Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Угланов, Поверхностные интегралы в пространствах Фреше, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 11, 139–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:07:08

УДК 517.98

А. В. Угланов

Поверхностные интегралы в пространствах Фреше

Строится теория интегрирования по гиперповерхностям в сепарабельных пространствах Фреше. Даются соответствующие определения и доказываются основные формулы теории: формула повторного интегрирования, интегрирования по частям, Гаусса–Остроградского, Грина.

Библиография: 32 названия.

Введение

В ходе развития бесконечномерного анализа (в частности, дифференцирования и интегрирования на бесконечномерных пространствах) возник интерес математиков к интегралам по нелинейным бесконечномерным многообразиям. В работах [1], [2] (видимо, пионерских) было построено сужение гауссовой меры на гиперповерхность и сформулирована теорема о дивергенции (формула Гаусса–Остроградского); при этом существенно использовалась гауссова специфика (см. еще [3]). А. В. Скороход [4], основываясь на понятии квазиинвариантности, ввел поверхностные вероятностные меры для негауссова случая. Использование идей дифференцирования мер позволило изучать знакопеременные (и даже векторные) поверхностные меры [5]–[7]. Ю. Л. Далецкий и Б. Д. Марянин начали рассмотрение мер на абстрактных многообразиях [8]. Из других исследований по теме отметим статьи [9]–[13].

Подход, предложенный в [5]–[7], оказался весьма плодотворным; на его основе удалось построить содержательную теорию поверхностного интегрирования в банаховых пространствах; эта теория нашла серьезные применения в таких областях, как бесконечномерные распределения и дифференциальные уравнения [5], [14]–[21], случайные процессы [7], [16], [22], приближение функций бесконечномерного аргумента [23], векторное интегрирование [24], вариационное исчисление на банаховых пространствах [25]. Однако после основополагающей работы [6] главное внимание уделялось именно приложениям теории; приложениям же посвящались почти все публикации: статья [7] – едва ли не единственное исключение. Между тем аппарат, предложенный в [5]–[7], имеет ряд узких мест, которые затрудняют или вообще сдерживают дальнейшие применения. К числу таких мест относятся следующие.

1. Интегрирование возможно лишь на поверхностях, гладких по всем направлениям основного пространства. Это ограничение не слишком существенно для пространства с гладкой нормой, но становится непреодолимым при рассмотрении

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00604а).

пространств, где крайне беден запас Фреше-дифференцируемых функций (в частности, винеровские пространства).

2. Краеугольным камнем всей конструкции [6] является теорема инвариантности. Однако в [6] теорема доказана в предположении двойной гладкости и рассматриваемых поверхностей, и генерирующей объемной меры (для самого определения поверхностных мер требуется лишь однократная гладкость). Именно “благодаря” этому в статьях [7], [10], [15]–[21], [23] завышались требования гладкости соответствующих объектов, а в статьях [22], [23], [26] давались дополнительные разъяснения. Особенно неприятным являлось требование двойной гладкости объемной меры: оно не позволяло заменять меру ее жордановыми составляющими (даже бесконечная гладкость меры гарантирует лишь однократную гладкость жордановых составляющих); во многих же случаях знакопостоянство генерирующей меры является решающим фактором (см., например, доказательство теоремы 5 в настоящей работе).

3. Все рассмотрения касаются лишь банаховых многообразий (этот недостаток присущ почти всем известным автору исследованиям по поверхностному интегрированию).

Добавим еще, что для приложений первостепенное значение имеют формулы вторного интегрирования, Гаусса–Остроградского и Грина. Между тем эти формулы (для банаховых пространств) лишь анонсировались в [7], [22]; доказательства же до сих пор нигде не публиковались.

Настоящая работа устраняет указанные недостатки. Это уже дало положительные результаты: например, без интегрирования по негладким поверхностям были бы невозможны результаты работы [27].

Укажем еще следующее. Конструкция поверхностных мер и все результаты предлагаемой статьи распространяются на произвольные локально выпуклые линейные топологические пространства. Однако при этом все рассуждения (начиная уже с основных определений) резко усложняются и становятся доступными лишь узкому кругу специалистов по теории меры. Автор не пошел по этому пути, рассчитывая на читателей общематематического журнала.

§ 1. Конструкция поверхностных мер

Все встречающиеся в статье линейные пространства – действительные. Под *мерой* понимается действительная счетноаддитивная функция, определенная на борелевской σ -алгебре Σ_X метрического пространства X ; совокупность всех таких мер обозначается через $M(X)$. Если $\mu \in M(X)$, то через $|\mu| \in M(X)$ обозначается полное изменение меры μ . Для μ -интегрируемой (т.е. $|\mu|$ -интегрируемой) функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ через $f\mu$ обозначается мера на X , определяемая равенством $f_\mu(A) = \int_A f d\mu$. Дифференцируемость мер понимается в смысле [28] (τ_s -дифференцируемость). Иногда – это будет оговариваться – мерой будет называться счетноаддитивная функция $\Sigma_X \rightarrow [0, \infty]$. Подмножества метрических пространств рассматриваются, если не оговорено противное, с индуцированной метрикой.

Далее, Z есть сепарабельное пространство Фреше, Z_0 – линейно и непрерывно вложенное в Z нормированное пространство, Z_0^* – наделенное равномерной нормой сопряженное с Z_0 пространство, $\mu \in M(Z)$ – мера, дифференцируемая по всем

направлениям из Z_0 (совокупность всех таких мер обозначим через M^1). Заметим, что если $\mu = \mu^+ - \mu^-$ есть жорданово разложение меры μ , то $\mu^\pm \in M^1$ [28; гл. IV, § 2].

Пусть X – замкнутое гиперподпространство Z , не содержащее Z_0 , $a \in Z_0 \setminus X$, R_a – одномерное подпространство, порожденное вектором a , A – открытое (в X) подмножество X , $f: A \rightarrow R_a$ – непрерывная функция, имеющая непрерывную ограниченную производную Фреше $f': A \rightarrow (X \cap Z_0)^*$ вдоль нормированного пространства $X \cap Z_0$ (сопряженное пространство $(X \cap Z_0)^*$ наделено равномерной нормой). Обозначим через $G = G(X, A, a, f)$ график (в произведении $X \times R_a = Z$) функции f и для $Q \in \Sigma_G$ положим $T = T(Q) = \bigcup_{s \leq 0} \{Q + sa\}$, $\mu_a(Q) = D_a \mu(T)$ (D_a означает производную по направлению a). Так как функция $D_a \mu: \Sigma_Z \rightarrow R^1$ счетноаддитивна, то $\mu_a: \Sigma_G \rightarrow R^1$ есть мера на G ; если $\mu \geq 0$, то и $\mu_a \geq 0$. Обозначим через $n = n(\omega) \in Z_0^*$ единичную нормаль к множеству G в точке $\omega \in G$. Из предположений относительно f вытекает, что функция $\omega \mapsto |(n(\omega), a)|^{-1}$ ограничена на G , так что корректно определена мера $\mu_G: \Sigma_G \rightarrow R^1$,

$$\mu_G(Q) = \int_Q |(n, a)|^{-1} d\mu_a.$$

Сейчас наша главная цель – доказательство того, что мера μ_G полностью определяется мерой μ и множеством G (т.е. не зависит от координатного представления $G = G(X, A, a, f)$).

Далее считаем, что $\|a\| = 1$. Пусть $l: \Sigma_{R_a} \rightarrow [0, \infty]$ – мера Лебега на R_a , $l[0, a] = 1$. Определим меру $|\mu|_X: \Sigma_X \rightarrow R^1$,

$$|\mu|_X(E) = |\mu|(E + R_a).$$

Доказательства следующих лемм 1, 2 имеются в [29].

ЛЕММА 1. *Справедливо неравенство*

$$|\mu| \leq |D_a \mu|_X \times l. \quad (1)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Мера μ абсолютно непрерывна относительно меры $|\mu|_X \times l$ ($\mu \ll |\mu|_X \times l$).*

В силу соотношений $\mu \ll |\mu|_X \times l$, $D_a \mu \ll \mu$ (по поводу последнего см. [28; гл. 4, § 2]) и теоремы Радона–Никодима существуют $|\mu|_X \times l$ -интегрируемые функции $\varphi, \psi: Z = X \times R_a \rightarrow R^1$ такие, что $\mu = \varphi(|\mu|_X \times l)$, $D_a \mu = \psi(|\mu|_X \times l)$. Далее принимается $z = x + y = (x, y)$, $z \in Z$, $x \in X$, $y \in R_a$.

