alpha(jY) + Y\alpha(jX) - jX\alpha(Y) + jY\alpha(X).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеет место следующее равенство:*

$$jR_j^\alpha = 2\omega \otimes X_\alpha.$$

Здесь X_α обозначает векторное поле, двойственное к 1-форме α : $\omega(X_\alpha, Z) = \alpha(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы

$$i_{[X,Y]} = [L_X, i_Y] = [i_X d + di_X, i_Y] = i_X di_Y + di_X i_Y - i_Y i_X d - i_Y di_X$$

(см. [15]) мы получаем:

$$\begin{aligned} i_{N_j(X,Y)}\theta &= i_{[jX,jY]}\theta - i_{j[X,jY]}\theta - i_{j[jX,Y]}\theta - i_{[X,Y]}\theta \\ &= i_{jX}di_Y\theta + di_{jX}i_Y\theta - i_{jY}i_{jX}d\theta - i_{jY}di_X\theta - i_Xdi_Y\theta \\ &\quad - di_Xi_Y\theta + i_Yi_Xd\theta + i_Ydi_X\theta + i_{[X,jY]}\omega + i_{[jX,Y]}\omega \\ &= -i_{jX}di_Y\omega + 2d[\theta(X,Y)] - i_{jY}i_{jX}d\theta + i_{jY}di_X\omega - i_Xdi_Y\theta \\ &\quad + i_Yi_Xd\theta + i_Ydi_X\theta + i_Xdi_Y\omega + di_Xi_Y\omega - i_{jY}i_Xd\omega \\ &\quad - i_{jY}di_X\omega + i_{jX}di_Y\omega + di_{jX}i_Y\omega - i_Yi_{jX}d\omega - i_Ydi_X\omega \\ &= -i_{jX}di_Y\omega + 2d[\theta(X,Y)] - i_{jY}i_{jX}d\theta + i_{jY}di_X\omega - i_Xdi_Y\theta \\ &\quad + i_Yi_Xd\theta + i_Ydi_X\theta + i_Xdi_Y\theta + 2d[\theta(Y,X)] - i_{jY}i_Xd\omega \\ &\quad - i_{jY}di_X\omega + i_{jX}di_Y\omega - i_Yi_{jX}d\omega - i_Ydi_X\theta \\ &= d\theta(X,Y, \cdot) - d\theta(jX, jY, \cdot). \end{aligned}$$

Заметим, что это тождество может быть также получено из выражения для $d\theta$, которое следует из формулы Картана:

$$\begin{aligned} d\theta(X,Y,Z) &= \partial_X\omega(jY,Z) - \partial_{jX}\omega(Y,Z) \\ &\quad + \omega([jX,Y] - j[X,Y], Z) + \omega(Y, [jX,Z] - j[X,Z]). \end{aligned}$$

Используя соотношение для $i_{N_j(X,Y)}\theta$ и формулу $d\theta = \omega \wedge \alpha$, имеем:

$$d\theta(X,Y,Z) = \omega(X,Y)\alpha(Z) + \omega(Z,X)\alpha(Y) + \omega(Y,Z)\alpha(X)$$

и аналогично для $d\theta(jX, jY, Z)$. В итоге:

$$\begin{aligned} \theta(N_j(X,Y), Z) &= \omega(jN_j(X,Y), Z) = \omega(Z,X)\alpha(Y) + \omega(Y,Z)\alpha(X) \\ &\quad - \omega(Z, jX)\alpha(jY) - \omega(jY, Z)\alpha(jX) + 2\omega(X,Y)\alpha(Z). \end{aligned}$$

Переносим все члены кроме последнего в левую часть равенства, мы получаем $\omega(jR_j^\alpha(X,Y), Z) = 2\omega(X,Y)\alpha(Z)$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Интегрируемость почти комплексной структуры j эквивалентна замкнутости формы θ , $d\theta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d\theta = 0$, тогда $\alpha = 0$, $X_\alpha = 0$, $R_j^\alpha = 0$ и $N_j = 0$ (это утверждение содержится в доказательстве теоремы 1.5 из [13] и следует из теоремы Ньюлендера–Ниренберга [12] и предложения 5). Рассмотрим теперь обратное утверждение, пусть j будет интегрируемой почти комплексной структурой. Тогда $N_j = 0$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Существует базис (X, jX, Y, jY) такой, что $X, jX, Y \in \text{Ker } \alpha$, $\alpha(jY) = 1$. Имеем: $-X = R_j^\alpha(X,Y) \in \langle jX_\alpha \rangle$ и $-jX = R_j^\alpha(jX,Y) \in \langle jX_\alpha \rangle$; получили противоречие. Итак, $\alpha = 0$ и $d\theta = 0$.

