Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 5, 137–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:05:08

УДК 517.9

В. В. Рыжиков

Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1

В работе изучается класс автоморфизмов пространства Лебега, обладающих свойством простоты спектра их симметрических степеней. В рамках конструкций ранга 1 строятся перемешивающие автоморфизмы, обладающие этим свойством. Статья также содержит результаты о слабых пределах, локальном ранге и спектральной кратности степеней автоморфизмов. Обсуждаются спектральные свойства стохастического автоморфизма Чакона.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Автоморфизму T пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, отвечает унитарный оператор $T: L_2(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $Tf(x) = f(Tx)$. Автоморфизм и оператор в статье обозначаются одинаково. Унитарный оператор T характеризуется его спектральной мерой σ_T (подразумевается мера максимального спектрального типа) и функцией кратности спектра. Множество существенных значений функции кратности обозначается через $\mathcal{M}_T$. Симметрической степенью $T^{\odot n}$ автоморфизма T называется ограничение его декартовой степени $T_{(1)} \times \cdots \times T_{(n)}$ на подалгебру $\mathcal{A}^{\odot n}$. Напомним, что $\mathcal{A}^{\odot n}$ образована множествами из $\mathcal{A}^{\otimes n}$, инвариантными относительно перестановок координат в декартовом кубе $X_{(1)} \times \cdots \times X_{(n)}$. Перемешиванием называется следующее свойство автоморфизма T :

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \quad \mu(A \cap T^i B) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad i \rightarrow \infty.$$

Иначе свойство перемешивания формулируется как слабая сходимость

$$T^i \rightarrow \Theta, \quad i \rightarrow \infty,$$

где Θ обозначает оператор ортопроекции на пространство констант в $L_2(X, \mu)$.

Основная цель статьи – изложение метода, при помощи которого строятся перемешивающие автоморфизмы, симметрические степени которых обладают простым спектром. Важную роль в этих построениях играют неперемешивающие автоморфизмы.

Работа выполнена в рамках “Программы поддержки ведущих научных школ РФ” (грант № НШ-6849.2006.1).

Рассмотрим следующий пример, в котором пока рассматривается не симметрическая, а обычная степень автоморфизма. Пусть автоморфизм T имеет простой спектр и при $a \in (0, 1)$ удовлетворяет следующему условию:

$$T^{n_i} \rightarrow (1 - a)(I + aT + a^2T^2 + \dots), \quad n_i \rightarrow \infty.$$

(здесь подразумевается слабая операторная сходимость). Будет ли его квадрат T^2 обладать простым спектром? Покажем, что ответ утвердительный. Пусть f – циклический вектор для оператора T , т.е. минимальное замкнутое пространство, содержащее все векторы $T^k f$, совпадает с $L_2(X, \mu)$. Для доказательства простоты спектра оператора T^2 достаточно убедиться в том, что замкнутое пространство C , содержащее все векторы $T^{2k} f$, содержит и вектор Tf . Пусть $n_i = 2m_i - 1$ (“нечетный” случай). Тогда при $m_i \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} T^{2m_i} f &= T^{n_i+1} f \rightarrow (1 - a)(T + aT^2 + a^2T^3 + a^3T^4 + \dots)f, \\ a^2 T^{2m_i+2} f &\rightarrow (1 - a)(a^2T^3 + a^3T^4 + \dots)f, \end{aligned}$$

причем (слабые) пределы принадлежат пространству C . Их разность также принадлежит пространству C , следовательно, $Tf \in C$. Аналогично рассматривается “четный” случай.

Итак, для нашего перемешивающего автоморфизма T мы научились доказывать простоту спектра автоморфизма T^2 . Можно ли применить этот метод к перемешивающему автоморфизму? Теперь $T^i \rightarrow \Theta$, $i \rightarrow \infty$, и мы находимся в ситуации, когда нет нетривиальных пределов. Однако заметим следующее. Если параметр a устремить к 1, то оператор $(1 - a)(T + aT^2 + a^2T^3 + a^3T^4 + \dots)$ становится близким к оператору Θ (предполагается эргодичность автоморфизма T). Таким образом, возникает возможность аппроксимировать перемешивающий автоморфизм перемешивающими, сохраняя в пределе рассмотренное спектральное свойство. Замечательным образом среди других таких свойств, которые можно сохранить при предельном переходе, оказалась простота симметрических степеней автоморфизма. Из простоты спектра $T^{\odot 2}$ вытекает однородность спектра автоморфизма $T \times T$.

Задача В. А. Рохлина об однородном конечнократном спектре (решенная в [1]–[3], см. также [4]–[8]) оказалась связанной с другими задачами эргодической теории. Например, с известной в спектральной теории динамических систем проблемой Колмогорова о групповом свойстве спектра. Этой тематике посвящены статьи В. И. Оселедда [9], [10], Я. Г. Синая [11] и А. М. Степина [12]–[14], в работах которого в классе перемешивающих автоморфизмов получено окончательное решение проблемы Колмогорова.

В статье [3] дано решение задачи Рохлина для перемешивающих автоморфизмов: для некоторой перемешивающей лестничной конструкции T (определение см. ниже) доказано свойство $\mathcal{M}_{T \odot T} = 1$, что равносильно $\mathcal{M}_{T \otimes T} = 2$ (перемешивающий автоморфизм $T \times T$ имеет однородный спектр кратности 2). Другое следствие – отрицательный ответ на вопрос о групповом свойстве спектра в классе перемешивающих действий. Для такого автоморфизма T выполнено $\sigma_T \perp \sigma_T * \sigma_T$. Для типичных (неперемешивающих) автоморфизмов это и более сильное свойство

$$\sigma_T^{*m} \perp \sigma_T^{*n}, \quad 1 \leq m < n, \quad (*)$$

установлены в [13], [14]. В заметке [1] для типичного (неперемешивающего) автоморфизма T доказана гипотеза А. Катка:

$$\begin{aligned} &\text{функция кратности произведения } T_{(1)} \times \cdots \times T_{(n)} \\ &\text{принимает значения } \{n, n(n-1), \dots, n!\}. \end{aligned} \quad (**)$$

Для доказательства этого факта использовалась простота спектра всех симметрических произведений типичного автоморфизма, который обладает слабыми пределами вида $aI + (1-a)T$, $a \in (0, 1)$.

В предлагаемой статье, в частности, будет доказана теорема, анонсированная в [3], которая утверждает существование перемешивающего преобразования T такого, что симметрические степени $T^{\odot n}$, $n > 2$, имеют простой спектр. По этой причине спектральная мера σ_T обладает свойствами (*) и (**), что отмечалось в [3]. Ж.-П. Туveno (J.-P. Thouvenot) обратил наше внимание на то, что упомянутый результат дает новый подход к построению перемешивающей гауссовской системы с простым спектром. Такая система строится из перемешивающего унитарного оператора U , обладающего свойством простоты спектра $U^{\odot n}$. В качестве U рассмотрим ограничение T на пространство функций с нулевым средним. Гауссовская система, построенная по этому унитарному оператору, будет перемешивающей системой с простым спектром. Здесь для построения гауссовской динамической системы используется другая динамическая система (автоморфизм ранга 1).

В работе [15] установлено свойство (*) для автоморфизма Чакона. Ф. Парро (F. Parreau) усилил этот результат, доказав простоту спектра симметрических произведений конструкций, названных им стационарными. (О. Н. Агеев также усилил результат работы [15], независимо от Ф. Парро доказав простоту спектра симметрических степеней модифицированного автоморфизма Чакона.) Стационарные конструкции включают классический и модифицированный автоморфизм Чакона, неперемешивающие лестничные конструкции. Применяя к этим результатам технику аппроксимации перемешивающих конструкций [3], Ф. Парро и автор доказали (2000 г.) существование лестничных конструкций со свойством простоты спектра симметрических степеней. Автор также показал (2000 г.), что лестничные конструкции из [3] обладают простотой спектра всех симметрических степеней.

Возвращаясь к задаче Рохлина, отметим, что в [5] новым методом доказано, что для любого $n > 1$ существует эргодический автоморфизм с однородным спектром кратности n . А. И. Даниленко [6] нашел простое доказательство этого факта и привел конструктивные примеры преобразований с однородным спектром кратности $n > 2$. Однако для перемешивающих (и даже для нежестких) автоморфизмов реализация однородного спектра кратности, большей 2, не доказана. Отметим также, что класс перемешивающих лестничных автоморфизмов T таких, что $T \times T$ имеет однородный спектр кратности 2, в работе [3] не описан эффективно. “Неспектральный” метод работы [3] представляется удобным для конструктивизации примеров (в отличие от чисто спектральных методов, менее пригодных для этой цели).

В [16] Т. Адамс доказал, что при некотором ограничении лестничные конструкции обладают перемешиванием. Отметим, что для наших результатов о

симметрических степенях достаточно рассмотреть конструкции с ограничениями Адамса.

