Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Эйдерман, Оценки картановского типа для потенциалов с ядром Коши и с действительными ядрами, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 8, 115–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:43:09

УДК 517.535+517.544.5+517.547.73

В. Я. Эйдерман

Оценки картановского типа для потенциалов с ядром Коши и с действительными ядрами

Пусть ν – (комплексная) мера Радона в $\mathbb{C}$ с компактным носителем и конечной вариацией, и пусть

$$\mathcal{C}_*\nu(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z} \right|$$

– максимальное преобразование Коши. Получены оценки h -обхвата по Хаусдорфу множества $\mathcal{Z}^*(\nu, P) = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{C}_*\nu(z) > P\}$, где h – измеряющая функция и $P > 0$ – заданное число. Показано, что эти оценки неулучшаемы с точностью до значений входящих в них абсолютных постоянных. Аналогичная задача рассмотрена также для потенциалов с произвольными действительными невозрастающими ядрами и положительными мерами в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. В качестве приложения развитого аппарата получены результаты о связи аналитической емкости и меры Хаусдорфа (в частности, аналог теоремы Фростмана о классических емкостях).

Библиография: 37 названий.

Введение

Основной целью настоящей работы является получение метрических оценок множества точек из $\mathbb{C}$, в которых модуль потенциала Коши превосходит заданное число $P > 0$, а также получение оценок множеств из $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, на которых потенциалы с действительными ядрами и положительными мерами в $\mathbb{R}^m$ больше P .

Определим изучаемые множества более точно. Неотрицательная борелевская мера ν в метрическом пространстве X называется радоновской, если выполнены следующие условия (см. [1; с. 9]):

- (1) $\nu(E) < \infty$ для компактов $E \subset X$;
- (2) $\nu(V) = \sup\{\nu(E) : E \subset V, E \text{ – компакт}\}$ для открытых множеств $V \subset X$;
- (3) $\nu(A) = \inf\{\nu(V) : A \subset V, V \text{ – открытое множество}\}$ для $A \subset X$.

В $\mathbb{R}^m$ указанные свойства равносильны тому, что ν является локально конечной регулярной борелевской мерой. Комплексная мера ν называется радоновской, если ее вариация $|\nu|$ радоновская.

Пусть в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана комплексная радоновская мера ν с компактным носителем, для которой $\|\nu\| := |\nu|(\mathbb{C}) < \infty$. Потенциал (преобразование) Коши $\mathcal{C}\nu(z)$ этой меры определяется равенством

$$\mathcal{C}\nu(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01021).

задающим функцию $\mathcal{C}\nu(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \text{supp } \nu$ и п.в. в $\mathbb{C}$ относительно плоской меры. Чтобы говорить о значениях потенциала (возможно бесконечных) всюду в $\mathbb{C}$, рассматривается “срезанное” преобразование Коши

$$\mathcal{C}_\varepsilon \nu(z) = \int_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z}$$

и полагается $\mathcal{C}_* \nu(z) = \sup_{\varepsilon > 0} |\mathcal{C}_\varepsilon \nu(z)|$. Для заданного числа $P > 0$ введем множества

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\nu, P) &= \{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{C}\nu(z)| > P\}, \\ \mathcal{Z}^*(\nu, P) &= \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{C}_* \nu(z) > P\}. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Очевидно, $\mathcal{Z}(\nu, P) \subset \mathcal{Z}^*(\nu, P)$.

Далее, рассмотрим неотрицательную меру μ в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, с $\mu(\mathbb{R}^m) < \infty$. Пусть $K(t)$ – невозрастающая непрерывная функция на интервале $(0, \infty)$ такая, что $K(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0+$. Определим потенциал

$$U_K^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(|x - y|) d\mu(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^m,$$

и для заданного числа P (не обязательно положительного) введем множество

$$\mathcal{X}(\mu, P, K) = \{x \in \mathbb{R}^m : U_K^\mu(x) > P\}. \quad (0.2)$$

Для описания размеров изучаемых множеств возьмем непрерывную возрастающую при $t \geq 0$ функцию $h(t)$, для которой $h(0) = 0$ (такие функции называются *измеряющими*). Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное множество. Мера Хаусдорфа $\Lambda_h(E)$ определяется равенством

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{r_i \leq \rho} \sum_i h(r_i) \right\},$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества E не более чем счетными наборами шаров с радиусами r_i , не превосходящими ρ .

Следующая характеристика ограниченного множества E – *h-обхват по Хаусдорфу* – в отличие от меры Хаусдорфа, будет всегда конечной:

$$M_h(E) = \inf \sum_i h(r_i),$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества E не более чем счетными наборами шаров. Существенно отметить, что величины $\Lambda_h(E)$ и $M_h(E)$ обращаются в нуль одновременно.

Наша основная задача – получить оценки *h-обхвата* по Хаусдорфу множеств, определенных в (0.1) и (0.2), окончательные с точностью до значений входящих в эти оценки постоянных, зависящих, возможно, только от размерности m . При этом основное внимание уделяется множествам из (0.1). Отметим, что, несмотря на аналогию между определениями множеств $\mathcal{Z}(\nu, P)$, $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$ и множества $\mathcal{X}(\mu, P, K)$, оценки размеров этих множеств получаются совершенно разными методами. Оценки для $\mathcal{X}(\mu, P, K)$ выводятся либо методом Картана, либо с использованием леммы Безиковича о покрытии. Вывод оценок для множеств $\mathcal{Z}(\nu, P)$ и $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$ значительно сложнее; он опирается на

глубокие результаты Мельникова, Толсы, Назарова, Трейля и Вольберга, полученные ими в связи с развитием теории аналитической емкости (краткая история вопроса приводится ниже в параграфах, посвященных соответствующим задачам).

Мы начинаем с более простой и более изученной задачи об оценке размеров множеств $\mathcal{X}(\mu, P, K)$ (§§ 1–2). Далее устанавливаются оценки размеров множеств $\mathcal{X}^*(\nu, P)$ и $\mathcal{X}(\nu, P)$ (§§ 3–11). Используемые здесь методы применяются к задаче сравнения h -обхвата по Хаусдорфу и аналитической емкости (§ 12). В качестве следствия мы получаем теорему о связи аналитической емкости и меры Хаусдорфа, являющуюся аналогом классической теоремы Фростмана о связи емкостей, порожденных потенциалами с положительными ядрами, и меры Хаусдорфа Λ_h .

Результаты, относящиеся к множествам $\mathcal{X}(\nu, P)$ и $\mathcal{X}^*(\nu, P)$, были анонсированы в [2].

