Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Матвеев, Интерполирование D^m -сплайнами и базисы в пространствах Соболева, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 11, 75–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:59:13

УДК 517.518

О. В. Матвеев

Интерполирование D^m -сплайнами и базисы в пространствах Соболева

Рассматривается приближение функций многих переменных интерполяционными D^m -сплайнами на нерегулярных сетках. Получены точные по порядку оценки (различных типов) погрешности приближения функций $f \in W_p^k(\Omega)$ в полунормах $\|D^l \cdot\|_{L_q}$ через модули гладкости k -х производных f в $L_p(\Omega)$. Как следствие этих результатов для любого $t \in \mathbb{N}$ построен базис в пространстве Соболева $W_p^k(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с минимально гладкой границей такой, что погрешность приближения функции $f \in W_p^k(\Omega)$ N -й частичной суммой ее разложения по этому базису оценивается через модуль гладкости $\omega_t(D^k f, N^{-1/n})_{L_p(\Omega)}$ порядка t .

Библиография: 44 названия.

Введение

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с минимально гладкой границей [1], $\Delta \subset \overline{\Omega}$, m – целое, $m > n/2$, и $L_2^m(\Omega)$ – множество непрерывных функций $g: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, у которых все обобщенные производные порядка m принадлежат $L_2(\Omega)$.¹ Интерполяционным D^m -сплайном $s = s(f, \Delta, m, \Omega)$ в простейшем случае называется решение вариационной задачи

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha g)^2 dx : g \in L_2^m(\Omega), g(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta \right\}, \quad (1)$$

где f – интерполируемая функция, определенная на $\overline{\Omega}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha|_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ (см. [2]). Эта вариационная задача имеет решение, если ее допустимое множество непусто, и это решение единственно тогда и только тогда, когда не существует ненулевого полинома степени $< m$, равного нулю на Δ [3]. Множество Δ здесь может быть дискретным (т.е. сеткой), но в общем случае Δ – произвольное подмножество $\overline{\Omega}$. Наряду с термином “ D^m -сплайны” употребляются также и другие названия: “функции тонких пластин”, “полигармонические сплайны”, “сплайны на хаотических сетках”; в дальнейшем мы будем говорить просто “сплайны”. Данный метод интерполирования линеен и коммутирует с движениями пространства. Сплайн $s(x)$ – полигармоническая функция порядка m на $\Omega \setminus \overline{\Delta}$, так как уравнением Эйлера для задачи (1)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00047).

¹При этом сужение g на любое ограниченное открытое множество $G \subset \Omega$ принадлежит пространству Соболева $W_2^m(G)$, см., например, [3; лемма 4].

является полигармоническое уравнение. В частности, при $n = 1$ получаем обычные кусочно полиномиальные сплайны степени $2m - 1$ дефекта 1.

Через $W_p^k(G)$, где G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, k – целое неотрицательное, $1 \leq p \leq \infty$, будем обозначать пространство Соболева [4], видоизмененное следующим образом: при $p = \infty$ наряду с ограниченностью требуется равномерная непрерывность на G производных порядка $\leq k$ функции $g \in W_p^k(G)$. Положим $\|D^k g\|_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|_1=k} \|D^\alpha g\|_{L_p(G)}$,

$$\bar{h} = \bar{h}(\Delta) = \sup_{x \in \Omega} \inf_{y \in \Delta} |x - y|, \quad \underline{h} = \underline{h}(\Delta) = \inf_{\substack{x, y \in \Delta \\ x \neq y}} |x - y|$$

(инфимум по пустому множеству считаем равным $+\infty$).

Аппроксимативные свойства сплайнов исследовались в работах автора [3], [5], [6], в которых получены точные по порядку (относительно $\bar{h}$) оценки погрешности приближения вида

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}, \quad (2)$$

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \omega(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)}, \quad (3)$$

а также изучены свойства сходимости сплайнов к интерполируемой функции в пространствах $W_p^k(\Omega)$. Здесь ω – модуль непрерывности,

$$\theta = \theta(k, p) = \begin{cases} k - l - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} & \text{при } p \leq q, \\ k - l & \text{при } p > q, \end{cases}$$

C – константа, зависящая от Ω, m, p, q либо от $\Omega, m, p, q, \varkappa$, где $\varkappa$ – величина, удовлетворяющая неравенствам²

$$\varkappa > 0, \quad \underline{h} > \varkappa \bar{h}. \quad (4)$$

В указанных работах эти вопросы исследованы для произвольных $\Delta, \Omega, m, n, k, l, p, q$, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

1) Случай $n = 1$ (Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш [7]–[11], А. Шарма, А. Мейер [12], [13], С. Норд [14], К. де Бор [15], Ю. Н. Субботин [16]–[18], Т. Лукас [19], М. Марсен [20], Н. Л. Зматраков [21], А. Ю. Шадрин [22] и др.; см. также монографии [23]–[26]). В работе [22] получены неравенства (2), (3) при произвольных Δ, m, k, l, p, q (считается, что Ω – конечный интервал, но это ограничение несущественно); более того, получена оценка погрешности приближения через модуль гладкости порядка $m - k$ производной $f^{(k)}$ в правой части. В большинстве работ, посвященных сплайнам одного переменного, используется алгебраический подход: сплайн является кусочно полиномиальной функцией, причем коэффициенты соответствующих полиномов удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений; используются свойства возникающих при этом матриц (диагональное преобладание, цикличность, осцилляционные матрицы и др.). Кроме того, в [15], [18], [22]

²Имеется ввиду, что во втором случае $C = g(\bar{h}/\underline{h})$, где $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая возрастающая неограниченная функция, зависящая от Ω, m, p, q , и $\underline{h} > 0$.

используется свойство экспоненциального убывания фундаментального сплайна (в соответствующих нормах), однако в доказательствах этого свойства также существенную роль играет кусочно-полиномиальная структура сплайна. В немногих случаях найдены точные мультипликативные константы в оценках погрешности сплайн-интерполяции [26].

Попутно отметим, что уже при $m = 2$, $\Omega = (0, 1)$ (кубические сплайны) обнаружился следующий факт: при некоторых k, l, p, q для любого $f \in W_p^k(\Omega)$ сплайны $s(f, \Delta_i, m, \Omega)$ сходятся к f в $W_q^l(\Omega)$, если $\Delta_i \subset \bar{\Omega}$ ($i \in \mathbb{N}$) и $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{h}(\Delta_i) = 0$, а при других k, l, p, q это неверно, но сходимость имеет место, если наложить некоторое дополнительное условие на последовательность $\{\Delta_i\}$. В качестве такого условия часто берется *условие квазиравномерности*: $\bar{h}(\Delta_i) = O(\underline{h}(\Delta_i))$,³ хотя рассматривались и другие ограничения. Аналогично, в некоторых случаях оценка (2) или (3) выполняется только с константой C , зависящей от $\varkappa$, где $\varkappa$ удовлетворяет (4).

2) $k = m$, $p = 2$, Ω – ограниченная область. Здесь Ж. Дюшон [28], [29] и А. Ю. Бежаев [30] использовали подход, основанный непосредственно на вариационном принципе. В [30] установлено неравенство (2) и доказана сходимость $s(f, \Delta_i, m, \Omega)$ к f в $W_2^m(\Omega)$ для любого $f \in W_2^m(\Omega)$ при $\bar{h}(\Delta_i) \rightarrow 0$. В более ранних работах [28], [29] получены аналогичные результаты для сплайнов $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$, т. е. функция f , определенная на Ω , приближается сплайном, определенным на $\mathbb{R}^n$ (подробнее об этом сказано ниже).

3) $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Delta = h\mathbb{Z}^n$ ($h > 0$). При этих условиях У. Мэдич и С. Нельсон [31], применяя методы гармонического анализа, доказали экспоненциальное убывание фундаментального сплайна в норме $\|\cdot\|_{L_\infty}$ (здесь удается найти в явном виде преобразование Фурье фундаментального сплайна). Отсюда можно вывести оценки вида (2), (3).

В настоящей статье получены оценки погрешности приближения сплайнами через модули гладкости производных интерполируемой функции, в частности неравенство вида

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \omega_{m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} \quad (5)$$

(где ω_{m-k} можно заменить на ω_{2m-k} при $\Omega = \mathbb{R}^n$), которое является усилением установленных в [3], [5], [6] оценок (2), (3). Мы пользуемся обозначениями

$$\omega_t(D^k g, \delta)_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|_1=k} \omega_t(D^\alpha g, \delta)_{L_p(G)},$$

$$\omega_t(g, \delta)_{L_p(G)} = \sup_{|a| \leq \delta} \left\| \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t}{i} g(x + ia) \right\|_{L_p(G_a)},$$

где t – целое неотрицательное, G_a – множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что отрезок $[x, x+ta]$ содержится в G . Кроме того, получены оценки других типов в ситуациях, когда оценка (5) оказывается недостаточной (приближение на компактных подмножествах Ω , а также случай $k = m$, $\theta = 0$). Рассматриваются и другие вопросы: точный порядок сходимости на соболевских классах интерполируемых функций, возможность аналитического представления сплайна.

³Это условие появлялось ранее и в многомерном случае, например при исследовании метода интерполирования Шепарда [27].

Простым следствием неравенства (5) является один результат, касающийся базисов в пространствах Соболева. Базисы в пространствах $W_p^k(\Omega)$ (вложенных в $W_\infty^0(\Omega)$), где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с минимально гладкой границей, были построены автором с помощью сплайнов $s(f, \Delta, m, \Omega)$ в работах [3], [6], в которых также фактически доказано неравенство

$$\sum_{l=0}^k \left\| D^l \left(f - \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i \right) \right\|_{L_p(\Omega)} N^{(k-l)/n} \leq C \omega_t(D^k f, N^{-1/n})_{L_p(\Omega)} \quad (6)$$

при $t = 1$ (для достаточно больших N), где $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i u_i$ – разложение функции $f \in W_p^k(\Omega)$ по специальному базису $\{u_i\}$, $C = C(\Omega, k, p)$ (т.е. C – некоторая константа, зависящая только от Ω, k, p). В данной работе оценка (6) установлена для тех же базисов при любом t . Точнее, для произвольных $t \in \mathbb{N}$ и Ω (здесь Ω ограничено) строится система функций $\{u_i : i \in \mathbb{N}\} \subset W_\infty^t(\Omega)$, являющаяся базисом в каждом пространстве $W_p^k(\Omega)$, где $k \leq t$ и $W_p^k(\Omega)$ вложено в $W_\infty^0(\Omega)$, причем выполняется (6) с константой $C = C(\Omega, t, p)$. Ранее базисы в $W_p^k(\Omega)$ были найдены в случае, когда граница Ω имеет гладкость C^k либо “склеена” из конечного числа частей, имеющих такую гладкость (З. Чисельский, Т. Фигель [32]). Отметим, что базисы в пространствах Соболева интенсивно изучались с конца 60-х годов (З. Чисельский, Ж. Домста, С. Шонфилд, Ю. Н. Субботин, С. Ропела, Т. Фигель и др.; см. библиографию в [32], а также цитированные здесь статьи). В ряде работ построены базисы, обладающие свойством (6). Вопрос о существовании для любого t базиса в пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных 2π -периодических функций со свойством (6), где $n = 1, k = 0, p = \infty, C = C(t)$, поставленный П. Л. Ульяновым, был решен Ю. Н. Субботиным, указавшим такие базисы [33]. Базис в $W_p^k(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, состоящей из конечного числа частей гладкости C^k , для которого выполняется (6) (где $C = C(\Omega, k, t)$, t – произвольное заданное), может быть построен с помощью результатов [34] (частное сообщение З. Чисельского).

Методы, которые применялись ранее в задачах аппроксимации сплайнами в частных случаях, опираются на специфику этих случаев и поэтому не могут быть применены в общей ситуации. Аппарат, используемый в данной работе, включает три основных момента: 1) ряд фактов теории функций многих действительных переменных – леммы 1–5, 12 (а также теоремы вложения и теоремы продолжения для пространств Соболева); 2) свойство экспоненциального убывания сплайна на подобласти Ω , содержащей нули интерполируемой функции (установленное в общем виде автором в [3]); 3) неравенство типа Маркова–Бернштейна–Никольского для сплайнов (лемма 9).