Работа имеет следующее содержание. В § 2 рассматриваются конструкции типа лестничных. Для неперемешивающих систем (но близких к перемешивающим) в § 3 устанавливается свойство простоты спектра симметрических степеней. Конструкции подбираются так, чтобы доказательство указанного спектрального свойства было коротким и не требовало работы со спектральной мерой. В § 4 изложен способ получения перемешивающего автоморфизма как предела неперемешивающих конструкций с сохранением простоты спектров $T^{\odot n}$. В § 5 показано, что этим свойством могут обладать лестничные конструкции. В § 6 изучается “сильно” неперемешивающая конструкция автоморфизма, допускающего аппроксимацию парой циклов. Как мы докажем, полугруппа слабых замыканий степеней такого автоморфизма является компактом, содержащим все выпуклые комбинации степеней. В § 7 показана универсальность традиционной методики построения автоморфизма T со свойством $T^{n_i} \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $n_i \rightarrow \infty$, где $\mathcal{P}(T)$ – полином. В § 8 обсуждаются задачи, связанные с тематикой статьи. В частности, отмечено, что спектральная кратность (перемешивающего) автоморфизма T^i не обязана линейно зависеть от i (при $i > 0$). Высказана гипотеза о тривиальности полугруппы слабых замыканий степеней для стохастического автоморфизма Чакана.

§ 2. Лестничные и почти лестничные конструкции

Преобразование T обладает рангом 1 (допускает циклическую аппроксимацию), если найдется последовательность разбиений фазового пространства X вида $\xi_n = \{B_n, TB_n, \dots, T^{h_n-1}B_n, R_n\}$, которая стремится к разбиению на точки (пишем $\xi_n \rightarrow \varepsilon$).

Лестничная конструкция автоморфизмов ранга 1 обычно описывается в терминах “разрезания и складывания”. (Таким описанием мы воспользуемся позже.) Пусть автоморфизм T допускает последовательность разбиений ξ_n фазового пространства X на множества

$$\begin{array}{ccccccc} B_n^1, & TB_n^1, & \dots, & T^{h_n}B_n^1, & & & \\ B_n^2, & TB_n^2, & \dots, & T^{h_n}B_n^2, & T^{h_n+1}B_n^2, & & \\ B_n^3, & TB_n^3, & \dots, & T^{h_n}B_n^3, & T^{h_n+1}B_n^3, & T^{h_n+2}B_n^3, & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n^{r_n}, & TB_n^{r_n}, & \dots, & T^{h_n}B_n^{r_n}, & \dots, & T^{h_n+r_n-2}B_n^{r_n}, & Y_n, \end{array}$$

причем для всех n выполнено

$$B_n^2 = T^{h_n}B_n^1, \quad B_n^3 = T^{h_n+1}B_n^2, \quad \dots, \quad B_n^{r_n} = T^{h_n+r_n-1}B_n^{r_n-1}.$$

Если разбиения ξ_n стремятся к разбиению на точки ($\xi_n \rightarrow \varepsilon$) и для всех n выполнено

$$B_{n-1}^1 = B_n^1 \sqcup B_n^2 \sqcup \dots \sqcup B_n^{r_n},$$

говорим, что T является *лестничной конструкцией*. Заметим, что конструкция такого T определена параметрами h_1 и $\{r_n\}$.

В [16] Адамс доказал, что из условий $r_n \rightarrow \infty$ и $r_n^2/h_n \rightarrow 0$ вытекает свойство перемешивания соответствующего автоморфизма T . На самом деле для перемешивания достаточно потребовать выполнения условия $r_n \rightarrow \infty$ (конечно, подразумевается естественное ограничение на конечность меры X , которое эквивалентно условию $\sum_n (r_n/h_n) < \infty$) [17].

Последовательности вида $B_n^i, TB_n^i, \dots, T^{h_n} B_n^i$ называются *колоннами* (они получаются в результате разрезания n -й башни на r_n колонн). Над каждой k -й колонной надстраивается $k - 1$ этажей, т.е. добавляется набор $T^{h_n+1} B_n^k, T^{h_n+2} B_n^k, \dots, T^{h_n+k-1} B_n^k$. При схематическом изображении этой конструкции множества $T^{h_n+k-1} B_n^k$, $k = 1, 2, \dots, r_n$, образуют лестницу – отсюда и название. А $(n + 1)$ -я башня получается из описанных колонн с надстройками, когда мы последовательно обходим этажи k -й колонны (начиная с первой), надстройки над ней, потом опускаемся на нулевой этаж $(k + 1)$ -й колонны и т.д. Описанное выше разбиение ξ_n соответствует $(n + 1)$ -й башне. Число этажей в башне вычисляется рекуррентно по h_1 и последовательности r_n .

Модификация лестничной конструкции. Для получения простоты спектра симметрических степеней мы построим автоморфизм S , обладающий свойством: для любого $t \in (0, \delta)$ найдется последовательность h_n такая, что для всех $p > 0$ имеет место слабая сходимость

$$S^{-ph_n} \rightarrow tI + (\delta - t)S^p + (1 - \delta)\Theta, \quad h_n \rightarrow \infty$$

(Θ – оператор ортопроекции на пространство констант в $L_2(X, \mu)$).

Конструкции, которые мы рассмотрим, будут отличаться от лестничной тем, что длины первой и второй ступени лестницы теперь будут сравнимы с длиной лестницы, а, начиная с третьей ступени, “поведение” лестницы стандартно. Первая ступень нам обеспечит наличие в слабом пределе слагаемого tI , вторая – слагаемого $(\delta - t)S^p$, а оставшиеся ступени дадут слагаемое $(1 - \delta)\Theta$. (Когда мы говорим “первая ступень”, то подразумеваем под этим “последовательность первых ступеней”).

Зафиксируем число $\delta > 0$ и пока зафиксируем $t \in (0, \delta)$. Пусть на шаге с номером n_i построена башня. Разрежем ее на r_{n_i} колонн, а число надстроенных этажей $s(k)$ над k -й колонной определим следующим образом:

$$\begin{aligned} s(k) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, [tr_{n_i}]; \\ s(k) &= 1, & k &= [tr_{n_i}] + 1, [tr_{n_i}] + 2, \dots, [\delta r_{n_i}]; \\ s(k) &= k - [\delta r_{n_i}] + 1, & k &= [\delta r_{n_i}] + 1, \dots, r_{n_i}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.1. *Для описанной конструкции при $r_{n_i} \rightarrow \infty$ выполнено*

$$S^{-ph_{n_i}} \rightarrow tI + (\delta - t)S^p + (1 - \delta)\Theta, \quad h_{n_i} \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X_i^0 объединение колонн с номерами k такими, что $s(k) = 0$; через X_i^1 – объединение колонн с номерами k такими, что $s(k) = 1$, а объединение оставшихся колонн – через X_i . Тогда выполняется

$$\mu(S^{-ph_{n_i}} A \cap B \mid X_i^0) \rightarrow \mu(A \cap B)$$

(так как куски этажей, расположенные в X_i^0 , под действием $S^{-ph_{n_i}}$ в основном переходят в себя);

$$\mu(S^{-ph_{n_i}}A \cap B \mid X_i^1) \rightarrow \mu(S^pA \cap B),$$

(куски этажей, расположенные в X_i^1 , под действием $S^{-ph_{n_i}}$ поднимаются на p этажей);

$$\mu(S^{-ph_{n_i}}A \cap B \mid X_i) \rightarrow \mu(A)\mu(B), \quad (1)$$

что является следствием эргодичности автоморфизма S^p , поясним это. Заметим, что

$$\mu(S^{-ph_{n_i}}A \cap B \mid X_i) - \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \mu(S^{pi}A \cap B) \rightarrow 0,$$

где N_i – число колонн в X_i . Это непосредственно проверяется для множеств A и B , составленных из этажей башни; в общем случае используем аппроксимацию. Так как S является эргодическим (S обладает рангом 1), получим

$$\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \mu(S^iA \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B).$$

Таким образом, имеет место сходимость

$$S^{-h_{n_i}} \rightarrow tI + (\delta - t)S + (1 - \delta)\Theta.$$

Отсюда вытекает, что S слабо перемешивает (в спектре нет дискретной компоненты). Действительно, если $Sf = \lambda f$, переходя к пределу в выражении

$$S^{-h_{n_i}}f = \lambda^{-h_{n_i}}f,$$

получаем

$$tf + (\delta - t)Sf + \Theta f = \beta f, \quad |\beta| = 1.$$

Если собственная функция f имеет нулевое среднее, то имеем $|t + (\delta - t)\lambda| = 1$, что невозможно, так как $|\lambda| = 1$. Слабое перемешивание влечет за собой эргодичность всех ненулевых степеней. Следовательно,

$$\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \mu(S^{pi}A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B),$$

что, как пояснялось выше, приводит к (1).

Варьируя число $t \in (0, \delta)$ в зависимости от шага n , получаем всевозможные пределы вида $tI + (\delta - t)S^p + (1 - \delta)\Theta$. Класс таких конструкций обозначим через $C(\delta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для получения компоненты $(1 - \delta)\Theta$ использовалась лестница. Если же лестницу строить по правилу “высоты ступеней принимают значения $\{1, 2, \dots, s\}$ и частота случая, когда высота равна 1, положительна”, получим опять компоненту $(1 - \delta)\Theta$. И совершенно случайные надстройки приводят к аналогичному результату. Таким образом, класс конструкций, которые дают нужные пределы, чрезвычайно широк.