Обозначим через $\Gamma_\alpha^1 = \langle X_\alpha \rangle$ одномерное распределение, порожденное векторным полем X_α . Из предложения 5 следует, что $jR_j^\alpha(X,Y) \in \Gamma_\alpha^1$ для всех $X, Y \in T_\bullet M$. Так как по определению $(\Gamma_\alpha^1)^{\perp\omega} = \text{Ker } \alpha$, то $\Gamma_\alpha^1 \subset \text{Ker } \alpha$.

ЛЕММА 1. Пусть почти комплексная структура j невырождена в точке $x \in M$ (и, следовательно, в некоторой окрестности $\mathcal{O}_M(x) \subset M$), т.е. $N_j|_x \neq 0$. Тогда образ тензора Ниемхейса является (локально) 2-распределением $\Pi_j^2 = \text{Im } N_j$, имеют место включения $\Gamma_\alpha^1 \subset \Pi_j^2 \subset (\Gamma_\alpha^1)^\perp$ и, более того, $\Pi_j^2 = (\text{Ker } \alpha) \cap j(\text{Ker } \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\dim(\Pi_j)_{x'} = 2$, $x' \in \mathcal{O}_M(x)$ (см. п. 2.1). По определению имеем:

$$\begin{aligned} \alpha(jN_j(X, Y)) &= \alpha(jN_j(X, Y)) - \alpha(jX)\alpha(jY) + \alpha(jY)\alpha(jX) \\ &\quad + \alpha(X)\alpha(Y) - \alpha(Y)\alpha(X) = \alpha(jR_j^\alpha(X, Y)) = 0, \end{aligned}$$

откуда $\Pi_j^2 \subset \text{Ker } \alpha = (\Gamma_\alpha^1)^\perp$.

Далее, так как вектор X_α косоортогонален $\text{Ker } \alpha$, то каждая дополнительная к X_α плоскость в $\text{Ker } \alpha$ – симплектическая и, следовательно, каждая лагранжева плоскость в $\text{Ker } \alpha$ содержит Γ_α^1 . В силу равенства $\omega(X, jX) = 0$ каждое двумерное j -инвариантное подпространство – лагранжево и, следовательно, $\Gamma_\alpha^1 \subset \Pi_j^2$. Последнее утверждение леммы очевидно.

Пусть распределение $\Pi_j^3 = \partial^{(1)}\Pi_j^2$ является первой производной распределения Π_j^2 (см. [11] и п. 2.1). Следующая лемма дает условия регулярности распределений Π_j^2 и Π_j^3 в окрестности точки $x \in M$.

ЛЕММА 2. Если $N_j|_x \neq 0$, то Π_j^2 является 2-распределением на $\mathcal{O}_M(x)$. Если $R_j^\alpha|_x = 0$, то $N_j|_x = 0$. Π_j^3 является 3-распределением, отличным от $\text{Ker } \alpha$ на M и таким, что $\Pi_j^3 \cap \text{Ker } \alpha = \Pi_j^2$, тогда и только тогда, когда $d\alpha|_{\Pi_j^2} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $R_j^\alpha = 0$ в точке $x \in M$, то из предложения 5 получаем:

$$N_j(X, Y) = X\alpha(jY) - Y\alpha(jX) + jX\alpha(Y) - jY\alpha(X).$$

Отсюда и из определения тензора Ниемхейса следует

$$-jN_j(X, Y) = N_j(jX, Y) = jN_j(X, Y).$$

Итак, $N_j(X, Y) = 0$ для всех $X, Y \in T_x M$.