Заканчивая вводную часть статьи, остановимся на вопросе об аналитической структуре сплайна. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$ и Δ конечно, то сплайн $s(x)$ имеет вид

$$\sum_{y \in \Delta} \xi_y K(x - y) + P(x), \quad (7)$$

где $K(x) = |x|^{2m-n}$ при нечетном n и $K(x) = |x|^{2m-n} \ln |x|$ при четном n , $\xi_y \in \mathbb{R}$, P – полином степени $< m$ (Ж. Дюшон [28]). При $n > 1$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, к сожалению, неизвестны какие-либо подобные представления сплайна в явном виде (при $n > 1$

в отличие от случая $n = 1$ сплайн зависит от области, т.е. если $\Omega \subset \Omega'$, то сужение $s(f, \Delta, m, \Omega')$ на Ω , вообще говоря, не совпадает с $s(f, \Delta, m, \Omega)$. Однако для приближения функции f на области Ω можно использовать сплайн $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$, причем такой метод приближенного восстановления функций по их сеточным значениям показал хорошие результаты в численных экспериментах, проводившихся при $m = n = 2$ (см. [35]–[37]). Так, в сравнительных тестах, проведенных Р. Франке [35] для большой группы разнообразных методов, D^m -сплайны дали наилучшую точность приближения. В некоторых случаях, правда, аппроксимативные свойства сплайнов $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$ оказываются хуже, чем свойства сплайнов $s(f, \Delta, m, \Omega)$ [6; замечание 6].

В настоящей работе получены также оценки погрешности приближения (на ограниченной области Ω) сплайнами $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$.

§1. Оценки погрешности сплайн-интерполяции на всей области Ω

Прежде всего перечислим обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей работы. К ним относятся уже введенные обозначения $m, n, \Omega, \Delta, \bar{h} = \bar{h}(\Delta), \underline{h} = \underline{h}(\Delta), |\alpha|_1, \alpha!, W_p^k(G), \|D^k g\|_{L_p(G)}, \omega_t(g, \delta)_{L_p(G)}, \omega_t(D^k g, \delta)_{L_p(G)}$ (в последних двух выражениях при $t = 1$ будем опускать индекс t), $\theta = \theta(k, p), K(x)$. Далее, $\xi_+ = \max\{\xi, 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (считаем $0^0 = 1$); $\mathcal{P}_t$ – множество полиномов от n переменных степени $\leq t$ (по совокупности переменных), где $t \in \mathbb{Z}_+$; $\mathcal{P}_{-1} = \{o\}$, где o – нулевой полином; $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$, $\text{dist}(U, V) = \inf\{|x - y| : x \in U, y \in V\}$, $\text{dist}(a, U) = \text{dist}(\{a\}, U)$, $\text{diam } U = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, $U_{(r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{B(x, r)} \subset U\}$, $U^{(r)} = U \setminus \overline{U_{(r)}}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$; v – объем шара $B(0, 1)$; $\Pi_{a\lambda}(r)$ – связная компонента множества $(\lambda\Omega) \cap B(a, r)$, содержащая a при $r > 0$, $\Pi_{F\lambda}(r) = \bigcup_{a \in F} \Pi_{a\lambda}(r)$, $\Sigma_{F\lambda}(r) = (\lambda\Omega) \setminus \overline{\Pi_{F\lambda}(r)}$, где $\lambda > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $a \in \lambda\Omega$, $F \subset \lambda\Omega$; $\mathcal{D}(G)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих компактные в G носители, $W_p^k = W_p^k(B(0, 1))$, $W_p^k(G, \text{fin})$ – пространство (классов) функций $g: G \rightarrow \mathbb{R}$, принадлежащих $W_p^k(G \cap B(0, r))$ при любом $r > 0$, с топологией, порожденной семейством полунорм $\{\|g\|_{W_p^k(G \cap B(0, r))} : r > 0\}$, $L_p^k(G)$ – подмножество $W_p^k(G, \text{fin})$, состоящее из функций, у которых все производные порядка k принадлежат $L_p(G)$, где G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$; M_t – некоторое фиксированное подмножество $B(0, \frac{1}{2})$ такое, что для любой функции $g: M_t \rightarrow \mathbb{R}$ существует единственный полином из $\mathcal{P}_{t-1}$, интерполирующий ее на M_t (можно взять, например, $M_t = \frac{1}{2t}\{a \in \mathbb{Z}_+^n : |a|_1 < t\}$ при $t > 0$ и $M_t = \emptyset$ при $t = 0$), $P_t(g, y, \cdot)$ – полином из $\mathcal{P}_{t-1}$, интерполирующий функцию g на множестве $y + M_t$, H_{xy}^t – выпуклая оболочка множества $\{x\} \cup \{y\} \cup (y + M_t)$, где $t \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in \mathbb{R}^n$; $X_t(G, \delta)$ – множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $H_{xy}^t \subset G \cap B(x, \delta)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_t(g, \delta)_{p, G} &= \|g(x) - P_t(g, y, x)\|_{L_p(X_t(G, \delta))} \quad (g \in L_p(G)), \\ \tilde{\omega}_t(D^k g, \delta)_{p, G} &= \max_{|\alpha|_1 = k} \tilde{\omega}_t(D^\alpha g, \delta)_{p, G} \quad (g \in L_p^k(G)), \end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{Z}_+$, $\delta > 0$, G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$; φ – некоторая фиксированная функция из $\mathcal{D}(B(0, 1))$ такая, что $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in B(0, \frac{1}{3})$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1 \text{ и}$$

$$\varphi_y(x) = \varphi(x-y) \left(\sum_{z \in \frac{1}{2n} \mathbb{Z}^n} \varphi(x-z) \right)^{-1},$$

где $y \in \mathbb{R}^n$; $\mathcal{L}$ – оператор Лапласа; $E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывное вложение E_1 в E_2 , где E_1, E_2 – линейные топологические пространства.

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda \geq 1$, $a \in \mathbb{R}^n$, $V = (\lambda\Omega) \cap B(a, 1)$, $V' = (\lambda\Omega) \cap B(a, 3)$, $W_p^k \rightarrow W_q^l$ и $g \in W_p^k(V')$. Тогда $g \in W_q^l(V)$ и

$$\|g\|_{W_q^l(V)} \leq C \|g\|_{W_p^k(V')},$$

где $C = C(\Omega, k, p, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Минимальная гладкость границы Ω означает наличие таких $\varepsilon > 0$ и L , что для любой точки $b \in \mathbb{R}^n$ существуют функция $\psi_b: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ и движение $\Gamma_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям: $|\psi_b(\xi) - \psi_b(\eta)| \leq L|\xi - \eta|$ $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\Omega \cap B(b, \varepsilon) = \Gamma_b(\Lambda_b) \cap B(b, \varepsilon)$, где $\Lambda_b = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \psi_b(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ [1]. Очевидно, достаточно доказать лемму при $\lambda > 3/\varepsilon$, $p < \infty$. Тогда, полагая $b = \lambda^{-1}a$, $\Lambda = \lambda\Gamma_b(\Lambda_b)$, имеем

$$(\lambda\Omega) \cap B(a, 3) = \Lambda \cap B(a, 3). \quad (8)$$

Согласно [1] функцию $g_1(x)$, равную $g(x)\varphi(\frac{x-a}{3})$ при $x \in \Lambda \cap B(a, 3)$ и нулю при $x \in \Lambda \setminus B(a, 3)$ (совпадающую с $g(x)$ на V), можно продолжить на $\mathbb{R}^n$ так, чтобы $g_1 \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$ и $\|g_1\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} \leq A\|g_1\|_{W_p^k(\Lambda)}$, где $A = A(n, L, k)$. Отсюда и из (8) следует утверждение леммы.

Всюду в работе предполагается, что $f \in W_p^k(\Omega, \text{fin})$, $W_p^k \rightarrow W_\infty^0$, $W_p^k \rightarrow W_q^l$, множество Ω ограничено при $p > q$; $^4 \bar{h} < h^*$, где $h^* = h^*(\Omega, m)$ – положительная константа, которая будет определена ниже. Под шаром понимается непустой открытый шар в $\mathbb{R}^n$ (т.е. множество $B(a, r)$ при некоторых $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$). Функции из $W_\infty^0(G, \text{fin})$ мы будем считать определенными и непрерывными на $\bar{G}$. Заметим, что по лемме 1 (в которой надо сделать очевидные замены параметров k, l, p, q) имеем $W_p^k(\Omega, \text{fin}) \rightarrow W_\infty^0(\Omega, \text{fin})$, $W_2^m(\Omega, \text{fin}) \rightarrow W_\infty^0(\Omega, \text{fin})$ ($W_2^m \rightarrow W_\infty^0$, так как $m > n/2$ [38; §§ 9, 10]) и что минимальная гладкость границы области эквивалентна сильному условию конуса в смысле [38].

Во введении отмечалось, что сплайн $s(f, \Delta, m, \Omega)$, определенный как решение вариационной задачи, существует и единствен, если

- 1) существует функция из $L_2^m(\Omega)$, совпадающая с f на Δ ,
- 2) $(P \in \mathcal{P}_{m-1}, P(x) = 0 \ \forall x \in \Delta) \Rightarrow (P(x) \equiv 0)$. (9)

Второе условие будет выполнено за счет того, что $\bar{h} < h^*$. Рассмотрим условие 1) и допустим сначала, что Ω ограничено. Ясно, что для выполнения этого условия необходимо наложить некоторые ограничения на Δ, k, p . На протяжении всей работы будем считать, что либо $\underline{h} > 0$, либо $W_p^k \rightarrow W_2^m$. Если же Ω неограничено, то условие 1), вообще говоря, не выполняется, даже если $\underline{h} > 0$ и функция f достаточно гладкая. Следовательно, нужна другая конструкция, более общая, чем (1).

⁴В противном случае, как нетрудно проверить [3], оценка (2) не имеет места.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3; определение 2]. Функцию $s = s(f, \Delta, m, \Omega)$, $s \in W_2^m(\Omega, \text{fin})$, будем называть *интерполяционным сплайном*, если выполняются условия:

- 1) для любой функции $g \in W_2^m(\Omega)$, имеющей ограниченный носитель и равной нулю на Δ ,

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha s D^\alpha g dx = 0;$$

- 2) $s(x) = f(x)$ на Δ ;
- 3) если $a \in \Omega$ и $\zeta > 1$, то $\|s\|_{W_2^m(\Pi_{a1}(r))} = O(\zeta^r)$ при $r \rightarrow \infty$.

Как показано в [3; теоремы 1, 4], в случае $f \in L_p^k(\Omega)$ определенный таким образом сплайн s существует и единствен. Если существует решение задачи (1), то оно удовлетворяет и условиям данного сейчас определения, так как свойством 3) обладает любая функция $s \in L_2^m(\Omega)$ [3; лемма 4].

ТЕОРЕМА 1. Допустим, что $f \in L_p^k(\Omega)$, $W_2^m \rightarrow W_q^l$ и выполняется 1) условие (4) или 2) $W_p^k \rightarrow W_2^m$. Тогда справедливы неравенства: при $k \leq m$

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \omega_{m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} \quad (10)$$

и при $k \leq 2m$, $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \omega_{2m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)},$$

где $C = C(\Omega, m, p, q, \kappa)$ в случае 1) и $C = C(\Omega, m, p, q)$ в случае 2).⁵

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2 [3; лемма 1]. Для любого $\varepsilon \in (0, C_1]$ существуют области $G_j \subset \Omega$, $j \in J$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\text{diam } G_j \leq C_2 \varepsilon$;
- 2) область G_j звездна относительно некоторого шара радиуса ε (т.е. звездна относительно каждой точки этого шара);
- 3) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется такое $j \in J$, что $\Omega \cap B(x, \varepsilon) \subset G_j$;
- 4) любой шар радиуса ε пересекает не более чем C_3 множеств G_j .

Здесь $C_i = C_i(\Omega) > 0$.

ЛЕММА 3. Пусть G — ограниченная область, звездная относительно шара $B(0, 1)$, $\text{diam } G \leq d$, $g \in W_p^k(G)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, $t \geq k$. Тогда существует полином $P \in \mathcal{P}_{t-1}$, для которого

$$\|g - P\|_{W_p^k(G)} \leq C \tilde{\omega}_{t-k}(D^k g, d)_{p, G},$$

где $C = C(n, d, t)$.