§ 3. Простота спектра симметрических степеней

Напомним, что оператор $P_1 \odot \cdots \odot P_n$ обозначает сумму

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma} P_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes P_{\sigma(n)},$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов. Аналогично определяется симметрическое произведение функций

$$f_1 \odot \cdots \odot f_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Спектр ненулевых степеней и симметрических степеней автоморфизмов класса $C(\delta)$ простой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим симметрические степени. Так как автоморфизм $T \in C(\delta)$ имеет ранг 1, он обладает простым спектром. Пусть f – соответствующий циклический вектор в пространстве $H = \text{Const}^\perp$. Покажем для случая $n = 3$, что $f \otimes f \otimes f$ является циклическим вектором для $T^{\odot 3}$. Рассмотрим циклическое пространство $C_{f \otimes f \otimes f}$ с циклическим вектором $f \otimes f \otimes f$. Наша задача – установить, что все векторы вида $f \odot T^k f \odot T^m f$ принадлежат $C_{f \otimes f \otimes f}$.

Пусть $\tau = (\delta - t)/t$. Для действительного $\tau > 0$ и целого k вектор

$$V_{\tau,k} = (I + \tau T^k) f \odot (I + \tau T^k) f \odot (I + \tau T^k) f \in C_{f \otimes f \otimes f}$$

имеет вид

$$c_0 f \odot f \odot f + \tau c_1 f \odot f \odot T^k f + \tau^2 c_2 f \odot T^k f \odot T^k f + \tau^3 c_3 T^k f \odot T^k f \odot T^k f.$$

Отметим, что векторы $V_{\tau,k}$ лежат в $C_{f \otimes f \otimes f}$.

Зафиксируем k . Линейные комбинации векторов $V_{\tau,k}$ (рассматриваются векторы при различных значениях параметра τ) также принадлежат пространству $C_{f \otimes f \otimes f}$. Получим

$$f \odot f \odot T^k f = (I \odot I \odot T^k) f \otimes f \otimes f \in C_{f \otimes f \otimes f}.$$

Так как оператор $P_m = I \odot I \odot T^m$ коммутирует с $T \odot T \odot T$, аналогичным образом доказываем, что

$$P_m(f \odot f \odot T^p f) \in C_{P_m(f \otimes f \otimes f)} \subset C_{f \otimes f \otimes f}.$$

Но $P_m(f \odot f \odot T^p f)$ есть линейная комбинация векторов $f \odot T^m f \odot T^p f$ и $f \odot f \odot T^{k+p} f$. Мы уже знаем, что последний вектор принадлежит $C_{f \otimes f \otimes f}$, следовательно, $f \odot T^m f \odot T^p f \in C_{f \otimes f \otimes f}$ для всех целых m, p . Таким образом, циклическое пространство $C_{f \otimes f \otimes f}$ совпадает с пространством $H^{\odot 3}$. Спектр оператора $T^{\odot 3}$, ограниченного на $H^{\odot 3}$, является простым.

Рассуждения при $n > 3$ повторяют ту же схему: последовательно доказываем, что для любого набора целых чисел $(k_1, \dots, k_n)$ векторы

$$\begin{aligned} & f \odot f \odot \cdots \odot f \odot T^{k_n} f, \\ & f \odot f \odot \cdots \odot T^{k_{n-1}} f \odot T^{k_n} f, \\ & f \odot T^{k_2} f \odot \cdots \odot T^{k_{n-1}} f \odot T^{k_n} f \end{aligned}$$

принадлежат циклическому пространству $C_{f^{\otimes n}}$. Таким образом, циклическое пространство содержит все векторы вида

$$T^{k_1} f \odot T^{k_2} f \odot \dots \odot T^{k_{n-1}} f \odot T^{k_n} f$$

и по этой причине совпадает с $H^{\odot n}$.

Осталось доказать, что оператор $T^{\otimes n}$ имеет циклический вектор в пространстве $L_2(X, \mu)^{\odot n}$. Для этого можно воспользоваться тем, что для различных n операторы $U_n = T^{\otimes n}|_{H^{\otimes n}}$ спектрально дизъюнкты (их спектральные меры взаимно сингулярны). Это вытекает, например, из того, что T обладает свойством $\varkappa$ -перемешивания (см. [13]) при $\varkappa = 1 - \delta$:

$$T^{k_i} \rightarrow \delta I + (1 - \delta)\Theta, \quad k_i \rightarrow \infty.$$

Доказательство простоты спектра обычной степени T^p проще. Пусть f – циклический вектор для оператора T . Покажем, что f является циклическим для оператора T^p . Для некоторого q , $0 \leq q < p$, при фиксированном δ для бесконечного числа значений t имеет место сходимость

$$T^{-pk_{n_i}} \rightarrow T^q \frac{1}{2} (tI + (\delta - t)T).$$

Получили, что векторы $t_1 T^q f + (\delta - t_1) T^{q+1} f$ и $t_2 T^q f + (\delta - t_2) T^{q+1} f$, $t_1 \neq t_2$, принадлежат циклическому пространству C_f оператора T^p . Следовательно, векторы $T^q f$ и $T^{q+1} f$ принадлежат пространству C_f . Теперь, рассматривая пространство $C_{T^q f}$, получаем векторы $T^{q+q} f$ и $T^{q+q+1} f$ и т.п. Таким образом, векторы $T^{iq+j(q+1)} f$ принадлежат циклическому пространству оператора T^p . При $i = -j$ получаем, что для всех j векторы $T^j f$ принадлежат замыканию пространства, образованного векторами $\{\dots, T^{-p} f, f, T^p f, T^{2p} f, \dots\}$.

Отметим, что простота спектра $T^{\odot 3}$ вытекает из принадлежности векторов $V_{\tau_1, k}$ и $V_{\tau_2, k}$ циклическому пространству $C_{f \otimes f \otimes f}$. Действительно, векторы $c_1 f \odot f \odot T^k f + \tau_1 c_2 f \odot T^k f \odot T^k f$ и $c_1 f \odot f \odot T^k f + \tau_2 c_2 f \odot T^k f \odot T^k f$ принадлежат циклическому пространству $C_{f \otimes f \otimes f}$. Отсюда следует, что $f \odot f \odot T^k f$ и $f \odot T^k f \odot T^k f$ лежат в $C_{f \otimes f \otimes f}$. Таким образом, для доказательства простоты спектра $T^{\odot 3}$ достаточно иметь пределы вида $t_i I + (\delta - t_i) T^p + (1 - \delta)\Theta$, $i = 1, 2$, только такие, чтобы соответствующие значения τ_1, τ_2 были различны.

Для доказательства простоты спектра $T^{\odot 4}$ достаточно трех различных значений τ и т.д.

Напомним, что простота спектра $T^{\odot n}$ при наличии слабых пределов $aI + (1 - a)T$, $a \in (0, 1)$, установлена в [1].

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть автоморфизм T имеет простой спектр. Если для некоторого $a > 0$ и некоторого p_0 для всех $p > p_0$ операторы $a(I + T^p) + (1 - 2a)\Theta$ являются слабыми пределами степеней, то спектр симметрических степеней автоморфизма T простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к повторным пределам, т.е. рассмотрим пределы последовательностей вида $a(I + T^{p_i}) + (1 - 2a)\Theta$. Получим, что слабые пределы степеней содержат операторы

$$a(I + a(I + T^p) + (1 - 2a)\Theta) + (1 - 2a)\Theta = (a + a^2)I + a^2 T^p + (1 - a - 2a^2)\Theta.$$

Из условия теоремы мы имеем предел при $\tau_1 = 1$ (τ обозначает отношение коэффициентов при операторе I и T). Теперь $\tau_2 = a/(1+a)$. Повторяя процедуру ($\tau_3 = a^2/(1+a+a^2)$ и т.д.), получаем бесконечный набор $\{\tau_i\}$. Как пояснялось выше, это приводит к простоте спектра $T^{\odot n}$.

§ 4. Вынуждение перемешивания

Конструкцию ранга 1 назовем *почти лестничной*, если мера множества, на котором конструкция отличается от лестничной на шаге n , стремится к 0 с ростом n .

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует почти лестничная перемешивающая конструкция T , обладающая свойством: для всех $n > 1$ спектр симметрической степени $T^{\odot n}$ является простым.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для такого автоморфизма T выполняется $\sigma^{*k} \perp \sigma^{*m}$ при $k > m > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Ниже определим последовательность автоморфизмов $T_p \in C(\delta_p)$, $\delta_p \rightarrow 0$, с носителями X_p (на $X \setminus X_p$ полагаем $T_p = \text{Id}$), при этом будет выполнено

$$X_p \subset X_{p+1} \subset X_{p+2} \subset \dots$$

Для всех p будет выполнено условие

$$T_p|_{X_{p-1}} = T_{p+1}|_{X_{p-1}}.$$

Требуемый автоморфизм T получается как предельная конструкция с фазовым пространством $X = \bigcup_p X_p$:

$$\forall q \forall p > q \quad T_p|_{X_q} = T|_{X_q}.$$

Наша задача – выбрать последовательность $\mu(X \setminus X_p)$ так, чтобы ее стремление к 0 было очень быстрым. Тогда циклические для операторов $T_p^{\odot n}$ пространства $L_2(X_p)^{\odot n}$ будут хорошо приближать пространство $L_2(X)^{\odot n}$ и оно окажется циклическим для $T^{\odot n}$.