Если $X, Y \in \Pi_j^2$, то по формуле Картана $d\alpha(X, Y) = \alpha([Y, X])$, и эквивалентность условий $d\alpha|_{\Pi_j^2} \neq 0$ и $\Pi_j^3 \neq \text{Ker } \alpha$ очевидна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем обобщенное эллиптическое уравнение Монжа–Ампера (ω, θ) (или (ω, j)) невырожденным в точке $x \in M$, если, во-первых, почти комплексная структура j неинтегрируема в этой точке, $N_j|_x \neq 0$, т.е. в окрестности $\mathcal{O}_M(x)$ определено 2-распределение $\Pi_j^2 = \text{Im } N_j$, и, во-вторых, если это распределение также неинтегрируемо, т.е. определено производное 3-распределение $\Pi_j^2 \subset \Pi_j^3 \neq \text{Ker } \alpha$.

1°. Рассмотрим невырожденные (эллиптические) обобщенные уравнения Монжа–Ампера.

Пусть $X_0 \in \Gamma_\alpha^1 \setminus \{0\}$. Существует вектор $Y_0 \notin \Pi_j^2$ такой, что $N_j(X_0, Y_0) = X_0$.

ЛЕММА 3. $\alpha(X_0) = \alpha(jX_0) = \alpha(Y_0) = 0$, $\alpha(jY_0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как векторы X_0, jX_0, Y_0, jY_0 образуют базис в $T_x M$, то из формулы

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha^1 &= \langle X_0 \rangle \ni jR_j^\alpha(X_0, Y_0) \\ &= jX_0 - jX_0\alpha(jY_0) + jY_0\alpha(jX_0) + X_0\alpha(Y_0) - Y_0\alpha(X_0)\end{aligned}$$

следует, что $\alpha(X_0) = \alpha(jX_0) = 0$, $\alpha(jY_0) = 1$, $jR_j^\alpha(X_0, Y_0) = X_0\alpha(Y_0)$.

Кроме того,

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha^1 &= \langle X_0 \rangle \ni jR_j^\alpha(X_0, jY_0) \\ &= X_0 + jX_0\alpha(Y_0) - Y_0\alpha(jX_0) + X_0\alpha(jY_0) - jY_0\alpha(X_0),\end{aligned}$$

откуда следует равенство $\alpha(Y_0) = 0$.

Вектор Y_0 определен с точностью до Π_j^2 -сдвигов, что верно и для jY_0 . Таким образом, вектор $P_1 \in \Gamma_\alpha^1$, удовлетворяющий условию $\omega(P_1, jY_0) = 1$, определен однозначно (напомним, что $jY_0 \notin \text{Ker } \alpha = (\Gamma_\alpha^1)^\perp = (P_1)^\perp$). Полагаем $P_2 = jP_1$.

В силу невырожденности обобщенного уравнения Монжа–Ампера (ω, j) для векторных полей $P_1, P_2 \in \Gamma(TM)$ выполнено: $Z_0 = [P_1, P_2] \in \Pi_j^3 \setminus \Pi_j^2$. Обозначим через L^1 пересечение подпространства $\text{Ker } \alpha$ с комплексной линией $\mathbb{C}Z_0 = \langle Z_0, jZ_0 \rangle$. Существует единственный вектор Q_2 на трансверсальной линии L^1 к Π_j^2 в $\text{Ker } \alpha$, удовлетворяющий равенству $N_j(P_1, Q_2) = P_1$. Полагаем $Q_1 = jQ_2$.

Рассуждения, приведенные выше, доказывают следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Невырожденное обобщенное уравнение Монжа–Ампера (ω, j) канонически определяет $\{e\}$ -структуру, т.е. поле базисных реперов (P, Q) . Эта структура является полным инвариантом, т.е. два невырожденных обобщенных уравнения Монжа–Ампера изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие $\{e\}$ -структуры. Классифицирующая $\{e\}$ -структура удовлетворяет следующим соотношениям:*

$\omega(\uparrow, \leftarrow)$	P_1	P_2	Q_1	Q_2
P_1	0	0	1	0
P_2	0	0	0	1
Q_1	-1	0	0	0
Q_2	0	-1	0	0

