Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, О рядах Гильберта и гомологиях PI-алгебр, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 11, 103–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 07:40:37

УДК 512.66, 512.552, 512.554

Д. И. Пионтковский

О рядах Гильберта и гомологиях PI-алгебр

Основная цель этой статьи – обобщение хорошо известного в коммутативной алгебре критерия полных пересечений на случай произвольного многообразия PI-(супер)алгебр. В качестве следствия получены формулы для вычисления рядов Гильберта четной и нечетной частей относительно свободных супералгебр и свободных специальных йордановых супералгебр.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

В классической коммутативной алгебре важную роль играет теорема, называемая критерием полных пересечений. Всякой последовательности элементов локального или градуированного коммутативного кольца A ставится в соответствие свободная дифференциально градуированная супералгебра над A (комплекс Козюля). Критерий полных пересечений гласит, что последовательность регулярна тогда и только тогда, когда комплекс Козюля ацикличен, т.е. составляет минимальную резольвенту для факторкольца A по идеалу, порожденному этой последовательностью элементов [1]. Последовательность *регулярна*, если каждый следующий ее элемент – не делитель нуля по модулю предыдущих; для градуированной алгебры A это условие равносильно тому, что среди всех факторов по идеалам, порожденным однородными элементами с одной и той же последовательностью степеней, ряд Гильберта факторалгебры по регулярной последовательности минимален (т.е. размерность каждой градуированной компоненты наименьшая из возможных).

Как алгебра комплекс Козюля изоморфен внешней алгебре над A . Несложно обобщить такую конструкцию на случай коммутативной супералгебры A (это было сделано Т. Юзефьяком [2]). Соответствующий аналог комплекса Козюля по-прежнему является свободной дифференциально градуированной алгеброй над A , однако теперь ее порождающие могут быть как нечетными, так и четными элементами – в зависимости от четности соответствующих элементов последовательности. Определение регулярной последовательности несколько изменяется, однако критерий полных пересечений остается верным: регулярность последовательности равносильна ацикличности комплекса Козюля и минимальности ряда Гильберта.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00149).

Аналог комплекса Козюля для произвольной ассоциативной алгебры над полем был построен в [3] и носит название комплекса Шафаревича. Соответствующий аналог понятия регулярной последовательности — это введенное Д. Аником понятие сильно свободного [4], или инертного [5], множества: множество однородных элементов ассоциативной алгебры A называется *сильно свободным (инертным)*, если, во-первых, оно составляет систему свободных образующих для порожденной им подалгебры и, во-вторых, A как градуированное пространство изоморфна свободному произведению этой подалгебры и соответствующей факторалгебры. Это свойство равносильно ацикличности комплекса Шафаревича, а соответствующее неравенство для рядов Гильберта тесно связано с теоремой Голода–Шафаревича [3]. Отметим, что, как показал Е. С. Голод [6], комплекс Шафаревича обладает многими замечательными гомологическими свойствами, в том числе не имеющими аналогов в коммутативном случае.

Для случая градуированной супералгебры Ли аналогичные результаты были получены С. Гальпериным и Ж.-М. Лемэром [7]. Аналогом регулярной последовательности служит инертное множество — подмножество градуированной алгебры Ли L , образ которого в универсальной обертывающей является инертным множеством в смысле Аника. Аналог комплекса Козюля для множества ρ градуированных элементов из L — дифференциально градуированная алгебра Ли, полученная из L добавлением новых свободных порождающих, четность которых противоположна четности соответствующих элементов множества ρ . Над полем характеристики нуль ацикличность такого комплекса равносильна тому, что множество ρ инертно. При этом для любого множества ρ ряд Гильберта алгебры A по коэффициентно меньше или равен ряду Гильберта алгебры, равной свободному произведению (в категории супералгебр Ли) свободной супералгебры Ли, порожденной ρ , и соответствующей факторалгебры: равенство равносильно тому, что ρ инертно. Краткий список таких результатов, обобщающих коммутативные конструкции на суперкоммутативный, ассоциативный и лиев случаи, объединены ниже в теореме 5. Как ассоциативный, так и лиев варианты инертных множеств оказались полезными в алгебраической топологии, а также в теории групп (см. [4], [5], [7]).

Рассмотренные случаи коммутативных, ассоциативных и лиевых алгебр объединены тем, что все эти классы являются многообразиями алгебр с полиномиальными тождествами. В этой связи возникает вопрос: можно ли построить аналог комплекса Козюля для произвольного многообразия алгебр? Такой комплекс был построен (для многообразия ассоциативных алгебр при условии, что A относительно свободна) А. А. Бояркиным [8]. В то время еще не были введены восходящие к работе А. Р. Кемера [9] многообразия супералгебр, и алгебраическая структура на этом комплексе определяется таким образом, чтобы идеал соотношений получившейся алгебры (“кососвободной”) был дифференциальным идеалом. Впрочем, как будет показано ниже, эта супералгебра является относительно свободной и в обычном смысле. Связь ацикличности такого комплекса с деформациями и расширениями PI-алгебр исследовалась А. А. Бояркиным, в частности в [10].

Мы будем рассматривать многообразия (супер)алгебр (вообще говоря, неассоциативных) над фиксированным полем $\mathbb{K}$ характеристики 0. С каждым многообразием W связана категория связно градуированных (т.е. конечно градуированных

в положительных степенях) алгебр из W .¹

В §2 ниже обсуждаются различные определения относительно свободной супералгебры многообразия. Оказывается, что описания ассоциативных относительно свободных супералгебр, которые появляются из работ А.Р. Кемера [9] и А.А. Бояркина [8], согласованы и легко обобщаются на неассоциативный случай. Это позволяет определить для всякого множества ρ однородных элементов градуированной W -(супер)алгебры A соответствующий аналог комплекса Козюля

$$K^W(A, \rho),$$

который мы называем по аналогии с модельным ассоциативным случаем *комплексом Шафаревича* (§3). В том же §3 даны необходимые и достаточные условия конечности такого комплекса: важнейшее из них состоит в том, что для всякого конечного множества ρ элементов произвольной градуированной алгебры $A \in W$ комплекс $K^W(A, \rho)$ конечен тогда и только тогда, когда в W выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка.