ЛЕММА 2. *Для $|\mu|_X \times l$ -почти всех $(x, y) \in Z$ справедливо равенство*

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^y \psi(x, t) dt. \quad (2)$$

Далее считается, что функция φ определена равенством (2); в силу леммы 2 равенство $\mu = \varphi(|\mu|_X \times l)$ сохраняется. Обозначим через P_X^a проектор Z на X , параллельный a .

ЛЕММА 3. Для любого $Q \in \Sigma_G$ справедливо равенство

$$\mu_a(Q) = \int_{P_X^a Q} \varphi(x, f(x)) d|\mu|_X(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения, теоремы Фубини и равенства (2) имеем

$$\begin{aligned} \mu_a(Q) &= D_a \mu(T) = \int_{P_X^a Q} \int_{-\infty}^{f(x)} \psi(x, y) dy d|\mu|_X(x) \\ &= \int_{P_X^a Q} \varphi(x, f(x)) d|\mu|_X(x), \end{aligned}$$

что и требуется.

Пусть $Q \in \Sigma_G$, $\delta > 0$, $\varepsilon \in [0, \delta]$; $F: P_X^a Q \times [0, \delta] \rightarrow R^a$ — борелевская функция такая, что $F(x, 0) \equiv f(x)$, $Q(\varepsilon) = \text{gr } F(\cdot, \varepsilon)$; $\Delta_\varepsilon: P_X^a Q \rightarrow R_a$, $\Delta_\varepsilon(x) = F(x, \varepsilon) - f(x)$; $Q_\varepsilon^+ = \{\omega \in Q(\varepsilon) : \Delta_\varepsilon(P_X^a \omega) \geq 0\}$, $Q_\varepsilon^- = Q(\varepsilon) \setminus Q_\varepsilon^+$; $Q^\pm = \text{gr } f|_{P_X^a Q_\varepsilon^\pm}$, $T^+ = T(Q_\varepsilon^+) \setminus T(Q^+)$, $T^- = T(Q^-) \setminus T(Q_\varepsilon^-)$.

ЛЕММА 4. Предположим, что при любом $x \in P_X^a Q$ функция $F(x, \cdot): [0, \delta] \rightarrow R_a$ дифференцируема, причем

$$\sup_{x, \varepsilon} \left| \frac{dF}{d\varepsilon}(x, \varepsilon) \right| < \infty. \quad (3)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [\mu(T^+) - \mu(T^-)] = \int_Q \frac{dF}{d\varepsilon}(P_X^a \omega, 0) d\mu_a(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений функции φ , множеств $T^\pm$ и теоремы Фубини получаем

$$\mu(T^+) - \mu(T^-) = \int_{P_X^a Q} \int_{F(x, 0)}^{F(x, \varepsilon)} \varphi(x, y) dy d|\mu|_X(x). \quad (4)$$

Из формул Лагранжа, леммы 2 и условия (3) получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{F(x, 0)}^{F(x, \varepsilon)} \varphi(x, y) dy \right| &= \left| \frac{dF}{d\varepsilon}(x, \theta\varepsilon) \varphi(x, F(x, 0) + \theta\varepsilon) \right| \\ &\leq c |\varphi(x, F(x, 0) + \theta\varepsilon)| = c \left| \int_{-\infty}^{F(x, 0) + \theta\varepsilon} \psi(x, y) dy \right| \\ &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y)| dy \quad (\theta = \theta(x, \varepsilon) \in (0, a)). \end{aligned}$$

В силу определения функции $\psi(x, y)$ и теоремы Фубини последняя функция $|\mu|_X$ -интегрируема. Теперь, деля равенство (4) на ε , устремляя ε к нулю, переходя к пределу под знаком внешнего интеграла и применяя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [\mu(T^+) - \mu(T^-)] &= \int_{P_X^a Q} \frac{dF}{d\varepsilon}(x, 0) \varphi(x, F(x, 0)) d|\mu|_X(x) \\ &= \int_Q \frac{dF}{d\varepsilon}(P_X^a \omega, 0) d\mu_a(\omega), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть есть еще одно представление $G = G(\overline{X}, \overline{A}, \overline{a}, f)$ ($\overline{a} \in Z_0 \setminus X$, $\|\overline{a}\| = 1$); тогда на G определена еще одна мера $\overline{\mu}_G$.

ЛЕММА 5. *Справедливо равенство $\mu_G = \overline{\mu}_G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mu_G = (\mu^+)_G - (\mu^-)_G$, то достаточно рассмотреть случай $\mu \geq 0$. Возьмем $N \in Z^*$ такой, что $N \neq 0$, $(N, X) = 0$, и положим

$$b = \overline{a} - (N, \overline{a})(N, a)^{-1}a. \quad (5)$$

Пусть X_b есть какое-то топологическое дополнение R_b до пространства X . Рассмотрим класс

$$K = \left\{ A_{H,s,t} \subset A : A_{H,s,t} = \bigcup_{s < \tau < t} (H + \tau b), s, t \in R^1, s < t, H \text{ открыто в } X_b \right\}.$$

Далее считаем, что $X = \overline{X}$ (это не ограничивает общности: если $\overline{a} \in X$, то небольшим поворотом X можно нарушить это включение) и для всех $\omega \in G$

$$(n(\omega), a) > 0, \quad (n(\omega), \overline{a}) > 0 \quad (6)$$

(эти функции от ω не меняют знак, так что предположение законно).

Фиксируем $Q : P_X^a Q \in K$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} F(x, \varepsilon) &= f(x) + \varepsilon(n(\omega), a)^{-1}a \quad (x \in P_X^a Q, \omega = (x, f(x)), \varepsilon \geq 0), \\ \overline{F}(x, \varepsilon) &= \overline{f}(x) + \varepsilon(n(\omega), \overline{a})^{-1}\overline{a} \quad (x \in P_X^{\overline{a}} Q, \omega = (x, \overline{f}(x)), \varepsilon \geq 0). \end{aligned}$$

В силу (6) выполняется равенство $T^- = \overline{T}^- = \emptyset$, так что по лемме 3

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \mu(T^+) = \int_Q (n(\omega), a)^{-1} d\mu_a(\omega) = \mu_G(Q), \quad (7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \mu(\overline{T}^+) = \int_Q (n(\omega), \overline{a})^{-1} d\mu_{\overline{a}}(\omega) = \overline{\mu}_G(Q). \quad (8)$$

Для $U \subset Z$, $x \in X$ положим $S_x^a(U) = \{y \in R_a : x + y \in U\}$ и обозначим через d_x диаметр множества $S_x^a(T^+ \Delta \overline{T}^+)$. Сейчас наша цель – доказательство соотношения $d_x = o(\varepsilon)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$, x фиксировано).

Для $z = (x, f(x))$ выберем точку $z + \Delta z \in Q$ так, чтобы

$$z + \Delta z + \bar{k}\varepsilon\bar{a} = x + \lambda a, \quad (9)$$

где $\bar{k} = (n(z + \Delta z), \bar{a})^{-1}$, $\lambda \in R^1$ (указанный выбор $z + \Delta z$ всегда возможен при достаточно малом ε ; кроме того, $\Delta z \rightarrow 0$, если $\varepsilon \rightarrow 0$). Проектируя равенство (9) на X и R_a и выражая a из (5), получим

$$\Delta x + \bar{k}\varepsilon b = 0, \quad (10)$$

$$f(x) + \Delta_1 y + \bar{k}\varepsilon(N, \bar{a})(N, a)^{-1}a = \lambda a, \quad (11)$$

где $\Delta x = P_X^a(\Delta z)$, $\Delta_1 y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Пусть $k = (n(z), a)^{-1}$, $\Delta y = k\varepsilon a$; тогда $d_x = \|f(x) + \Delta y - \lambda a\|$. Выражая λa из (11) и пользуясь формулой Лагранжа и равенством (10), находим

$$\begin{aligned} d_x &= \|\Delta y - \Delta_1 y - \bar{k}\varepsilon(N, \bar{a})(N, a)^{-1}a\| \\ &= \|\Delta y - [f(x + \Delta x) - f(x)] - \bar{k}\varepsilon(N, \bar{a})(N, a)^{-1}a\| \\ &= \varepsilon |k + (f'(x), b)\bar{k} - \bar{k}(N, \bar{a})(N, a)^{-1} + g(x, \Delta x)|, \end{aligned} \quad (12)$$

где функция $g(x, \Delta x)$ ограничена и стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

Запишем уравнение нормали $n(z)$ в координатах $(a^0, (X \cap Z_0)^0)$, где $a^0, (X \cap Z_0)^0$ суть ортогональные к a , $X \cap Z_0$ соответственно подпространства в Z_0^* . Имеем $n(z) = (-f'(x), 1) \|(-f'(x), 1)\|^{-1}$, где $f'(x) \in a^0$, $1 \in (X \cap Z_0)^0$, причем $(1, a) = 1$.