$N_j(\uparrow, \leftarrow)$	P_1	P_2	Q_1	Q_2
P_1	0	0	$-P_2$	P_1
P_2	0	0	$-P_1$	$-P_2$
Q_1	P_2	P_1	0	0
Q_2	$-P_1$	P_2	0	0

X	P_1	P_2	Q_1	Q_2
jX	P_2	$-P_1$	$-Q_2$	Q_1

X	P_1	P_2	Q_1	Q_2
$\alpha(X)$	0	0	1	0

ЗАМЕЧАНИЕ 2. $\{e\}$ -структура (f_i) – это поле базисных реперов на многообразии M . Пусть $[f_i, f_j] = c_{ij}^k f_k$. Функции c_{ij}^k (инварианты) на многообразии M называются *структурными функциями* (*структурными константами* в случае группы Ли). Можно записать обобщенное уравнение Монжа–Ампера в этих инвариантах. $\{e\}$ -структура является частным случаем G -структуры, когда группа $G \subset \text{Gl}(T_\bullet M)$ тривиальна: $G = \{e\}$ (см. [1], [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что 1-распределения $\langle P_1 \rangle$ и $\langle P_2 \rangle$ в общем случае отличны от Υ_1 и Υ_2 (см. п. 2.1). Так как все эти распределения лежат в 2-распределении Π_j^2 , то комбинируя их, мы можем получить новые инварианты. Рассмотрим, например, наклон прямой Υ_1 в базисе (P_1, P_2) плоскости Π_j^2 , т.е. угол по модулю π . Этот инвариант обобщенного уравнения Монжа–Ампера (ω, j) связан с $\{e\}$ -структурой следующим образом. Определим действие комплексной прямой на касательном расслоении по формуле: $(x + iy)W = xW + y(jW)$, $W \in T_\bullet M$. Пусть $w \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ такая комплекснозначная функция, что для векторного поля $Z_0 = [P_1, P_2]$ выполнено: $\alpha(wZ_0) = 0$, т.е. $wZ_0 \in L^1$. Потребуем дополнительно, чтобы $|w| \equiv 1$ и чтобы в данной точке

$$\text{или } \operatorname{Re}(w) > 0, \text{ или } \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = 0, \\ \operatorname{Im}(w) > 0. \end{cases}$$

Этими условиями функция w определена однозначно (в предположении непрерывности w). Наклон прямой Υ_1 в базисе (P_1, P_2) выражается формулой $\varphi = \frac{1}{2} \arg w$. Заметим, что изменение параметризующей функции $w \mapsto -w$ эквивалентно изменению 1-распределения $\Upsilon_1 \mapsto \Upsilon_2$ или $\varphi \mapsto \varphi + \pi/2$.

2°. Рассмотрим теперь вырожденные уравнения Монжа–Ампера. Возможны два случая: структура j интегрируема, т.е. $\alpha = 0$ (см. следствие из предложения 5), и структура j неинтегрируема, т.е. $\alpha \neq 0$. В первом случае заменой координат в уравнении можно получить постоянные коэффициенты [13]. Во втором случае определено интегрируемое 2-распределение Π_j^2 . Из лемм 1 и 2 следует

ЛЕММА 4. *Распределение Π_j^2 интегрируемо тогда и только тогда, когда $d\alpha|_{\Pi_j^2} \equiv 0$ и $d(i_j\alpha)|_{\Pi_j^2} \equiv 0$.*

Здесь так же, как и в случае 1°, канонически определяются два векторных поля P_1 и P_2 , а два других векторных поля определены с точностью до сдвигов. Классификационная теорема может быть получена аналогично теореме 1.

3°. Рассмотрим примеры левоинвариантных уравнений Монжа–Ампера на группе Ли. Это отвечает случаю, когда структурные функции $c_{ij}^k = [e_i, e_j]^k$ из замечания 2 являются постоянными. В силу инвариантности можно говорить об алгебре Ли.