⁵ Когда это не вызывает недоразумений, разные константы мы обозначаем одинаковыми буквами C, C_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим операторы $P_t, Q_t: L_1(G) \rightarrow \mathcal{P}_{t-1}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_t(u)(x) &= \frac{1}{\mathfrak{v}_1} \int_{B(0, \frac{1}{2})} P_t(u, y, x) dy, \\ Q_t(u)(x) &= \sum_{|\alpha|_1 < t} \frac{(-1)^{|\alpha|_1}}{\alpha!} \int_{B(0, 1)} u(y) D_y^\alpha (\varphi(y)(x-y)^\alpha) dy, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathfrak{v}_1 = 2^{-n} \mathfrak{v}$, а D_y^α обозначает дифференцирование по y . При $u \in L_p(G)$

$$\begin{aligned} \|u - P_t(u)\|_{L_p(G)} &= \frac{1}{\mathfrak{v}_1} \left\| \int_{B(0, \frac{1}{2})} (u(x) - P_t(u, y, x)) dy \right\|_{L_p(G)} \\ &\leq \frac{1}{\mathfrak{v}_1} \int_{B(0, \frac{1}{2})} \|u(x) - P_t(u, y, x)\|_{L_p(G)} dy \\ &\leq \mathfrak{v}_1^{-1/p} \tilde{\omega}_t(u, d)_{p, G}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь предположим, что u имеет обобщенную производную $D^\beta u \in L_1(G)$, где $|\beta|_1 \leq t$. Тогда

$$\begin{aligned} D^\beta Q_t(u)(x) &= \sum_{\substack{|\alpha|_1 \leq t \\ \alpha \geq \beta}} \frac{(-1)^{|\alpha|_1}}{(\alpha - \beta)!} \int_{B(0, 1)} u(y) D_y^\alpha (\varphi(y)(x-y)^{\alpha-\beta}) dy, \\ Q_{t-|\beta|_1}(D^\beta u)(x) &= \sum_{|\alpha|_1 + |\beta|_1 < t} \frac{(-1)^{|\alpha|_1 + |\beta|_1}}{\alpha!} \int_{B(0, 1)} u(y) D_y^{\alpha+\beta} (\varphi(y)(x-y)^\alpha) dy \end{aligned}$$

($\alpha \geq \beta$ означает, что i -я компонента β не превосходит i -й компоненты α , $i = \overline{1, n}$), поэтому

$$D^\beta Q_t(u) = Q_{t-|\beta|_1}(D^\beta u). \quad (13)$$

Кроме того, если в (11) проинтегрировать по частям и учесть формулу Тейлора, получим

$$Q_t(u) = u \quad \forall u \in \mathcal{P}_{t-1}. \quad (14)$$

Ниже $A_i = A_i(n, d, t)$. В силу (12)–(14) при $|\beta|_1 = k$ имеем

$$\begin{aligned} \|D^\beta(g - Q_t(g))\|_{L_p(G)} &= \|D^\beta g - Q_{t-k}(D^\beta g)\|_{L_p(G)} \\ &\leq \|D^\beta g - P_{t-k}(D^\beta g)\|_{L_p(G)} \\ &\quad + \|Q_{t-k}(D^\beta g - P_{t-k}(D^\beta g))\|_{L_p(G)} \\ &\leq A_1 \tilde{\omega}_{t-k}(D^\beta g, d)_{p, G}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для любой функции $u \in W_p^k(G)$ существует такой полином $R(u) \in \mathcal{P}_{k-1}$, что

$$\|u - R(u)\|_{W_p^k(G)} \leq A_2 \|D^k u\|_{L_p(G)} \quad (16)$$

(см., например, [3; предложение 1]). Полагая $P = Q_t(g) + R(g - Q_t(g))$, в силу (15) и (16) наконец получаем

$$\|g - P\|_{W_p^k(G)} \leq A_2 \|D^k(g - Q_t(g))\|_{L_p(G)} \leq A_1 A_2 \tilde{\omega}_{t-k}(D^k g, d)_{p, G}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $\lambda \geq C_1$, $a \in \lambda\Omega$, $g \in W_p^k(\lambda\Omega, \text{fin})$, $t \in \mathbb{Z}_+$, $t \geq k$. Тогда существует такой полином $P \in \mathcal{P}_{t-1}$, что для любого $r \geq 1$

$$\|g - P\|_{W_p^k(\Pi_{a\lambda}(r))} \leq C_2 r^{C_3} \tilde{\omega}_{t-k}(D^k g, C_4)_{p, \Pi_{a\lambda}(r+C_5)}. \quad (17)$$

Здесь $C_i = C_i(\Omega, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим константы C_1 , C_2 из леммы 2 через ε_0 , ρ соответственно и будем считать, что $\lambda \geq \rho/\varepsilon_0$. Пусть G_j , $j \in J$, — области, удовлетворяющие условиям 1)–4) из леммы 2 при $\varepsilon = \rho/\lambda$, $G'_j = \lambda G_j$. При некотором j_0 точка $a \in G'_{j_0}$. Зафиксируем $r \geq 1$ и возьмем какое-либо $e \in J$ такое, что $G'_e \cap \Pi_{a\lambda}(r) \neq \emptyset$. Далее $A_i = A_i(\Omega, t)$. Выберем путь $\pi: [0, 1] \rightarrow \Pi_{a\lambda}(r)$, для которого $\pi(0) = a$, $\pi(1) \in G'_e$. Построим по индукции последовательность $j_0, j_1, \dots, j_c \in J$. Если уже определено j_i , положим $\zeta_i = \sup\{\zeta \in [0, 1] : \pi(\zeta) \in G'_{j_i}\}$ и в случае $\zeta_i < 1$ найдем такое j_{i+1} , что $\pi(\zeta_i) \in G'_{j_{i+1}}$. Поскольку $\zeta_i < \zeta_{i+1}$ и количество областей G'_j , пересекающих $\Pi_{a\lambda}(r)$, не превосходит $A_1 r^n$, для некоторого $c-1 \leq A_1 r^n$ получим $\zeta_{c-1} = 1$. Наконец, $j_c = e$. Заметим, что любые две области $G'_{j_i}, G'_{j_{i+1}}$ пересекаются, поэтому согласно [3; замечание 1] при подходящем j'_i каждое из множеств $G'_{j_i} \cap G'_{j'_i}$, $G'_{j_{i+1}} \cap G'_{j'_i}$ содержит шар радиуса ε/ρ . Положим $U_{2i} = G'_{j_i}$ ($i = \overline{0, c}$), $U_{2i+1} = G'_{j'_i}$ ($i = \overline{0, c-1}$). Тогда

- 1) каждая из областей $U_0, \dots, U_{2c}$ имеет диаметр $\leq A_2$ и звездна относительно некоторого шара радиуса 1;
- 2) $U_i \subset \Pi_{a\lambda}(r + A_3)$ ($i = \overline{0, 2c}$);
- 3) $B_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ ($i = \overline{0, 2c-1}$), где B_i — некоторый шар радиуса 1;
- 4) $U_0 = G'_{j_0}$, $U_{2c} = G'_e$;
- 5) количество этих областей $2c + 1 \leq A_4 r^n$.

Пусть P_i — полином из $\mathcal{P}_{t-1}$, удовлетворяющий неравенству

$$\|g - P_i\|_{W_p^k(U_i)} \leq A_5 \tilde{\omega}_{t-k}(D^k g, A_2)_{p, U_i} \quad (18)$$

(лемма 3). Имеем

$$\begin{aligned} \|P_0 - P_{2c}\|_{W_p^k(U_{2c})} &\leq \sum_{i=0}^{2c-1} \|P_i - P_{i+1}\|_{W_p^k(U_{2c})} \\ &\leq \sum_{i=0}^{2c-1} A_6 r^{A_7} \|P_i - P_{i+1}\|_{W_p^k(B_i)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{2c-1} A_6 r^{A_7} (\|g - P_i\|_{W_p^k(U_i)} + \|g - P_{i+1}\|_{W_p^k(U_{i+1})}) \\ &\leq A_8 r^{A_9} \tilde{\omega}_{t-k}(D^k g, A_2)_{p, \Pi_{a\lambda}(r+A_3)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (18) при $i = 2c$ и (19) следует

$$\|g - P_0\|_{W_p^k(G'_e)} \leq A_{10} r^{A_9} \tilde{\omega}_{t-k}(D^k g, A_2)_{p, \Pi_{a\lambda}(r+A_3)}. \quad (20)$$

Положим $P = P_0$ (P_0 не зависит от r, e). Для получения (17) остается просуммировать оценки (20) по всем $e \in J$ таким, что $G'_e \cap \Pi_{a\lambda}(r) \neq \emptyset$, и учесть, что количество таких e не превосходит $A_1 r^n$.

Отметим, что в леммах 3, 4 условие $W_p^k \rightarrow W_\infty^0$ не используется.

ЛЕММА 5. Если $t \in \mathbb{Z}_+$, $\delta > 0$, G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $g \in L_p(G)$ и при $p = \infty$, кроме того, $g \in W_\infty^0(G, \text{fin})$, то $\tilde{\omega}_t(g, \delta)_{p,G} \leq C\omega_t(g, \delta)_{L_p(G)}$, где $C = C(n, t, \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $H_{0z}^t \subset B(0, \delta)$. Ниже $A_i = A_i(n, t, \delta)$. Нам понадобятся следующие обозначения: P_a – полином степени $< t$, равный 1 в точке $a \in M_t$ и нулю в остальных точках M_t ;

$$\tau(u) = u(0) - \sum_{a \in M_t} P_a(-z)u(a+z),$$

где $u \in C(H_{0z}^t)$; F – множество точек $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $\xi, \xi + t\eta \in H_{0z}^t$; E – подпространство $C(F)$, состоящее из функций v , которые могут быть представлены в виде

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t}{i} u(\xi + i\eta), \quad (21)$$

где u – некоторая функция из $C(H_{0z}^t)$. Допустим, что u и v связаны соотношением (21). Заметим, что, во-первых, как легко проверить, $\tau(P) = 0$ для любого $P \in \mathcal{P}_{t-1}$ и, во-вторых, согласно [39]

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_{t-1}} \|u - P\|_{C(H_{0z}^t)} \leq A_1 \|v\|_{C(F)}.$$

Поэтому $|\tau(u)| \leq A_2 \|v\|_{C(F)}$. Отсюда следует, что $\tau(u)$ принимает одно и то же значение для всех u , удовлетворяющих (21) при фиксированном v , и что норма линейного функционала $v \rightarrow \tau(u)$, определенного на пространстве E , не превосходит A_2 . По теореме Хана–Банаха этот функционал может быть продолжен на пространство $C(F)$ с той же нормой, и если использовать аналитическое представление ограниченных линейных функционалов в C (см. [40]), то получится, что

$$\tau(u) = \int_F \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t}{i} u(\xi + i\eta) d\psi, \quad (22)$$

где ψ – некоторая счетноаддитивная функция, определенная на борелевских подмножествах F , с вариацией $\|\psi\| \leq A_2$.

Теперь допустим, что $g \in W_\infty^0(G, \text{fin}) \cap L_p(G)$, и обозначим через G_z множество $\{x \in \mathbb{R}^n : x + H_{0z}^t \subset G\}$. Применяя (22) к функции $u(\xi) = g(\xi + x)$, имеем при $x \in G_z$

$$g(x) - \sum_{a \in M_t} P_a(-z)g(x+z+a) = \int_F \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t}{i} g(x+\xi+i\eta) d\psi,$$

откуда по неравенству Минковского

$$\begin{aligned} & \left\| g(x) - \sum_{a \in M_t} P_a(-z)g(x+z+a) \right\|_{L_p(G_z)} \\ & \leq \int_F \left\| \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t}{i} g(x+\xi+i\eta) \right\|_{L_p(G_z)} d|\psi| \leq A_2 \omega_t(g, \delta)_{L_p(G)} \end{aligned} \quad (23)$$

(так как $H_{0z}^t \subset B(0, \delta)$). Поскольку $W_\infty^0(G, \text{fin}) \cap L_p(G)$ плотно в $L_p(G)$ при $p < \infty$, неравенство между крайними выражениями в (23) сохраняет силу и при условиях леммы. Его можно переписать в эквивалентном виде

$$\|g(x) - P_t(g, x + z, x)\|_{L_p(G_z)} \leq A_2 \omega_t(g, \delta)_{L_p(G)}. \quad (24)$$

При $p = \infty$ здесь уже содержится требуемая оценка. Если $p < \infty$, то, делая в интеграле замену $z = y - x$ и используя (24), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_t(g, \delta)_{p,G} &= \left(\iint_{(x,y) \in X_t(G,\delta)} |g(x) - P_t(g, y, x)|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &= \left(\iint_{\substack{H_{0z}^t \subset B(0,\delta) \\ x \in G_z}} |g(x) - P_t(g, x + z, x)|^p dx dz \right)^{1/p} \leq A_3 \omega_t(g, \delta)_{L_p(G)}. \end{aligned}$$

Отметим, что метод доказательства леммы 5 близок к методу доказательства теоремы 3 из работы [39], в которой, однако, на множество G наложено условие выпуклости.

ЛЕММА 6 [3; лемма 5]. *Допустим, что $\rho > 0$, $\lambda \geq C_1 \rho$, $F \subset \lambda\Omega$, причем либо F , либо $(\lambda\Omega) \setminus F$ является ограниченным множеством, $\Phi \subset L_2^m(\lambda\Omega)$ и выполняются условия:*

- 1) для любых $g \in \Phi$, $x \in \lambda\Omega$ найдется такое $y \in \lambda\bar{\Omega}$, что $g(y) = 0$ и $|x - y| \leq \rho$;
- 2) если функция g_0 бесконечно дифференцируема и ее производные порядка $\leq m$ ограничены на $\lambda\Omega$, причем $g_0(x)$ постоянна на $(\lambda\Omega) \setminus V$ (где V — некоторое ограниченное множество) и равна 1 на F , то $gg_0 \in \Phi$ для любого $g \in \Phi$;
- 3) существует такое $u \in \Phi$, что

$$\int_{\lambda\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha u)^2 dx = \inf_{g \in \Phi} \int_{\lambda\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha g)^2 dx.$$

Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$

$$\|u\|_{W_2^m(\Sigma_{F\lambda}(r))} \leq C_2 C_3^{r/\rho} (1 + \rho)^m \|D^m u\|_{L_2(\lambda\Omega)}.$$

Здесь $C_i = C_i(\Omega, m) > 0$, причем $C_3 < 1$.