Иначе говоря, мы сохраняем свойство простоты спектра неперемешивающих автоморфизмов $T_p^{\odot n}$ для предельного перемешивающего автоморфизма $T^{\odot n}$. Это свойство сильнее, чем взаимная сингулярность сверточных степеней.

Теперь, когда цель обозначена, опишем выбор последовательности $\{T_p\}$. Зафиксируем $a > 0$ и натуральное $n > 1$. Пусть на шаге p построены функции $F_1, F_2, \dots, F_p \in L_2(X_p)^{\odot n}$. (Множество $\{F_i\}$ в конечном итоге будет плотным в $L_2(X)^{\odot n}$.) Пусть для всех $q \leq p$ функция $H_p \in L_2(X_q)^{\odot n}$ является циклическим вектором оператора $T_q^{\odot n}$ в пространстве $L_2(X_q)^{\odot n}$. Также предполагаем, что для всех $q \leq p$ выбраны числа ε_q такие, что $2\varepsilon_{q+1} < \varepsilon_q$, причем выполнены неравенства

$$\|\mathcal{P}_q(T_p^{\odot n})H_p - F_q\| < \frac{a}{2}$$

для некоторых полиномов $\mathcal{P}_q$.

Теперь определим ε_{p+1} , T_{p+1} , F_{p+1} , H_{p+1} , $\mathcal{P}_{p+1}$. Выбираем $\varepsilon_{p+1} > 0$ так, чтобы $2\varepsilon_{p+1} < \varepsilon_p$ и для любого автоморфизма S условие

$$\mu(\operatorname{supp}(S^{-1}T_p)) < \varepsilon_{p+1}$$

влекло за собой неравенства

$$\|\mathcal{P}_q(T_p^{\odot n})H_q - \mathcal{P}_q(S^{\odot n})H_q\| < \frac{a}{2}$$

для всех $q \leq p$.

Рассмотрим конструкцию $T_{p+1} \in C(\delta_{p+1})$ с последовательностью $\{r_j^{(p)}\}$ такую, что до этапа j_p параметры конструкции T_{p+1} совпадают с параметрами конструкции T_p и выполнено условие

$$\mu(\operatorname{supp}(T_{p+1}^{-1}T_p)) \leq \frac{\varepsilon_{p+1}}{2}.$$

Так как автоморфизм T_{p+1} принадлежит классу $C(\delta_{p+1})$, найдется циклический вектор H_{p+1} для оператора $T_{p+1}^{\odot n}$ на пространстве $L_2(X_{p+1})^{\odot n}$. Выберем некоторую функцию $F_{p+1} \in L_2(X_{p+1})^{\odot n}$ (выбор F_{p+1} подчинен единственному условию: он должен обеспечить плотность семейства $\{F_i\}$ в пространстве $L_2(X)^{\odot n}$). Найдется такой полином $\mathcal{P}_{p+1}$, что выполнено

$$\|\mathcal{P}_{p+1}(T_{p+1}^{\odot n})H_{p+1} - F_{p+1}\| < \frac{a}{2}.$$

Предельный автоморфизм T является почти лестничной конструкцией с последовательностью $r_j \rightarrow \infty$. Он является перемешивающим. При $r_j^2/h_j \rightarrow 0$ это доказано для чисто лестничных конструкций в [16], для почти лестничных конструкций доказательство аналогично (обобщения результата Адамса см. в [17], [18]). Так как неравенство

$$\|\mathcal{P}_p(T^{\odot n})H_p - F_p\| < a$$

выполнено для всех p , пространство $L_2(X)^{\odot n}$ является пределом циклических пространств оператора $T^{\odot n}$ с циклическими векторами H_p . Таким образом, пространство $L_2(X)^{\odot n}$ является циклическим.

Выбирая последовательность $r_j \rightarrow \infty$ так, чтобы для соответствующей почти лестничной конструкции T для всех $m > 1$ пространства $L_2(X)^{\odot m}$ были циклическими для оператора $T^{\odot m}$, завершаем доказательство теоремы 4.1.

§ 5. Лестничные конструкции со свойством простоты спектра симметрических степеней

Ф. Парро принадлежит утверждение о простоте спектра симметрических степеней автоморфизма T с простым спектром такого, что полугруппа $\operatorname{PWC}(T)$ (слабое замыкание степеней автоморфизма T) для всех $k > 0$ при фиксированных натуральных $p > 1$, $s \geq 0$ содержит операторы

$$Q_k = f(T)f(T^{-1})\left(1 - \frac{1}{p^k}T^{ks}\right) + \frac{1}{p^k}T^{ks},$$

а $f(T)$ обозначает полином

$$\frac{1}{p-1}(1 + T + T^2 + \dots + T^{p-2}).$$

Этим результатам Ф. Парро посвятил доклад “Simplicité spectral des puissances symétriques” (Орсэ, июнь 1999 г.). (Автор располагает рукописью доклада.) В случае $s = 0$ при $p = 3$ возникает набор операторов

$$P_m = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^m} \right) (T^{-1} + 2I + T) + \frac{1}{3^m} I.$$

Такие слабые пределы рассматривались в [15], они естественно возникли в случае (модифицированного) автоморфизма Чакона.

Случай $s = 1$ непосредственно связан с лестничной конструкцией: если положить $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = p$, то такая конструкция будет обладать всеми слабыми пределами вида Q_k . Если для всех n выполнено $r_n = 2$, то конструкция является классическим автоморфизмом Чакона (крыша над башней не ограничена). Изложенный нами метод дает в пределе перемешивающую лестничную конструкцию T со свойством простоты спектра произведения $T^{\odot n}$. Для этого параметр p нужно чрезвычайно медленно устремить к бесконечности. Иначе говоря, если последовательность r_n монотонно стремится к бесконечности и скорость роста достаточно мала, то отвечающая ей конструкция обладает указанным спектральным свойством.

Следующий результат был получен автором в период работы в 13-м Парижском университете в 2000 г.

ТЕОРЕМА 5.1. *Существует перемешивающая лестничная конструкция T с немонотонной последовательностью r_n , обладающая свойством $\mathcal{M}_{T^{\odot n}} = \{1\}$.*

В работе [3] эта теорема доказана для $n = 2$. В ней рассматривался класс лестничных неперемешивающих конструкций $SC(p, \infty)$. Он задавался последовательностью r_n , которая удовлетворяла условиям:

- 1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = p$;
- 2) для каждого $q, p \leq q$, найдется $n_i \rightarrow \infty$ такая, что $r_{n_i+1} \rightarrow \infty$ и для всех i $r_{n_i} = q$.

Из последнего условия при $p \leq q$ получаем, что операторы вида

$$P_q = \frac{1}{q}(I + \hat{T} + \hat{T}^2 + \dots + \hat{T}^{q-2} + \Theta)$$

принадлежат $PWC(T)$ – слабому замыканию степеней T . Отметим, что степени $T^{-h_{n_i}}$ сходятся к P_q при условии $r_{n_i} = q$.

Конструкции класса $SC(p, \infty)$ обладают свойством простоты спектра всех симметрических степеней (лемма 5.2). Можно, повторив рассуждения предыдущего параграфа (или рассуждения из [3]), аппроксимировать некоторую перемешивающую лестничную конструкцию автоморфизмами класса $SC(p, \infty)$. При этом медленно увеличивается параметр p , но сохраняется нужное спектральное свойство.

Таким образом, теорема 5.1 вытекает из п. 2) следующей леммы.

ЛЕММА 5.2. Пусть конструкция T принадлежит классу $SC(p, \infty)$. Тогда

1) при $q > p$ операторы вида

$$\frac{1}{q+2}(I + T^q + q\Theta), \quad \frac{1}{q+2}(I + (q+1)\Theta)$$

принадлежат подгруппе $PWC(T)$;

2) спектр $T^{\odot n}$ простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим последовательность

$$H_i = -qh_{n_i} - \frac{(q-1)(q-2)}{2}$$

такую, что для всех i выполнено $r_{n_i} = q+2$. Покажем, что

$$T^{H_i} \rightarrow \frac{1}{q+2}(I + \widehat{T}^q + q\Theta).$$

Башня с номером n_i является объединением $q+2$ колонн, обозначим их через $C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{q+2}$. Степень T^{H_i} на колоннах C_i^1, C_i^2, C_i^q близка к оператору Θ , на множестве C_i^{q+1} – к оператору $\frac{1}{q+2}I$, а на последней колонне – к оператору T^q . Сказанное означает следующее: для любых измеримых множеств A, B

$$\mu(T^{H_i}A \cap B | C_i^1) \rightarrow \mu(A)\mu(B),$$

.....

$$\mu(T^{H_i}A \cap B | C_i^q) \rightarrow \mu(A)\mu(B),$$

$$\mu(T^{H_i}A \cap B | C_i^{q+1}) \rightarrow \mu(A \cap B),$$

$$\mu(T^{H_i}A \cap B | C_i^{q+2}) \rightarrow \mu(T^qA \cap B).$$

Два последних свойства устанавливаются непосредственно для множеств, составленных из этажей башен; в общем случае используем аппроксимацию измеримых множеств множествами, составленными из этажей.