Обозначив $c(x) = \|(-f'(x), 1)\|^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} (n, a) &= c(x), \\ (n(z + \Delta z), \bar{a}) &= (n(z + \Delta z), b + (N, \bar{a})(N, a)^{-1}a) \\ &= c(x + \Delta x) [-(f'(x + \Delta x), b) + (N, \bar{a})(N, a)^{-1}] \\ &= c(x) [-(f'(x), b) + (N, \bar{a})(N, a)^{-1}] + g_1(x, \Delta x), \end{aligned}$$

где $g_1(x, \Delta x)$ — ограниченная функция и $g_1(x, \Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Подставляя полученные выражения в (12), имеем

$$d_x = \varepsilon g_2(x, \Delta x), \quad (13)$$

где $g_2(x, \Delta x)$ есть ограниченная функция и $g_2(x, \Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Теперь положим $T = T^+ \Delta \bar{T}^+$. В силу (1) и теоремы Фубини справедлива оценка

$$\mu(T) \leq |D_a \mu|(T + R_a) \sup_{x \in P_X^a T} d_x. \quad (14)$$

Пусть $\delta > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $X^n = \{x \in X : d_x > \delta \varepsilon_n\}$, $X_m = \bigcup_{n \geq m} X^n$, $X_0 = \bigcap_{m \geq 1} X_m$. Так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta x = 0$, см. (10), то из (13) и определения класса K вытекает, что $\mu_X(X_0) = 0$ (действительно, если $P_X^a Q = A_{H, s, t}$, то $X_0 \subset (H + sb) \cup (H + tb)$, и остается воспользоваться дифференцируемостью

меры μ_X по направлению b). Отсюда и из соотношения $|D_a\mu|_X \ll \mu_X$ получаем существование m такого, что при $n \geq m$

$$|D_a\mu|(X_n + R_a) < \delta. \quad (15)$$

В силу оценки (14), примененной к множествам $T \setminus (X_n + R_a)$ и $T \cap (X_n + R_a)$, учитывая равенство (13), неравенства (15) и $\sup_{x \in X \setminus X_n} d_x \leq \delta\varepsilon_n$, имеем для $n \geq m$

$$\mu(T) \leq |D_a\mu|(Z)\delta\varepsilon_n + c_2\delta\varepsilon_n$$

(c_2 — константа, ограничивающая функцию g_2). Так как δ произвольно и $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}\mu(T) = 0$. Отсюда, из неравенства $|\mu(T^+) - \mu(\overline{T}^+)| \leq \mu(T)$ и равенств (7), (8) вытекает, что $\mu_G(Q) = \overline{\mu}_G(Q)$.

Итак, на множествах из $\text{gr } f|_K$ значения мер μ_G и $\overline{\mu}_G$ совпадают. Так как класс K замкнут относительно конечных пересечений и образует базу топологии пространства A , то $\text{gr } f|_K$ замкнут относительно пересечений и образует базу топологии пространства $\overline{G}$ (P_X^a есть изоморфизм G на A). Утверждение леммы теперь следует из сепарабельности G .

Рассмотрим два множества: $G = G(X, A, a, f)$ и $\overline{G} = G(\overline{X}, \overline{A}, \overline{a}, \overline{f})$; тогда на $G_0 = G \cap \overline{G}$ определены две меры $\mu_G, \mu_{\overline{G}}$. Следующая теорема является основной в конструкции поверхностных мер.

ТЕОРЕМА 1 (инвариантности). *Справедливо равенство $\mu_G = \mu_{\overline{G}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять считаем, что $\mu \geq 0$. Зафиксировав естественным образом направления нормалей $n, \overline{n}$, видим, что функции $n, \overline{n}: G_0 \rightarrow Z_0^*$ непрерывны, так что справедливо включение $Q_0 = \{\omega \in G_0 : n(\omega) = \overline{n}(\omega)\} \in \Sigma_{G_0}$. Докажем сначала равенство $\mu_G \equiv \mu_{\overline{G}}$ на множестве Q_0 . Из определения Q_0 и теоремы о неявной функции следует, что для любого $\omega \in Q_0$ существуют открытое множество $U(\omega) \ni P_X^a\omega$ в пространстве X и непрерывная функция $g: U(\omega) \rightarrow R_a$ с непрерывной и ограниченной производной (вдоль пространства $X \cap Z_0$) такие, что $\overline{G} \cap \{U(\omega) + R_a\} = \text{gr } g$. При этом, очевидно, множество $U(\omega)$ можно выбрать так, что $U(\omega) \subset A$. Если теперь $Q \subset \text{gr } g$, $Q \in \Sigma_{Q_0}$, то из леммы 5 (с заменой G на $\text{gr } g$), определения поверхностной меры и равенства $n(\omega) = \overline{n}(\omega)$ при $\omega \in Q$ имеем

$$\mu_{\overline{G}}(Q) = \int_Q |(\overline{n}, \overline{a})|^{-1} d\mu_{\overline{a}} = \int_Q |(\overline{n}, a)|^{-1} d\mu_a = \int_Q |(n, a)|^{-1} d\mu_a = \mu_G(Q).$$

Итак, $\mu_G \equiv \mu_{\overline{G}}$ на Q_0 локально, а так как Q_0 сепарабельно, то $\mu_G \equiv \mu_{\overline{G}}$ на Q_0 .

Для доказательства теоремы теперь достаточно убедиться в том, что $\mu_G(G_0 \setminus Q_0) = \mu_{\overline{G}}(G_0 \setminus Q_0) = 0$. Считаем, что $X = \overline{X}$ (см. доказательство леммы 5), и пусть вектор b определен равенством (5). Заметим, что включение $\omega_0 \in G_0$ эквивалентно равенству

$$(N, a)(N, \overline{a})^{-1}f(x_0) = \overline{f}(x_0 - (N, a)(N, \overline{a})^{-1}f(x_0)b) \quad (16)$$

($x_0 = P_X^a\omega_0$, $\omega_0 = x_0 + f(x_0)a$, функции $f, \overline{f}$ считаются скалярами), а включение $\omega_0 \in Q_0$ эквивалентно системе: (16) плюс равенство

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (N, \overline{a})(N, a)^{-1}\overline{f}'(x_0 - (N, a)(N, \overline{a})^{-1}f(x_0)b) \\ &\quad - (\overline{f}'(x_0 - (N, a)(N, \overline{a})^{-1}f(x_0)b), b)f'(x_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим функцию $F: A \rightarrow R^1$,

$$F(x) = f(x) - \frac{(N, \bar{a})}{(N, a)} \bar{f}\left(x - \frac{(N, a)}{(N, \bar{a})} f(x)b\right).$$