Введем еще несколько обозначений. Допустим, что $\bar{h} > 0$ (случай $\bar{h} = 0$ тривиален) и задано число $\mu > 0$. Пусть ε_0 — константа $C_1(\Omega)$ из леммы 2, $\delta_0 = \max\{1, C_1(\Omega, m), C_1(\Omega, 2m), C_4(\Omega, m), C_4(\Omega, 2m)\}$, где C_1, C_4 — константы из леммы 4, λ_0 — константа $C_1(\Omega, m)$ из леммы 6, $\lambda = \delta_0/(\mu\bar{h})$, $\tilde{f}(x) = f(x/\lambda)$, $Z = \{x \in \frac{1}{2n}\mathbb{Z}^n : \text{dist}(x, \lambda\Omega) < 1\}$, $V_x = (\lambda\Omega) \cap B(x, 1)$, $V'_x = (\lambda\Omega) \cap B(x, 3)$, x' — некоторая точка V_x для любого $x \in Z$, $\Pi_x(r) = \Pi_{x'\lambda}(r)$ ($x \in Z$, $r \in \mathbb{R}$), $r_{xy} = \inf\{r \in \mathbb{R} : x' \in \Pi_y(r)\}$ ($x, y \in Z$), $s_y = s(\tilde{f}\varphi_y, \lambda\Delta, m, \lambda\Omega)$ ($y \in Z$; здесь сплайн является решением вариационной задачи). Кроме того, сейчас мы определим константу h^* . В [3] также накладывалось условие вида $\bar{h} < h_1$, где

$h_1 = h_1(\Omega, m) > 0$, которым обеспечиваются существование и единственность интерполяционного сплайна при $f \in L_p^k(\Omega)$ (следовательно, при $\bar{h} < h_1$ выполняется (9)). В [3; замечание 3] установлено существование таких констант $h_2 = h_2(\Omega) > 0$, $\varkappa^* = \varkappa^*(\Omega) > 0$, что для любого $h \in (0, h_2)$ найдется множество $U \subset \Omega$ с $\bar{h}(U) = h$, $\underline{h}(U) > \varkappa^* h$. Положим

$$h^* = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{1}{9\lambda_0}, h_1, h_2 \right\}.$$

ЛЕММА 7. Если $z \in Z$, $0 < \mu \leq 1$ и либо $\mu \leq \underline{h}(\bar{h})^{-1}$, либо $W_p^k \rightarrow W_2^m$, то

$$\sum_{y \in Z} \|s_y\|_{W_2^m(V'_y)} \leq C_1 \sum_{i=1}^{\infty} C_2^i \|\tilde{f}\|_{W_p^k(\Pi_z(i))},$$

где $C_i = C_i(\Omega, m, k, p, \mu)$, причем $0 < C_2 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь $A_i = A_i(\Omega, m, k, p, \mu) > 0$. По лемме 2 с $\varepsilon = 4/\lambda$ ($\varepsilon \leq \varepsilon_0$ в силу того, что $\bar{h} < \varepsilon_0/4$ и $\mu \leq 1 \leq \delta_0$) пересечение $\lambda\Omega$ с любым шаром радиуса 4 содержится в некотором связном подмножестве $\lambda\Omega$ диаметра $\leq A_1$, поэтому $V'_y \subset (\lambda\Omega) \cap B(y', 4) \subset \Pi_y(A_1)$ при любом $y \in Z$, а так как $y' \in \Pi_z(r_{yz} + 1)$, то

$$V'_y \subset \Pi_z(r_{yz} + A_2) \quad \forall y \in Z. \quad (25)$$

Если бы при некотором $y \in Z$ выполнялось условие

$$V'_z \cap \Pi_{V_y \lambda} \left(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{3}{2} A_1 \right) \neq \emptyset,$$

то, поскольку $V'_z \subset \Pi_z(A_1)$ и $\Pi_{V_y \lambda}(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{3}{2} A_1) \subset \Pi_y(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{1}{2} A_1)$ (последнее в силу $V_y \subset \Pi_y(A_1)$), мы имели бы

$$\Pi_z(A_1) \cap \Pi_y \left(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{1}{2} A_1 \right) \neq \emptyset,$$

откуда следует $y' \in \Pi_y(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{1}{2} A_1) \subset \Pi_z(A_1 + 2(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{1}{2} A_1)) = \Pi_z(r_{yz})$, что неверно. Итак,

$$V'_z \subset \Sigma_{V_y \lambda} \left(\frac{1}{2} r_{yz} - \frac{3}{2} A_1 \right) \quad \forall y \in Z. \quad (26)$$

Далее, заметим, что

$$\sup_{x \in \Omega} \inf_{a \in \Delta \setminus B(y, \lambda^{-1})} |x - a| \leq 9\bar{h} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (27)$$

Действительно, если $x \in \Omega \setminus B(y, 3\bar{h})$, то $|x - a| < 2\bar{h}$ для некоторого $a \in \Delta$, и тогда $a \in \Delta \setminus B(y, \bar{h}) \subset \Delta \setminus B(y, \lambda^{-1})$. Если же $x \in \Omega \cap B(y, 3\bar{h})$, то ввиду $\text{diam } \Omega \geq 2\varepsilon_0 > 6\bar{h}$ найдется точка $b \in \Omega \cap B(y, 4\bar{h}) \setminus B(y, 3\bar{h})$; для некоторого $a \in \Delta$ имеем $|a - b| < 2\bar{h}$, следовательно, $a \in \Delta \setminus B(y, \bar{h})$ и

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - b| + |b - a| \leq 3\bar{h} + 4\bar{h} + 2\bar{h} = 9\bar{h}.$$

Теперь, применяя лемму 6 с $\rho = 9\bar{h}\lambda$ ($\lambda \geq \lambda_0\rho$, так как $\bar{h} < 1/(9\lambda_0)$), $F = V_y$, $u = s_y$ и учитывая (26), (27), имеем

$$\|s_y\|_{W_2^m(V'_y)} \leq A_3 A_4^{r_{yz}} \|D^m s_y\|_{L_2(\lambda\Omega)}, \quad (28)$$

где $A_4 < 1$. Если $\mu \leq \underline{h}(\bar{h})^{-1}$, то $\lambda\underline{h} \geq 1$, так что по определению s_y и по лемме 1

$$\begin{aligned} \|D^m s_y\|_{L_2(\lambda\Omega)} &\leq A_5 \left\| D^m \sum_{a \in \lambda\Delta} \tilde{f}(a) \varphi_y(a) \varphi\left(\frac{x-a}{\lambda\underline{h}}\right) \right\|_{L_2(\lambda\Omega)} \\ &\leq A_6 \|\tilde{f}\|_{L_\infty(V_y)} \leq A_7 \|\tilde{f}\|_{W_p^k(V'_y)}, \end{aligned} \quad (29)$$

а в случае $W_p^k \rightarrow W_2^m$

$$\begin{aligned} \|D^m s_y\|_{L_2(\lambda\Omega)} &\leq A_8 \|D^m(\tilde{f}\varphi_y)\|_{L_2(\lambda\Omega)} \\ &\leq A_9 \|\tilde{f}\|_{W_2^m(V_y)} \leq A_{10} \|\tilde{f}\|_{W_p^k(V'_y)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Наконец, из (25) и (28)–(30) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{y \in Z} \|s_y\|_{W_2^m(V'_y)} &\leq \sum_{y \in Z} A_{11} A_4^{r_{yz}} \|\tilde{f}\|_{W_p^k(\Pi_z(r_{yz} + A_2))} \\ &= A_{11} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{y \in Z \\ i-1 \leq r_{yz} < i}} A_4^{r_{yz}} \|\tilde{f}\|_{W_p^k(\Pi_z(r_{yz} + A_2))} \\ &\leq A_{12} \sum_{i=1}^{\infty} i^n A_4^i \|\tilde{f}\|_{W_p^k(\Pi_z(i + A_2))} \\ &\leq A_{13} \sum_{i=1}^{\infty} A_{14}^i \|\tilde{f}\|_{W_p^k(\Pi_z(i))}, \end{aligned}$$

где $A_{14} < 1$.

ЛЕММА 8. Пусть $0 < \mu \leq 1$, $0 < \gamma < 1$, $U \subset \lambda\Omega$, $r(x) = \text{dist}(x, U)$, $Z' = \{z \in Z : V_z \cap U \neq \emptyset\}$, $g \in L_p(\lambda\Omega)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ и

$$N_z = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i \tilde{\omega}_t(g, \delta)_{p, \Pi_z(i)}.$$

Тогда

$$\left(\sum_{z \in Z'} N_z^q \right)^{1/q} \leq C \lambda^{(\frac{n}{q} - \frac{n}{p})_+} \|(g(x) - P_t(g, y, x)) \gamma^{\frac{r(x)}{2p}}\|_{L_p(X_t(\lambda\Omega, \delta))}, \quad (31)$$

где $C = C(\Omega, \gamma)$ и в случае $q = \infty$ в левой части стоит $\sup_{z \in Z'} N_z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже $A_i = A_i(\Omega, \gamma) > 0$. Используя неравенство

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \gamma^i \right)^p \leq (1 - \gamma)^{1-p} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^p \gamma^i,$$

где $a_i \geq 0$, и учитывая, что в случае $p > q$ множество Ω ограничено, $\lambda \geq 1$, запишем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{z \in Z'} N_z^q \right)^{1/q} \lambda^{-(\frac{n}{q} - \frac{n}{p})_+} \\ & \leq A_1 \left(\sum_{z \in Z'} N_z^p \right)^{1/p} \leq A_2 \left(\sum_{z \in Z'} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i \tilde{\omega}_t(g, \delta)_{p, \Pi_z(i)}^p \right)^{1/p} \\ & = A_2 \left(\iint_{(x, y) \in X_t(\lambda \Omega, \delta)} |g(x) - P_t(g, y, x)|^p \psi(x, y) dx dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $\psi(x, y) = \sum \gamma^i$, сумма распространяется на пары $(z, i) \in Z \times \mathbb{N}$ такие, что $V_z \cap U \neq \emptyset$, $H_{xy}^t \subset \Pi_z(i)$. Так как при этих условиях $i > |x - z| - 1 > r(x) - 2$ и количество пар с данным i не превосходит $A_3 i^n$, имеем

$$\psi(x, y) \leq \sum_{i > r(x) - 2} A_3 i^n \gamma^i \leq A_4 \gamma^{r(x)/2},$$

что и дает (31). Здесь мы формально предполагали, что $p, q < \infty$, но это ограничение, очевидно, несущественно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $\mu = \min\{1, \varkappa\}$ в случае 1) и $\mu = 1$ в случае 2) (см. формулировку теоремы). Далее $A_i = A_i(\Omega, m, p, q, \mu) > 0$. Обозначим сумму $\sum_{y \in Z} s_y$ через $\tilde{s}$. Если Z бесконечно, то ряд безусловно сходится в $W_2^m(\lambda \Omega, \text{fin})$, что следует из леммы 7 и оценки

$$\|\tilde{f}\|_{W_p^k(\Pi_a(\rho))} \leq A' \rho^{A_1}, \quad (32)$$

где $\rho \geq 1$, $a \in \lambda \Omega$, $A' = A'(\Omega, k, f, \lambda, a)$, которая вытекает из леммы 4. Выполнение условий 1), 2) из определения сплайна для функции $s(x) = \tilde{s}(\lambda x)$ очевидно; проверим условие 3). Пусть $a \in \lambda \Omega$, $r \geq 1$, $z \in Z$, $V_z \cap \Pi_a(r) \neq \emptyset$. По лемме 2 с $\varepsilon = 4/\lambda$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$, так как $\bar{h} < \varepsilon_0/4$, $\mu \leq 1 \leq \delta_0$)

$$V'_z \subset \Pi_z(A_2), \quad (33)$$

так что $z' \in \Pi_a(r + A_3)$, поэтому $\Pi_z(i) \subset \Pi_a(i + r + A_3) \forall i \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 7 и неравенства (32) следует, что $\|\tilde{s}\|_{W_2^m(V_z)} \leq A_4 A' r^{A_1}$. Если просуммировать эти оценки по всем $z \in Z$ таким, что V_z пересекает $\Pi_a(r)$ (количество этих z не превосходит $A_5 r^n$), получится $\|\tilde{s}\|_{W_2^m(\Pi_a(r))} = O(r^{A_6})$ при $r \rightarrow \infty$. Итак,

$$s(f, \Delta, m, \Omega) \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \sum_{y \in Z} s(\tilde{f} \varphi_y, \lambda \Delta, m, \lambda \Omega)(x),$$

где при бесконечном Z ряд безусловно сходится в $W_2^m(\lambda \Omega, \text{fin})$.