Перемешивание на колоннах $C_i^1, \dots, C_i^q$ устанавливается следующим образом. Заметим, что образ колонны C_i^3 под действием степени T^{H_i} будет асимптотически совпадать с колонной C_i^1 . Поэтому в колонну C_i^1 под действием T^{H_i} попадет та часть множества A , которая была в колонне C_i^3 . Но этажи из колонны C_i^3 “прошли” через крышу (n_i+1) -й башни (которая является надстройкой над колонной C_i^{q+2}). Для множеств, составленных из этажей башен, подсчет показывает, что

$$\mu(T^{H_i}A \cap B \cap C_i^1) - \frac{1}{r_{n_i+1}} \sum_{i=1}^{r_{n_i+1}} \mu(T^{i+d_1}A \cap B \cap C_i^1) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

где $d_1 < q^2$ (точное выражение для d_1 нам не нужно). Так как по условию $r_{n_i+1} \rightarrow \infty$, из эргодичности T получаем, что

$$\frac{1}{r_{n_i+1}} \sum_{i=1}^{r_{n_i+1}} \mu(T^{i+d_1}A \cap B \cap C_i^1) - \mu(A)\mu(B \cap C_i^1) \rightarrow 0.$$

Поскольку

$$\mu(B \cap C_i^1) \rightarrow \frac{1}{q+2} \mu(B),$$

имеем

$$\mu(T^{H_i}A \cap B \cap C_i^1) \rightarrow \frac{1}{q+2} \mu(A)\mu(B).$$

Перемешивание на колоннах $C_i^2, \dots, C_i^q$ доказывается аналогично.

Похожие рассуждения для последовательности

$$K_i = -(q+1)h_{n_i} - \frac{q(q-1)}{2}$$

показывают, что

$$T^{K_i} \rightarrow \frac{1}{q+2} (I + (q+1)\Theta).$$

(Здесь перемешивание имеет место на всех колоннах, кроме последней.)

2) Докажем, что $T^{\odot n}$ имеет простой спектр в $H^{\odot n}$, где H – пространство функций с нулевым средним. Пусть $f \in H$ – циклический вектор для оператора T , действующего в H . Как и при доказательстве теоремы 3.1, покажем, что $H^{\odot n} = C_{f^{\otimes n}}$. Для всех больших k имеем

$$(f + T^k f)^{\otimes n} \in C_{f^{\otimes n}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} T^{k_i+1} &\rightarrow \frac{1}{q+2} (T + (q+1)\Theta), \\ T^{k_i+m} &\rightarrow \frac{1}{q+2} T^m + \frac{q+1}{q+2} \Theta, \end{aligned}$$

получаем, что для всех целых m и для всех больших q выполнено

$$\left(f + \frac{1}{q+2} T^m f \right)^{\otimes n} \in C_{f^{\otimes n}}$$

(здесь мы учли, что $\Theta f = 0$). Рассуждения, аналогичные приведенным в § 2, приводят к

$$T^{k_1} f \odot T^{k_2} f \odot \dots \odot T^{k_n} f \in C_{f^{\otimes n}}.$$

Следовательно, $H^{\odot n} = C_{f^{\otimes n}}$, что означает простоту спектра $T^{\odot n}$ в $H^{\odot n}$. Так как T обладает $\varkappa$ -перемешиванием (при $\varkappa = (q+1)/(q+2)$), симметрическая степень $T^{\odot m}|_{H^{\odot m}}$ дизъюнктна с $T^{\odot k}|_{H^{\odot k}}$ при $m \neq k$. Отсюда вытекает простота спектра $T^{\odot n}$ в $L_2(X, \mu)^{\odot n}$.

О конструктивизации примеров. Хотя лестничные конструкции имеют вполне “конкретный” и простой вид, нужные автоморфизмы из теорем 4.1 и 5.1 предъявляются неявно, так как последовательность r_n строится неэффективно. В связи с задачей о подходящей явной последовательности r_n метод работы [3] заслуживает определенного внимания.

Простота спектра степени $T^{\odot 2}$ для автоморфизма $T \in \text{SC}(p, \infty)$ (см. определение перед леммой 5.2) непосредственно вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $B, TB, \dots, T^h B$ суть непересекающиеся измеримые множества, а $C_{B \times B}$ – циклическое пространство, порожденное вектором $\chi_B \otimes \chi_B$ под действием оператора $T \otimes T$. Тогда функции

$$F_{i,j} = \chi_{T^i B} \otimes \chi_{T^j B} + \chi_{T^j B} \otimes \chi_{T^i B}, \quad 0 \leq i, j \leq h,$$

принадлежат циклическому пространству $C_{B \times B}$.

Доказательство этого факта использовало (см. [3]) следующий “алгоритм”.

Так как принадлежность $F_{q,0} \in C_{B \times B}$ влечет за собой $F_{q+i,i} \in C_{B \times B}$, достаточно установить $F_{q,0} \in C_{B \times B}$. Векторы

$$P_{q+2}\chi_B \otimes P_{q+2}\chi_B, \quad P_{q+1}\chi_B \otimes P_{q+1}\chi_B, \quad P_q\chi_B \otimes P_q\chi_B$$

принадлежат циклическому пространству $C_{B \times B}$. Положим

$$G_m = \frac{m^2}{(1 + \mu(B))^2} P_m\chi_B \otimes P_m\chi_B.$$

Тогда

$$F_{q,0} = \text{Const} [G_{q+2} - G_{q+1} - (\hat{T} \otimes \hat{T})G_{q+1} + (\hat{T} \otimes \hat{T})G_q].$$

Для всех $q \geq p$ получили $F_{q,0} \in C_{B \times B}$, следовательно, $F_{i,j} \in C_{B \times B}$.

При $q < p$ выполнено $F_{q,0} \in C_{B \times B}$. Убедимся в этом при $q = 1$ (для других q действуем аналогично). Так как

$$F_{p,0} = [(\hat{T}^p \otimes I) + (I \otimes \hat{T}^p)]\chi_{B \times B}$$

и $C_{B \times B}$ содержит $F_{p+1,0}$, получаем: циклическое пространство, порожденное $F_{p,0}$, содержит вектор

$$\begin{aligned} & [(\hat{T}^p \otimes I) + (I \otimes \hat{T}^p)]F_{p+1,0} \\ &= [(\hat{T}^p \otimes I) + (I \otimes \hat{T}^p)][(\hat{T}^{p+1} \otimes I) + (I \otimes \hat{T}^{p+1})]\chi_{B \times B}. \end{aligned}$$

Последнее выражение представим в виде суммы $F_{2p+1,0} + F_{p+1,p}$, где $F_{2p+1,0} \in C_{B \times B}$. Так как сумма принадлежит $C_{B \times B}$, получаем $F_{p+1,p} \in C_{B \times B}$, значит, $F_{1,0}$ принадлежит $C_{B \times B}$.

Таким образом, индикаторы всех $(\xi_n \times \xi_n)$ -измеримых симметричных множеств $(\xi_n - \text{разбиение башни на множества } B_n, TB_n, \dots, T^{h_n} B_n)$ принадлежат $C_{B_n \times B_n}$. Для простоты спектра $T^{\odot 2}$ достаточно знать, что симметричная функция приближается векторами из пространств $C_{B_n \times B_n}$.

Такой аппроксимационный подход, по мнению автора, поддается конструктивизации.

Отметим также, что представляет интерес построение действий групп $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, с однородным конечнократным спектром.

§ 6. Универсальность пределов $\frac{1}{2}(I + T^k)$

В решении задачи Рохлина важную роль сыграли автоморфизмы, допускающие связанную аппроксимацию парой циклов (это свойство типично). Соответствующие конструкции были предложены А. Б. Катком и А. М. Степиным [19]. А. Каток в неопубликованных лекциях высказал гипотезу о том, что декартовы квадраты таких (типичных) автоморфизмов обладают однородным спектром кратности 2. (Теперь лекции в переработанном виде опубликованы в [8].)

Напомним определение связанной $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимации. Пусть автоморфизм T обладает рангом 1, т.е. найдется последовательность разбиений фазового пространства X вида $\xi_n = \{B_n, TB_n, \dots, T^{h_n-1}B_n, R_n\}$, которая стремится к разбиению на точки (пишем $\xi_n \rightarrow \varepsilon$). Если кроме того при $B_n = B_n^1 \sqcup B_n^2$, $\mu(B_n^1) = \mu(B_n^2)$, возникающее более мелкое разбиение

$$\{B_n^1, TB_n^1, \dots, T^{h_n-1}B_n^1, B_n^2, TB_n^2, \dots, T^{h_n}B_n^2, Y_n\}$$

удовлетворяет условию

$$\mu(B_n^k \Delta T^{h_n} B_n^k) = o(h_j^{-2}), \quad k = 1, 2,$$

говорим, что автоморфизм T допускает $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимацию.