В §4 доказывается основное утверждение этой статьи – PI-аналог критерия полных пересечений (теорема 7). Соответствующее неравенство для рядов Гильберта доказывается в начале этого раздела, а условия равенства в нем (которые можно считать определением W -регулярной последовательности) даются леммой 4. Критерий полных пересечений для множества ρ , порождающего в A идеал I , формулируется в терминах ацикличности комплекса Шафаревича, однако не для самой алгебры A , а для алгебры, ассоциированной с ней относительно I -адической фильтрации. Впрочем, как показано в конце этого параграфа, для многообразий ассоциативных и коммутативных (супер)алгебр ацикличность одного из этих комплексов легко получается из ацикличности другого при рассмотрении стандартных спектральных последовательностей.

В §§ 5, 6 с помощью такой резольвенты вычисляются ряды Гильберта четной и нечетной части относительно свободных супералгебр (для случая, когда нечетных порождающих не меньше чем четных), а также свободных специальных йордановых супералгебр. В частности, если многообразие таково, что ряды Гильберта относительно свободных супералгебр рациональны, то и ряды Гильберта таких четных и нечетных частей также рациональны.

Я хотел бы выразить благодарность за помощь в работе моему научному руководителю Е.С. Голоду.

§2. Многообразия PI-алгебр и супералгебр

Мы будем рассматривать многообразия алгебр (вообще говоря, неассоциативных) над фиксированным полем $\mathcal{K}$ характеристики 0. Введем обозначения для самых распространенных многообразий:

Com – коммутативные алгебры,

Ass – ассоциативные алгебры,

¹С некоторыми многообразиями можно связать и категорию связно градуированных унитарных алгебр. При этом все наши результаты по существу не изменятся, лишь к алгебрам добавятся единицы, а к их рядам Гильберта – единичные свободные члены.

Lie – алгебры Ли,

All – все алгебры.

Через $F^W(X)$ будем обозначать свободную алгебру многообразия W с множеством порождающих X .

С каждым многообразием W связано многообразие супералгебр, которые называются W -супералгебрами. В отличие от [11] здесь предполагается, что пересечение четной и нечетной частей в супералгебрах тривиально.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [11]. Пусть $A = A_0 \oplus A_1$, где $A_i A_j \in A_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$, – супералгебра, W – многообразие. Алгебра A называется W -супералгеброй, если ее грассманова оболочка

$$G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$$

принадлежит W , где G_0 и G_1 – четная и нечетная части счетнопорожденной алгебры Грассмана G .

Нам потребуются явные конструкции свободных супералгебр многообразий, которые обобщают ассоциативные конструкции А. А. Бояркина и А. Р. Кемера.

Пусть $X = Y \sqcup Z$, где Y и Z – счетные множества, элементы которых мы будем называть соответственно четными и нечетными переменными. Рассмотрим I_W – T -идеал в $F^{\text{All}}(X)$, соответствующий некоторому многообразию W .

Если

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n) \\ = \sum_{\substack{u=(u_1, \dots, u_{n+1}), \\ u_j \text{ не зависят от } z_1, \dots, z_n}} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_i \alpha_{\sigma, u}^i u_1 z_{\sigma(1)} u_2 \cdots z_{\sigma(n)} u_{n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

– полилинейный многочлен из I_W (здесь $y_1, \dots, y_m \in Y$, $z_1, \dots, z_n \in Z$ и слагаемые в последней сумме могут различаться коэффициентами и расстановкой скобок), то через

$$f^*(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n)$$

обозначим (ср. [9]) полилинейный многочлен

$$f^* = \sum_u \sum_{\sigma \in S_n} \sum_i (-1)^\sigma \alpha_{\sigma, u}^i u_1 z_{\sigma(1)} u_2 \cdots z_{\sigma(n)} u_{n+1}, \quad (2)$$

где расстановка скобок в слагаемых внутренней суммы та же, что и в соответствующих слагаемых в (1).

Если $\mathcal{P}$ – множество полилинейных многочленов от элементов X , то пусть $I_{W-} := I_W^*$ – идеал в $F^{\text{All}}(X)$, порожденный элементами из $(I_W \cap \mathcal{P})^*$, в которые в качестве аргументов подставлены всевозможные элементы соответствующих четностей. Тогда счетнопорожденная свободная W -супералгебра определяется как

$$F^{W-}(X) = F^{\text{All}}(X)/I_{W-}$$

(А. А. Бояркин [8] назвал такие алгебры *кососвободными*; видимо, более естественно выражение *относительно свободные супералгебры*). Соответствие такого описания определению 1 следует из результатов А. Р. Кемера [9; § 2]: его рассуждения легко переносятся на неассоциативный случай.

Множество всех гомоморфных образов (при гомоморфизмах, сохраняющих $\mathbb{Z}_2$ -градуировку) такой алгебры мы будем называть многообразием W -супералгебр и обозначать через W^- , а гомоморфные образы при $\mathbb{Z}$ -градуированных (и по четным, и по нечетным переменным) гомоморфизмах нулевой степени назовем градуированными W -супералгебрами: они будут $\mathbb{Z}$ -градуированными, если положить $\deg 1 = \deg y_i = 0, \deg z_i = 1$. Если на некоторой алгебре A имеется градуировка, превращающая ее в градуированную W -супералгебру, то будем называть такую градуировку W^- -градуировкой, или просто *суперградуировкой*.

Заметим, что $\text{All}^- = \text{All}$, $\text{Ass}^- = \text{Ass}$ и всегда существует естественное вложение $W \subset W^-$, сопоставляющее каждой W -алгебре алгебру с тривиальной нечетной частью.