Если $\omega_0 \in G_0 \setminus Q_0$, то из (16) следует, что $F(x_0) = 0$, а из (17) — что $F'(x_0) \neq 0$. Возьмем вектор $d \in X \cap Z_0$ такой, что $(F'(x_0), d) \neq 0$, и пусть X_d — некоторое топологическое дополнение d до X . Из теоремы о неявной функции получаем существование открытых окрестностей $U(x_0)$, $U_d(x_0)$ точек x_0 , $P_{X_d}^d x_0$ ($P_{X_d}^d$ — проектор X на X_d , параллельный d ; окрестности U , U_d берутся в пространствах X , X_d соответственно) и непрерывной функции $\varphi_0: U_d(x_0) \rightarrow R_d$ таких, что

$$F^{-1}(0) \cap U(x_0) = \text{gr } \varphi_0 \quad (18)$$

(график рассматривается в произведении $X_d \times R_d = X$). Рассмотрим множество $U(\omega_0) = \{\omega \in G_0 \setminus Q_0 : P_X^a \omega \in U(x_0)\}$; $U(\omega_0)$ есть окрестность (в пространстве $G_0 \setminus Q_0$) точки ω_0 . Из (16) и (18) получаем равенство $P_X^a[U(\omega_0)] = \text{gr } \varphi_0$, откуда

$$U(\omega_0) \subset \{\text{gr } \varphi_0\} + R_a. \quad (19)$$

Из дифференцируемости меры μ по направлению d следует равенство

$$\mu(\text{gr } \varphi_0 + R_a) = 0,$$

откуда $|D_a \mu|(\text{gr } \varphi_0 + R_a) = 0$ и $\mu_G[G \cap (\text{gr } \varphi_0 + R_a)] = 0$ (см. определение мер μ_a, μ_G). Включения $U(\omega_0) \subset G$ и (19) теперь дают равенство $\mu_G[U(\omega_0)] = 0$. Так как пространство $G_0 \setminus Q_0$ сепарабельно, то $\mu_G(G_0 \setminus Q_0) = 0$. В силу равноправия мер $\mu_G, \mu_{\bar{G}}$ имеем также равенство $\mu_{\bar{G}}(G_0 \setminus Q_0) = 0$, завершающее доказательство теоремы.

Назовем множество $\Omega \in \Sigma_Z$ *простой поверхностью*, если $\Omega \subset G(X, A, a, f)$ для некоторых X, A, a, f ; *поверхностью*, если Ω есть счетное объединение простых поверхностей. Для поверхности $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$, $Q_m \subset G_m$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, определим функции $\mu_{\Omega}^{\pm}: \Sigma_{\Omega} \rightarrow [0, \infty]: Q \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} (\mu^{\pm})_{G_m}(Q \cap Q_m)$. Из теоремы 1 следует, что функции $\mu_{\Omega}^{\pm}$ корректно определены (т.е. не зависят от представления $\Omega = \bigcup Q_m$) и счетноаддитивны, так что корректно определена σ -конечная поверхностная мера $\mu_{\Omega} = \mu_{\Omega}^{+} - \mu_{\Omega}^{-}$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы равенства $|\mu_{\Omega}| = |\mu|_{\Omega}$, $\mu_{\Omega}^{\pm} = (\mu^{\pm})_{\Omega}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Omega = G = G(X, A, a, f)$, $Q \subset G$, то в силу теоремы 1 и леммы 3

$$|\mu_{\Omega}|(Q) = \int_{P_X^a(Q)} |(n(x, f(x)), a)|^{-1} |\varphi(x, f(x))| d|\mu|_X(x).$$

Учитывая равенство $|\mu| = |\varphi|(|\mu|_X \times l)$ и опять применяя лемму 3 (с заменой μ на $|\mu|$), находим, что $|\mu_{\Omega}| = |\mu|_{\Omega}$. Отсюда выводится, что это равенство справедливо и для общих поверхностей Ω . Второе утверждение теоремы вытекает из первого с учетом соотношений $\mu^{\pm} = \frac{1}{2}[|\mu| \pm \mu]$ и линейности соответствия $\mu \mapsto \mu_{\Omega}$.

Борелевская функция $\varphi: \Omega \rightarrow R^1$ называется μ_{Ω} -интегрируемой, если существуют интегралы $\int_{\Omega} |\varphi| d\mu_{\Omega}^{\pm}$; в этом случае полагается

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_{\Omega} = \int_{\Omega} \varphi d\mu_{\Omega}^{+} - \int_{\Omega} \varphi d\mu_{\Omega}^{-}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $(\varphi, \mu) \mapsto \int_{\Omega} \varphi d\mu_{\Omega}$ билинейно на своей области определения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность по φ есть общее свойство интеграла; линейность по μ вытекает из линейности соответствия $\mu \mapsto \mu_{\Omega}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функция $u: Z \rightarrow R^1$ непрерывна, ограничена и ограниченно дифференцируема вдоль пространства Z_0 . Тогда $u\mu \in M^1$ и $(u\mu)_{\Omega} = u\mu_{\Omega}$ на Σ_{Ω} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $D_a(u\mu) = D_a u \mu + u D_a \mu$, так что $u\mu \in M^1$. Пусть $G = G(X, A, a, f)$. Из предположений теоремы вытекает, что для любого $x \in X$ функция $u(x, \cdot): R_a \rightarrow R^1$ абсолютно непрерывна, так что в силу лемм 2, 3

$$\begin{aligned} u\mu &= (u\varphi)(|\mu|_X \times l), \\ (u\mu)_a(Q) &= \int_{P_X^a Q} (u\varphi)(x, f(x)) d|\mu|_X(x), \end{aligned}$$

$Q \in \Sigma_G$, откуда $(u\mu)_a = u\mu_a$ и $(u\mu)_G = u\mu_G$. Дальнейшее ясно.

§ 2. Формула повторного интегрирования

Обозначения: V – открытое подмножество Z ; $C^1(V)$ – множество непрерывных действительных функций на V , имеющих непрерывную производную Фреше вдоль пространства Z_0 ; $F \in C^1(V)$; $V_t = \{z \in V : F(z) < t\}$; $\Omega_t = \{z \in V : F(z) = t\}$ ($t \in R^1$). Для любого $t \in R^1$ предполагаем, что Ω_t есть поверхность. Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5 (формула повторного интегрирования). *Пусть $|\mu|\{z \in V : F'(z) = 0\} = 0$, функция $\varphi: V \rightarrow R^1$ μ -интегрируема. Тогда корректно и справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_t} \varphi \|F'\|^{-1} d\mu_{\Omega_t} dt = \int_V \varphi d\mu. \quad (20)$$

Доказательству теоремы предположим ряд вспомогательных утверждений. Сразу отметим, что теорему достаточно доказать для случая $\mu \geq 0$; это и предполагается до конца параграфа.

ЛЕММА 6. *Пусть $W_t = \{\omega \in \Omega_t : F'(\omega) = 0\}$. Тогда почти при всех t*

$$\mu_{\Omega_t}(W_t) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_{\Omega_t}(W_t) > 0$ для некоторого t . Тогда существует поверхность $Q \in G(X, A, a, f)$ такая, что $Q \subset W_t$, $\mu_{\Omega_t}(Q) > 0$. Отсюда

$$\mu_a(Q) = \delta > 0. \quad (21)$$

Для $\Delta t > 0$, $\omega \in Q$ обозначим через $s_0 = s_0(\omega, \Delta t)$ минимальный из положительных корней уравнения $F(\omega + sa) = t + \Delta t$ (если указанных корней нет, то полагаем $s_0 = \infty$). Легко видеть, что при фиксированном Δt функция $s_0(\cdot, \Delta t)$ полунепрерывна снизу на Q и, следовательно, борелевская. В силу дифференцируемости F по направлению a имеем для любого $\omega \in Q$

$$F(\omega + s_0 a) = F(\omega) + s_0 D_a F(\omega) + o(s_0).$$

Учитывая, что $F(\omega) = t$, $D_a F(\omega) = 0$, получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s_0(\omega, \Delta t)}{\Delta t} = \infty. \quad (22)$$

Для $c > 0$ и последовательности $\Delta t_n \searrow 0$ положим $Q_n = \{\omega \in Q : \forall m \geq n \ c\Delta t_m < s_0(\omega, \Delta t_m)\}$; из (22) и (21) вытекает существование N такого, что $\mu_a(Q_N) > \delta/2$. Для $n \geq N$ положим

$$Z_n = \bigcup_{\lambda \in [0, c\Delta t_n]} \{Q_N + \lambda a\} = T(Q_N + c\Delta t_n a) \setminus T(Q_N)$$