В дальнейшем через $B(x, r)$ будем обозначать шар $\{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$, а через C – положительные постоянные, зависящие, возможно, только от размерности m , не обязательно одни и те же в каждом случае. Константы, не меняющие своих значений, будем снабжать индексами. Для открытого круга комплексной плоскости будем использовать также обозначение $D(z, r)$.

Настоящая работа посвящается светлой памяти моего учителя Семена Яковлевича Хавинсона в связи с 80-летием со дня его рождения.

§ 1. Оценки потенциалов с действительными ядрами

Оценки потенциалов с убывающими ядрами имеют важное значение для различных задач анализа, и литература, в той или иной степени посвященная таким оценкам, чрезвычайно обширна. По-видимому, первым результатом в этом направлении является классическая лемма Картана [3; с. 272–276] об оценке снизу модуля многочлена, которую можно трактовать как оценку логарифмического потенциала с дискретной мерой, целочисленные заряды которой находятся в нулях многочлена и равны кратностям этих нулей. Впоследствии метод Картана применялся различными авторами к оценке потенциалов и с ядрами Рисса, и с произвольными мерами; укажем здесь работы Альфорса [4], Валирона [5; с. 11–12], Макинтайра и Фукса [6], Говорова [7], Меймана [8] (список далеко не полон). При этом использовались и более деликатные характеристики множества $\mathcal{X}(\mu, P, K)$. А именно, вместо суммы радиусов покрывающих кругов (как в [3]) оценивалась сумма $\sum_k h(r_k)$, где h – та или иная измеряющая функция.

Наряду с методом Картана применяется и другой метод, идущий, по-видимому, от Хеймана [9]. Близкий подход использовался Ландкофом [10]. Хотя метод Картана позволяет в ряде случаев точнее оценивать константы, входящие в получаемые неравенства (см. [7], а также замечание 1.4 настоящей работы), но второй подход является более простым. Поскольку мы не ставим перед собой задачу об отыскании наилучших значений постоянных, входящих в наши утверждения, то будем пользоваться вторым методом.

Нужные нам оценки вытекают из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\|\mu\| := \mu(\mathbb{R}^m) < \infty$, и пусть $h(t)$ – измеряющая функция, нормированная условием

$$h(r_0) = \|\mu\|, \quad r_0 > 0.$$

Тогда множество G точек, где выполнено неравенство

$$U_K^\mu(x) > \int_0^{r_0} K(t) dh(t), \quad (1.1)$$

можно покрыть не более чем счетной системой шаров $B_k = B(x_k, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, для которых $r_k \leq r_0$ и

$$\sum_k h(r_k) < A_m \|\mu\| = A_m h(r_0), \quad (1.2)$$

где A_m – число, зависящее только от размерности пространства m . При этом кратность покрытия не превосходит A_m и для каждого шара B_k будет $h(r_k) < \mu(B_k)$.

Если, кроме того, мера μ состоит из N точечных атомов и число r'_0 определяется равенством

$$h(r'_0) = \frac{\|\mu\|}{N}, \quad (1.3)$$

то для множества G точек, в которых

$$U_K^\mu(x) > h(r'_0)K(r'_0) + \int_{r'_0}^{r_0} K(t) dh(t), \quad (1.4)$$

существует покрытие шарами $B(x_k, r_k)$ с

$$\sum_k h(r_k) < (A_m + 1)\|\mu\| = (A_m + 1)h(r_0). \quad (1.5)$$

Первая часть теоремы [А](#) в случае степенных и логарифмических ядер была получена Ландкофом [10; гл. III, § 4, теорема 3.15]. Доказательство этого утверждения для более общего класса неотрицательных ядер имеется в [11]. По существу, оно повторяет рассуждение из [10]. Схема этого доказательства применяется в целом ряде работ и в настоящее время является стандартной. Бесконечномерный аналог рассматриваемого утверждения установлен в [12]. Доказательство второй части основано на том же подходе, что и в [10], [11].

Отметим, что если интеграл в (1.1) расходится, то первая часть теоремы [А](#) тривиальна, поскольку множество G в этом случае будет пустым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. Назовем точку $x \in \mathbb{R}^m$ *нормальной* (относительно μ), если неравенство $\mu(B(x, r)) \leq h(r)$ выполняется для всех $r < r_0$. Множество точек, не являющихся нормальными, обозначим G_1 . Для каждой точки $x \in G_1$ найдется число $r = r(x) < r_0$ такое, что $h(r) < \mu(B(x, r))$. Мы получаем покрытие множества G_1 шарами. Применяя лемму Безиковича [1; с. 30], [13; с. 2–6], [10; гл. III, § 4, лемма 3.2], выделим не более чем счетное подпокрытие кратности не выше A_m . Обозначим шары этого подпокрытия через $B_k^{(1)} = B(x_k^{(1)}, r_k^{(1)})$.

Если, кроме того, мера μ состоит из N точечных атомов, расположенных в точках w_k , $k = 1, \dots, N$, то возьмем второе семейство шаров $B_k^{(2)} = B(w_k, r'_0)$ с одинаковыми радиусами r'_0 , где r'_0 – число, определенное равенством (1.3). Очевидно, $\mu(B(x, t)) = 0$ при $x \notin \bigcup_k B_k^{(2)}$ и $0 \leq t < r'_0$.

Покажем, что

$$G \subset G_2 := \left(\bigcup_k B_k^{(1)} \right) \cup \left(\bigcup_k B_k^{(2)} \right).$$

Возьмем $x \notin G_2$. Пусть

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} K(r)(\mu(B(x, r)) - \|\mu\|) > 0.$$

Так как

$$U_K^\mu(x) = \int_0^\infty K(r) d\mu(B(x, r)),$$

то $U_K^\mu(x) = -\infty$. Следовательно (см. (1.1), (1.4)), $x \notin G$. Предположим теперь, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} K(r)(\mu(B(x, r)) - \|\mu\|) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} K(r)(\mu(B(x, r)) - h(r_0)) \leq 0$$

(отметим, что на самом деле этот предел не может быть отрицательным, поскольку $\lim_{r \rightarrow \infty} K(r) < +\infty$ и $\mu(B(x, r)) - \|\mu\| \rightarrow 0-$). Интегрируя по частям, при $x \notin G_2$ имеем

$$\begin{aligned} U_K^\mu(x) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r K(t) d\mu(B(x, t)) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[K(r)\mu(B(x, r)) - \int_{r'_0}^r \mu(B(x, t)) dK(t) \right] \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left[K(r)\mu(B(x, r)) - \int_{r'_0}^{r_0} h(t) dK(t) + h(r_0)(K(r_0) - K(r)) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[K(r)(\mu(B(x, r)) - h(r_0)) + h(r'_0)K(r'_0) + \int_{r'_0}^{r_0} K(t) dh(t) \right] \\ &\leq h(r'_0)K(r'_0) + \int_{r'_0}^{r_0} K(t) dh(t). \end{aligned}$$