Для двух W -супералгебр A и B естественным образом определяется свободное произведение $A \overset{W^-}{*} B$ в W^- . А именно, пусть $A = F_1/I_1$, $B = F_2/I_2$, где F_1, F_2 – копии относительно свободной супералгебры $F^{W^-}(X)$ с порождающими $X_1 = Y_1 \sqcup Z_1$ и $X_2 = Y_2 \sqcup Z_2$ соответственно. Положим тогда $Y = Y_1 \sqcup Y_2$, $Z = Z_1 \sqcup Z_2$, $X = Y \sqcup Z$ и

$$A \overset{W^-}{*} B = F^{W^-}(X)/J,$$

где J – идеал в $F^{W^-}(X)$, порожденный множеством $I_1 \cup I_2$. Отметим, что если $A, B \in W$, то это свободное произведение совпадает с обычным свободным произведением в многообразии W .

Мы будем использовать и другое определение многочлена f^* , обобщающее “ассоциативное” определение А. А. Бояркина [8; определение 3.2.1].

Запишем

$$f = f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma}^i x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)} \in I_W, \quad (3)$$

где $x_1, \dots, x_N$ – однородные элементы степеней $c_1, \dots, c_N$ и слагаемые в последней сумме могут различаться коэффициентами и расстановкой скобок. Положим

$$f^* = f^*(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma, c}^i x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)}, \quad (4)$$

где для каждого набора степеней $c = (c_1, \dots, c_N)$, $c_i \geq 0$, коэффициенты $\alpha_{\sigma, c}^i$ определяются рекуррентно:

$$\begin{aligned} \alpha_{\sigma, c}^i &= \alpha_{\sigma}^i, \quad \text{если } c = (0, \dots, 0), \\ \alpha_{\sigma, d}^i &= \alpha_{\sigma, c}^i \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{\sigma^{-1}(l)-1} c_{\sigma(j)} + \sum_{j=1}^{l-1} c_j}, \quad d = c + (0, \dots, 1, \dots, 0). \end{aligned} \quad (5)$$

ЛЕММА 1. Предложенные определения многочлена f^* эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = m + n$ и подстановка $\sigma \in S_N$ действует на множестве $\{x_1, \dots, x_N\}$, элементам которого приписан вектор степеней $c = (c_1, \dots, c_N)$; пусть среди этих элементов ровно m имеют четные степени и ровно n – нечетные. Суперзнаком перестановки σ (обозначение: $\text{ssg}_c \sigma$) будем называть знак соответствующей перестановки $\sigma' \in S_n$, получающейся из σ путем ограничения на множество переменных нечетной степени. Тогда формулу (2) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \text{если} \quad f &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma}^i x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)} \in I_W, \\ \text{то} \quad f^* &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma}^i \cdot (-1)^{\text{ssg}_c \sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)}. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать, что коэффициент $\alpha_{\sigma, c}^i$ в формулах (4) равен $\alpha_{\sigma}^i \cdot (-1)^{\text{ssg}_c \sigma}$, т.е. при $d = c + (0, \dots, \overset{l}{1}, \dots, 0)$

$$\sum_{j=1}^{\sigma^{-1}(l)-1} c_{\sigma(j)} + \sum_{j=1}^{l-1} c_j \equiv \text{ssg}_c \sigma + \text{ssg}_d \sigma \pmod{2}.$$

Это утверждение становится очевидным, если посмотреть, как меняется число инверсий нечетных элементов при изменении четности одного из них.

§ 3. Комплекс Шафаревича в многообразиях супералгебр

Пусть W – многообразие, A – связно градуированная W -супералгебра (т.е. суперградуировка на A связна). Пусть $\rho = \{\rho_i\}_{i \in I}$ – набор однородных элементов из A с вектором степеней $d = \{d_i\}_{i \in I}$, $d_i \geq 0$. Рассмотрим биградуированную W -супералгебру

$$K^W(A, \rho) = A \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\gamma),$$

где $\gamma = \{\gamma_i\}_{i \in I}$, $\deg \gamma_i = d_i + 1$. Вторая $\mathbb{Z}$ -градуировка на этой алгебре задается условиями

$$\begin{aligned} |a| &= 0, \quad a \in A, \\ |\gamma_i| &= 1 \end{aligned}$$

(назовем ее *гомологической* градуировкой); в этом случае тотальная градуировка на $K^W(A, \rho)$ связна.

Пусть на A задано однородное дифференцирование ∂_A степени -1 , действующее по формуле Лейбница

$$\partial_A(uv) = \partial_A u \cdot v + (-1)^{\deg u} u \cdot \partial_A v,$$

где $u, v \in A$ – однородные элементы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Существует однородное дифференцирование ∂ на $K^W(A, \rho)$, имеющее степень -1 по обеим градуировкам, совпадающее с ∂_A на A и такое, что $\partial\gamma_i = \rho_i$.

Аналогичное утверждение было доказано А. А. Бояркиным для относительно свободной алгебры A [8; предложение 3.2.1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва построим дифференцирование δ , удовлетворяющее условиям предложения, в алгебре

$$K^{\text{All}}(A, \rho) = A \overset{\text{All}^-}{*} F^{\text{All}^-}(\gamma).$$

Это легко сделать, определяя δ по формуле Лейбница с помощью индукции по гомологической градуировке. Заметим теперь, что

$$K^W(A, \rho) = K^{\text{All}}(A, \rho) / J,$$

где $J \triangleleft K^{\text{All}}(A, \rho)$ — двусторонний идеал, порожденный всевозможными многочленами $f^*(x_1, x_2, \dots)$, где $x_1, x_2, \dots \in K^{\text{All}}(A, \rho)$ — однородные относительно суперградуировки, f — полилинейное тождество W . Дифференцирование δ на $K^{\text{All}}(A, \rho)$ индуцирует искомое дифференцирование ∂ , если только J — дифференциальный идеал, т.е. $\delta J \in J$.