ПРИМЕР 1. Пусть четырехмерная разрешимая алгебра Ли $\mathcal{G}$ задается следующими правилами коммутирования: $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = -e_3$, $[2e_4, e_1] = e_1 - e_2$, $[2e_4, e_2] = e_1 + e_2$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$ (случай 1(ii) из теоремы 4 приложения при $\lambda = \frac{1}{2}$). Рассмотрим 2-формы $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ и $\theta = e_2^* \wedge e_4^* - e_1^* \wedge e_3^*$, где базис e_i^* двойствен базису e_i . Можно проверить, что на группе Ли форма ω будет замкнута и $\omega \wedge \theta = 0$. Таким образом, пара (ω, θ) задает обобщенное уравнение Монжа–Ампера. Это уравнение эллиптическое, и соответствующая почти комплексная структура имеет вид: $je_1 = e_4, je_2 = e_3$, а тензор Нийенхейса определяется из условия $N_j(e_1, e_2) = a = \frac{3}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4$. Рассматриваемое уравнение будет невырожденным, форма $\alpha = \frac{3}{2}e_1^* + \frac{1}{2}e_2^*$, а вектор $X_\alpha = b = \frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2$. Распределение Π_j^2 совпадает с $\langle a, b \rangle$, а коммутатор имеет вид $c = [a, b] = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{4}e_2$. Таким образом, $L^1 = \operatorname{Ker} \alpha \cap \langle c, jc \rangle = \langle jc \rangle$, и мы получаем: $P_1 = a, P_2 = -b, Q_1 = \frac{4}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2, Q_2 = \frac{2}{5}e_3 - \frac{4}{5}e_4$. Чтобы записать этот репер на группе Ли G , естественнее всего выбрать экспоненциальные координаты, превращающие окрестность единицы

в окрестность нуля в линейном пространстве. Для этого нужно воспользоваться формулой, выражающей значение в точке $\exp(X) \in G$ (соответствующей вектору $X \in \mathcal{G}$) левоинвариантного векторного поля, равного η в единице группы G :

$$(L_{\exp(X)})_* \eta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{k!} \operatorname{ad}_X^k \eta,$$

где B_k — числа Бернулли. Это выражение следует из формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа [16], и оно позволяет выписать в локальных координатах поля P_i, Q_i , задающие уравнение Монжа–Ампера.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим нильпотентную алгебру Ли, заданную правилами коммутирования: $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_2$, $[e_i, e_j] = 0$ для остальных $i < j$ (теорема 4, случай 2(iii)). Выберем базис $P_1 = e_1$, $P_2 = e_2$, $Q_1 = e_3$, $Q_2 = e_4$ и рассмотрим обобщенное уравнение Монжа–Ампера $\omega = P_1^* \wedge Q_1^* + P_2^* \wedge Q_2^*$, $\theta = P_1^* \wedge Q_2^* - P_2^* \wedge Q_1^*$. Чтобы перейти от обобщенного уравнения к обыкновенному, нужно выбрать лагранжево подмногообразие $L^2 \subset M^4$, отождествить его окрестность с кокасательным расслоением $UL \simeq T^*L$ и подставить выражение $p = \frac{\partial u}{\partial q}$ в уравнение $\theta(p, q) = 0$ (где (p, q) — канонические координаты). Можно проверить, что для экспоненциальных координат (x_1, x_2, x_3, x_4) , введенных в окрестности единицы и ассоциированных с выбранным базисом e_i , многообразие $L^2 = \{x_3 = c_1, x_4 = c_2\}$ является лагранжевым. Выбирая координаты $q_1 = x_3$, $q_2 = x_4$ и вводя сопряженные координаты p_1, p_2 по теореме Вейнштейна, мы получаем обыкновенное уравнение Монжа–Ампера $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial q_2}$ на пространстве $\mathbb{R}^2(q_1, q_2)$, реализующее рассмотренное выше обобщенное уравнение.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим также случай абелевой четырехмерной алгебры Ли $\mathcal{G}$. Пусть вырожденное уравнение Монжа–Ампера задается симплектической формой $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ и 2-формой $\theta = dp_1 \wedge dp_2 - dq_1 \wedge dq_2$, $\operatorname{Pf}(\theta) = 1$. Симплектическое преобразование $p_2 \mapsto q_2$, $q_2 \mapsto -p_2$ переводит форму θ в форму $\theta' = dp_1 \wedge dq_2 + dq_1 \wedge dp_2$. Подставляя $p_i = \frac{\partial u}{\partial q_i}$, мы получаем взаимно однозначное соответствие между (обобщенными) решениями уравнения $\det \operatorname{Hess}(u) = 1$ и решениями уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.