Значит, $G \subset G_2$. Оценим радиусы шаров, образующих G_2 :

$$\begin{aligned} \sum_k h(r_k^{(1)}) + Nh(r'_0) &< \sum_k \mu(B(x_k^{(1)}, r_k^{(1)})) + Nh(r'_0) \\ &\leq A_m \|\mu\| + Nh(r'_0) = (A_m + 1)\|\mu\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Фактически мы доказали и первую часть теоремы А. Для произвольной меры следует ограничиться шарами $B_k^{(1)}$ и заметить, что в силу сходимости интеграла из (1.1) $h(t)K(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1: μ – произвольная неотрицательная мера в $\mathbb{R}^m$, $\|\mu\| < \infty$, а ядро K и измеряющая функция h удовлетворяют условию

$$\int_0 K(t) dh(t) < \infty. \quad (1.6)$$

Случай 2: мера μ состоит из конечного числа N точечных положительных зарядов, но условие (1.6) отсутствует.

В случае 1 при фиксированных $\|\mu\|$ и P рассмотрим следующее уравнение относительно r_0 :

$$h(r_0) = \frac{\|\mu\|}{P} \int_0^{r_0} K(t) dh(t). \quad (1.7)$$

В случае 2 будем находить r_0 из уравнения

$$h(r_0) = \frac{\|\mu\|}{P} \left(h(r'_0)K(r'_0) + \int_{r'_0}^{r_0} K(t) dh(t) \right), \quad (1.8)$$

где r'_0 определяется равенством $h(r'_0) = h(r_0)/N$. Случай 1 можно рассматривать как результат предельного перехода в случае 2 при $N \rightarrow \infty$.

Отметим важные достаточные условия, при которых уравнения (1.7), (1.8) имеют решения. А именно, предположим, что $h(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (будем писать $h(\infty) = \infty$), $P > 0$ и $K(\infty) \leq 0$. Пусть

$$\hat{h}(r) = \begin{cases} h(r) \left[\int_0^r K(t) dh(t) \right]^{-1} & \text{в случае 1,} \\ h(r) \left[h(r')K(r') + \int_{r'}^r K(t) dh(t) \right]^{-1}, \quad \text{где } h(r') = \frac{h(r)}{N}, & \text{в случае 2.} \end{cases}$$

Очевидно, $\hat{h}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0+$. С другой стороны, $\sup_{r>0} \hat{h}(r) = \infty$. Отсюда и следует существование решений уравнений (1.7), (1.8).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть уравнения (1.7), (1.8) в случаях 1 и 2 соответственно имеют решение r_0 . Тогда множество $\mathcal{X}(\mu, P, K)$, определенное в (0.2), можно покрыть не более чем счетной системой шаров $B(x_k, r_k)$, для которых $r_k \leq r_0$ и

$$\sum_k h(r_k) < C_1 h(r_0), \quad (1.9)$$

где $C_1 = A_m$ в случае 1 и $C_1 = A_m + 1$ в случае 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$h_0(t) = \begin{cases} Ph(t) \left[\int_0^{r_0} K(t) dh(t) \right]^{-1} & \text{в случае 1,} \\ Ph(t) \left[h(r'_0)K(r'_0) + \int_{r'_0}^{r_0} K(t) dh(t) \right]^{-1} & \text{в случае 2.} \end{cases}$$

Очевидно, $h_0(r_0) = \|\mu\|$. Применим теперь теорему A, в которой вместо функции h возьмем h_0 . Тогда (1.1), (1.4) равносильны неравенству

$$U_K^\mu(x) > P.$$

Оценки (1.2), (1.5) с h_0 вместо h немедленно приводят к соотношениям

$$\sum_k h_0(r_k) < C_1 \|\mu\| = C_1 h_0(r_0),$$

где $C_1 = A_m$ и $C_1 = A_m + 1$ соответственно, из которых сразу следует (1.9).

Рассмотрим важные частные случаи, когда уравнения (1.7), (1.8) удается решить в явном виде.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть μ – конечная мера в $\mathbb{R}^m$. Для любых чисел α и d , $0 < \alpha < d$, и любого $P > 0$ множество

$$\mathcal{X}(\mu, P, t^{-\alpha}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \int_{\mathbb{R}^m} |x - y|^{-\alpha} d\mu(y) > P \right\}$$

можно покрыть не более чем счетной системой шаров $B(x_k, r_k)$, для которых

$$\sum_k r_k^d < C_1 \left(\frac{d}{d-\alpha} \right)^{d/\alpha} \left(\frac{\|\mu\|}{P} \right)^{d/\alpha}, \quad 0 < \alpha < d. \quad (1.10)$$

Если, кроме того, мера μ состоит из N точечных зарядов, то найдется такое покрытие множества $\mathcal{X}(\mu, P, t^{-\alpha})$, что

$$\sum_k r_k^d < C_1 \left(\frac{\alpha}{\alpha-d} N^{(\alpha-d)/d} - \frac{d}{\alpha-d} \right)^{d/\alpha} \left(\frac{\|\mu\|}{P} \right)^{d/\alpha}, \quad \alpha > d, \quad (1.11)$$

$$\sum_k r_k^d < C_1 (1 + \ln N) \frac{\|\mu\|}{P}, \quad \alpha = d. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $h(t) = t^d$, $K(t) = t^{-\alpha}$ и $0 < \alpha < d$ уравнение (1.7) принимает вид

$$r_0^d = \frac{d}{d-\alpha} \frac{\|\mu\|}{P} r_0^{d-\alpha}, \quad \text{откуда } r_0 = \left(\frac{d}{d-\alpha} \frac{\|\mu\|}{P} \right)^{1/\alpha}.$$

Теперь неравенство (1.10) сразу следует из (1.9).

В случае 2 и $\alpha \neq d$ имеем $r'_0 = r_0 N^{-1/d}$, и соотношение (1.8) равносильно равенству

$$r_0^d = \frac{\|\mu\|}{P} \left[r_0^{d-\alpha} N^{(\alpha-d)/d} + \frac{d}{d-\alpha} r_0^{d-\alpha} (1 - N^{(\alpha-d)/d}) \right],$$

откуда

$$r_0 = \left(\frac{\|\mu\|}{P} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha-d} N^{(\alpha-d)/d} - \frac{d}{\alpha-d} \right)^{1/\alpha}.$$

Это равенство вместе с (1.9) дает (1.11).