Описанное свойство влечет за собой простоту спектра автоморфизма T и наличие оператора $\frac{1}{2}(I + T)$ в полугруппе $\text{PWC}(T)$ слабых замыканий степеней автоморфизма T . Этих двух свойств оказалось достаточно для доказательства упомянутой гипотезы.

Для преобразования Катка и Степина, как было замечено автором в [3], соответствующая полугруппа $\text{PWC}(T)$ содержит операторы $\frac{1}{2}(I + T^k)$ для всех целых k . А. Каток сообщил автору, что некоторые перекладывания обладают свойством $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимации (они индуцированы на полуокружности вращением окружности на иррациональный угол, который допускает быструю аппроксимацию рациональными числами вида $p/(2h + 1)$). Это привело к подтверждению гипотезы В.И. Оселедца [10] о том, что T – некоторые перекладывания отрезков – обладают свойством: $\text{PWC}(T)$ содержит оператор $\frac{1}{2}(I + \Theta)$ (см. [3]).

Сейчас мы покажем больше: существует перекладывание T со свойством простоты спектров $T^{\odot n}$ такое, что полугруппа $\text{PWC}(T)$ является выпуклым компактом, содержит все полиномы вида

$$\mathcal{P}(T) = a\Theta + \sum_i a_i T^i, \quad a_i \geq 0, \quad a + \sum_i a_i = 1$$

(Θ – ортопроекция на пространство констант).

Выше мы обсуждали только конструкции ранга 1 на пространствах с конечной мерой. В эргодической теории также изучаются конструкции с сигма-конечной мерой (см., например, [20], [21]). Ряд результатов случая конечной меры можно перенести на случай автоморфизмов бесконечной меры.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть эргодический автоморфизм T таков, что для всех натуральных k операторы $\frac{1}{2}(I + T^k)$ принадлежат $\text{PWC}(T)$. Тогда автоморфизм T обладает свойствами:

- 1) если $P_1, P_2 \in \text{PWC}(T)$, то для любого $a \in (0, 1)$ полугруппа $\text{PWC}(T)$ содержит оператор $aP + (1 - a)Q$;
- 2) полугруппа $\text{PWC}(T)$ содержит все полиномы вида $\mathcal{P}(T) = a\Theta + \sum_i a_i T^i$, где $a_i \geq 0$, $a + \sum_i a_i = 1$, Θ – ортопроекция в $L_2(X, \mu)$ на пространство констант.

Если кроме того рассматриваемый автоморфизм обладает простым спектром, то

- 3) для всех $n > 1$ автоморфизм T^n имеет простой спектр;
 4) для всех $n > 1$ симметрическая степень $T^{\odot n}$ имеет простой спектр.

Также справедливы следующие утверждения:

- 5) автоморфизм со свойством $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимации обладает свойствами 1)–4);
 6) существует переключивание отрезков, обладающее свойствами 1)–4);
 7) существует автоморфизм ранга 1 пространства с бесконечной мерой, обладающий свойствами 1), 3), 4) и свойством 2) при $a = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mu(X) = \infty$, константы не принадлежат $L_2(X, \mu)$, поэтому оператор Θ надо заменить на нулевой оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1) Мы знаем, что $\frac{1}{2}(T^m + T^k) \in \text{PWC}(T)$. Учитывая, что $T^{m_i} \rightarrow P_1$ и $T^{k_i} \rightarrow P_2$, получаем $\frac{1}{2}(P_1 + P_2) \in \text{PWC}(T)$.

Теперь замечаем, что условие $P_1, P_2, \dots, P_{2^N} \in \text{PWC}(T)$ влечет за собой

$$\frac{1}{2^N}(P_1 + P_2 + \dots + P_{2^N-1} + P_{2^N}) \in \text{PWC}(T).$$

Действительно, операторы $Q_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ и $Q_2 = \frac{1}{2}(P_3 + P_4)$ принадлежат $\text{PWC}(T)$, следовательно, $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) \in \text{PWC}(T)$. Получили $\frac{1}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \in \text{PWC}(T)$ и т.д. Утверждение п. 1) вытекает из замкнутости полу группы $\text{PWC}(T)$ и уже доказанной нами принадлежности операторов вида

$$\frac{M}{2^N} P + \left(1 - \frac{M}{2^N}\right) Q$$

к полу группе $\text{PWC}(T)$ (положим $P_1 = \dots = P_M = P$, а для $i > M$ положим $P_i = Q$).

2) Так как операторы T^k и Θ лежат в $\text{PWC}(T)$, доказательство п. 2) становится очевидным.

3) Пусть f – циклический вектор для оператора T . Покажем, что f – циклический и для оператора T^p , $p > 1$. Самый простой случай, когда $p = 2$, решается так. Полу группа $\text{PWC}(T)$ содержит оператор $aI + bT$. Следовательно, $\text{PWC}(T^2)$ содержит оператор $aI + bT$, если последовательность четных степеней оператора T сходится к $aI + bT$. Если последовательность нечетных сходится к $aI + bT$, то $\text{PWC}(T^2)$ содержит оператор $T(aI + bT)$. Отсюда замечаем, что циклическое (для T^2) пространство, содержащее векторы $\dots, f, T^2 f, T^4 f, \dots$, содержит вектор Tf и, следовательно, содержит все векторы $\dots, T^{-1} f, Tf, T^3 f, \dots$. Таким образом, $L_2(X, \mu)$ является циклическим пространством для оператора T^2 .

В случае $p > 2$ получим, что $\text{PWC}(T^p)$ содержит p линейно независимых операторов вида $T^m(a_0 I + a_1 T + \dots + a_{p-1} T^{p-1})$ для некоторого фиксированного m , $0 \leq m \leq p-1$. По этой причине циклическое для T^p пространство, содержащее векторы $\dots, f, T^p f, T^{2p} f, \dots$, обязано содержать все векторы вида $T^i f$. Получили, что T^p имеет простой спектр.

4) Так как $\text{PWC}(T)$ содержит операторы вида $\frac{1}{2}(I + T^k)$ для всех целых k и автоморфизм T обладает простым спектром, по теореме 3.2 простым спектром обладают все его симметрические степени.

5) Для автоморфизма T со свойством $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимации выполняется $T^{-kh_j} \rightarrow \frac{1}{2}(I + T^k)$, что отмечалось в [3] (см. также [7]).

6) Как отмечалось выше, некоторые перекладывания обладают свойством $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимации.

7) Опишем конструкцию преобразования S со свойством, близким к свойству $(h_j, h_j + 1)$ -аппроксимации, действующего на пространстве с бесконечной мерой.

Пусть на шаге с номером j для конструкции ранга 1 построена башня высоты H_j . Разрежим ее на $2r_j$ колонн, а число надстроенных этажей $s(k)$ над k -й колонной определим следующим образом:

$$\begin{aligned} s(k) &= s_j, & k &= 1, 2, \dots, r_j, \\ s(k) &= s_j + 1, & k &= r_j + 1, r_{n_i} + 2, \dots, 2r_j, \end{aligned}$$

где $s_j \geq 0$ – некоторое целое число.

Если ряд $\sum_j (s_j/H_j)$ расходится, то, очевидно, фазовое пространство построенной конструкции S имеет бесконечную меру. В то же время при $h_j = H_j + s_j$ имеем

$$S^{-kh_j} \rightarrow \frac{1}{2}(I + S^k).$$

Как отмечалось, это свойство унитарного оператора S влечет за собой свойства пп. 1)–4) с упомянутой модификацией п. 2).

§ 7. Слабые пределы и универсальность конструкций

Рассмотрим следующую задачу. Требуется построить автоморфизм T , обладающий свойством: оператор вида $a\Theta + \sum_i a_i T^i$ принадлежит полугруппе $\text{PWC}(T)$. Все известные способы таковы, что при построении фазовое пространство X естественно разбивается на части и на каждой части реализуется компонента из суммы $a\Theta + \sum_i a_i T^i$.

Например, для автоморфизма со связанной аппроксимацией двумя башнями имеет место сходимость $T^{-h_i} \rightarrow \frac{1}{2}(I + T)$. На одной башне степень T^{h_i} близка к оператору I , а на другой башне – к оператору T .

Предлагаемая ниже теорема показывает, что иначе и не бывает: если имеется указанная сходимость, то разбиение на такие части неизбежно. Для доказательства удобно воспользоваться полиморфизмами, т.е. мерами, соответствующими рассматриваемым операторам T^i и Θ . О полиморфизмах см. работу А. М. Вершика [22]. Напомним, что тождественному оператору I отвечает диагональная мера Δ , оператору T^i – сдвиг диагональной меры $\Delta_{T^i} = (T^i \times I)\Delta$:

$$(T^i \times I)\Delta(A \times B) = \mu(T^i A \cap B).$$

В общем случае марковскому оператору $P: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ отвечает мера ν на $X \times X$, определенная формулой

$$\nu(A \times B) = \int P\chi_A \chi_B d\mu.$$

Будем говорить, что марковский оператор P *сингулярен относительно оператора* P_1 , если соответствующие полиморфизмы ν и ν_1 взаимно сингулярны. Например, оператор Θ сингулярен относительно Δ_S для любого автоморфизма S .