Приложение. Симплектические алгебры Ли

Для любого базиса $e_1 = P_1$, $e_2 = P_2$, $e_3 = Q_1$, $e_4 = Q_2$ алгебры Ли можно определить левоинвариантную почти комплексную структуру j и невырожденную 2-форму ω на группе Ли формулами из теоремы 3. Заметим, что форма ω может оказаться незамкнутой. Более того, для некоторых групп Ли все такие формы будут незамкнуты. В качестве примера покажем, что группа Ли $G = \operatorname{SU}(2) \times S^1$ не допускает левоинвариантной симплектической формы. Комплекс де Рама для левоинвариантных дифференциальных форм на G совпадает с комплексом для когомологий алгебры Ли $\mathcal{G}$ с коэффициентами в тривиальном модуле $\mathbb{R}$. Для алгебры Ли $\mathcal{G} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}^1$ имеем в силу формулы Кюннета: $H^2(\mathcal{G}; \mathbb{R}) = H^1(\mathfrak{su}(2), \mathbb{R}) \oplus H^2(\mathfrak{su}(2), \mathbb{R}) = 0$. В последнем равенстве мы воспользовались леммой Уайтхеда [17], утверждающей, что первая и вторая группы

когомологий полупростой алгебры Ли являются тривиальными. Итак, если инвариантная 2-форма ω на группе Ли G замкнута, то она является точной, $\omega = d\alpha$, а потому не может быть невырожденной в силу формулы Стокса:

$$\int_G \omega \wedge \omega = \int_G d(\alpha \wedge \omega) = \int_{\partial G} \alpha \wedge \omega = 0$$

(впрочем, несимплектичность многообразия $SU(2) \times S^1 \simeq S^3 \times S^1$ хорошо известна, но приведенный прием позволяет доказывать несимплектичность для больших размерностей).

Сказанное выше является мотивировкой для изучения симплектических алгебр Ли. Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{G}$ размерности $2n$ и соответствующий когомологический комплекс с дифференциалами $d: C^i \rightarrow C^{i+1}$ (см. [16], [17]), $C^i = \wedge^i \mathcal{G}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. 2-форма $\omega \in C^2$ на алгебре Ли $\mathcal{G}$ называется *симплектической*, если она невырождена и замкнута: $d\omega = 0, \omega^n \neq 0 \in C^{2n}$.

Каждая алгебра Ли размерности 2 (их две) является, очевидно, симплектической. Следующая теорема дает классификацию симплектических алгебр Ли размерности 4. Мы обозначаем коммутатор алгебры Ли $\mathcal{G}$ через $\mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ и пользуемся структурными уравнениями Маурера–Картана: $de_k^* = -\sum_{i < j} c_{ij}^k e_i^* \wedge e_j^*$.

ТЕОРЕМА 4. *Четырехмерная алгебра Ли $\mathcal{G}$ является симплектической, если и только если она удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. $\dim \mathcal{G}' = 3$ и $H^4(\mathcal{G}) = 0$. Здесь имеются три случая, описываемые уравнениями Маурера–Картана $de_4^* = 0, de_3^* = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ и

- (i) $de_1^* = \lambda e_1^* \wedge e_4^*, de_2^* = (1 - \lambda)e_2^* \wedge e_4^*, \lambda \neq 0, 1$,
- (ii) $de_1^* = \frac{1}{2}e_1^* \wedge e_4^* + \lambda e_2^* \wedge e_4^*, de_2^* = -\lambda e_1^* \wedge e_4^* + \frac{1}{2}e_2^* \wedge e_4^*$,
- (iii) $de_1^* = \frac{1}{2}e_1^* \wedge e_4^* + \lambda e_2^* \wedge e_4^*, de_2^* = \frac{1}{2}e_2^* \wedge e_4^*$.