(множества $T(Q)$ определены в начале § 1). Из определений s_0 , Q_n вытекает, что $Z_n \subset V_{t+\Delta t_n} \setminus V_t$. Теперь для функции $u: R^1 \rightarrow R^1$, $u(t) = \mu(V_t)$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\Delta t_n)^{-1} [u(t + \Delta t_n) - u(t)] &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\Delta t_n)^{-1} \mu(Z_n) \\ &= c D_a \mu[T(Q_N)] = c \mu_a(Q_N) \geq c \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности c заключаем, что функция u в точке t имеет производное число, равное ∞ . Но u — монотонная ограниченная функция, так что почти при всех t выполняется неравенство $\mu'(t) < \infty$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы и условия $\mu\{z \in V : F'(z) = 0\} = 0$ получаем, что теореме 5 достаточно доказать с заменой V на (открытое же) множество $V \setminus \{F' = 0\}$ (и соответственно переопределенными V_t , Ω_t). Учитывая это, далее считаем, что F' не обращается в нуль на V :

Введем функцию $\rho: R^1 \times \Sigma_V \rightarrow [0, \infty]$,

$$\rho(t, E) = \int_{E \cap \Omega_t} \|F'\|^{-1} d\mu_{\Omega_t}.$$

ЛЕММА 7. Функция $\nu: \Sigma_V \rightarrow [0, \infty]$, $\nu(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, E) dt$, корректно определена, и имеет место равенство $\nu = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 \in V$, $F(z_0) = t_0$, $a \in Z_0$, $(F'(z_0), a) > 0$, $\|a\| = 1$, X – некоторое топологическое дополнение R_a до Z , $x_0 = P_X^a z_0$, $y_0 = z_0 - x_0 \in R_a$. По теореме о неявной функции существуют интервал $(t_1, t_2) \ni t$, открытые (в X и R_a) окрестности $U(x_0)$, $U(y_0)$ точек x_0 , y_0 и непрерывная, непрерывно дифференцируемая вдоль пространства $R^1 \times [X \cap Z_0]$ функция $f: [t_1, t_2] \times U(x_0) \rightarrow U(y_0)$ такие, что для t, x, y из указанных окрестностей эквивалентны равенства $F(x, y) = t$ и $y = f(t, x)$. Уменьшая при необходимости окрестности (t_1, t_2) , $U(x_0)$, добьемся того, чтобы при $t \in (t_1, t_2)$, $x \in U(x_0)$ выполнялись неравенства

$$0 < c_1 \leq \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = (F'(x + f(t, x)), a)^{-1} \leq c_2 < \infty. \quad (23)$$

Тогда множество $U(z_0) = \{z = x + y \in V : x \in U(x_0), f(t_1, x) < y < f(t_2, x)\}$ есть окрестность точки z_0 и для $t \in (t_1, t_2)$ выполняется равенство

$$\Omega_t \cap U(z_0) = \text{gr } f(t, \cdot).$$

Для множества $Q \in \Sigma_{U(x_0)}$ и чисел $r, s \in (t_1, t_2)$, $r < s$, положим $V_{r,s} = (V_s \setminus V_r) \cap (Q + R_a) \cap U(z_0)$. В силу леммы 4 (с естественными заменами и учетом (23)) при любом $t \in (r, s)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu(V_{r,t}) &= \int_{\text{gr } f(t, \cdot) \cap V_{r,s}} \frac{\partial f}{\partial t}(t, P_X^a \omega) d\mu_a^t(\omega) = \int_{\text{gr } f(t, \cdot) \cap V_{r,s}} \|F'\|^{-1} d\mu_{\Omega_t} \\ &= \int_{\Omega_t \cap V_{r,s}} \|F'\|^{-1} d\mu_{\Omega_t} = \rho(t, V_{r,s}) \end{aligned} \quad (24)$$

(здесь $\mu_a^t: \Sigma_{\text{gr } f(t, \cdot)} \rightarrow R^1$, $\mu_a^t(W) = D_a \mu\{\bigcup_{\lambda \leq 0} (W + \lambda a)\}$). В силу (23) второй член в (24) ограничен по t . Тогда функция $\{t \mapsto \mu(V_{r,t})\}$ абсолютно непрерывна на (r, s) . Вне отрезка $[r, s]$ функция $\{t \mapsto \rho(t, V_{r,s})\}$, очевидно, равна нулю. Отсюда и из (24) делаем два вывода: функция

$$R^1 \rightarrow R^1: t \mapsto \rho(t, V_{r,s}) \quad (25)$$

борелевская; справедливо равенство

$$\mu(V_{r,s}) = \int_r^s \rho(t, V_{r,s}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, V_{r,s}) dt = \nu(V_{r,s}). \quad (26)$$

В силу (23) полукольцо $\{V_{r,s}\}$ порождает σ -алгебру $\Sigma_{U(z_0)}$. Теперь, учитывая сепарабельность $U(z_0)$ и счетную аддитивность функции ρ по второму аргументу, из (25) получаем борелевость функции $R^1 \rightarrow R^1: t \mapsto \rho(t, E)$ для любого $E \in \Sigma_{U(z_0)}$ и счетную аддитивность функции ν на $\Sigma_{U(z_0)}$, а из (26) – равенство $\mu = \nu$ на $\Sigma_{U(z_0)}$. Но множества $U(z_0)$ образуют базу топологии пространства V , замкнутую относительно пересечений. Отсюда и из сепарабельности V последовательно получаем борелевость функции $R^1 \rightarrow R^1: t \mapsto \rho(t, E)$ для любого $E \in \Sigma_V$, счетную аддитивность функции ν и равенство $\mu = \nu$ на V . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Так как φ является μ -интегрируемой, то φ также ν -интегрируема (по лемме 7). По обобщенной теореме Фубини для переходных мер [30; гл. III, п. 2] и лемме 7 теперь имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_t} \varphi \|F'\|^{-1} d\mu_{\Omega_t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \varphi(z) \rho(t, dz) dt = \int_V \varphi d\nu = \int_V \varphi d\mu,$$

что и требовалось.

§ 3. Формула интегрирования по частям

Будем обозначать через V^0 , $\bar{V}$, ∂V внутренность, замыкание и границу множества $V \in \Sigma_Z$ соответственно. Точку $\omega_0 \in \partial V$ назовем *регулярной*, если существует открытая окрестность $U(\omega_0) \ni \omega_0$ такая, что множество $\partial V \cap U(\omega_0)$ имеет вид $G(X, A, a, f)$; совокупность всех регулярных точек обозначим через Ω_r и положим $\Omega_0 = \partial V \setminus \Omega_r$.

Ниже $a \in Z_0$, $\|a\| = 1$, X – некоторое топологическое дополнение R_a до Z , $\mu \in M^1$, $\Omega_a = \{\omega \in \Omega_r : (n(\omega), a) = 0\}$. Через Ω_n обозначим множество всех точек $\omega \in \Omega_r$, в которых существует внешняя (по отношению к V) единичная нормаль $n(\omega) \in Z_0^*$ (нормаль $n(\omega)$ называется *внешней*, если для любого вектора $b \in Z_0$, удовлетворяющего условию $(n(\omega), b) > 0$, существует $\varepsilon = \varepsilon(b) > 0$ такое, что при всех $\delta \in (0, \varepsilon)$ выполняются включения $\omega - \delta b \in V^0$, $\omega + \delta b \in Z \setminus \bar{V}$). Далее функция n считается равной нулю на множестве $\partial V \setminus \Omega_n$ (поскольку множество $\partial V \setminus \Omega_n$ замкнуто в ∂V , то функция n – борелевская).