Докажем это. Достаточно проверить, что образы порождающих попадают в идеал. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_N \in K^{\text{All}}(A, \rho)$ — однородные относительно суперградуировки элементы с вектором степеней $c = (c_1, \dots, c_N)$, f — полилинейное тождество W от N переменных. По формулам (4) и (5) имеем:

$$\begin{aligned} & \delta f^*(x_1, \dots, x_N) \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma, c}^i \delta(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma, c}^i \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} c_{\sigma(j)}} x_{\sigma(1)} \cdots (\delta x_{\sigma(k)}) \cdots x_{\sigma(N)} \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma \in S_N, \sigma(k)=m} \sum_i \alpha_{\sigma, c}^i \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} c_{\sigma(j)}} x_{\sigma(1)} \cdots (\delta x_m^k) \cdots x_{\sigma(N)}. \end{aligned}$$

Положим $b = (c_1, \dots, c_m - 1, \dots, c_N)$,

$$y_i = \begin{cases} x_i, & i \neq m, \\ \delta x_m, & i = m, \end{cases}$$

и вычислим отдельно тройную внутреннюю сумму. Если $c_m = 0$, то она равна нулю (и, значит, лежит в J); в противном случае она равна

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_N, k=\sigma^{-1}(m)} \sum_i \alpha_{\sigma, c}^i \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1} c_{\sigma(j)}} y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(k)} \cdots y_{\sigma(N)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma, b}^i \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{\sigma^{-1}(m)-1} c_{\sigma(j)} + \sum_{j=1}^{m-1} c_j + \sum_{j=1}^{\sigma^{-1}(m)-1} c_{\sigma(j)}} y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(N)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_i \alpha_{\sigma, b}^i \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{m-1} c_j} y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(N)} = (-1)^{\sum_{j=1}^{m-1} c_j} f^*(y_1, \dots, y_N) \in J \end{aligned}$$

(как и прежде, во всех выкладках в одинарной внутренней сумме слагаемые могут различаться расстановкой скобок). Предложение доказано.

Пусть $\partial_A = 0$. Определяемое предложением 2 дифференцирование ∂ превращает $K^W(A, \rho)$ в дифференциально градуированную алгебру. Мы будем обозначать ее группы гомологий (относительно гомологической градуировки) через $H_*^W(A, \rho)$.

Алгебра $K^{\text{Com}}(A, \rho)$ для $A \in \text{Com}$ известна с 1950 года [12], а для $A \in \text{Com}^-$ — с 1972 года [2] под названием *комплекса Козюля*. Алгебра $K^{\text{Ass}}(A, \rho)$ носит название *комплекса Шафаревича* [3]: мы будем так же называть эту дифференциально градуированную алгебру и в случае произвольного многообразия W . Для $W \subset \text{Ass}$ алгебра $K^W(F^W(X), \rho)$ рассматривалась А. А. Бояркиным под названием *обобщенного комплекса Козюля*.

В заключение этого параграфа, приведем условия конечности комплекса Шафаревича. Говорят, что в многообразии W выполняется *система тождеств Капелли* некоторого порядка n , если для всякого полилинейного неассоциативного многочлена $f = f(x_1, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots)$, кососимметрического по переменным $x_1, \dots, x_n$, в W выполняется тождество $f \equiv 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Следующие условия на многообразии W эквивалентны:*

- (i) *В W выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка $n + 1$.*
- (ii) *Для любой градуированной алгебры A из W и любого конечного множества однородных элементов $\rho \subset A$ комплекс Шафаревича $K^W(A, \rho)$ конечен.*
- (iii) *Для любой градуированной супералгебры A из W^- и любого конечного множества четных однородных элементов $\rho \subset A$ комплекс Шафаревича $K^W(A, \rho)$ конечен.*

В этом случае длина комплекса $K^W(A, \rho)$ не превосходит $n \cdot \text{Card } \rho$.

Если $W \subset \text{Ass}$ — многообразие ассоциативных алгебр, то условия (i), (ii), (iii) эквивалентны следующим условиям:

- A. *В W выполняется стандартное тождество некоторого порядка.*
- B. *Для некоторой градуированной алгебры A из W найдется такое множество однородных элементов $\rho \subset A$, что комплекс Шафаревича $K^W(A, \rho)$ конечен.*
- C. *Для некоторой градуированной супералгебры A из W^- найдется такое множество четных однородных элементов $\rho \subset A$, что комплекс Шафаревича $K^W(A, \rho)$ конечен.*
- D. *“Внешняя” алгебра ранга 1 (т.е. свободная W -супералгебра, порожденная единственной нечетной переменной) конечномерна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) очевидна. Докажем (i) $\Rightarrow$ (iii) и (ii) $\Rightarrow$ (i).

Условие (i) необходимо и достаточно проверять для $A = F^W(X)$, где X — счетное множество. Тогда если обозначать через $F_{m,l}$ свободную алгебру многообра-

зия W^- с m четными и l нечетными порождающими, то $K^W(A, \rho) \simeq F_{\infty, s}$, где $s = \text{Card } \rho$.

Таким образом, (i) равносильно тому, что в алгебре $F = F_{\infty, s}$ все слова, имеющие по нечетным порождающим степень, большую некоторого числа N , нулевые. В частности, в W^- выполняется супертождество

$$c(x; y_1, y_2, \dots) = \dots x \dots x \dots x \dots \equiv 0,$$

где нечетная переменная x встречается ровно N раз, а имеющие произвольную четность переменные $y_1, y_2, \dots$ — по одному разу. Линеаризуя, получаем, что в W^- выполняется супертождество

$$\sum_{\sigma \in S_N} a(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}; y_1, y_2, \dots) \equiv 0,$$

где $a(x_1, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots)$ — такое полилинейное слово от N переменных, что

$$a(x, \dots, x; y_1, y_2, \dots) = c(x; y_1, y_2, \dots)$$

(здесь $x_1, \dots, x_N$ нечетны, $y_1, y_2, \dots$ — произвольной четности). Тем самым, в W выполняется тождество

$$\sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma a(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}; y_1, y_2, \dots) \equiv 0$$

для произвольного полилинейного неассоциативного слова a , т.е. выполняется система тождеств Капелли порядка N . Тем самым доказана импликация (i) $\Rightarrow$ (iii).