2. В случае $\dim \mathcal{G}' = 2$ алгебра $\mathcal{G}$ задается структурными уравнениями Маурера–Картана $de_3^* = de_4^* = 0$ и

- (i) $de_1^* = e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_4^*, de_2^* = e_2^* \wedge e_3^* + \nu_1 e_1^* \wedge e_4^* + \nu_2 e_2^* \wedge e_4^*$,
- (ii) $de_1^* = e_1^* \wedge e_3^*, de_2^* = e_3^* \wedge e_4^*$,
- (iii) $de_1^* = e_2^* \wedge e_3^*, de_2^* = e_3^* \wedge e_4^*$,
- (iv) $de_1^* = e_1^* \wedge e_3^*, de_2^* = -e_2^* \wedge e_3^*$,
- (v) $de_1^* = e_2^* \wedge e_3^*, de_2^* = -e_1^* \wedge e_3^*$.

3. $\dim \mathcal{G}' = 1$. В этом случае структурные уравнения Маурера–Картана имеют вид $de_2^* = de_3^* = de_4^* = 0$ и

- (i) $de_1^* = e_1^* \wedge e_2^*$,
- (ii) $de_1^* = e_2^* \wedge e_3^*$.

4. Алгебра $\mathcal{G}$ коммутативна, $\mathcal{G}' = 0$.

При этом в случаях 1 и 2(i) симплектическая структура может быть выбрана точной, и множество таких структур является открытым в топологии Зариского в $\text{Im } d|_{C^1} \subset C^2$ и, в частности, всюду плотным. В остальных случаях симплектическая структура единственна (в случае 2(ii) с точностью до знака) и не является точной. В случаях 2(ii)–(iii) симплектическая структура имеет вид $\omega = e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_4^*$, а в случаях 2(iv)–(v), 3 и 4 – вид $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$.

Доказательство теоремы, а также некоторые конструкции, связанные с симплектическими алгебрами Ли, появятся в работе [18].

Список литературы

1. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
2. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Геометрия 1. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–297.
3. *Kruglikov B. S.* Some classificational problems in four dimensional geometry: distributions, almost complex structures and Monge–Ampere equations // Preprint of the University of Tromsø, № 96-17; e-print, <http://www.msri.org/abs/dg-ga/9611005>.
4. *Кругликов Б. С.* Тензоры Ниенхейса и препятствия к построению псевдоголоморфных отображений // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 541–561.
5. *Bouzon J.* Structures presque-cocomplexes // Univ. et Polytech. Torino Rend. Sem. Nat. 1964/1965. V. 24. P. 53–123.
6. *Sasaki S.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures // Tôhoku Math. J. 1960. V. 12. P. 459–476; II // (joint with Y. Hatakeyama) Tôhoku Math. J. 1961. V. 13. P. 281–294.
7. *Lychagin V.* Lectures on geometry of differential equations // Ciclo di conferenze tenute presso il Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate Università “La Sapienza”, Roma, 1992.
8. *Kushner A.* Symplectic geometry of mixed type equations // Amer. Math. Soc. Transl. 1995. V. 167. P. 131–142.
9. *Лычагин В. В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34. № 1. С. 137–165.
10. *Cartan E.* Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre // Ann. Ec. Normale. 1910. V. 27. P. 109–192; also // Euvres Completes. Paris: Gautier-Villars, 1953.
11. *Tanaka N.* On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups // J. Math. Kyoto Univ. 1970. V. 10. P. 1–82.
12. *Newlander A., Nirenberg L.* Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds // Ann. of Math. (2). 1957. V. 65. № 3. P. 391–404.
13. *Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Chekalov I. V.* A classification of Monge–Ampère equations // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1992. V. 26. № 3. P. 281–308.
14. *Libermann P., Marle C.-M.* Symplectic geometry and analytical mechanics. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1987.
15. *Frölicher A., Nijenhuis A.* Theory of vector-valued differential forms, II // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. 1956. V. 59. № 3. P. 338–359.
16. Семинар “Софус Ли”. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Библиотека сборника “Математика”. М.: ИЛ, 1962.
17. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
18. *Кругликов Б. С.* Симплектические и контактные алгебры Ли с приложением к уравнению Монжа–Ампера // Труды МИАН. 1998. Т. 221 (в печати).

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: kruglikov@glasnet.ru

Поступила в редакцию
06.02.1997