ТЕОРЕМА 6 (формула интегрирования по частям). *Пусть множество ∂V есть поверхность, функция $u: \bar{V} \rightarrow R^1$ непрерывна, ограничена, на V^0 имеет непрерывную ограниченную производную по направлению a и такова, что функция $u(n, a): \partial V \rightarrow R^1$ является $\mu_{\partial V}$ -интегрируемой. Пусть еще выполнено условие*

$$|\mu|(\Omega_0 + R_a) = 0. \quad (27)$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_V D_a u \, d\mu + \int_V u \, dD_a \mu = \int_{\partial V} u(n, a) \, d\mu_{\partial V}. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $\mu \geq 0$. Вспоминая определение функций φ, ψ (см. § 1), видим, что на V^0 верно равенство

$$(D_a u)\mu + u D_a \mu = [D_a(u\varphi)](\mu_X \times l),$$

и по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_{V^0} D_a u \, d\mu + \int_{V^0} u \, dD_a \mu &= \int_{V^0} D_a(u\varphi) \, d(\mu_X \times l) \\ &= \int_X \int_{S_x^a(V^0)} D_a(u\varphi) \, dl \, d\mu_X(x) \\ &= \int_X \sum_{m=1}^{\infty} [u\varphi(x, t_m^x) - u\varphi(x, s_m^x)] \, d\mu_X(x), \end{aligned} \quad (29)$$

где (s_m^x, t_m^x) есть составляющие интервалы открытого множества $S_x^a(V^0)$. Отметим, что из предположений относительно u вытекает существование всех интегралов в (29); более того, фигурирующий в правой части ряд сходится абсолютно.

В [31] доказано включение $\Omega_a + R_a \subset \Sigma_Z$ и равенство $\mu(\Omega_a + R_a) = 0$. (Доказательство проводилось для банахова Z , однако банахова структура не использовалась, и доказательство проходит для сепарабельного пространства Фреше.)

Отсюда и из (27) получаем включение $X_0 = P_X^a(\Omega_0 \cup \Omega_a) \subset \Sigma_X$ и равенство $\mu_X(X_0) = 0$ (P_X^a есть проектор Z на X , параллельный a). Обозначим через δ_y меру Дирака на R_a , сосредоточенную в точке $y \in R_a$, и рассмотрим функцию $\rho: (X \setminus X_0) \times \Sigma_{R_a} \rightarrow [0, \infty]$ такую, что

$$\rho(x, E) = \sum_{y: (x, y) \in \Omega_n} |(u\varphi)(x, y)| \delta_y(E)$$

(ряд не более чем счетен). Из определения множеств Ω_r , Ω_a , X_0 вытекает, что если $x \in X \setminus X_0$, $z = x + y \in \partial V$, то существуют открытые в пространствах X , R_a окрестности $U(x)$, $U(y)$ точек x , y и функция $f: U(x) \rightarrow R_a$ такие, что

$$\partial V \cap [U(x) \times U(y)] = G(X, U(x), a, f). \quad (30)$$

Отсюда, из определения поверхности и сепарабельности Ω_n получаем существование простых непересекающихся поверхностей $Q_m \subset G(X, A_m, a, f_m)$, $m = 1, 2, \dots$, таких, что $\Omega_n \setminus (X_0 + R_a) = \bigcup_m Q_m$. Положим $\rho_m: (X \setminus X_0) \times \Sigma_{R_a} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\rho_m(x, E) = \mathbf{1}_{Q_m}(x, f_m(x)) |u\varphi(x, f_m(x))| \delta_{f_m(x)}(E).$$

Так как функция $g_{m,E}: Q_m \rightarrow [0, \infty]$,

$$g_{m,E}: (x, y) \mapsto |u\varphi(x, y)| \mathbf{1}_{(X+E) \cap Q_m}(x, y)$$

борелевская, а функция $P_X^a(Q_m) \rightarrow Q_m: x \mapsto (x, f_m(x))$ есть метрический изоморфизм пространств $P_X^a(Q_m)$ и Q_m , то функция $\rho_m(x, E) = g_{m,E}(x, f_m(x))$ борелевская по первому аргументу. Но тогда и $\rho = \sum_m \rho_m$ борелевская по первому аргументу. Так как ρ , очевидно, счетноаддитивна по второму аргументу, то ρ есть $([0, \infty]$ -значная) переходная мера из $X \setminus X_0$ в R_a , и мы вправе рассмотреть меру $\nu: \Sigma_{X \setminus X_0} \times \Sigma_{R_a} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\nu(B) = \int_{X \setminus X_0} \rho(x, S_x^a(B)) d\mu_X(x).$$

Положим $\nu_1 = |u(n, a)| \mu_{\partial V}$ и продолжим меру $\nu_1: \Sigma_{\partial V} \rightarrow R^1$ на Σ_Z , полагая $\nu_1(B) = \nu_1(B \cap \partial V)$. Сейчас наша цель – доказательство равенства

$$\nu[(X \setminus X_0) + R_a] = \nu_1[(X \setminus X_0) + R_a]. \quad (31)$$

Возьмем точку $z = x + y$, $x \in X \setminus X_0$, $y \in R_a$, и рассмотрим три случая.

1. $z \in \Omega_n$. Выберем окрестности $U(x)$, $U(y)$, фигурирующие в (30), и пусть $U_1 \subset U(x)$, $U_2 \subset U(y)$ есть открытые множества. Положим $W = \partial V \cap [(U_1 \cap (X \setminus X_0)) \times U_2]$. Учитывая определения мер ν , ν_1 , равенство (30) и применяя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \nu[(U_1 \cap (X \setminus X_0)) \times U_2] &= \int_{P_X^a W} |u\varphi|(x, f(x)) d\mu_X(x) = \int_W |u| d\mu_a \\ &= \int_W |u(n, a)| d\mu_{\partial V} = \nu_1[(U_1 \cap (X \setminus X_0)) \times U_2]. \end{aligned} \quad (32)$$

2. $z \in \Omega_r \setminus \Omega_n$. Тогда в формуле (30) окрестности $U(x), U(y)$ можно взять столь малыми, что $\partial V \cap [U(x) \times U(y)] \subset \Omega_r \setminus \Omega_n$, так что для любых открытых множеств $U_1 \subset U(x)$, $U_2 \subset U(y)$ правая часть в (32) есть нуль (напомним, что $n = 0$ на $\partial V \setminus \Omega_n$). Левая часть в (32) также есть нуль, ибо $[U(x) \times U(y)] \cap \Omega_n = \emptyset$.

3. $z \notin \partial V$. В силу замкнутости ∂V существуют окрестности $U(x), U(y)$ точек x, y такие, что $[U(x) \times U(y)] \cap \partial V = \emptyset$, так что для любых открытых множеств $U_1 \subset U(x)$, $U_2 \subset U(y)$ крайние члены в (32) обращаются в нуль.

Итак, для любой точки z пространства $(X \setminus X_0) + R_a$ существует открытый (в $(X \setminus X_0) + R_a$) прямоугольник $U(z) = [(U(x) \cap (X \setminus X_0)) \times U(y)] \ni z$ такой, что для любого открытого (в $(X \setminus X_0) + R_a$) прямоугольника $U_1 \times U_2 \subset U(z)$ выполняется равенство $\nu_1(U_1 \times U_2) = \nu(U_1 \times U_2)$. Отсюда, из счетной аддитивности мер ν , ν_1 и сепарабельности $(X \setminus X_0) + R_a$ вытекает (31).

Из (31), конечности меры ν_1 (предположение теоремы) и определения меры ν вытекает, что для μ_X -почти всех $x \in X \setminus X_0$ мера $\rho(x, \cdot)$ конечна; после переобозначений будем считать, что мера $\rho(x, \cdot)$ конечна для всех $x \in X \setminus X_0$. Но тогда корректно определена функция $\rho_0: (X \setminus X_0) \times \Sigma_{R_a} \rightarrow R^1$,

$$\rho_0(x, E) = \sum_{y: (x, y) \in \Omega_n} [\text{sign}(n(x+y), a)] (u\varphi)(x, y) \delta_y(E); \quad (33)$$

очевидно, эта функция счетноаддитивна по второму аргументу. Легко видеть, что для всех $x \in X \setminus X_0$ справедливо равенство

$$\rho_0(x, R^a) = \sum_{m=1}^{\infty} [u\varphi(x, t_m^x) - u\varphi(x, s_m^x)] \quad (34)$$

(см. (29)). Действительно, в силу абсолютной сходимости ряда в правой части (34) его сумма не зависит от перестановки членов. Если точка $z = (x, y) \in \Omega_r \setminus \Omega_n$ такова, что обе нормали $\pm n(z)$ являются внутренними относительно V , то для некоторых m, k верно $t_m^x = s_k^x$ и соответствующие члены в правой части (34) взаимно уничтожаются. За указанным исключением ряды (33), (34) перестановочно совпадают.