Если f – полином степени $< m$, то, очевидно, $s(f, \Delta, m, \Omega) = f$. В случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ это верно для полиномов степени $< 2m$, так как если $f \in \mathcal{P}_{2m-1}$, $g \in W_2^m(\mathbb{R}^n)$, g имеет ограниченный носитель, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f D^\alpha g \, dx = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^m f \cdot g \, dx = 0.$$

Пусть $t = m$ при $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и $t = 2m$ при $\Omega = \mathbb{R}^n$, $z \in Z$, P – полином степени $< t$, соответствующий функции $g = \tilde{f}$ согласно лемме 4 при $a = z'$ ($\lambda \geq \delta_0$). На основании вышесказанного

$$\tilde{s} - P = \sum_{y \in Z} s_y - \sum_{y \in Z} s(P\varphi_y, \lambda\Delta, m, \lambda\Omega) = \sum_{y \in Z} s((\tilde{f} - P)\varphi_y, \lambda\Delta, m, \lambda\Omega).$$

Отсюда по леммам 1 и 7 (с заменой $\tilde{f}$ на $\tilde{f} - P$) получаем

$$\begin{aligned} \|D^l(\tilde{s} - P)\|_{L_q(V_z)} &\leq A_7 \|\tilde{s} - P\|_{W_2^m(V'_z)} \\ &\leq A_8 \sum_{i=1}^{\infty} A_9^i \|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(\Pi_z(i))} \\ &\leq A_{10} \sum_{i=1}^{\infty} A_{11}^i \tilde{\omega}_{t-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(i)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $A_9, A_{11} < 1$. Кроме того, в силу леммы 1 и (33)

$$\|D^l(\tilde{f} - P)\|_{L_q(V_z)} \leq A_{12} \|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(V'_z)} \leq A_{13} \tilde{\omega}_{t-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(A_{14})},$$

так что

$$\|D^l(\tilde{f} - \tilde{s})\|_{L_q(V_z)} \leq A_{15} \sum_{i=1}^{\infty} A_{11}^i \tilde{\omega}_{t-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(i)}.$$

Используя это неравенство, а также леммы 5 и 8 (здесь $U = \lambda\Omega$), находим

$$\begin{aligned} \|D^l(\tilde{f} - \tilde{s})\|_{L_q(\lambda\Omega)} &\leq A_{16} (\bar{h})^{-(\frac{n}{q} - \frac{n}{p})_+} \tilde{\omega}_{t-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \lambda\Omega} \\ &\leq A_{17} (\bar{h})^{-(\frac{n}{q} - \frac{n}{p})_+} \omega_{t-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{L_p(\lambda\Omega)}. \end{aligned}$$

Остается применить преобразование подобия и перейти к функциям на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, $k = m$, $p < \infty$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, Ω' – открытое подмножество Ω . Если в конце доказательства теоремы 1 применить лемму 8 для $U = \lambda\Omega'$, получим неравенство

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega')} \leq C_1 \bar{h}^\theta \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f(x) C_2^{\rho(x)}\|_{L_p(\Omega)},$$

где $\rho(x) = \text{dist}(x, \Omega')/\bar{h}$, $C_i = C_i(\Omega, m, p, q, \varkappa)$ в случае 1) теоремы 1 и $C_i = C_i(\Omega, m, p, q)$ в случае 2), $0 < C_2 < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $n = 1$, Ω ограничено, $\partial\Omega \subset \Delta$. Тогда теорема 1 и замечание 1 в случае 1) останутся в силе, если заменить в них условие $W_2^m \rightarrow W_q^l$ на более слабое условие $l < 2m$. Действительно, вложение $W_2^m \rightarrow W_q^l$ использовалось в доказательстве теоремы 1 только для того, чтобы оценить $\|D^l(\tilde{s} - P)\|_{L_q(V_z)}$ через $\|\tilde{s} - P\|_{W_2^m(V_z')}$, см. (34). А поскольку сплайн $s(x)$ является кусочно-полиномиальной функцией степени $< 2m$, точки “склейки” которой принадлежат Δ , $s \in W_\infty^{2m-2}(\Omega)$ (см. [23]) и $\lambda \underline{h} \geq 1$, то первое из неравенств (34) выполняется и при $l < 2m$.

Теперь допустим, что Ω ограничено, $k < m$ и $W_2^m \rightarrow W_p^k$. Положим $F_i = ((2^{-i}\mathbb{Z}^n) \setminus (2^{-i+1}\mathbb{Z}^n)) \cap \Omega$ и представим множество $\bigcup_{i=1}^\infty F_i$ в виде последовательности $\{a_1, a_2, \dots\}$ так, чтобы сначала шли элементы F_1 , затем — элементы F_2 и т. д. Пусть $\Delta_i = \{a_1, \dots, a_i\}$, u_i — некоторый элемент $W_2^m(\Omega)$, минимизирующий функционал $\int_\Omega \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha g)^2 dx$ при условиях: $g(a_i) = 1$, $g(a_j) = 0$, $j < i$. Тогда функции u_i , $i \in \mathbb{N}$, образуют базис в $W_p^k(\Omega)$, причем для достаточно больших N

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i u_i = s(f, \Delta_N, m, \Omega),$$

где $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i u_i$ — разложение функции $f \in W_p^k(\Omega)$ по этому базису [3]. Поскольку величины $\bar{h}(\Delta_N)$, $\underline{h}(\Delta_N)$ заключены между $C_1 N^{-1/n}$ и $C_2 N^{-1/n}$, где $C_i = C_i(\Omega) > 0$, из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. При достаточно больших N

$$\sum_{l=0}^k \left\| D^l \left(f - \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i \right) \right\|_{L_p(\Omega)} N^{(k-l)/n} \leq C \omega_{m-k}(D^k f, N^{-1/n})_{L_p(\Omega)},$$

где $C = C(\Omega, m, p)$.

(Здесь использована оценка $\omega_t(g, 2\delta)_{L_p(\Omega)} \leq 2^t \omega_t(g, \delta)_{L_p(\Omega)}$, см. [38].)

§ 2. Оценки на $\Omega_{(\varepsilon)}$

В предыдущем параграфе оценки погрешности сплайн-интерполяции на всей области Ω были получены для $\Omega = \mathbb{R}^n$ при $k \leq 2m$, а в случае, когда Ω имеет границу, — лишь при $k \leq m$. Дело здесь не только в том, что в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ оператор $f \rightarrow s(f, \Delta, m, \Omega)$ сохраняет полиномы более высокой степени, чем при $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Есть другая причина: аппроксимативные свойства сплайнов $s(f, \Delta, m, \Omega)$ для достаточно гладких интерполируемых функций f вблизи границы области Ω оказываются хуже, чем на расстоянии от границы.⁶ Это связано с тем, что сплайн $s(x)$ удовлетворяет некоторым естественным краевым условиям, которые, например, в случае $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$ имеют вид $s^{(j)}(0) = s^{(j)}(1) = 0$ при $j = m, 2m - 2$. В этом параграфе мы получим оценку величины $\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})}$, $\varepsilon > 0$, иного вида, чем (10), при $k \leq 2m$. Для упрощения рассуждений будем считать, что область Ω ограничена. Добавим, что на расстоянии от границы и гладкость сплайна

⁶ В одномерном случае это обнаружил Т. Лукас [19] при $m = 2$.

выше, чем W_2^m , если $\underline{h}(\Delta) > 0$: мы покажем, что в этом случае $s \in W_q^l(\Omega_{(\varepsilon)})$ при $l - n/q < 2m - n$, $\varepsilon > 0$. Кроме того, будет получена точная по порядку оценка сходимости сплайнов на $\Omega_{(\varepsilon)}$, т.е. мы найдем наименьшую (в порядковом смысле) функцию $\chi(h)$, удовлетворяющую условию: для любого $f \in W_p^k(\Omega)$ и любой последовательности множеств $\Delta_i \subset \overline{\Omega}$, $i \in \mathbb{N}$, с $\overline{h}(\Delta_i) \rightarrow 0$ имеем $\|D^l(f - s(f, \Delta_i, m, \Omega))\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} = O(\chi(\overline{h}(\Delta_i)))$ при $i \rightarrow \infty$. Сейчас заметим, что если для некоторой функции $\chi(h)$ это условие выполняется, то множество линейных операторов $\{f \rightarrow \chi(\overline{h}(\Delta_i))^{-1} D^\alpha(f - s(f, \Delta_i, m, \Omega)) : i \in \mathbb{N}, |\alpha| = l\}$ из $W_p^k(\Omega)$ в $L_q(\Omega_{(\varepsilon)})$ поточечно ограничено, и если эти операторы непрерывны (что гарантируется при соответствующих условиях теоремой 2), то по теореме Банаха–Штейнгауза существуют такие $h_0 > 0$ и C , не зависящие от f , Δ , что при $\overline{h}(\Delta) < h_0$

$$\|D^l(f - s(f, \Delta, m, \Omega))\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \leq C \chi(\overline{h}(\Delta)) \|f\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

Данный вопрос, таким образом, сводится к исследованию величины

$$\sup\{\|D^l(f - s(f, \Delta, m, \Omega))\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} : \|f\|_{W_p^k(\Omega)} \leq 1, \overline{h}(\Delta) = h\},$$

которую мы в дальнейшем будем обозначать через $\chi(h)$. Аналогично, если рассматривается сходимость сплайнов при дополнительном условии квазиравномерности последовательности $\{\Delta_i\}$: $\overline{h}(\Delta_i) = O(\underline{h}(\Delta_i))$ при $i \rightarrow \infty$, то этой ситуации соответствует величина

$$\chi_{\varkappa}(h) = \sup\{\|D^l(f - s(f, \Delta, m, \Omega))\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} : \|f\|_{W_p^k(\Omega)} \leq 1, \overline{h}(\Delta) = h, \underline{h}(\Delta) > \varkappa h\},$$

где $\varkappa > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $k \leq 2m$, $\varepsilon > 0$ и выполнено одно из двух условий:*

- 1) $l - n/q < 2m - n$ и (4);
- 2) $W_p^k \rightarrow W_2^m \rightarrow W_q^l$.

Тогда

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \leq C_1 (\overline{h}^\theta \omega_{2m-k}(D^k f, \overline{h})_{L_p(\Omega)} + C_2^{1/\overline{h}} \omega_m(f, \overline{h})_{L_1(\Omega)}),$$

где $C_i = C_i(\Omega, m, p, q, \varepsilon, \varkappa)$ в случае 1), $C_i = C_i(\Omega, m, p, q, \varepsilon)$ в случае 2) и $0 < C_2 < 1$.

Сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 9. *Если $\lambda > 0$, $B(a, 2) \subset \lambda\Omega$, $\Delta' = (\lambda\Delta) \cap B(a, 2)$, $(x, y \in \Delta') \Rightarrow (|x - y| \geq 1)$, $l - n/q < 2m - n$ и $\tilde{s}(x) = s(x/\lambda)$, то $\tilde{s} \in W_q^l(B(a, 1))$ и*

$$\|\tilde{s}\|_{W_q^l(B(a, 1))} \leq C \|\tilde{s}\|_{L_1(B(a, 2))},$$

где $C = C(m, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия 1) из определения сплайна существуют такие $\xi_y \in \mathbb{R}$ ($y \in \Delta'$), что для любой функции $g \in \mathcal{D}(B(a, 2))$

$$\int_{B(a, 2)} \tilde{s} \cdot \mathcal{L}^m g \, dx = (-1)^m \int_{B(a, 2)} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \tilde{s} D^\alpha g \, dx = \sum_{y \in \Delta'} \xi_y g(y).$$

Функция $K(x-y)$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) с фундаментальным решением уравнения $\mathcal{L}^m u(x) = 0$ (см. [41]), поэтому при соответствующих ξ'_y

$$\int_{B(a, 2)} \left(\tilde{s}(x) - \sum_{y \in \Delta'} \xi'_y K(x-y) \right) \mathcal{L}^m g(x) \, dx = 0 \quad \forall g \in \mathcal{D}(B(a, 2)).$$

Отсюда следует (см. [42]), что

$$\tilde{s}(x) = \sum_{y \in \Delta'} \xi'_y K(x-y) + v(x), \quad (36)$$

где v — бесконечно дифференцируемая функция, полигармоническая порядка m на $B(a, 2)$. Поскольку функция $K(x)$ — полигармоническая порядка m на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $K \in W_q^l(B(0, 1))$ (при $l - n/q < 2m - n$) и имеет место представление (36), нам достаточно установить неравенство

$$\|\xi K + g\|_{W_q^l(B(0, 1))} \leq A_1 \|\xi K + g\|_{L_1(B(0, 2))}, \quad (37)$$

где $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^m g(x) = 0$ на $B(0, 2)$ и $A_1 = A_1(m, q)$. Заметим, что если $\mathcal{L}^m g(x) = 0$ на $B(0, 1)$, то для любого мультииндекса α

$$|D^\alpha g(0)| \leq A_2 \|g\|_{L_1(B(0, 1))}, \quad (38)$$

где $A_2 = A_2(m, \alpha)$ (это следует из существования функции $\psi \in \mathcal{D}(B(0, \frac{1}{2}))$, зависящей только от m, n , такой, что $g = g * \psi$ на $B(0, \frac{1}{2})$, см. [42]). Допустим, что неравенство (37) не выполняется. Тогда существуют такие $\xi_i \in \mathbb{R}$ и $g_i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$), что $\mathcal{L}^m g_i(x) = 0$ на $B(0, 2)$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\xi_i K + g_i\|_{W_q^l(B(0, 1))} = \infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\xi_i K + g_i\|_{L_1(B(0, 2))} = 0.$$

В случае $\lim_{i \rightarrow \infty} |\xi_i| = 0$ получаем противоречие с (38), а в противном случае $\lim_{i \rightarrow \infty} \|K + \xi_i^{-1} g_i\|_{L_1(B(0, 2))} = 0$, откуда ввиду (38) следует бесконечная дифференцируемость K на $B(0, 1)$, что неверно.