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть последовательность T^{m_j} сходится к (марковскому) оператору $aP + \sum_i a_i T^i$, где P – оператор, сингулярный относительно всех T^i .

Тогда найдется последовательность наборов дизъюнктивных (при фиксированном j) множеств $U_j, U_j^i, i \in \mathbb{Z}$, таких, что

$$U_j \circ T^{m_j} \rightarrow aP, \quad U_j^i \circ T^{m_j} \rightarrow a_i T^i, \quad j \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пока рассмотрим частный случай, когда

$$T^{m_j} \rightarrow a_0 I + aP,$$

причем оператор P сингулярен относительно I (отвечающая ему мера ν сингулярна относительно меры Δ).

Пусть $\{E_1^k, E_2^k, \dots, E_k^k\}$ – последовательность разбиений пространства X , стремящихся к разбиению на точки. Обозначим

$$D_k = \bigcup_{i=1}^k E_i^k \times E_i^k.$$

Перепишем условие $T^{m_j} \rightarrow a_0 I + aP$ в терминах мер:

$$\Delta_{T^{m_j}} \rightarrow a_0 \Delta + a\nu,$$

где мера ν , отвечающая оператору P , сингулярна относительно Δ . Так как $\nu(D_k) \rightarrow 0$, для некоторой медленно возрастающей последовательности $k_j \rightarrow \infty$ имеем

$$\Delta_{T^{m_j}}(\cdot | D_{k_j}) \rightarrow \Delta, \quad \Delta_{T^{m_j}}(D_{k_j}) \rightarrow a_0.$$

Заметим, что мера $\Delta_{T^{m_j}}(\cdot | D_{k_j})$ – это часть сдвига диагональной меры, поэтому она имеет представление

$$\Delta_{T^{m_j}}(A \times B | D_{k_j}) = \frac{\mu(V_j \cap T^{m_j} A \cap B)}{\mu(V_j)},$$

где V_j – проекция на первый сомножитель в произведении $X \times X$ той части сдвига диагонали, которая оказалась в D_{k_j} . Получим

$$\mu(V_j \cap T^{m_j} A \cap B) \rightarrow a_0 \mu(A \cap B),$$

что эквивалентно

$$\chi_{V_j} \circ T^{m_j} \rightarrow a_0 I$$

(здесь χ_{V_j} обозначает оператор умножения на индикатор множества V_j). Таким образом, мы нашли нужную последовательность $U_j^0 = V_j$. (Заметим, что множества U_j^0 почти инвариантны: $\mu(U_j^0 \setminus TU_j^0) \rightarrow 0$, при этом меры U_j^0 стремятся к a_0 .)

Общий случай вытекает из частного. Чтобы найти последовательность U_j^p (p фиксировано), положим $\tilde{m}_j = m_j - p$. Тогда выполнено $T^{\tilde{m}_j} \rightarrow a_p I + (1 - a_p)Q$, где (некоторый) марковский оператор Q сингулярен с I . Получая последовательность $\tilde{V}_j$ как выше, положим $U_j^p = \tilde{V}_j$. Последовательность искомая, так как

$$\chi_{\tilde{V}_j} \circ T^{m_j - p} \rightarrow a_p I, \quad \chi_{U_j^p} \circ T^{m_j} \rightarrow a_p T^p, \quad j \rightarrow \infty.$$

§ 8. Связанные задачи

Локальный ранг факторов декартовых произведений. Локальный ранг $\beta(T)$ автоморфизма T пространства Лебега определяется как максимальное значение таких чисел $\beta \geq 0$, что некоторая последовательность разбиений ξ_j вида

$$\xi_j = \{C_j, SC_j, S^2C_j, \dots, S^{h_j-1}C_j, \dots\}$$

стремится к разбиению на точки, причем

$$\mu\left(\bigsqcup_{0 \leq k < h_j} S^k C_j\right) \rightarrow \beta, \quad j \rightarrow \infty.$$

Локальный ранг представляет особый интерес для теории джойнингов. Для спектральной теории динамических систем он дает оценку максимальной спектральной кратности $\text{mm}(S)$ автоморфизма S :

$$\text{mm}(S) \leq \frac{1}{\beta(S)}.$$

А. Каток установил свойство $\beta(T^{\times n}) \geq n^{-n}$ для типичного автоморфизма T , где $T^{\times n} = T \times T \times \dots \times T$ (n сомножителей). Указанным свойством обладает автоморфизм, допускающий согласованную аппроксимацию набором из n циклических перестановок, длины которых взаимно просты (а отношение длин стремится к 1). Для таких конструкций T выполнено также $\beta(T^{\odot n}) \geq n! n^{-n}$. (При $n = 2$ отсюда вытекает, что множество кратностей $M_{T^{\odot 2}}$ имеет вид $\{1\}$ или $\{1, 2\}$.) Следующая теорема позволяет теперь точно вычислить ранг для $T^{\otimes n}$ и $T^{\odot n}$ для типичных автоморфизмов T .

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть T – слабо перемешивающий автоморфизм. Тогда выполнены неравенства

$$\beta(T^{\otimes n}) \leq n^{-n}, \quad \beta(T^{\odot n}) \leq n! n^{-n}.$$

Для доказательства этой теоремы рассматриваются слабые пределы степеней. Если, скажем, $\beta(T^{\otimes 3}) = b > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное $m > 0$ и последовательность k_j такие, что имеет место сходимость

$$(T^{\otimes 3})^{k_j} \rightarrow (b - \varepsilon)(I \otimes T^m \otimes T^{2m}) + \dots$$

(см. [23]). Отсюда можно вывести, что

$$T^{q_j} \rightarrow a_0 I + a_1 T^m + a_2 T^{2m} + (1 - a_0 - a_1 - a_2)P,$$

где P – некоторый марковский оператор такой, что коэффициенты $a_0, a_1, a_2 > 0$ максимальны. Тогда выполнено $b = a_0 a_1 a_2 \leq 1/3^3$.

А. Каток предложил рассмотреть факторы декартовых произведений типичных преобразований для реализации некоторых наборов кратностей. Например, среди таких возможных наборов есть множество $\{2, 3\}$, оно отвечает фактору вида $(T \odot T) \times T$ [8]. (Существование эргодических автоморфизмов с наборами кратностей $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, ... пока не установлено.)

Идея рассматривать факторы декартовых произведений (а также их корни!) является продуктивной при построении систем с локальным рангом, принимающим значения вида $m/(n^{-n})$. В классе таких автоморфизмов имеются также примеры нелинейного поведения локального ранга степени автоморфизма. Рассмотрим корень R_2 автоморфизма $S \times S$, действующий по формуле $R_2(x, y) = (Sy, x)$. Аналогично определяется R_3 по формуле $R_3(x, y, z) = (Sz, x, y)$ и т.д.

ТЕОРЕМА 8.2. *Для типичного S при $n > 0$ выполнено*

$$\begin{aligned}\beta(R_2^{2n-1}) &= \frac{1}{2}, & \beta(R_2^{2n}) &= \frac{1}{4}, \\ \beta(R_3^{3n+1}) &= \frac{1}{9}, & \beta(R_3^{3n}) &= \frac{1}{27}.\end{aligned}$$

Поведение максимальной кратности спектра степени автоморфизма. Если унитарный оператор U имеет k -кратный лебеговский спектр, то для максимальной кратности спектра (mm) выполнено $\text{mm}(U^n) = kn$ (при $n > 0$). Таким образом, функция $\text{mm}(T^n)$ может быть линейной для автоморфизмов с конечнократной лебеговской компонентой в спектре. Пример нелинейного поведения дает рассмотренный корень R автоморфизма $S \times S$. Для типичного S выполнено $\text{mm}(R^{2n-1}) = 1$ и $\text{mm}(R^{2n}) = 2$ при $n > 0$ (небольшая модификация рассуждений из [2] дает доказательство этого факта). В свете метода аппроксимации перемешивающих систем неперемешивающими следующее утверждение теперь можно рассматривать как упражнение.

ТЕОРЕМА 8.3. *Существуют перемешивающие автоморфизмы T с нелинейными при $n > 0$ функциями $\text{mm}(T^n)$.*

Другое приложение аппроксимации перемешивающих систем неперемешивающими представляет

ТЕОРЕМА 8.4. *Существует перемешивающий автоморфизм T (например, являющийся почти лестничной конструкцией) такой, что произведение $T \times T^2 \times T^3 \times \dots$ имеет простой спектр.*

Для типичных (т.е. сильно неперемешивающих) автоморфизмов похожую теорему читатель найдет в [5]. Для ее доказательства применялась типичность свойств

$$T^{-ph_j} \rightarrow aI + (1-a)T^p.$$

В [2], [3] автор использовал такие пределы и их типичность (при $a = \frac{1}{2}$) для других целей: доказательства гипотезы В. И. Оселедца и решения задачи В. А. Рохина. Случай $a = \frac{1}{2}$, как мы заметили в § 6, является универсальным.

Для доказательства теоремы 8.4 используем разработанный прием: переходим от сходимостей $T^{-ph_j} \rightarrow \frac{1}{2}(I + T^p)$ к сходимостям

$$T^{-ph_j} \rightarrow \delta I + \delta T^p + (1 - 2\delta)\Theta, \quad j \rightarrow \infty;$$

затем в рамках конструкций ранга 1, сохраняя спектральное свойство и уменьшая δ , строим требуемую почти лестничную перемешивающую конструкцию.