Обратно, пусть в W выполняется система тождеств Капелли порядка $n + 1$. Тогда для всякого полилинейного неассоциативного слова

$$a(x_1, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots)$$

в W выполняется тождество

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma a(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n+1)}; y_1, y_2, \dots) \equiv 0,$$

а в W^- — супертождество

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} a(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n+1)}; y_1, y_2, \dots) \equiv 0$$

при нечетных $x_1, \dots, x_{n+1}$, откуда

$$a(x, \dots, x; y_1, y_2, \dots) \equiv 0$$

для любого неассоциативного слова a , имеющего по нечетной переменной x степень, большую n . Следовательно, степень любого ненулевого в F слова по каждой из нечетных порождающих не превосходит n , и его степень по всем нечетным переменным не превосходит ns .

Импликация (i) $\Leftrightarrow$ A доказана А. Р. Кемером [13].

A $\Rightarrow$ D. Алгебра $F_{0,1}$ конечномерна тогда и только тогда, когда в W^- при нечетном x выполняется тождество $x^N \equiv 0$ для некоторого N , т.е. для нечетных $x_1, \dots, x_N$ выполняется его линейаризация

$$\sum_{\sigma \in S_N} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)} \equiv 0.$$

Это суперттождество эквивалентно обычному тождеству

$$\sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)} \equiv 0,$$

т.е. стандартному тождеству St_N .

D $\Rightarrow$ B. Пусть $A = \{0\}$. Тогда $K^W(A, \rho) \simeq F_{0,1}$.

C $\Rightarrow$ D. Эта импликация следует из того, что $F_{0,1}^W$ — подалгебра во всякой алгебре $K^W(A, \rho) \simeq A \overset{W^-}{*} F_{0, \text{Card } \rho}$, если в множестве ρ есть хотя бы один четный элемент.

Импликация B $\Rightarrow$ C очевидна: предложение доказано.

§ 4. Ряды Гильберта и гомологии

Пусть $A \in W^-$ — связно градуированная супералгебра, $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots\} \subset A$ — множество однородных элементов с вектором степеней $d = \{d_1, d_2, \dots\}$, $d_i \geq 1$, порождающее минимальным образом двусторонний идеал $J \triangleleft A$. Рассмотрим биградуированную алгебру

$$\overline{A} : \overline{A}_{p,q} = (J^p / J^{p+1})_{p+q}, \quad p \geq 0,$$

где $J^0 = A$, а при $p > 0$ идеал J^p порожден всевозможными произведениями p элементов J . Пусть $Q = J / (A_+ J + J A_+)$ — векторное пространство, порожденное ρ , и $\pi : J / J^2 \rightarrow Q$ — каноническая проекция. Если $\lambda : Q \rightarrow J / J^2$ — какой-нибудь гомоморфизм градуированных векторных пространств, обратный справа к π , то индуцированное им отображение

$$\chi : A / J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho) \rightarrow A$$

является сюръекцией биградуированных алгебр.

Если A градуирована конечно, то, поскольку $\overline{A}$ с тотальной градуировкой изоморфна A как градуированное векторное пространство, для рядов Гильберта справедливо покоэффициентное неравенство

$$(A / J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho))(t) \geq A(t). \quad (*)$$

Как следует из сказанного выше, при этом справедлива

ЛЕММА 4. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *неравенство (*) обращается в равенство;*
- (ii) *для некоторого λ отображение χ является изоморфизмом;*
- (iii) *для любого λ отображение χ является изоморфизмом.*

Отметим, что, как показал Д. Аник [4; лемма 1.2, теорема 2.6], если $W = \text{Ass}$ и A – свободная ассоциативная алгебра, то равенство в (*) эквивалентно равенству в неравенстве Голода–Шафаревича [3].

В следующей теореме мы объединили несколько известных результатов.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть W – одно из многообразий Com , Ass или Lie , и пусть $A \in W^-$ – связная конечно градуированная супералгебра. Тогда следующие условия на множество ρ эквивалентны:*

- (i) $H_1^W(A, \rho) = 0$;
- (ii) $H_0^W(A, \rho) = A/J$ и $H_i^W(A, \rho) = 0$ при $i > 0$;
- (iii) *неравенство (*) обращается в равенство:*

$$(A/J \stackrel{W^-}{*} F^{W^-}(\rho))(t) = A(t).$$

Для $W = \text{Com}$ и $A \in \text{Com}$ эта теорема эквивалентна классическому критерию полных пересечений (см. [1; §9, теорема 1], [14; следствие 3.2]): те множества ρ , для которых выполняются условия теоремы, называются *регулярными*. Для $W = \text{Com}$ и $A \in \text{Com}^-$ аналог критерия полных пересечений был доказан Т. Юзефьяком [2]: он назвал такие множества *градуированными регулярными* или *нормальными*. При $W = \text{Ass}$ теорема 5 была доказана Д. Аником [4]: соответствующие множества ρ названы им *сильно свободными* или *инертными* [5]. С. Гальперин и Ж.-М. Лемэр [7] доказали теорему 5 для супералгебр Ли: оказалось, что такие множества (авторы также называют их *инертными*) – в точности те, образы которых в универсальной обертывающей являются инертными множествами в смысле Аника.

Как показывает следующая лемма, в произвольном многообразии W аналог теоремы 5 справедлив для некоторых алгебр, для которых условие (iii) выполняется автоматически.