Оценка (1.12) сразу следует из (1.9) и равенства (1.8), принимающего вид

$$r_0 = \frac{\|\mu\|}{P} \left(1 + \ln \frac{r_0^d}{(r'_0)^d} \right) = \frac{\|\mu\|}{P} (1 + \ln N).$$

Аналогично доказывается и соответствующее утверждение для логарифмического потенциала.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть μ – конечная мера в $\mathbb{R}^m$. Для любых положительных чисел P и d множество

$$\mathcal{X} \left(\mu, P, \ln^+ \frac{1}{t} \right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \int_{\mathbb{R}^m} \ln^+ \frac{1}{|x-y|} d\mu(y) > P \right\}$$

можно покрыть не более чем счетной системой шаров $B(x_k, r_k)$, для которых

$$\sum_k r_k^d < A_m e^{1-Pd/\|\mu\|}, \quad d \geq \frac{\|\mu\|}{P}, \quad (1.13)$$

$$\sum_k r_k^d < A_m \frac{\|\mu\|}{Pd}, \quad d < \frac{\|\mu\|}{P}. \quad (1.14)$$

Кроме того, для любых чисел $d > 0$ и $P \in \mathbb{R}$ (в том числе отрицательных) найдется покрытие множества $\mathcal{X}(\mu, P, \ln \frac{1}{t})$ такое, что

$$\sum_k r_k^d < A_m e^{1-Pd/\|\mu\|}. \quad (1.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $h(t) = t^d$, $K(t) = \ln^+ \frac{1}{t}$ уравнение (1.7) дает

$$r_0^d = \begin{cases} \frac{\|\mu\|}{P} r_0^d \left(\ln \frac{1}{r_0} + \frac{1}{d} \right), & 0 < r_0 \leq 1, \\ \frac{\|\mu\|}{Pd}, & r_0 > 1. \end{cases}$$

Отсюда и из (1.9) получаем (1.13), (1.14). Вторая часть утверждения также вытекает непосредственно из (1.7), (1.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Классическая лемма Картана [3] равносильна (1.15) с $d = 1$, $m = 2$, $A_m = 2$ и мерой μ , состоящей из N единичных зарядов. Применяемый нами метод дает $A_m = 6$ (см. замечание после доказательства леммы 3.2 в [10; гл. III, § 4]). В дальнейшем мы не будем отслеживать значения возникающих постоянных.

Неравенства (1.10), (1.15) были, по существу, ранее выведены Ландкофом [10], и наш метод аналогичен примененному в [10]. Однако вместо множителя $(d/(d-\alpha))^{d/\alpha}$ в (1.10) соответствующее неравенство (3.4.5) из [10; гл. III, § 4, следствие 1] имеет множитель e . Это расхождение возникло из-за некорректного перехода к неравенству (3.4.5) в [10]: множитель $(\beta/(\alpha+\beta-p))^{\beta/(p-\alpha)}$ нельзя заменить числом e , если величина $p-\alpha$ достаточно близка к β (здесь мы использовали обозначения из [10]).

Другим методом аналог неравенства (1.10) получен Хейманом и Кеннеди [14; § 3.10, лемма 3.10], причем без явного указания на то, как именно зависит от d и α множитель при $(\|\mu\|/P)^{d/\alpha}$ в правой части (1.10). Частные случаи следствия 1.2 отмечались также в [6; теорема 1].

Исследуем точность полученных оценок.

§ 2. О точности оценок из § 1

В настоящем параграфе мы покажем, что при определенных условиях регулярности функции $h(t)$ полученные выше оценки неулучшаемы с точностью до значений входящих в них постоянных, зависящих только от m . Начнем с вопроса о точности теоремы А. В случае 1 эта задача была исследована в [11]. Для рассмотрения случая 2 мы несколько модифицируем построения из [11]. Одновременно мы получим некоторые предварительные результаты и для исследования потенциала Коши.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию

$$h(t_1)t_1^{-m} \geq h(t_2)t_2^{-m} \quad \text{для любых } 0 < t_1 \leq t_2. \quad (2.1)$$

Тогда для любого неотрицательного ядра $K(t)$ и любых чисел $N \in \mathbb{Z}_+$ и $r_0 > 0$ найдутся компакт F , мера μ , состоящая из N равных зарядов величины

$h(r_0)/N$, и числа C_2, C_3 со следующими свойствами:

$$U_K^\mu(x) > C_2 \left[h(r'_0)K(r'_0) + \int_{r'_0}^{r_0} K(t) dh(t) \right], \quad \forall x \in F, \quad (2.2)$$

$$M_h(F) > C_3 h(r_0), \quad (2.3)$$

где, как и ранее, $h(r'_0) = h(r_0)/N$, а постоянные C_2, C_3 зависят только от m .

Очевидно, теорема 2.1 иллюстрирует точность теоремы A и в случае 1 (нужно лишь взять N достаточно большим). Необходимость того или иного условия регулярности функции h следует из того, что если $\lim_{t \rightarrow 0+} h(t)t^{-m} = 0$, то $M_h(\mathbb{R}^m) = 0$ и, следовательно, условие (2.3) выполняться не может ни для какого множества F . В [11] изучен вопрос о том, насколько можно ослабить условие (2.1) в случае 1. Можно провести подобное исследование и для случая 2. Здесь мы такую задачу не рассматриваем.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1, после чего проиллюстрируем точность и других результатов из § 1.

Всюду в дальнейшем через $\#A$ обозначается число элементов множества A .

Все примеры настоящей работы, иллюстрирующие точность наших оценок (и для потенциалов с действительными ядрами, и для потенциала Коши), основаны на построении подходящих множеств канторовского типа.

Пусть задана последовательность положительных чисел $\{l_j\}_{j=0}^\infty$ такая, что $2l_{j+1} \leq l_j$, $j \geq 0$. Возьмем некоторый отрезок $E^{(0)} \subset \mathbb{R}^1$ длины l_0 . От концов этого отрезка внутрь $E^{(0)}$ отложим отрезки $E_j^{(1)}$, $j = 1, 2$, длины которых равны l_1 . Обозначим $E^{(1)} = E_1^{(1)} \cup E_2^{(1)}$. Возможно, что $E^{(0)} = E^{(1)}$, но пересечение $E_1^{(1)} \cap E_2^{(1)}$ может состоять лишь из одной точки (либо оказаться пустым). Далее, на каждом отрезке $E_j^{(1)}$ аналогичным образом расположим два отрезка $E_{j,i}^{(2)}$ длины l_2 . Объединение полученных четырех отрезков $E_{j,i}^{(2)}$ обозначим через $E^{(2)}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность множеств $E^{(n)}$, причем $E^{(n)}$ состоит из 2^n отрезков длины l_n . Обозначим

$$E_n = \underbrace{E^{(n)} \times \dots \times E^{(n)}}_{m \text{ раз}}.$$

Очевидно, E_n состоит из 2^{mn} кубов, которые мы обозначим $E_{n,k}$, $k = 1, \dots, 2^{mn}$. Через $z_{n,k}$ обозначается центр куба $E_{n,k}$.