Аналогично, для любого интервала $I = (\alpha, \beta) \subset R_a$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_0(x, I) &= \rho_0(x, S_x^a(V^0 \cap (X + I))) = \sum_{m=1}^{\infty} [u\varphi(x, \bar{t}_m^x) - u\varphi(x, \bar{s}_m^x)] \\ &\quad + \mathbf{1}_{V(\alpha)}(x) (u\varphi)(x, \alpha) - \mathbf{1}_{V(\beta)}(x) (u\varphi)(x, \beta), \end{aligned} \quad (35)$$

где $(\bar{s}_m^x, \bar{t}_m^x)$ есть составляющие интервалы множества $S_x^a(V^0 \cap (X + I))$, $V(\gamma) = P_X^a[\bar{V} \cap (X + \gamma)]$, $\gamma \in R_a$, $\mathbf{1}_{V(\gamma)}$ — характеристическая функция множества $V(\gamma)$. Записывая равенство (29) с заменой V^0 на $V^0 \cap (X + I)$, видим, что функция $x \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} [u\varphi(x, \bar{t}_m^x) - u\varphi(x, \bar{s}_m^x)]$ является Σ_X -измеримой, так что с учетом (35) функция $x \mapsto \rho_0(x, I)$ является $\Sigma_{X \setminus X_0}$ -измеримой.

Итак, функция ρ_0 есть переходная мера. Поскольку для любого $x \in X \setminus X_0$ имеет место равенство $|\rho_0(x, \cdot)|(R_a) = \rho(x, R_a)$, а функция $x \mapsto \rho(x, R_a)$ является μ_X -интегрируемой (равенство (31)), то [26] корректно определена мера $\nu_0: \Sigma_{X \setminus X_0} \times \Sigma_{R_a} \rightarrow R^1$,

$$\nu_0(B) = \int_{X \setminus X_0} \rho_0(x, S_x^a(B)) d\mu_X(x), \quad (36)$$

см. [26]. Учитывая определение внешней нормали и проводя те же рассуждения, что и при доказательстве равенства (31), получим равенство

$$\nu_0[(X \setminus X_0) + R_a] = u(n, a)\mu_{\partial V}[(X \setminus X_0) + R_a]. \quad (37)$$

Левая часть (37) с учетом (36) (здесь $B = X \setminus X_0 + R_a$), (34), (29) и равенства $\mu_X(X_0) = 0$ равна левой части (29). Правая часть (37) равна правой части (28). Действительно,

$$\begin{aligned} u(n, a)\mu_{\partial V}(X_0 + R_a) &= u(n, a)\mu_{\partial V}[(\Omega_r \setminus \Omega_a) \cap (X_0 + R_a)] \\ &+ u(n, a)\mu_{\partial V}[\Omega_a \cap (X_0 + R_a)] + u(n, a)\mu_{\partial V}[\Omega_0 \cap (X_0 + R_a)]. \end{aligned}$$

Как уже указывалось выше, мера $u(n, a)\mu_{\partial V}$ равна нулю локально на $(\Omega_r \setminus \Omega_a) \cap (X_0 + R_a)$ и, следовательно, $u(n, a)\mu_{\partial V}[(\Omega_r \setminus \Omega_a) \cap (X_0 + R_a)] = 0$. Два оставшихся слагаемых равны нулю, так как $(n, a) = 0$. Теперь остается только заметить, что $u(n, a)\mu_{\partial V}(Z) = u(n, a)\mu_{\partial V}(\partial V)$.

Итак,

$$\int_{V^0} D_a u d\mu + \int_{V^0} u dD_a \mu = \int_{\partial V} u(n, a) d\mu_{\partial V}. \quad (38)$$

Так как ∂V есть поверхность, а мера μ дифференцируема по направлениям из Z_0 , то $\mu = 0$ локально на ∂V и, значит, $\mu(\partial V) = 0$. Отсюда и $|D_a \mu|(\partial V) = 0$ (так как $D_a \mu \ll \mu$). Таким образом, левая часть (38) равна левой части (28), и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема справедлива и при замене условия (25) условием $|\mu_{\partial V}|(\Omega_0) = 0$; доказательство, однако, усложняется.

§ 4. Формулы Гаусса–Остроградского и Грина

В оставшейся части работы $Z_0 = H$ есть сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_j\}$ – ортонормированный базис в H , $L(H)$, $L_1(H)$ – соответственно пространства линейных непрерывных и ядерных операторов из H в H . Предполагается, что $L(H)$ наделено равномерной нормой, $L_1(H)$ – ядерной нормой $\|\cdot\|_1$. Используются обозначения: $C^n(V, Y)$ – пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на открытом множестве $V \subset Z$, принимающих значения в нормированном пространстве Y и n раз непрерывно и ограничено дифференцируемых вдоль пространства H ; $C^n(\bar{V}, Y)$ – подпространство функций из $C^n(V^0, Y)$, производные которых порядка $0, \dots, n-1$ допускают непрерывное продолжение на множество $\bar{V}$ ($V \subset Z$).

Назовем множество $V \in \Sigma_Z$ μ -нормальным, если:

1) ∂V есть поверхность;

2) для любого $j = 1, 2, \dots$ равенство (25) выполняется с заменой a на e_j .

Далее до конца параграфа V есть μ -нормальное множество.

Пусть функция $b \in C^1(\overline{V}, H)$ такова, что $b'(z) \in L_1(H)$ при любом $z \in V^0$. Тогда корректно определена функция $\operatorname{div} b: V^0 \rightarrow R^1: z \mapsto \operatorname{Tr} b'(z)$. Положим по определению

$$\int_V b d\mu' = \sum_{j=1}^{\infty} \int_V (b, e_j) dD_{e_j} \mu, \quad (39)$$

если ряд справа сходится.

ТЕОРЕМА 7 (формула Гаусса–Остроградского). Пусть функция $V^0 \rightarrow R^1: z \mapsto \|b'(z)\|_1$ является μ -интегрируемой, функция $\|b\|: \partial V \rightarrow R^1$ является $\mu_{\partial V}$ -интегрируемой. Тогда все входящие в (40) интегралы существуют и справедливо равенство

$$\int_V \operatorname{div} b d\mu + \int_V b d\mu' = \int_{\partial V} (b, n) d\mu_{\partial V}. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (28) $a = e_j$, $u = (b, e_j)$ и складывая равенства по $j = 1, \dots, N$, получим

$$\int_V \sum_{j=1}^N (b' e_j, e_j) d\mu + \sum_{j=1}^N \int_V (b, e_j) dD_{e_j} \mu = \int_{\partial V} \sum_{j=1}^N (b, e_j) (n, e_j) d\mu_{\partial V}.$$

В силу соотношения $|\sum_{j=1}^N (b'(z) e_j, e_j)| \leq \|b'(z)\|_1$ [32; гл. VI, п. 6], неравенства Коши–Буняковского, предположений теоремы 7 и теоремы Лебега законен переход к пределу под знаком левого и правого интегралов. Отсюда вытекает существование среднего интеграла в (40) и само равенство (40). Теорема доказана.

Пусть $A \in C^1(\overline{V}, L(H))$, $b \in C^1(\overline{V}, H)$, $u \in C^2(\overline{V}, R^1)$, $\alpha \in C^0(V^0, R^1)$ таковы, что для любого $z \in V^0$ выполнены включения

$$(A^*(z)u'(z))' \in L_1(H), \quad (ub)'(z) \in L_1(H);$$

$$L^*u: V^0 \rightarrow R^1: z \mapsto \operatorname{div}[A^*(z)u'(z)] - \operatorname{div}(ub)(z) + \alpha(z)u(z).$$

ТЕОРЕМА 8 (первая формула Грина). Пусть функция $V^0 \rightarrow R^1: z \mapsto \|(A^*(z)u'(z))'\|_1$ является μ -интегрируемой, функция $\|A^*u'\|$ является $\mu_{\partial V}$ -интегрируемой. Тогда все входящие в (41) интегралы существуют и справедливо равенство

$$\int_V [L^*u + \operatorname{div} ub - \alpha u] d\mu + \int_V (A^*u') d\mu' = \int_{\partial V} D_{An} u d\mu_{\partial V}. \quad (41)$$

Доказательство получается из (40) с заменой b на A^*u' .