ЛЕММА 6. *Пусть W – произвольное многообразие, $A \in W^-$ – связная конечно градуированная супералгебра и, в прежних обозначениях,*

$$G := A/J \stackrel{W^-}{*} F^{W^-}(\rho).$$

Тогда $H_0^W(G, \rho) = A/J$ и $H_i^W(G, \rho) = 0$ при $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = K^W(G, \rho) = A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho) \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\gamma)$, ∂ – дифференцирование этого комплекса Шафаревича, имеющее степень -1 по обеим градуировкам. Введем на E новое дифференцирование δ , имеющее степень -1 относительно суперградуировки и степень $+1$ относительно гомологической градуировки. Именно, положим

$$\begin{aligned}\delta(A/J) &= 0, \\ \delta(\gamma_i) &= 0, \\ \delta(\rho_i) &= \gamma_i\end{aligned}$$

и продолжим δ на всю алгебру E . Это можно сделать с помощью предложения 2, применив его к алгебре $G' = A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\gamma)$ и рассмотрев E как комплекс Шафаревича $K^W(G', \gamma)$.

Зададим на E еще одну градуировку: $\|a\| = 0$ при $a \in A/J$ и $\|\gamma_i\| = \|\rho_i\| = 1$. Относительно такой градуировки оба дифференцирования однородны нулевой степени. Как легко убедиться по индукции, для однородных относительно всех градуировок элементов $x \in E$

$$(\delta\partial + \partial\delta)x = \|x\| \cdot x.$$

Определим теперь на комплексе $K_+^W(G, \rho)$ линейное отображение g , задав его на однородных относительно градуировки $\|\cdot\|$ элементах x как

$$g(x) = \frac{1}{\|x\|} \delta(x).$$

На подкомплексе $K_+^W(G, \rho)$ имеем:

$$g\partial + \partial g = \text{id}$$

и, поскольку дифференциал гомотопен тождественному отображению, $H_i^W(G, \rho) = 0$ при $i > 0$. Утверждение об H_0 тривиально: лемма доказана.

Для произвольной связно градуированной супералгебры $A \in W^-$ критерий равенства в (*) можно сформулировать в терминах комплекса Шафаревича для алгебры $\overline{A}$, которая является W^- -супералгеброй относительно тотальной градуировки.

ТЕОРЕМА 7. Пусть W – произвольное многообразие и $A \in W^-$ – связная конечно градуированная супералгебра. Тогда следующие условия на множество ρ эквивалентны:

- (i) $H_1^W(\overline{A}, \rho) = 0$;
- (ii) $H_0^W(\overline{A}, \rho) = A/J$ и $H_i^W(\overline{A}, \rho) = 0$ при $i > 0$;
- (iii) неравенство (*) обращается в равенство:

$$(A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho))(t) = A(t).$$

Мы будем называть множества ρ , для которых выполняются условия этой теоремы, W -регулярными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) тривиальна, а импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) следует из лемм 4 и 6. Докажем (i) $\Rightarrow$ (iii).

Пусть $G = A/J \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\rho)$, $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots : \deg \gamma_i = \deg \rho_i + 1\}$, $F = G \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\gamma)$, $B = \overline{A} \overset{W^-}{*} F^{W^-}(\gamma)$. Введем на F и на B гомологическую градуировку: $|G| = 0$, $|\overline{A}| = 0$, $|\gamma_i| = 1$. Относительно нее сюръекция биградуированных алгебр

$$h = \chi \overset{W^-}{*} \text{id}: F \rightarrow B$$

будет однородной нулевой степени.

Введем на F дифференцирование d : $d(G) = 0$, $d(\gamma_i) = \rho_i$ (это возможно сделать, поскольку алгебра F изоморфна комплексу Шафаревича $K^W(G, \rho)$), а дифференцирование комплекса Шафаревича на B обозначим через ∂ . Эти дифференцирования однородны степени -1 по обеим градуировкам. Докажем, что h является морфизмом комплексов, т.е. $h \circ d = \partial \circ h$.

Пусть $x \in F$ — элемент, однородный по обеим градуировкам. Если x представим в виде линейной комбинации элементов из A/J , ρ_i и γ (в частности, если $\deg x \leq 1$), то, очевидно, $(hd)x = (\partial h)x$. В противном случае в силу линейности можно считать, что

$$x = \sum_i \alpha_i a_i b_i, \quad \alpha_i \in \kappa,$$

где $\deg a_i < \deg x$ и $\deg b_i < \deg x$ для каждого i . Тогда по индукции можно считать, что

$$(hd)a_i = (\partial h)a_i, \quad (hd)b_i = (\partial h)b_i,$$

и потому

$$(hd)x = \sum_i ((hd)a_i \cdot hb_i + (-1)^{\deg a_i} ha_i \cdot (hd)b_i) = (\partial h)x.$$

Таким образом, $h: F \rightarrow B$ — морфизм нулевой степени биградуированных дифференциальных алгебр. Здесь $B = K^W(\overline{A}, \rho)$, $F = A/J \overset{W^-}{*} K^W(F^{W^-}(\rho), \rho)$ и согласно лемме 4

$$H_i(F) = \begin{cases} 0, & i > 0, \\ A/J, & i = 0. \end{cases}$$

Для нулевых относительно гомологической градуировки компонент имеем $F_0 = G$, $B_0 = \overline{A}$, $h_0 = \chi$, и в следующей коммутативной диаграмме строки точны:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker h_2 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & B_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow d_2 & & \downarrow \partial_2 \\ 0 & \longrightarrow & \ker h_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & B_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow d_1 & & \downarrow \partial_1 \\ 0 & \longrightarrow & \ker \chi & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \overline{A} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}.$$

Поскольку $H_1(F) = 0$, получаем

$$0 \longrightarrow H_1(B) \xrightarrow{\partial_*} \ker \chi / d(\ker h_1) \longrightarrow A/J \xrightarrow{\chi_*} A/J \longrightarrow 0,$$

где $\chi_* = \pi\lambda = \text{id}$, откуда $0 = H_1(B) \simeq \ker \chi / d(\ker h_1)$.

Пусть $\Delta = \ker \chi \in G$. Если $\Delta = 0$, то χ — изоморфизм, и в силу леммы 4 выполняется (iii). Предположим, что $\Delta \neq 0$.