Возьмем произвольные числа $l_0 > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, измеряющую функцию h , удовлетворяющую условию (2.1), и определим числа l_j , $j = 1, \dots, n$, из равенств

$$h(l_j) = 2^{-mj} h(l_0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Согласно (2.1)

$$\left(\frac{l_{j+1}}{l_j} \right)^m \leq \frac{h(l_{j+1})}{h(l_j)} = 2^{-m},$$

т.е. $l_{j+1} \leq \frac{1}{2} l_j$. Поэтому можно построить соответствующее множество E_n .

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое множество кубов $E_{n,k}$ такое, что $\#\mathcal{E} \geq \delta 2^{mn}$ с некоторой положительной постоянной $\delta \leq 1$. Для заданного $\varepsilon > 0$ определим множество

$$\mathcal{Z}_\varepsilon = \{B_{n,k} : E_{n,k} \in \mathcal{E}\}, \quad \text{где } B_{n,k} = B(z_{n,k}, \varepsilon l_n).$$

Предположим, что измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию (2.1) и выполнено (2.4). Тогда найдется такая постоянная $C' > 0$, зависящая только от m , δ и ε , что

$$M_h(\mathcal{Z}_\varepsilon) \geq C' h(l_0). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности предположим, что $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$. Пусть задано некоторое покрытие множества $\mathcal{Z}_\varepsilon$ шарами $B^j = B(\zeta_j, t_j)$. Разобьем шары $B_{n,k}$, составляющие $\mathcal{Z}_\varepsilon$, на два множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= \left\{ B_{n,k} : B_{n,k} \text{ пересекает только шары } B^j \text{ с } t_j < \frac{1}{4} l_n \right\}, \\ \mathcal{Z}_2 &= \{ B_{n,k} : B_{n,k} \notin \mathcal{Z}_1 \}. \end{aligned}$$

Те же обозначения будем использовать и для объединения соответствующих шаров $B_{n,k}$. Поскольку $\#\mathcal{E} \geq \delta 2^{mn}$, то хотя бы одно из множеств $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ содержит не менее $\frac{1}{2} \delta 2^{mn}$ шаров $B_{n,k}$. Рассмотрим два случая.

(а) $\#\mathcal{Z}_1 \geq \frac{1}{2} \delta 2^{mn}$. Если $t_j < \frac{1}{4} l_n$, то шар B^j пересекает не более одного шара $B_{n,k}$ (здесь мы пользуемся предположением $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$). Поэтому

$$\sum_{j: B^j \cap \mathcal{Z}_1 \neq \emptyset} h(t_j) = \sum_{k: B_{n,k} \in \mathcal{Z}_1} \sum_{j: B^j \cap B_{n,k} \neq \emptyset} h(t_j). \quad (2.6)$$

Покажем, что

$$\sum_{j: B^j \cap B_{n,k} \neq \emptyset} h(t_j) \geq \varepsilon^m 2^{-mn} h(l_0) \quad \forall B_{n,k} \in \mathcal{Z}_1. \quad (2.7)$$

Если имеется шар B^j с $t_j \geq \varepsilon l_n$, то (2.7) сразу вытекает из (2.1) и (2.4). Предположим, что $t_j < \varepsilon l_n$ для всех шаров B^j , пересекающихся с $B_{n,k}$. Так как $B_{n,k} \subset \bigcup_j B^j$, то $\sum_j t_j^m \geq (\varepsilon l_n)^m$; здесь и далее сумма берется по таким j , что $B^j \cap B_{n,k} \neq \emptyset$. Имеем

$$\sum h(t_j) \stackrel{(2.1)}{\geq} h(\varepsilon l_n) \sum \left(\frac{t_j}{\varepsilon l_n} \right)^m \geq h(\varepsilon l_n) \stackrel{(2.1)}{\geq} \varepsilon^m h(l_n) \stackrel{(2.4)}{=} \varepsilon^m 2^{-mn} h(l_0),$$

и мы пришли к (2.7). Поскольку внешняя сумма в (2.6) содержит не менее $\frac{1}{2} \delta 2^{mn}$ членов, то мы получаем (2.5) с $C' = \frac{1}{2} \delta \varepsilon^m$.

(б) $\#\mathcal{Z}_2 \geq \frac{1}{2} \delta 2^{mn}$. Если имеется шар B^j с $t_j \geq \frac{1}{4} l_0$, то неравенство

$$\sum_{j: t_j \geq l_n/4} h(t_j) \geq C' h(l_0) \quad (2.8)$$

с $C' = 4^{-m}$ следует из (2.1). Предположим, что $t_j < \frac{1}{4} l_0$ для всех j . Пусть N_j – количество шаров $B_{n,k}$ из $\mathcal{Z}_2$, пересекающих шар B^j с $t_j \geq \frac{1}{4} l_n$. Определим числа n_j неравенствами

$$\frac{1}{4} l_{n_j+1} \leq t_j < \frac{1}{4} l_{n_j}.$$

Легко видеть, что $0 \leq n_j \leq n-1$ и $N_j < C 2^{m(n-n_j)}$. С другой стороны, в силу сделанного предположения

$$\sum N_j \geq \#\mathcal{Z}_2 \geq \frac{1}{2} \delta 2^{mn},$$

где суммирование ведется по тем индексам j , для которых $t_j \geq \frac{1}{4} l_n$. Для таких j имеем

$$\begin{aligned} \sum h(t_j) &\geq \sum h\left(\frac{1}{4} l_{n_j+1}\right) \stackrel{(2.1)}{\geq} 4^{-m} \sum h(l_{n_j+1}) \stackrel{(2.4)}{=} 4^{-m} h(l_0) \sum 2^{-m(n_j+1)} \\ &= 2^{-3m} 2^{-mn} h(l_0) \sum 2^{m(n-n_j)} > C 2^{-mn} h(l_0) \sum N_j \geq C' h(l_0). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (2.8), а вместе с ним и лемма 2.2 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Положим

$$l_0 = r_0, \quad n = \left\lceil \frac{1}{m} \log_2 N \right\rceil + 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{N}{2^{mn}},$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа. Очевидно, $2^{m(n-1)} \leq N < 2^{mn}$. Построим множество E_n , определяя величины l_j согласно (2.4). Выберем N кубов $E_{n,k}$ таким образом, чтобы в каждом кубе $E_{n-1,k}$, $k = 1, \dots, 2^{m(n-1)}$, был хотя бы один выбранный куб. В центр $z_{n,k}$ каждого из них поместим заряд величины $h(r_0)/N$. Совокупность выбранных кубов обозначим через $\mathcal{E}$. Покажем, что полученная мера μ и компакт $F = \overline{\mathcal{X}_\varepsilon}$, где $\mathcal{X}_\varepsilon$ – множество из леммы 2.2, и будут искомыми. Условие (2.3) выполнено в силу (2.5) (поскольку $\delta \geq 2^{-m}$, то C' превосходит некоторую постоянную C_3 , зависящую только от m). Остальное проверить (2.2).