ЛЕММА 10. *Допустим, что выполняются условия теоремы 2 и $W_2^m \rightarrow W_q^l$. Тогда*

$$\begin{aligned} \|D^l(f-s)\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} &\leq C_1 \bar{h}^\theta \omega_{2m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} \\ &\quad + C_1 \varepsilon^{-C_2 C_3^{\varepsilon/\bar{h}}} (\omega_{2m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} + \omega_m(f, \bar{h})_{L_1(\Omega)}), \end{aligned}$$

где $C_i = C_i(\Omega, m, p, q, \kappa)$ в случае 1) теоремы 2 и $C_i = C_i(\Omega, m, p, q)$ в случае 2), $C_i > 0$, $C_3 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь $A_i = A_i(\Omega, m, p, q, \varkappa)$ в случае 1) и $A_i = A_i(\Omega, m, p, q)$ в случае 2); $A_i > 0$. Мы будем использовать обозначения $\varepsilon_0, \delta_0, \lambda, \tilde{f}, Z, V_x, V'_x, x', \Pi_x(r)$, введенные в § 1. Пусть $\mu = \min\{\frac{1}{2}, \varkappa\}$ в случае 1) и $\mu = \frac{1}{2}$ в случае 2), $z \in Z, V_z \cap (\lambda\Omega_{(\varepsilon)}) \neq \emptyset, P$ — полином, соответствующий согласно лемме 4 функции $g = \tilde{f}$ при $a = z', t = 2m$ ($\lambda \geq \delta_0$), и $\tilde{s}(x) = s(x/\lambda)$. Очевидно, $\tilde{f} - \tilde{s} = R_1 + R_2 + R_3$, где $R_1 = \tilde{f} - P, R_2 = s(P - \tilde{f}, \lambda\Delta, m, \lambda\Omega), R_3 = P - s(P, \lambda\Delta, m, \lambda\Omega)$. Заметим, что $V'_z \subset \Pi_z(A_1)$ (лемма 2, $4/\lambda < \varepsilon_0$). Отсюда и из лемм 1, 7 следуют неравенства

$$\|R_1\|_{W_q^l(V_z)} \leq A_2 \|R_1\|_{W_p^k(V'_z)} \leq A_3 \tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(A_4)}, \quad (39)$$

$$\|R_2\|_{W_q^l(V_z)} \leq A_5 \|R_2\|_{W_2^m(V'_z)} \leq A_6 \sum_{i=1}^{\infty} A_7^i \tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(i)}, \quad (40)$$

где $A_7 < 1$. Положим $F = \lambda\Omega_{(\varepsilon/2)}$ и $R_4 = s(R_3, (\lambda\Delta) \cup F, m, \lambda\Omega)$. Применяя лемму 6 при указанном $F, \rho = \lambda\bar{h}$ и учитывая, что $R_3(x) = 0$ на $\lambda\Delta, \text{dist}(F, V'_z) \geq \lambda\varepsilon/2 - 4 \geq \varepsilon/\bar{h} - 4$, получаем

$$\begin{aligned} \|R_4\|_{W_q^l(V_z)} &\leq A_8 \|R_4\|_{W_2^m(V'_z)} \leq A_9 A_{10}^{\varepsilon/\bar{h}} \|D^m R_3\|_{L_2(\lambda\Omega)} \\ &\leq A_{11} A_{10}^{\varepsilon/\bar{h}} \|D^m P\|_{L_2(\lambda\Omega)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $A_{10} < 1$. Поскольку $\|D^m \cdot\|_{L_1(B(0,1))}$ и $\tilde{\omega}_m(\cdot, 2)_{1, B(0,1)}$ — две эквивалентные полунормы на $\mathcal{P}_{2m-1}$, $\Pi_z(A_{12})$ содержит некоторый шар B радиуса 1 (лемма 2, $1/\lambda < \varepsilon_0$), имеем

$$\begin{aligned} \|D^m P\|_{L_2(\lambda\Omega)} &\leq A_{13} (\bar{h})^{-A_{14}} \|D^m P\|_{L_1(B)} \leq A_{15} (\bar{h})^{-A_{14}} \tilde{\omega}_m(P, 2)_{1, B} \\ &\leq A_{16} (\bar{h})^{-A_{14}} (\tilde{\omega}_m(\tilde{f}, 2)_{1, B} + \|\tilde{f} - P\|_{L_1(B)}) \\ &\leq A_{17} (\bar{h})^{-A_{14}} (\tilde{\omega}_m(\tilde{f}, 2)_{1, \Pi_z(A_{12})} + \tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(A_{18})}). \end{aligned} \quad (42)$$

Поскольку $P \in \mathcal{P}_{2m-1}$, то для любой функции $g \in W_2^m(\lambda\Omega)$, равной нулю на F ,

$$\int_{\lambda\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha P D^\alpha g \, dx = (-1)^m \int_{\lambda\Omega} \mathcal{L}^m P \cdot g \, dx = 0,$$

поэтому

$$R_3 = R_4. \quad (43)$$

На основании (39)–(43)

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - \tilde{s}\|_{W_q^l(V_z)} &= \|R_1 + R_2 + R_3\|_{W_q^l(V_z)} \\ &\leq A_{19} \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_7^i \tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(i)} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{h})^{-A_{14}} A_{10}^{\varepsilon/\bar{h}} (\tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \Pi_z(A_{18})} + \tilde{\omega}_m(\tilde{f}, 2)_{1, \Pi_z(A_{12})}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 8 (здесь $U = \lambda\Omega_{(\varepsilon)}$) и неравенство Минковского в l_q , получаем

$$\begin{aligned} \|D^l(\tilde{f} - \tilde{s})\|_{L_q(\lambda\Omega_{(\varepsilon)})} &\leq A_{20} ((\bar{h})^{-(\frac{n}{q} - \frac{n}{p})} + \tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \lambda\Omega} \\ &\quad + (\bar{h})^{-A_{21}} A_{10}^{\varepsilon/\bar{h}} (\tilde{\omega}_{2m-k}(D^k \tilde{f}, \delta_0)_{p, \lambda\Omega} + \tilde{\omega}_m(\tilde{f}, 2)_{1, \lambda\Omega})). \end{aligned}$$

Доказательство завершается применением леммы 5 и преобразования подобия.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $n = 1$ и $\partial\Omega \subset \Delta$. Тогда лемма 10 справедлива и без условия $W_2^m \rightarrow W_q^l$ (т.е. справедлива при условиях теоремы 2). Это условие было нужно только для того, чтобы оценить в (40), (41) величину $\|R_i\|_{W_q^l(V_z)}$ через $\|R_i\|_{W_2^m(V_z)}$, $i = 2, 4$, а так как в случае 1) теоремы 2 функции R_2 и $R_4 = R_3$ ку-сочно полиномиальные (см. замечание 2) и $\lambda \underline{h} \geq 1$, первые неравенства в (40), (41) выполняются и в данной ситуации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для того чтобы получить теорему 2, нужно внести небольшие изменения в доказательство леммы 10. Поскольку случай 2) теоремы 2 содержится в лемме 10, рассмотрим только случай 1). Положим на этот раз $\mu = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}, \varkappa\}$ и будем считать, что $A_i = A_i(\Omega, m, p, q, \varepsilon, \varkappa)$, т.е. допустим зависимость констант A_i от ε . Далее все идет так же, как в доказательстве леммы 10, только для получения первых неравенств в (40) и (41) надо использовать лемму 9 с учетом того, что $B(z, 2) \subset \lambda\Omega_{(\varepsilon/2)}$ (так как $V_z \cap (\lambda\Omega_{(\varepsilon)}) \neq \emptyset$, $\lambda\varepsilon/2 > 3$) и $\lambda \underline{h} \geq 1$.

Положим

$$\theta' = \theta'(k, p) = \min\{\theta(k, p), 2m - l\},$$

$$T = \left\{ \left(2m + i, \frac{n}{i}, \infty \right) : i \in \mathbb{N}, i < n \right\}.$$

Обозначения $\varepsilon_0, \varkappa^*, h_2$ введены в §1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $l - n/q < 2m - n$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$, $0 < h < h^*$, $0 < \varkappa < \varkappa^*$ и $(k, p, q) \notin T$. Тогда

$$C_1 h^{\theta'} \leq \chi_{\varkappa}(h) \leq C_2 h^{\theta'},$$

а если, кроме того, выполняются вложения (35), то

$$C_3 h^{\theta'} \leq \chi(h) \leq C_4 h^{\theta'},$$

где $C_i = C_i(\Omega, m, k, p, q, \varepsilon, \varkappa) > 0$ при $i = 1, 2$ и $C_i = C_i(\Omega, m, k, p, q, \varepsilon) > 0$ при $i = 3, 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем множество $\Delta \subset \Omega$ с $\bar{h}(\Delta) = h$, $\underline{h}(\Delta) > \varkappa^* h$ (такое множество существует ввиду $h < h_2$) и шар $B(a, \varepsilon_0/2) \subset \Omega_{(\varepsilon)}$. Далее $A_i = A_i(\Omega, m, k, p, q, \varepsilon)$ при условии (35) и $A_i = A_i(\Omega, m, k, p, q, \varepsilon, \varkappa)$ в противном случае; $A_i > 0$. Очевидно, существуют натуральное число $t > A_1 h^{-n}$ и попарно непересекающиеся шары $B(a_i, A_2 h) \subset B(a, \varepsilon_0/2) \setminus \Delta$, $i = \overline{1, t}$. Полагая $f = g \|g\|_{W_p^k(\Omega)}^{-1}$, где $g(x) = \varphi\left(\frac{x - a_1}{A_2 h}\right)$ при $p \leq q$ и $g(x) = \sum_{i=1}^t \varphi\left(\frac{x - a_i}{A_2 h}\right)$ при $p > q$, имеем

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} = \|D^l f\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \geq A_3 h^{\theta}.$$

Из (38) и из того, что топология факторпространства $W_q^l(B(0, 1))/\mathcal{P}_{l-1}$ порождается нормой $\|u + \mathcal{P}_{l-1}\| = \|D^l u\|_{L_q(B(0, 1))}$ (лемма 3), вытекает, что если $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = x_1^{2m}$ и $\mathcal{L}^m v(x) = 0$ на $B(0, 1)$, то

$$\|D^l(g - v)\|_{L_q(B(0, 1))} \geq A_4,$$

а так как $\mathcal{L}^m s(x) = 0$ на $\Omega \setminus \Delta$ (см. доказательство леммы 9), для функции $f = g\|g\|_{W_p^k(\Omega)}^{-1}$ получаем

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(B(a_i, A_2 h))} \geq A_5 h^{2m-l+n/q} \quad \forall i = \overline{1, t}$$

и, следовательно,

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \geq A_6 h^{2m-l}.$$

Верхние оценки при $k \leq 2m$ выполняются по теореме 2. Пусть $k > 2m$ и $r = n(2m - k + n/p)^{-1}$ при $k - n/p < 2m$, $r = q$ при $k - n/p \geq 2m$. Тогда $r \geq 1$, $l < 2m$, $2m - n/r \geq 2m - n > l - n/q$, $2m - n/r \geq 2m - n > m - n/2$, $2m - n/r \leq k - n/p$, причем если в последнем неравенстве имеет место равенство, то или $r < \infty$, или $p = 1$ (так как $(k, p, q) \notin T$). Отсюда согласно [38; §§ 9, 10] следуют вложения $W_r^{2m} \rightarrow W_q^l$, $W_r^{2m} \rightarrow W_2^m$ и $W_p^k \rightarrow W_r^{2m}$. По лемме 1 также $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_r^{2m}(\Omega)$. Кроме того, $(\theta(k, p) < 2m - l) \Leftrightarrow (r < q)$, так что $\theta(2m, r) = \theta'(k, p)$. Если $\bar{h}(\Delta) = h$ и верно либо (4), либо (35), то на основании сказанного и теоремы 2