Всякий элемент в $\ker h_1$ представим в виде

$$\sum_j \cdots \delta_j \cdots \gamma_{i_j} \cdots + \sum_k \cdots \gamma_{i_k} \cdots \delta_k \cdots,$$

где $\delta_k \in \Delta$, многоточия, возможно, заменяют произведения элементов из G и слагаемые могут различаться множителями и расстановкой скобок. Тогда всякий элемент из $d(\ker h_1)$ представим в виде

$$\sum_j \cdots \delta_j \cdots \rho_{i_j} \cdots + \sum_k \cdots \rho_{i_k} \cdots \delta_k \cdots.$$

Следовательно, если l — наименьшая из степеней ненулевых элементов Δ , $m = \min_i \deg \rho_i$, то степень любого ненулевого элемента $d(\ker h_1)$ не меньше $l + m > l$, откуда $d(\ker h_1) \neq \Delta$ и, в противоречие с (iii), $H_1(B) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из теорем 5 и 7, для многообразий Com , Ass и Lie комплексы $K = K^W(A, \rho)$ и $\overline{K} = K^W(\overline{A}, \rho)$ ацикличны в положительных степенях одновременно. Для многообразий $W = \text{Com}$ и $W = \text{Ass}$, когда свободное произведение в W — обычное свободное или тензорное произведение, в том, что из ацикличности комплекса $\overline{K}$ следует ацикличность K , можно убедиться и непосредственно.

Действительно, введем на комплексах K и $\overline{K}$ убывающую фильтрацию по степеням идеала $N \triangleleft K$ (соответственно $\overline{N} \triangleleft \overline{K}$), порожденного подмножеством ρ в K (соответственно в $\overline{K}$). При этом индуцированная фильтрация на $\overline{K}_0$ соответствует p -градуировке на $\overline{A}$. Рассмотрим стандартные спектральные последовательности E и $\overline{E}$, связанные с этими фильтрованными дифференциально градуированными пространствами (см. [15]). Поскольку $F_p K / F_{p-1} K \simeq F_p \overline{K} / F_{p-1} \overline{K}$, то

$$E_p^1 = H(F_p K / F_{p-1} K) \simeq \overline{E}_p^1.$$

Для комплекса $\overline{K}$ дифференциал на $\overline{E}^1$ всегда нулевой, и, значит, его ацикличность равносильна тому, что $\overline{E}^1 = 0$. Тогда и $E^1 = 0$, и комплекс K также ацикличен.

§ 5. О рядах Гильберта относительно свободных супералгебр

В этом параграфе полученные результаты применяются к вопросу о вычислении рядов Гильберта четной и нечетной частей относительно свободной супералгебры. В частности, дана формула, позволяющая выразить такие ряды Гильберта через ряды Гильберта относительно свободных супералгебр.

Пусть W – произвольное многообразие. Если $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ – множество четных переменных, а $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ – множество нечетных переменных, то относительно свободную супералгебру $F^{W-}(Y \sqcup Z)$ будем обозначать через $F_{m,n}^W$ или просто $F_{m,n}$. Так, $F_{m,0} = F_m$ – относительно свободная алгебра многообразия W , а $F_{0,n}$ – *внешняя алгебра* этого многообразия. Присвоив порождающим степень 1, можно задать стандартную градуировку на $F_{m,n}$: степени элемента $x \in F_{m,n}$ в такой градуировке мы будем обозначать через $e(x)$, а градуированные компоненты – верхним индексом в скобках. Все ряды Гильберта ниже вычисляются относительно этой градуировки.

Всякая алгебра $F = F_{m,n}$ разлагается в прямую сумму градуированных подпространств четных и нечетных элементов: $F = F^0 \oplus F^1$. При этом четная часть F^0 является градуированной подалгеброй F и принадлежит W , а нечетная часть F^1 представляет собой градуированный модуль над четной.

ТЕОРЕМА 8. *При $m \geq n$ ряды Гильберта градуированных пространств F^0 и F^1 связаны соотношением:*

$$F^0(t) - F^1(t) = F_{m-n,0}(t)$$

(здесь $F_{0,0}(t) = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m > n$ (при $m = n$ доказательство аналогично). Положим $A = F^W(Y) = F_m$ и рассмотрим двусторонний идеал $J \triangleleft A$, порожденный множеством $\rho = \{y_1, \dots, y_n\}$. Поскольку $A/J \simeq F^W(\{y_{n+1}, \dots, y_m\}) \simeq F_{m-n}$, то $A \simeq \bar{A}$ и $K^W(\bar{A}, \rho) \simeq K^W(A, \rho) \simeq F_{m,n} = F$. Гомологическая градуировка на этой алгебре задается так: $|y_i| = 0, |z_i| = 1$, и потому четные и нечетные части относительно гомологической и стандартной градуировок совпадают. Согласно теореме 7 такой комплекс является резольвентой алгебры $A/J \simeq F_{m-n}$:

$$0 \longleftarrow F_{m-n} \longleftarrow F_{(0)} \longleftarrow F_{(1)} \longleftarrow \dots$$

(нижний индекс в скобках обозначает компоненту в гомологической градуировке). Рассмотрим k -ю компоненту в стандартной градуировке:

$$0 \longleftarrow F_{m-n}^{(k)} \longleftarrow F_{(0)}^{(k)} \longleftarrow F_{(1)}^{(k)} \longleftarrow \dots$$

По формуле Эйлера получаем: $\dim F_{m-n}^{(k)} = \dim F_{(0)}^{(k)} - \dim F_{(1)}^{(k)}$, откуда немедленно следует требуемое равенство для рядов Гильберта.