Возьмем некоторую точку $x \in F$ и рассмотрим цепочку вложенных кубов $x \in \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \dots \subset \Delta_0$, где Δ_j – один из кубов, образующих множество E_j . Каждый куб Δ_j , $0 \leq j < n$, этой цепочки содержит помимо куба Δ_{j+1} еще $2^m - 1$ равных ему кубов с ребром l_{j+1} . Если $n > 1$, то мера μ этих кубов не менее чем $2^{m(n-j-2)}(2^m - 1)h(r_0)/N$ (это следует из того, что каждый куб $E_{n-1,k}$ содержит хотя бы один атом меры μ). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_n} K(|x - y|) d\mu(y) &= \int_{\Delta_n} K(|x - y|) d\mu(y) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Delta_j \setminus \Delta_{j+1}} K(|x - y|) d\mu(y) \\ &\geq \frac{h(r_0)}{N} K(l_n) + \frac{h(r_0)}{N} \sum_{j=0}^{n-2} K(\sqrt{m} l_j) 2^{m(n-j-2)} (2^m - 1). \end{aligned}$$

Из соотношений

$$h(r'_0) = \frac{h(r_0)}{N} = \frac{2^{mn} h(l_n)}{N} > h(l_n)$$

следует, что $r'_0 > l_n$. Отсюда и из (2.4) получаем

$$U_K^\mu(x) > \frac{1}{2} h(r'_0) K(r'_0) + \frac{1}{2} h(l_n) K(l_n) + \sum_{j=0}^{n-2} K(\sqrt{m} l_j) 2^{-2m} (2^m - 1) h(l_j).$$

В силу (2.4) и (2.1)

$$\begin{aligned} h(l_n) &= 2^{-2m} h(l_{n-2}) \geq 2^{-2m} (\sqrt{m})^{-m} h(\sqrt{m} l_{n-2}), \\ h(l_j) &\geq 2^{-m} (\sqrt{m})^{-m} h(\sqrt{m} l_{j-1}), \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Продолжая оценки, при $n > 2$ получаем

$$\begin{aligned} U_K^\mu(x) &> \frac{1}{2} h(r'_0) K(r'_0) + C \left[K(l_n) h(\sqrt{m} l_{n-2}) + \sum_{j=1}^{n-2} K(\sqrt{m} l_j) h(\sqrt{m} l_{j-1}) \right] \\ &\geq \frac{1}{2} h(r'_0) K(r'_0) + C \left[\int_{l_n}^{\sqrt{m} l_{n-2}} K(t) dh(t) + \sum_{j=1}^{n-2} \int_{\sqrt{m} l_j}^{\sqrt{m} l_{j-1}} K(t) dh(t) \right] \\ &> \frac{1}{2} h(r'_0) K(r'_0) + C \int_{l_n}^{\sqrt{m} l_0} K(t) dh(t), \end{aligned}$$

откуда и следует (2.2).

При $n \leq 2$ рассуждение упрощается: суммы $\sum_{j=1}^{n-2} (\cdot)$ отсутствуют, а вместо $\sqrt{m} l_{n-2}$ следует взять $\sqrt{m} l_0$.

Из теоремы 2.1 легко вывести утверждение о точности теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию (2.1), а положительные числа $\|\mu\|$, $N \in \mathbb{Z}_+$, P , r_0 и ядро $K(t) \geq 0$ связаны соотношением (1.8). Тогда найдется мера μ , состоящая из N точечных атомов, равных $\|\mu\|/N$, для которой

$$M_h(\mathcal{X}(\mu, CP, K)) > C_3 h(r_0), \quad (2.9)$$

где константы C и C_3 зависят только от m .

Если кроме (2.1) выполняется и условие (1.6), а для положительных чисел $\|\mu\|$, P и r_0 имеет место (1.7), то найдется такая мера μ , что $\mu(\mathbb{R}^m) = \|\mu\|$ и справедлива оценка (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_0(t)$ – функция, определенная при доказательстве теоремы 1.1 в случае 2. Применим теорему 2.1 с функцией $h_0(t)$ вместо $h(t)$. В силу (2.2) имеем $F \subset \mathcal{X}(\mu, C_2 P, K)$, где F и μ – компакт и мера из теоремы 2.1. Поэтому неравенство (2.9) сразу следует из (2.3) с $C = C_2$.

Пусть теперь выполнены условие (1.6) и равенство (1.7). Тогда для каждого $N = 2, 3, \dots$ справедливо и (1.8) с постоянной $P(N) < P$ вместо P . Поскольку в силу (1.6) $h(t)K(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$, то $P(N) \rightarrow P$ при $N \rightarrow \infty$. Отсюда и следует (2.9) с постоянной C , сколь угодно близкой к C_2 .

Из следствия 2.3 сразу получается утверждение, демонстрирующее точность следствия 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Для любых положительных чисел α , $d \leq m$, $\|\mu\|$, P и $N \in \mathbb{Z}_+$ найдется мера μ , для которой

$$M_{t^d}(\mathcal{X}(\mu, CP, t^{-\alpha})) > \begin{cases} C_3 \left(\frac{d}{d-\alpha} \right)^{d/\alpha} \left(\frac{\|\mu\|}{P} \right)^{d/\alpha}, & \alpha < d \leq m, \\ C_3 (1 + \ln N) \frac{\|\mu\|}{P}, & \alpha = d, \\ C_3 \left(\frac{\alpha}{\alpha-d} N^{(\alpha-d)/d} - \frac{d}{\alpha-d} \right)^{d/\alpha} \left(\frac{\|\mu\|}{P} \right)^{d/\alpha}, & \alpha > d, \end{cases} \quad (2.10)$$

где C и C_3 – константы, зависящие только от m . При $\alpha < d \leq m$ мера μ и правая часть неравенства не зависят от N ; при $\alpha \geq d$ мера μ состоит из N точечных атомов, равных $\|\mu\|/N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно подставить в (2.9) значения r_0 , найденные из равенств (1.7), (1.8) при доказательстве следствия 1.2.

При $d > t$ следствие 2.4 неверно, поскольку в этом случае $M_{td}(F) = 0$ для любого множества $F \subset \mathbb{R}^m$.