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \leq A_7 h^{\theta(2m, r)} \|f\|_{W_r^{2m}(\Omega)} \leq A_8 h^{\theta'(k, p)} \|f\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

Таким образом, наилучший порядок приближения сплайнами в $W_q^l(\Omega_{(\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$, которого можно добиться за счет достаточной гладкости интерполируемой функции, есть $O(\bar{h}^{2m-l})$. Сейчас допустим, что Ω — куб $(0, 1)^n$, $W_2^m \rightarrow W_q^l$ и покажем, что порядок приближения в $W_q^l(\Omega)$ для любого класса $W_p^k(\Omega)$ интерполируемых функций не может быть выше чем $O(\bar{h}^{m-l+1/q})$. Для этого положим $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1^m$, $\Delta = \Omega \cap (h\mathbb{Z}^n)$, где $h > 0$ достаточно мало, $u(x_1) = \int_0^1 \dots \int_0^1 s(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$ при $n > 1$ и $u = s$ при $n = 1$. Пусть $I = (0, h)$, $v \in L_2(I)$, w — функция из $W_2^m(I)$, у которой $w^{(m)} = v$ на I и $w^{(j)}(h) = 0$ при $j = \overline{0, m-1}$, $g(x) = w(x_1)$ при $x_1 < h$ и $g(x) = 0$ при $x_1 \geq h$ ($x \in \Omega$). По определению сплайна

$$\int_0^h u^{(m)} v dx_1 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha s D^\alpha g dx = 0,$$

так что u совпадает с некоторым полиномом степени $< m$ на интервале I , следовательно,

$$\|D^l(f - s)\|_{L_q(\Omega)} \geq \|(x_1^m - u(x_1))^{(l)}\|_{L_q(I)} \geq Ah^{m-l+1/q},$$

где $A = A(m) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Во всех полученных нами оценках погрешности сплайн-интерполяции мультипликативные константы зависят от величины $\varkappa$, если не наложено условие (35), которое является достаточным для выполнения оценок с константами, не зависящими от $\varkappa$. В работах автора [5], [6] получено необходимое для этого условие, близкое к достаточному условию (35), т.е. в соответствующих случаях построены примеры расходимости интерполяционного процесса.⁷

⁷Результат, касающийся необходимых условий, недавно был несколько усилен А. Ю. Шадриным.

Теперь рассмотрим приближение функций f , определенных на Ω , сплайнами $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$, которые благодаря их простой аналитической структуре (при конечном Δ) нашли широкое применение в решении разнообразных практических задач. Напомним, что сплайн $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$ определяется как решение вариационной задачи.

ЛЕММА 11. *При условиях теоремы 2*

$$\begin{aligned} \|s(f, \Delta, m, \Omega) - s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)\|_{W_q^l(\Omega_{(\varepsilon)})} \\ \leq C_1 C_2^{1/\bar{h}} (\omega_{2m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} + \omega_m(f, \bar{h})_{L_1(\Omega)}), \end{aligned}$$

где C_i зависят от тех же параметров, что и в теореме 2, $0 < C_2 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь будут использоваться обозначения ε_0 , λ , $\tilde{f}$, Z , V_x , V'_x , введенные в §1. Положим $\mu = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}, \varkappa\}$ в случае 1) теоремы 2 и $\mu = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$ в случае 2). Ниже $A_i = A_i(\Omega, m, p, q, \mu) > 0$. Пусть $z \in Z$, $V_z \cap (\lambda\Omega_{(\varepsilon)}) \neq \emptyset$, $F = \lambda\Omega_{(\varepsilon/2)}$,

$$\begin{aligned} s_1 &= s(\tilde{f}, \lambda\Delta, m, \lambda\Omega), \quad s_2 = s(\tilde{f}, \lambda\Delta, m, \mathbb{R}^n), \\ s_3 &= s(s_1 - s_2, (\lambda\Delta) \cup F, m, \lambda\Omega). \end{aligned}$$

В случае 1), поскольку $\lambda\bar{h} \geq 1$,

$$\|D^m s_1\|_{L_2(\lambda\Omega)} + \|D^m s_2\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq A_1(\bar{h})^{-n} \max_{y \in \Delta} |f(y)|,$$

а в случае 2) f можно продолжить на $\mathbb{R}^n$ так, чтобы $\|f\|_{W_2^m(\mathbb{R}^n)} \leq A_2 \|f\|_{W_2^m(\Omega)}$, см. [1] ($f \in W_2^m(\Omega)$ по лемме 1), так что

$$\|D^m s_1\|_{L_2(\lambda\Omega)} + \|D^m s_2\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq A_3 \|f\|_{W_2^m(\Omega)}.$$

Поэтому в обоих случаях

$$\|D^m s_3\|_{L_2(\lambda\Omega)} \leq A_4 (\|D^m s_1\|_{L_2(\lambda\Omega)} + \|D^m s_2\|_{L_2(\lambda\Omega)}) \leq A_5(\bar{h})^{-n} \|f\|_{W_p^k(\Omega)} \quad (44)$$

(лемма 1). В силу леммы 6 (F определено выше, $\rho = \lambda\bar{h}$) и неравенства $\text{dist}(F, V'_z) \geq A_6(\bar{h})^{-1} - A_7$ имеем

$$\|s_3\|_{W_2^m(V'_z)} \leq A_8 A_9^{1/\bar{h}} \|D^m s_3\|_{L_2(\lambda\Omega)}, \quad (45)$$

где $A_9 < 1$. Заметим, что $B(z, 2) \subset \lambda\Omega_{(\varepsilon/2)}$, так как $\lambda\varepsilon/2 > 3$, и, как легко видеть, $s_3 = s_1 - s_2$. Отсюда, из (44), (45) и леммы 9 следует

$$\|s_1 - s_2\|_{W_q^l(V_z)} \leq A_{10}(\bar{h})^{-n} A_9^{1/\bar{h}} \|f\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

Количество интересующих нас $z \in Z$ не превосходит $A_{11}(\bar{h})^{-n}$, поэтому, переходя к функциям на Ω , получаем

$$\|s(f, \Delta, m, \Omega) - s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)\|_{W_q^l(\Omega_{(\varepsilon)})} \leq A_{11} A_{12}^{1/\bar{h}} \|f\|_{W_p^k(\Omega)}, \quad (46)$$

где $A_{12} < 1$. Согласно леммам 4 (при $r = \lambda \operatorname{diam} \Omega > \lambda \varepsilon_0 > 1$) и 5 найдутся такие полиномы $P_1 \in \mathcal{P}_{2m-1}$, $P_2 \in \mathcal{P}_{m-1}$, что

$$\begin{aligned} \|f - P_1\|_{W_p^k(\Omega)} &\leq A_{13}(\bar{h})^{-A_{14}} \omega_{2m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)}, \\ \|f - P_2\|_{L_1(\Omega)} &\leq A_{13}(\bar{h})^{-A_{14}} \omega_m(f, \bar{h})_{L_1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (47)$$

откуда

$$\begin{aligned} \|P_1 - P_2\|_{W_p^k(\Omega)} &\leq A_{15} \|P_1 - P_2\|_{L_1(\Omega)} \\ &\leq A_{16}(\bar{h})^{-A_{14}} (\omega_{2m-k}(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} + \omega_m(f, \bar{h})_{L_1(\Omega)}). \end{aligned} \quad (48)$$

Остается заметить, что в правой части (46) можно заменить f на $f - P_2$, и оценить $\|f - P_2\|_{W_p^k(\Omega)}$ на основании (47), (48).

Из теоремы 2 и леммы 11 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Теорема 2 останется справедливой, если заменить в ней $s = s(f, \Delta, m, \Omega)$ на $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$.*

Отметим, что в работе Ю. С. Завьялова, А. Имамова [43] и в книге В. А. Василенко [36] допущена ошибка: там утверждается, что в случае, когда Ω ограничено и Δ конечно, сплайн $s = s(f, \Delta, m, \Omega)$ может быть представлен в виде (7), где $\xi_y \in \mathbb{R}$ и $P \in \mathcal{P}_{m-1}$. Допустим, что это так и $\Delta \subset \Omega$. Из определения сплайна вытекает существование таких $\xi'_y \in \mathbb{R}$ ($y \in \Delta$), что

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha s D^\alpha g dx = \sum_{y \in \Delta} \xi'_y g(y) \quad \forall g \in W_2^m(\Omega). \quad (49)$$

Поскольку $K(x - y)$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) с фундаментальным решением уравнения $\mathcal{L}^m u(x) = 0$ (см. [41]),

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha s D^\alpha g dx = (-1)^m \int_{\Omega} s \cdot \mathcal{L}^m g dx = \sum_{y \in \Delta} C \xi_y g(y) \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Omega),$$

где $C = C(m, n) \neq 0$, так что $\xi'_y = C \xi_y$; отсюда и из (49) следует

$$\sum_{y \in \Delta} \xi_y Q(y) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

Обозначим сплайн $s(f, \Delta, m, \mathbb{R}^n)$ через σ . Как показал Ж. Дюшон [28], $\sigma(x)$ имеет вид

$$\sum_{y \in \Delta} \eta_y K(x - y) + \sum_{|\alpha|_1 < m} c_\alpha x^\alpha,$$

где коэффициенты η_y , c_α удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sigma(x) = f(x) \quad (x \in \Delta), \quad \sum_{y \in \Delta} \eta_y y^\alpha = 0 \quad (|\alpha|_1 < m). \quad (50)$$

Эта система, таким образом, имеет решение при любых значениях $f(x)$; в силу (9) система $\sum_{y \in \Delta} \eta_y y^\alpha = a_\alpha$ ($|\alpha|_1 < m$) имеет решение при любых $a_\alpha \in \mathbb{R}$, поэтому, заменяя в (50) нуль на a_α , получим систему, которая имеет решение при любых $f(x), a_\alpha$. Следовательно, η_y, c_α однозначно определяются из уравнений (50).

Итак, $s(x) = \sigma(x)$ на Ω . Если $g(x)$ – некоторая функция из $L_2^n(\mathbb{R}^n)$, равная $\sigma(x)$ при $x \notin \Omega$ и равная нулю на Δ , то по определению s, σ

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \sigma)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \sigma D^\alpha g dx - \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha s D^\alpha g dx = 0, \end{aligned}$$

т. е. всегда $\sigma(x)$ совпадает с полиномом степени $< m$ на некотором шаре, а значит, ввиду свойства единственности полигармонических функций [44], и на всем $\mathbb{R}^n$, что, очевидно, неверно.

§ 3. Аппроксимация сплайнами при $k = m, \theta = 0$

В этом параграфе мы снова возвращаемся к приближению сплайнами на всей области Ω , которую будем предполагать ограниченной. Рассмотрим ситуацию, когда неравенство (10) ничего не говорит о сходимости $s(f, \Delta_i, m, \Omega)$ к f при $\bar{h}(\Delta_i) \rightarrow 0$, т. е. когда $k = m$ и $\theta = 0$.⁸ Прежде всего выделяется “гильбертов” случай $k = l = m, p = q = 2$. Здесь, в действительности, имеет место сходимость [28], [30], причем это единственный из известных случаев сходимости сплайнов в $W_p^k(\Omega)$ к функциям f из того же класса $W_p^k(\Omega)$ без дополнительных условий на последовательность $\{\Delta_i\}$ при $n > 1$. Это также исторически первый результат по аппроксимации многомерными сплайнами. Однако, несмотря на простоту доказательства этого факта, которое основано непосредственно на вариационном принципе, из него (доказательства) нельзя извлечь какие-либо оценки сходимости через характеристики функции f ; такие оценки не были известны и при $n = 1$. Ниже дается оценка погрешности сплайн-интерполяции в указанной ситуации. Ввиду вложения $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$ можно ограничиться случаем $k = l, p = q$.

ТЕОРЕМА 4. *Допустим, что $k = m$, при $n > 1$ пусть $p \leq 2$, при $n = 1$ – $\partial\Omega \subset \Delta$, а если $p \neq 2$, то выполняется (4). Тогда*

$$\|D^k(f - s)\|_{L_p(\Omega)} \leq C(\nu^{1/p} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} + \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}^{1-1/p} \omega(D^k f, \nu)_{L_p(\Omega)}^{1/p}), \quad (51)$$

где $\nu = \bar{h} |\ln \bar{h}|$, $C = C(\Omega, m, p, \varkappa)$ при $p \neq 2$, $C = C(\Omega, m)$ при $p = 2$.