СЛЕДСТВИЕ 9. *При $m \geq n$ ряды Гильберта четной и нечетной частей алгебры $F = F_{m,n}^W$ вычисляются через ряды Гильберта относительно свободных W -супералгебр по формулам:*

$$F^0(t) = \frac{F_{m,n}(t) + F_{m-n,0}(t)}{2}, \quad F^1(t) = \frac{F_{m,n}(t) - F_{m-n,0}(t)}{2}.$$

В некоторых многообразиях W ряды Гильберта всех относительно свободных супералгебр рациональны: например, как сообщил автору А. Я. Белов, его теорема о рациональности ряда Гильберта любой ассоциативной относительно свободной алгебры [16] обобщается и на случай относительно свободных супералгебр. Таким образом, имеем

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть многообразие W таково, что ряд Гильберта любой относительно свободной супералгебры рационален (например, $W \subset \text{Ass}$). Тогда при $m \geq n$ ряды Гильберта четной и нечетной частей относительно свободной супералгебры $F_{m,n}^W$ рациональны.

§ 6. Случай свободных специальных йордановых алгебр

Напомним (см. [11]), что специальная йорданова алгебра $A^{(+)}$ — это ассоциативная алгебра A с умножением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Изучаются также специальные йордановы супералгебры: в этом случае на имеющих четность элементах ассоциативной супералгебры A умножение определяется формулой $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{\deg a \cdot \deg b} ba)$. Если A — свободная ассоциативная (супер)алгебра с множеством порождающих X , то свободной специальной йордановой (супер)алгеброй $SJ[X]$ называется подалгебра в $A^{(+)}$, порожденная X . Ее элементы в A называются йордановыми элементами.

Специальные йордановы алгебры не образуют многообразие (хотя и образуют квазимногообразие), поэтому описанные выше конструкции для них не применимы. Тем не менее, благодаря их тесной связи с ассоциативными алгебрами результаты последнего параграфа удастся перенести и на этот случай.

ЛЕММА 11. Пусть на градуированной ассоциативной супералгебре A задано дифференцирование d нечетной степени. Тогда $A^{(+)}$ также дифференциально градуирована относительно d . Если $A = F^{\text{Ass}^-}(X)$ и $dX \subset SJ[X]$, то $SJ[X]$ замкнута относительно такого дифференцирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях достаточно показать, что дифференцирование d удовлетворяет формуле Лейбница относительно умножения “ $\circ$ ”. Действительно, пусть a и b — четности (йордановых) элементов x и y . Тогда

$$\begin{aligned} d(x \circ y) &= \frac{1}{2}(dx \cdot y + (-1)^a x \cdot dy + (-1)^{ab} dy \cdot x + (-1)^{b(a+1)} y \cdot dx) \\ &= (dx) \circ y + (-1)^a x \circ dy. \end{aligned}$$

Обозначим через $F = F_{m,n}$ свободную ассоциативную, а через $S = SJ_{m,n}$ — свободную йорданову супералгебру с m четными и n нечетными порождающими. Как и прежде, для супералгебры A через A^0 и A^1 обозначаются пространства четных и нечетных элементов.

ТЕОРЕМА 12. При $m \geq n$ ряды Гильберта градуированных пространств S^0 и S^1 связаны соотношением:

$$S^0(t) - S^1(t) = SJ_{m-n,0}(t)$$

(здесь, как и выше, $SJ_{0,0}(t) = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = Y \sqcup Z$, где Y и Z — те же, что и в предыдущем параграфе. Если $A = F^{\text{Ass}}(Y) = F_{m,0}$ и $\rho = \{y_1, \dots, y_n\}$, то комплекс $K^{\text{Ass}}(A, \rho)$ как алгебра изоморфен F . Согласно лемме 11 алгебра S является его подкомплексом. При этом факторалгебра S по идеалу, порожденному в S множеством ρ , изоморфна $SJ_{m-n,0}$. Следовательно, чтобы применить те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 8, достаточно обосновать ацикличность комплекса S в положительных степенях.

Действительно, как сказано в доказательстве леммы 6, дифференциал d на $F = K^{\text{Ass}}(A, \rho)$ в положительных степенях гомотопен тождественному отображению, причем гомотопия в каждой степени пропорциональна дифференцированию δ нечетной степени такому, что $\delta(\rho) = Z$. По лемме 11 алгебра S выдерживает такое дифференцирование и, следовательно, ограничение d на S также гомотопно (в положительных степенях) тождественному отображению. Таким образом, подкомплекс S ацикличен в положительных степенях, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 13. При $m \geq n$ для рядов Гильберта четной и нечетной частей специальной йордановой супералгебры $S = SJ_{m,n}$ справедливы формулы:

$$S^0(t) = \frac{SJ_{m,n}(t) + SJ_{m-n,0}(t)}{2},$$

$$S^1(t) = \frac{SJ_{m,n}(t) - SJ_{m-n,0}(t)}{2}.$$

Список литературы

1. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. Новосибирск: Наука, 1987.
2. Jösefiak T. Tate resolutions for commutative graded algebras over a local ring // Fund. Math. 1972. V. 74. P. 209–231.
3. Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №2. С. 261–272.
4. Anick D. Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // J. Algebra. 1982. V. 78. P. 120–140.
5. Anick D. Inert sets and the Lie algebra associated to a group // J. Algebra. 1987. V. 111. P. 154–165.
6. Голод Е. С. Некоммутативные полные пересечения и гомологии комплекса Шафаревича // УМН. 1997. Т. 52. №4. С. 201–202.
7. Halperin S., Lemaire J.-M. Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées // Math. Scand. 1987. V. 61. №1. P. 39–67.
8. Бояркин А. А. Деформации и когомологии в многообразиях алгебр // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М., 1977.
9. Кемер А. Р. Многообразия и $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №5. С. 1042–1059.
10. Бояркин А. А. Расширения PI-алгебр // Матем. заметки. 1986. Т. 40. №6. С. 705–712.
11. Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П. Неассоциативные структуры // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 57. М.: ВИНТИ, 1989. С. 179–266.
12. Koszul J. L. Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression // Colloque de topologie, Brussels, 1950. P. 73–81.
13. Кемер А. Р. Замечание о стандартном тождестве // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №5. С. 753–757.
14. Stanley R. P. Hilbert function of graded algebras // Adv. Math. 1978. V. 28. P. 57–83.

15. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
16. *Белов А. Я.* О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 153–154.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
15.01.1998