Очевидно, следствие 2.3 демонстрирует и точность следствия 1.3. Подробности мы опускаем.

§ 3. Оценки потенциалов Коши: история вопроса

Перейдем к оценкам размеров множеств $\mathcal{Z}(\nu, P)$ и $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$, определенных в (0.1). Такие оценки также имеют многочисленные применения; некоторые из них можно найти в цитируемой ниже литературе. Напомним, что мера ν теперь, вообще говоря, комплексная.

Первым результатом, относящимся к изучаемой задаче, является, по-видимому, доказанная еще в 1857 г. теорема Буля [15; с. 780], из которой вытекает следующее утверждение (см., например, [16; с. 68–69], [17; с. 181–182], [18; гл. V, § 1, лемма 1]): *если мера ν состоит из N положительных точечных зарядов $\nu_1, \dots, \nu_N$, расположенных на одной и той же прямой L , то*

$$|\{z \in L : |\mathcal{C}\nu(z)| > P\}| = \frac{2\|\nu\|}{P};$$

здесь и далее $|F|$ означает линейную меру множества F .

(Интересно отметить, что правая часть не зависит ни от расположения точек на прямой, ни от их количества, ни от распределения меры ν по этим точкам.)

В [6] получены оценки логарифмической производной многочлена $Q_N(z) = \prod_{k=1}^N (z - z_k)$ (возможно, с кратными корнями). Легко видеть, что

$$\frac{Q'_N(z)}{Q_N(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - z_k} = \mathcal{C}\nu(z),$$

где ν – дискретная мера с единичными зарядами, расположенными в нулях z_k многочлена с учетом кратности этих нулей. В [6] показано, что при произвольном расположении точек z_k и для любой прямой L

$$|\mathcal{Z}(\nu, P) \cap L| \leq \frac{2eN}{P} = \frac{2e\|\nu\|}{P}; \quad (3.1)$$

здесь

$$\mathcal{Z}(\nu, P) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - z_k} \right| > P \right\}.$$

Этот результат был развит в [19], а также в [20], где, по существу, рассмотрены пересечения множества $\mathcal{Z}(\nu, P)$ с регулярными кривыми и дискретные меры ν с конечным числом произвольных зарядов. В [6] выдвигалась также гипотеза об оценке всего множества $\mathcal{Z}(\nu, P)$ в терминах суммы радиусов покрывающих кругов. Предварительная оценка вытекает из (1.12) с $\alpha = d = 1$. Очевидно,

$$\mathcal{Z}(\nu, P) \subset \mathcal{X}(\nu, P, t^{-1}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^N \frac{1}{|z - z_k|} > P \right\}.$$

Поэтому в силу (1.12) найдется такое покрытие множества $\mathcal{Z}(\nu, P)$ кругами, для которого

$$\sum_j r_j < \frac{C\|\nu\|}{P} \ln N = \frac{CN}{P} \ln N, \quad N \geq 2, \quad (3.2)$$

где r_j – радиусы покрывающих кругов. Макинтайр и Фукс [6] предположили, что множитель $\ln N$ в (3.2) может быть опущен. Косвенным подтверждением этой гипотезы служила оценка (3.1). Такое предположение означает, что при переходе от суммы модулей $\sum_{k=1}^N |z - z_k|^{-1}$ к модулю суммы $|\sum_{k=1}^N (z - z_k)^{-1}|$ должно происходить существенное взаимное погашение слагаемых. Эта гипотеза была опровергнута Марстрандом [21], показавшим, что существует абсолютная положительная постоянная C со следующим свойством: для любого $N \geq 3$ и любого $P > 0$ найдется такое расположение N единичных зарядов, для которого проекция множества $\mathcal{Z}(\nu, P)$ на действительную ось имеет меру, превосходящую

$$\frac{CN}{P} (\ln N)^{1/2} (\ln \ln N)^{-1/2}, \quad N \geq 3. \quad (3.3)$$

Марстранд предположил в [21], что точная оценка множества $\mathcal{Z}(\nu, P)$ должна получиться при отбрасывании $\ln \ln$ -члена в (3.3). Эта задача недавно решена в [22] (доказательства изложены в [23]).

ТЕОРЕМА 3.1 (см. [22], [23]). Пусть ν – дискретная мера с конечным числом зарядов (вообще говоря, комплексных) ν_k , $k = 1, \dots, N$, $N > 1$, расположенных в произвольных точках z_k из $\mathbb{C}$. Существует абсолютная постоянная C со следующим свойством: для любого $P > 0$ найдется такое покрытие множества

$$\mathcal{Z}(\nu, P) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{k=1}^N \frac{\nu_k}{z - z_k} \right| > P \right\}$$

кругами, для которого

$$\sum_j r_j < \frac{C\|\nu\|}{P} (\ln N)^{1/2}, \quad (3.4)$$

где r_j – радиусы покрывающих кругов.

В [22], [23] показано, что оценка (3.4) неулучшаема (с точностью до значения постоянной C). Следующее утверждение из [22], [23] приводится в несколько модифицированной форме.

ТЕОРЕМА 3.2 (см. [22], [23]). Для каждого числа $N \geq 1$ и любых чисел $P > 0$, $\eta > 0$ найдется мера ν , состоящая из N равных зарядов величины η/N и такая, что для любого набора кругов, покрывающих множество $\mathcal{Z}(\nu, P)$, справедливо неравенство

$$\sum_j r_j > \frac{C\|\nu\|}{P} (\ln N)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Более того, найдется прямая L такая, что $|\Pi| > \frac{C}{P} \|\nu\| (\ln N)^{1/2}$, где Π – проекция множества $\mathcal{Z}(\nu, P)$ на L и $|\cdot|$ означает длину.

Таким образом, указанное выше взаимное погашение слагаемых действительно имеет место, но оно, вообще говоря, не такое “сильное”, как предполагалось в [6].

§ 4. Оценки потенциалов Коши: основные результаты

Естественно распространить теорему 3.1 на случай произвольной радоновской меры ν . Но при возрастании числа зарядов меры ν (с сохранением величины $\|\nu\|$) правая часть неравенства (3.5) стремится к бесконечности. Следовательно, охарактеризовать множество $\mathcal{Z}(\nu, P)$ для произвольной меры ν в терминах суммы радиусов покрывающих кругов невозможно. Это обстоятельство приводит к необходимости ввести произвольную измеряющую функцию h и рассматривать суммы $\sum_j h(r_j)$ (т.е., по существу, h -обхват по Хаусдорфу M_h) с функцией h , отличной от $h(t) = t$. Такое обобщение задачи содержательно и для дискретных мер ν , поскольку позволяет более полно охарактеризовать множество $\mathcal{Z}(\nu, P)$.