Стохастический автоморфизм Чакона типа $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Рассмотрим следующую стохастическую конструкцию ранга 1. Пусть фиксирована последовательность $r_n \rightarrow \infty$. На шаге с номером n башня разрезается на r_n колонн. Случайным образом с вероятностью $\frac{1}{2}$ над колонной с номером k , $1 \leq k < r_n$, надстраивается 1 этаж (все события на шаге n предполагаются равновероятными). В результате получаем автоморфизм T ранга 1, который мы назвали *стохастическим автоморфизмом Чакона*.

ГИПОТЕЗА. *С вероятностью 1 автоморфизм T обладает свойством: полугруппа $\text{PWC}(T)$ состоит только из операторов*

$$\{\Theta, T^i P^m, T^i (P^*)^n, T^i P^m (P^*)^n : m, n > 1\},$$

где $P = \frac{1}{2}(I + T)$.

Отметим, что в изобилии слабо перемешивающих, но не перемешивающих систем пока не найден пример с явным описанием полугруппы $\text{PWC}(T)$. Один из кандидатов – стохастический автоморфизм Чакона.

В связи с гипотезой возникает также вопрос: является ли спектр $T^{\odot n}$ простым при $n > 2$? (Известно, что спектр $T^{\odot 2}$ простой.) Для стохастического автоморфизма Чакона несложно доказать, что все ненулевые степени T^p с вероятностью 1 имеют простой спектр. Действительно, для последовательности высот башен h_n с вероятностью 1 выполнено $-h_n = pk_n$ для бесконечного множества номеров n . Имеем

$$T^{-pk_{n_i}} \rightarrow \frac{1}{2}(I + T), \quad i \rightarrow \infty.$$

Отсюда видим, что циклическое пространство оператора T^p , содержащее вектор f , обязано содержать вектор $f + Tf$, следовательно, и Tf . Подставляя вместо f вектор Tf , получаем, что $T^2 f$ и аналогично $T^3 f, T^4 f, \dots$ принадлежат циклическому пространству оператора T^p . Итак, если f – циклический вектор для оператора T , то f является циклическим для оператора T^p .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для модифицированного автоморфизма Чакона простоту спектра его степеней независимо доказал А.М. Степин, используя другой подход.

Стохастический автоморфизм Чакона типа $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Рассмотрим другой тип стохастического автоморфизма. Пусть теперь с вероятностью $\frac{1}{3}$ над колонной с номером k , $1 \leq k < r_n$, надстраивается 1 этаж (а с вероятностью $\frac{2}{3}$ ничего не надстраивается). Получаем автоморфизм, для которого выполнено

$$T^{-h_n} \rightarrow \frac{2}{3}I + \frac{1}{3}T.$$

При этом

$$T^{h_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{3}I + \frac{2}{3}T.$$

В [3] установлено, что для такого T выполнено $\sigma_T^{*2} \perp \sigma_T^{*m}$ при $m \neq 2$. Простота спектра $T^{\odot 3}$ доказывается следующим образом. Как показано в § 2, пара указанных сходимостей приводит к тому, что

$$f \odot f \odot Tf, f \odot Tf \odot Tf \in C_{f \odot f \odot f}.$$

Так как оператор $I \odot I \odot T$ коммутирует с оператором $T \odot T \odot T$, получаем

$$\begin{aligned} f \odot f \odot T^2 f, f \odot T f \odot T f &\in C_{f \odot f \odot T f} \subset C_{f \odot f \odot f}, \\ f \odot f \odot T^3 f, f \odot T f \odot T^2 f &\in C_{f \odot f \odot T^2 f} \subset C_{f \odot f \odot f} \end{aligned}$$

и т.д. Таким образом, все векторы $f \odot f \odot T^k f$ принадлежат пространству $C_{f \odot f \odot f}$.

Оператор $I \odot I \odot T^m$ коммутирует с $T \odot T \odot T$, поэтому $I \odot I \odot T^m(f \odot f \odot T^k f)$ принадлежит $C_{f \odot f \odot T^m f}$. Но $C_{f \odot f \odot T^m f} \subset C_{f \odot f \odot f}$. Следовательно, для всех целых m, n выполнено

$$f \odot f \odot T^{k+m} f, f \odot T^m f \odot T^k f \in C_{f \odot f \odot f}.$$

Окончательно получаем, что $T^i f \odot T^m f \odot T^k f$ принадлежат пространству $C_{f \odot f \odot f}$. Но последнее совпадает с $L_2(\mu)^{\odot 3}$ в том случае, когда f — циклический вектор для оператора T .

Однако простоту спектра степени $T^{\odot 4}$ изложенными методами доказать не получится, например, в случае $r_n = n$. Только тогда, когда r_n чрезвычайно медленно стремится к бесконечности, методы работают.

Некоторые результаты, связанные с тематикой статьи, но не вошедшие в нее, анонсированы в [17].

Список литературы

- [1] O. N. Ageev, “On ergodic transformations with homogeneous spectrum”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:1 (1999), 149–152.
- [2] V. V. Ryzhikov, “Transformations having homogeneous spectra”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:1 (1999), 145–148.
- [3] V. V. Ryzhikov, “Homogeneous spectrum, disjointness of convolutions, and mixing properties of dynamical systems”, *Sel. Russian Math.*, **1**, 1999, 13–24.
- [4] Д. В. Аносов, *О спектральных кратностях в эргодической теории*, Современные проблемы математики, **3**, МИАН, М., 2003.
- [5] O. Ageev, “The homogeneous spectrum problem in ergodic theory”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 417–446.
- [6] A. I. Danilenko, “Explicit solution of Rokhlin’s problem on homogeneous spectrum and applications”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**:5 (2006), 1467–1490.
- [7] G. R. Goodson, “A survey of recent results in the spectral theory of ergodic dynamical systems”, *J. Dynam. Control Systems*, **5**:2 (1999), 173–226.
- [8] A. Katok, *Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics*, Univ. Lecture Ser., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [9] В. И. Оселедец, “О спектре эргодических автоморфизмов”, *Докл. АН СССР*, **168**:5 (1966), 1009–1011; англ. пер.: V. I. Oseledets, “The spectrum of ergodic automorphisms”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 776–779.
- [10] В. И. Оселедец, “Автоморфизмы с простым непрерывным спектром без группового свойства”, *Матем. заметки*, **5**:3 (1969), 323–326; англ. пер.: V. I. Oseledets, “An automorphism with simple, continuous spectrum not having the group property”, *Math. Notes*, **5**:3 (1969), 196–198.
- [11] Я. Г. Синай, “О свойствах спектров эргодических динамических систем”, *Докл. АН СССР*, **150**:6 (1963), 1235–1237; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Properties of spectra of ergodic dynamical systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **4** (1963), 875–877.

- [12] А. М. Степин, “О свойствах спектров эргодических динамических систем с локально компактным временем”, *Докл. АН СССР*, **169**:4 (1966), 773–776; англ. пер.: А. М. Stepin, “Spectral properties of ergodic dynamical systems with locally compact time”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 1007–1010.
- [13] А. М. Степин, “Спектральные свойства типичных динамических систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 801–834; англ. пер.: А. М. Stepin, “Spectral properties of generic dynamical systems”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:1 (1987), 159–192.
- [14] А. М. Степин, “Les spectres des systèmes dynamiques”, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), **2**, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 941–946.
- [15] А. А. Приходько, В. В. Рыжиков, “Disjointness of the convolutions for Chacon’s automorphism”, *Colloq. Math.*, **84–85** (2000), 67–74.
- [16] Т. М. Адамс, “Smorodinsky’s conjecture on rank-one mixing”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:3 (1998), 739–744.
- [17] В. В. Рыжиков, “О спектральных и перемешивающих свойствах конструкций ранга 1 в эргодической теории”, *Докл. РАН*, **409**:4 (2006), 448–450.
- [18] D. Creutz, C. E. Silva, “Mixing on a class of rank-one transformations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24**:2 (2004), 407–440.
- [19] А. Б. Каток, А. М. Степин, “Метрические свойства гомеоморфизмов, сохраняющих меру”, *УМН*, **25**:2 (1970), 193–220; англ. пер.: А. Б. Katok, А. М. Stepin, “Metric properties of measure preserving homeomorphisms”, *Russian Math. Surveys*, **25**:2 (1970), 191–220.
- [20] J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, Math. Surveys Monogr., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [21] E. Roy, *Mesures de Poisson, infinie divisibilité et propriétés ergodiques*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2005.
- [22] А. М. Вершик, “Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские процессы”, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **72** (1977), 26–61.
- [23] В. В. Рыжиков, “О рангах эргодического автоморфизма $T \times T$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:2 (2001), 84–87; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “On the ranks of an ergodic automorphism $T \times T$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:2 (2001), 151–153.

В. В. Рыжиков (V. V. Ryzhikov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: vryzh@mail.ru

Поступила в редакцию

03.10.2006 и 13.11.2006