Запись второй формулы Грина сложнее; перейдем к соответствующим формулировкам. Далее предполагается, что мера μ дважды дифференцируема по H .

Заметим, что функция $a_{ij}: \bar{V} \rightarrow R^1: z \mapsto (e_i, A(z)e_j)$ ($\forall i, j$) принадлежит пространству $C^1(\bar{V}, R^1)$ и, следовательно, повторный ряд в правой части формального равенства

$$\int_V u d(\operatorname{div} A\mu') = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_V u D_{e_i} a_{ij} dD_{e_j} \mu + \int_V u a_{ij} dD_{e_i e_j}^2 \mu \right] \quad (42)$$

корректно определен. Если этот ряд сходится и сходится ряд (39) с заменой b на ub , то положим по определению

$$\int_V u dL\mu = \int_V u d(\operatorname{div} A\mu') + \int_V ub d\mu' + \int_V \alpha d\mu.$$

Пусть для любого $j = 1, 2, \dots$ функция $u(A^*n, e_j): \partial V \rightarrow R^1$ является $(D_{e_j}\mu)_{\partial V}$ -интегрируемой. Положим по определению

$$\int_{\partial V} u dD_{A^*n}\mu_{\partial V} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial V} u(A^*n, e_j) d(D_{e_j}\mu)_{\partial V}, \quad (43)$$

если ряд справа сходится.

ТЕОРЕМА 9 (вторая формула Грина). *Предположим, что функции $\|u''(z)\|_1$, $\|(ub)''(z)\|_1$, $\|(A^*u')'(z)\|_1$ являются μ -интегрируемыми, функции $\|u'(z)\|$, $\|ub(z)\|$, $\|A^*u'(z)\|$ являются $\mu_{\partial V}$ -интегрируемыми, функция $u(z)\|A(z)\|$ является $(D_{e_j}\mu)_{\partial V}$ -интегрируемой для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда если сходится хотя бы один из рядов (42), (43), то все входящие в (44) интегралы существуют и справедливо равенство*

$$\int_V L^* u d\mu - \int_V u dL\mu = \int_{\partial V} [D_{A^*n}u - u(b, n)] d\mu_{\partial V} - \int_{\partial V} u dD_{A^*n}\mu_{\partial V}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что соотношение $a_{ij}D_{e_j}\mu \ll \mu$ влечет выполнение (27) с заменой $|\mu|_X$ на $|a_{ij}D_{e_j}\mu|_X$. Пользуясь теперь теоремой 6, заменяя в (28) a на e_i , μ на $a_{ij}D_{e_j}\mu$ и суммируя по индексам i, j , получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \int_V a_{ij} D_{e_j} u dD_{e_j} \mu + \left[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \left(\int_V u D_{e_i} a_{ij} dD_{e_j} \mu + \int_V u a_{ij} dD_{e_i e_j}^2 \mu \right) \right] \\ = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \int_{\partial V} u(n, e_i) a_{ij} d(D_{e_j}\mu)_{\partial V}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из условия на A , u и теоремы Лебега находим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \int_V a_{ij} D_{e_i} u dD_{e_j} \mu = \sum_{j=1}^k \int_V (A^*u', e_j) dD_{e_j} \mu.$$

Из теоремы 7 теперь вытекает существование интеграла

$$\int_V A^* u' d\mu' = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_V (A^* u', e_j) dD_{e_j} \mu. \quad (46)$$

Из условия $(D_{e_j} \mu)_{\partial V}$ -интегрируемости функции $u \|A\|$ и теоремы Лебега получаем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \int_{\partial V} u(n, e_i) a_{ij} d(D_{e_j} \mu)_{\partial V} = \sum_{j=1}^k u(A^* n, e_j) d(D_{e_j} \mu)_{\partial V}. \quad (47)$$

Итак, всегда существует предел по m выражения, стоящего в квадратных скобках в (45). Теперь из (47) и (46) получаем, что сходимость ряда (42) эквивалентна сходимости ряда (43). В случае наличия такой сходимости (45) и (46) дают равенство

$$\int_V A^* u' d\mu' + \int_V u d(\operatorname{div} A\mu') = \int_{\partial V} u dD_{A^* n} \mu_{\partial V}.$$

Теперь (44) вытекает из (41) и (40) (здесь нужно заменить b на ub). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 7–9 справедливы и при замене условия μ -нормальности множества V условием $|\mu|_{\partial V}(\Omega_0) = 0$.

Список литературы

1. Кио Н. Н. Integration theory on infinite-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. № 159. P. 57–78.
2. Goodman V. A givergence theorem for Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. № 164. P. 411–426.
3. Го Х. С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.
4. Скорород А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.
5. Угланов А. В. Дифференциальные уравнения второго порядка для функций бесконечномерного аргумента // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 1. С. 44–47.
6. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в банаховом пространстве // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 189–217.
7. Ефимова Е. И., Угланов А. В. Формулы векторного анализа на банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 6. С. 1302–1307.
8. Далецкий Ю. Л., Марянин Б. Д. Гладкие меры на бесконечномерных многообразиях // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1297–1300.
9. Смолянов О. Г. Потoki де Рама и формула Стокса в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 3. С. 554–558.
10. Норин Н. В. Стохастические интегралы и дифференцируемые меры // Теория вероятн. и ее прим. 1987. Т. 32. № 1. С. 114–124.
11. Airault H., Malliavin P. Intégration géométrique sur l'espace de Wiener // Bull. Sci. Math. 1988. V. 112. № 1. P. 3–52.
12. Смородина Н. В. Формула Гаусса–Остроградского для пространства конфигураций // Теория вероятн. и ее прим. 1990. Т. 35. № 4. С. 727–739.
13. Bogachev V. I. Smooth measures, the Malliavin calculus and approximations in infinite-dimensional spaces // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1990. V. 31. № 2. P. 9–23.
14. Угланов А. В. О сингулярных обобщенных функциях бесконечномерного аргумента // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 4. С. 543–551.

15. Угланов А. В. Поверхностные интегралы и дифференциальные уравнения на бесконечномерном пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. №6. С. 1331–1335.
16. Угланов А. В. О делении обобщенных функций бесконечного числа переменных на полиномы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. №5. С. 1096–1099.
17. Беляев А. А. Теорема о среднем для функций, гармонических в области гильбертова пространства // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. №5. С. 32–35.
18. Норин Н. В. Тепловые потенциалы на гильбертовом пространстве // Матем. заметки. 1984. Т. 35. №4. С. 531–548.
19. Норин Н. В. Аналитичность бесконечномерных тепловых потенциалов // Матем. заметки. 1985. Т. 35. №4. С. 365–374.
20. Угланов А. В. Интегральное представление функций на банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 292. №4. С. 800–804.
21. Норин Н. В. Теорема о среднем, связанная с бесконечномерными тепловыми потенциалами // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1987. №48. С. 111–117.
22. Угланов А. В. О гладкости распределений функционалов от случайных процессов // Теория вероятн. и ее прим. 1988. Т. 23. №2. С. 535–544.
23. Угланов А. В. Формула Ньютона–Лейбница на банаховом пространстве и приближение функций бесконечномерного аргумента // Изв. АН СССР. 1987. Т. 51. №1. С. 152–170.
24. Uglanov A. V. Integrals with respect to vector-valued measures: theoretical problems and applications // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 163. P. 171–184.
25. Uglanov A. V. Calculus of variations on banach spaces // Internat. Conf. “Modern Banach Space Theory”. Abstracts: Kent Univ. Publ., 1996.
26. Угланов А. В. Теорема Фубини для векторных мер // Матем. сб. 1990. Т. 181. №3. С. 423–432.
27. Угланов А. В. Вариационные задачи на абстрактном банаховом пространстве // Докл. АН. (в печати).
28. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
29. Угланов А. В. Частное гладких мер есть гладкая функция // Изв. вузов. Сер. матем. 1989. №9. С. 72–76.
30. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
31. Ефимова Е. И. О теореме Сарда на банаховом пространстве // Изв. вузов. Сер. матем. 1988. №9. С. 37–39.
32. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию
8.01.1998