То, что с ростом p неравенство (51) становится хуже, вполне естественно, если судить по одномерному случаю: здесь при $p < \infty$ по теореме 4 есть сходимость в $W_p^m(\Omega)$ (для квазиравномерных последовательностей сеток, содержащих $\partial\Omega$), а при $p = \infty$ – нет, так как $s^{(m)}(x) = 0$ в граничных точках Ω (если $m > 1$), см. [23].

Доказательству теоремы предпослшем следующую лемму.

⁸Заметим, что при условиях теоремы 2 всегда или $k < 2m$, или $\theta > 0$.

ЛЕММА 12. Если $g \in L_p(\Omega)$ и $r > 0$, то

$$\|g\|_{L_p(\Omega^{(r)})} \leq C(r^{1/p} \|g\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}^{1-1/p} \omega(g, r)_{L_p(\Omega)}^{1/p}),$$

где $C = C(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, во-первых, по лемме 2 область Ω является объединением конечного числа областей Ω_j , $j \in J$, звездных относительно шара, а тогда $\Omega^{(r)} \subset \bigcup_{j \in J} \Omega_j^{(r)}$, и, во-вторых, как нетрудно проверить, ограниченная область, звездная относительно шара, имеет минимально гладкую границу. Поэтому лемму 12 достаточно доказать при дополнительном условии, что Ω звездна относительно шара $B(0, 1)$, что мы и будем предполагать. Далее $A_i = A_i(\Omega)$.

Пусть $d = \text{diam } \Omega$, $p < \infty$, $0 < r < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2d+1}\right\}$, где ε_0 – константа C_1 из леммы 2, $a \in \mathbb{R}^n$, $U_a = B(a, r) \cap ((1-r)\Omega) \neq \emptyset$, $V = \frac{1}{1-r}U_a$, $\varepsilon = (2d+1)r$ и G_j , $j \in J$, – области, удовлетворяющие условиям 1)–4) из леммы 2. Поскольку Ω звездна относительно $B(0, 1)$, имеем

$$(1-r)\Omega \subset \Omega_{(r)}. \quad (52)$$

Если $x \in B(a, r)$, то $|x| < (1-r)d + 2r \leq d$ (так как $d \geq 2$) и $r < \frac{1}{2}$, откуда $\left|x - \frac{1}{1-r}x\right| \leq 2dr$, так что $\frac{1}{1-r}B(a, r) \subset B(a, (2d+1)r)$. Следовательно, $U_a, V \subset \Omega \cap B(a, \varepsilon)$, поэтому при некотором j

$$U_a, V \subset G_j \subset \Omega \cap B(a, A_1 r). \quad (53)$$

Положим $\mu = \frac{1}{v\varepsilon^n} \int_B g dx$, где B – шар радиуса ε , относительно которого звездна данная область G_j . Ввиду (53)

$$\begin{aligned} \left\|g(x) - g\left(\frac{x}{1-r}\right)\right\|_{L_p(U_a)} &\leq \|g(x) - \mu\|_{L_p(U_a)} + \left\|g\left(\frac{x}{1-r}\right) - \mu\right\|_{L_p(U_a)} \\ &= \frac{1}{v\varepsilon^n} \left(\int_{U_a} \left| \int_B (g(x) - g(y)) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{(1-r)^{n/p}}{v\varepsilon^n} \left(\int_V \left| \int_B (g(x) - g(y)) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq A_2 r^{-n/p} \|g(x) - g(y)\|_{L_p(Y_a)}, \end{aligned} \quad (54)$$

где Y_a – множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $[x, y] \subset \Omega \cap B(a, A_1 r)$. Если неравенство между крайними выражениями в (54) возвести в степень p и просуммировать по всем $a \in \frac{r}{n}\mathbb{Z}^n$ с $U_a \neq \emptyset$, получим

$$\left\|g(x) - g\left(\frac{x}{1-r}\right)\right\|_{L_p((1-r)\Omega)} \leq A_3 r^{-n/p} \left(\iint_{\substack{[x,y] \subset \Omega \\ |x-y| < 2A_1 r}} |g(x) - g(y)|^p dx dy \right)^{1/p},$$

откуда (если сделать в интеграле замену $z = y - x$ и проинтегрировать сначала по x) следует, что

$$\left\| g(x) - g\left(\frac{x}{1-r}\right) \right\|_{L_p((1-r)\Omega)} \leq A_4 \omega(g, r)_{L_p(\Omega)}. \quad (55)$$

Обозначим для краткости

$$N_1 = \|g\|_{L_p(\Omega)}, \quad N_2 = \|g\|_{L_p((1-r)\Omega)}, \quad N_3 = \|g\|_{L_p(\Omega(r))}, \quad \omega = \omega(g, r)_{L_p(\Omega)}.$$

Тогда на основании (55) справедливо $|N_2 - (1-r)^{n/p} N_1| \leq A_4 \omega$, поэтому

$$N_1 - N_2 \leq A_5 (r N_1 + \omega). \quad (56)$$

Используя неравенство

$$\xi^p - \eta^p \leq p \xi^{p-1} (\xi - \eta),$$

где $0 \leq \eta \leq \xi$, а также (52), (56), получаем

$$N_3 \leq (N_1^p - N_2^p)^{1/p} \leq p^{1/p} N_1^{1-1/p} (N_1 - N_2)^{1/p} \leq A_6 (r^{1/p} N_1 + N_1^{1-1/p} \omega^{1/p}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Здесь $A_i = A_i(\Omega, m, p, \varkappa)$ при $p \neq 2$ и $A_i = A_i(\Omega, m)$ при $p = 2$; $A_i > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $p < \infty$ (случай $p = \infty$, $n = 1$ содержится в замечании 2). По лемме 10 и замечанию 3

$$\|D^k(f - s)\|_{L_p(\Omega(\varepsilon))} \leq A_1 (\omega(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} + \varepsilon^{-A_2} A_3^{\varepsilon/\bar{h}} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}),$$

где $A_3 < 1$ (то, что $\omega_m(f, \bar{h})_{L_1(\Omega)}$ оценивается через $\|D^m f\|_{L_p(\Omega)}$, следует, например, из леммы 4). Согласно замечаниям 1, 2 ($\Omega' = \Omega^{(2\varepsilon)}$)

$$\|D^k(f - s)\|_{L_p(\Omega^{(2\varepsilon)})} \leq A_4 (\|D^k f\|_{L_p(\Omega^{(3\varepsilon)})} + A_5^{\varepsilon/\bar{h}} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}),$$

где $A_5 < 1$. Полагая $\varepsilon = \frac{A_2 + 1}{|\ln A_6|} \bar{h} |\ln \bar{h}|$, где $A_6 = \max\{A_3, A_5\}$, и учитывая, что $\bar{h} < \frac{1}{2}$, получаем отсюда

$$\|D^k(f - s)\|_{L_p(\Omega)} \leq A_7 (\bar{h} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} + \omega(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} + \|D^k f\|_{L_p(\Omega^{(3\varepsilon)})}).$$

Оценивая последнее слагаемое по лемме 12, получаем (51).

Из теорем 4 и 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f \in W_2^m(\Omega)$, $\Delta_i \subset \bar{\Omega}$ ($i \in \mathbb{N}$) и $h_i = \bar{h}(\Delta_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то

$$\|f - s(f, \Delta_i, m, \Omega)\|_{W_2^m(\Omega)}^2 = O(h_i |\ln h_i| + \omega(D^m f, h_i |\ln h_i|)_{L_2(\Omega)}), \quad i \rightarrow \infty.$$

Список литературы

1. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
2. *Atteia M.* Existence et détermination des fonctions "spline" à plusieurs variables // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1966. V. 262. №10. P. 575–578.
3. *Матвеев О. В.* Сплайн-интерполяция функций нескольких переменных и базисы в пространствах Соболева // Труды МИАН. 1992. Т. 198. С. 125–152.
4. *Никольский С. М.* Соболева пространство // Матем. энциклопедия. Т. 5. М.: Сов. энциклопедия, 1985. С. 56–58.
5. *Матвеев О. В.* Аппроксимативные свойства интерполяционных D^m -сплайнов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. №1. С. 14–18.
6. *Матвеев О. В.* Интерполирование D^m -сплайнами на хаотических сетках // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Екатеринбург: Ин-т матем. и мех. УрО РАН, 1994.
7. *Walsh J. L., Ahlberg J. H., Nilson E. N.* Best approximation properties of the spline fit // J. Math. Mech. 1962. V. 11. №2. P. 225–234.
8. *Ahlberg J. H., Nilson E. N.* Convergence properties of the spline fit // J. Soc. Ind. Appl. Math. 1963. V. 11. №1. P. 95–104.
9. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* Best approximation and convergence properties of higher-order spline approximations // J. Math. Mech. 1965. V. 14. №2. P. 231–243.
10. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* Convergence properties of cubic splines // Notices Amer. Math. Soc. 1966. V. 13. №1. P. 140.
11. *Ahlberg J. H., Nilson E. N.* Polynomial splines on the real line // J. Approx. Theory. 1970. V. 3. №4. P. 398–409.
12. *Sharma A., Meir A.* Convergence of spline-functions // Notices Amer. Math. Soc. 1964. V. 11. №7. P. 768.
13. *Sharma A., Meir A.* Degree of approximation of spline interpolation // J. Math. Mech. 1966. V. 15. №5. P. 759–767.
14. *Nord S.* Approximation properties of the spline fit // BIT. 1967. V. 7. №2. P. 132–144.
15. *De Boor C.* Odd-degree spline interpolation at a biinfinite knot sequence // Lecture Notes in Math. 1976. V. 556. P. 30–53.
16. *Субботин Ю. Н.* Приближение функций класса $W^k H^p_\omega$ сплайнами порядка m // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. №5. С. 1039–1041.
17. *Субботин Ю. Н.* Приближение "сплайн"-функциями и оценки поперечников // Труды МИАН. 1971. Т. 109. С. 35–60.
18. *Субботин Ю. Н.* Сплайн-аппроксимация // Труды Саратов. зимней школы (1982). Ч. 1. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. С. 81–90.
19. *Lucas T. R.* Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions // SIAM J. Numer. Anal. 1974. V. 11. №3. P. 569–584.
20. *Marsden M.* Cubic spline interpolation of continuous functions // J. Approx. Theory. 1974. V. 10. №2. P. 103–111.
21. *Зматраков Н. Л.* Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов // Труды МИАН. 1975. Т. 138. С. 71–93.
22. *Шадрин А. Ю.* О приближении функций интерполяционными сплайнами, заданными на неравномерных сетках // Матем. сб. 1990. Т. 181. №9. С. 1236–1255.
23. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
24. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
25. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
26. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
27. *Farwig R.* Rate of convergence of Shepard's global interpolation formula // Math. Comp. 1986. V. 46. №174. P. 577–590.
28. *Duchon J.* Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces // RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 1976. V. 10. №12. P. 5–12.

29. *Duchon J.* Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m -splines // RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 1978. V. 12. № 4. P. 325–334.
30. *Беззаев А. Ю.* D^m -сплайны в задачах приближения функций на хаотических сетках // Автореф. дис. . . . канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
31. *Madych W. R., Nelson S. A.* Polyharmonic cardinal splines // J. Approx. Theory. 1990. V. 60. № 2. P. 141–156.
32. *Ciesielski Z., Figiel T.* Spline bases in classical function spaces on compact C^∞ manifolds. I // Studia Math. 1983. V. 76. № 1. P. 1–58; II // Studia Math. 1983. V. 76. № 2. P. 95–136.
33. *Субботин Ю. Н.* Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 1. С. 43–51.
34. *Чисельский З.* Базисы и К-функционалы для пространств Соболева над компактными многообразиями класса C^∞ // Труды МИАН. 1983. Т. 164. С. 197–203.
35. *Franke R.* Scattered data interpolation: tests of some methods // Math. Comp. 1982. V. 38. № 157. P. 181–200.
36. *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
37. *Игнатов М. И., Певный А. Б.* Сплайн-аппроксимация плавных поверхностей // Пре-принт. Сер. Науч. докл. / Коми фил. АН СССР. № 149. Сыктывкар: Коми филиал АН СССР, 1986.
38. *Бессов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
39. *Брудный Ю. А.* Многомерный аналог одной теоремы Уитни // Матем. сб. 1970. Т. 82. № 2. С. 175–191.
40. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Наука, 1962.
41. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
42. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
43. *Завьялов Ю. С., Имамов А.* О вариационных задачах теории сплайнов // Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 27–36.
44. *Привалов И., Пчелин Б.* К общей теории полигармонических функций // Матем. сб. 1937. Т. 2. № 4. С. 745–758.

Институт математики и механики УрО РАН
 E-mail: Oleg.Matveev@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
 30.01.1997 и 15.04.1998