Так как множество $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$ ограничено, то $\text{diam}(\mathcal{Z}^*(\nu, P)) < \infty$ и, следовательно,

$$M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P)) \leq h\left(\frac{1}{2} \text{diam}(\mathcal{Z}^*(\nu, P))\right).$$

Поэтому найдется число $t_2 \in (0, \text{diam}(\mathcal{Z}^*(\nu, P))/2]$ такое, что

$$h(t_2) = M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P)).$$

Следовательно, существует и число $t_1 \in (0, t_2)$, для которого $h(t_1) = Ch(t_2)/N$, если только $C/N < 1$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть мера ν состоит из конечного числа $N > 1$ зарядов ν_k (вообще говоря, комплексных), расположенных в точках z_k , $k = 1, \dots, N$. Существуют абсолютные положительные постоянные C_4, C_5 такие, что для любого числа $P > 0$ и любой измеряющей функции h

$$h(t_2) \leq \frac{C_4 \|\nu\|}{P} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2}, \quad (4.1)$$

где числа t_1, t_2 определяются равенствами

$$h(t_1) = \frac{C_5 M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P))}{N}, \quad h(t_2) = M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P)).$$

Если $h(\infty) = \infty$, то правая часть неравенства (4.1) есть $o(h(t_2))$ при $t_2 \rightarrow \infty$ и фиксированных $\|\nu\|, P$ и N . Поэтому это неравенство может выполняться лишь в случае, если t_2 “не слишком велико”. Таким образом, теорема 4.1 дает неявную оценку сверху величины $M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P))$ (поскольку эта величина фигурирует и в левой, и в правой частях неравенства (4.1)). В ряде важных случаев из (4.1) можно вывести явные оценки h -обхвата множества $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$.

ПРИМЕР. При $h(t) = t^d$, $0 < d \leq 2$, несложные подсчеты дают

$$M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P)) \leq \begin{cases} CN^{1-d} \left[\frac{\|\nu\|}{P} \left(\frac{1}{1-d} \right)^{1/2} \right]^d, & 0 < d < 1, \\ C \frac{\|\nu\|}{P} (\ln N)^{1/2}, & d = 1, \quad N \geq 2, \\ C \left[\frac{\|\nu\|}{P} \left(\frac{1}{d-1} \right)^{1/2} \right]^d, & 1 < d \leq 2. \end{cases} \quad (4.2)$$

При $d > 2$ оценки тривиальны, так как в этом случае h -обхват любого плоского множества равен нулю. Случай $d = 1$ дает оценку (3.4). Поэтому теорема 4.1 является непосредственным обобщением теоремы 3.1.

Неравенства (4.2) интересно сравнить с оценками h -обхвата множества

$$\mathcal{X}\left(|\nu|, P, \frac{1}{t}\right) := \left\{z \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}} \frac{d|\nu|(\zeta)}{|\zeta - z|} > P\right\}.$$

Очевидно, $\mathcal{X}^*(\nu, P) \subset \mathcal{X}(|\nu|, P, 1/t)$. Из следствия 1.2 сразу следует оценка: при $h(t) = t^d$

$$M_h\left(\mathcal{X}\left(|\nu|, P, \frac{1}{t}\right)\right) \leq \begin{cases} CN^{1-d} \left[\frac{\|\nu\|}{P} \frac{1}{1-d}\right]^d, & 0 < d < 1, \\ C \frac{\|\nu\|}{P} \ln N, & d = 1, \quad N \geq 2, \\ C \left[\frac{\|\nu\|}{P} \frac{1}{d-1}\right]^d, & 1 < d \leq 2. \end{cases} \quad (4.3)$$

В случае $1 < d \leq 2$ неравенство (4.3) справедливо для любой (не обязательно дискретной) меры ν . Наличие показателя $1/2$ в неравенствах (4.2) отражает эффект взаимного погашения слагаемых при переходе от суммы модулей

$$\sum_{k=1}^N \left| \frac{\nu_k}{z_k - z} \right| = \int_{\mathbb{C}} \frac{d|\nu|(\zeta)}{|\zeta - z|}$$

к модулю суммы соответствующих дробей. Из сравнения оценок (4.2) и (4.3) видно, что этот эффект усиливается по мере приближения d к единице (слева или справа).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из двух слагаемых

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt \quad \text{и} \quad \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2}$$

в правой части неравенства (4.1) первое, вообще говоря, является главным. В частности, если функция $h(t)$ удовлетворяет дополнительному условию $h(2t) \leq A_h h(t)$, $t > 0$, с некоторой постоянной $A_h > 1$, зависящей от h , то при достаточно больших N

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} < B_h \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt,$$

и второе слагаемое можно отбросить; при этом, возможно, C_4 будет уже не абсолютной постоянной, а константой, зависящей от A_h .

Рассмотрим теперь случай

$$\int_0^\infty \frac{h^2(t)}{t^3} dt < \infty. \quad (4.4)$$

В этом предположении мы получим оценки h -обхвата $M_h(\mathcal{X}^*(\nu, P))$ не только для дискретной, но и для произвольной радоновской меры ν (заметим, что при значениях $1 < d \leq 2$, соответствующих случаю (4.4) для функции $h(t) = t^d$, правые части в (4.2), (4.3) уже не зависят от N).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть ν – произвольная (вообще говоря, комплексная) мера Радона с компактным носителем, и пусть $h(t)$ – измеряющая функция, удовлетворяющая условию (4.4). Тогда для любого числа $P > 0$ справедливо неравенство

$$h(t_2) \leq \frac{C_6 \|\nu\|}{P} \left[\int_0^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{0 < t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2}, \quad (4.5)$$

где, как всегда, C_6 – абсолютная постоянная, а t_2 определяется равенством $h(t_2) = M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P))$.

Перейдем к обсуждению точности теорем 4.1 и 4.3.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию

$$h(t_1)t_1^{-\alpha} \geq h(t_2)t_2^{-\alpha} \quad \text{для любых } 0 < t_1 < t_2, \quad (4.6)$$

где $\alpha = \log_{0.26} 0.25 > 1$ и $h(\infty) = \infty$. Пусть, далее, заданы числа $P > 0$, $N \geq 1$ и $\eta > 0$. Тогда найдется мера ν , состоящая из N положительных зарядов, для которой $\|\nu\| = \eta$ и

$$h(t_2) > \frac{C_7 \|\nu\|}{P} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2}, \quad (4.7)$$

где

$$t_1 \leq t_2, \quad h(t_1) \leq \frac{C_8 M_h(\mathcal{Z}(\nu, P))}{N}, \quad h(t_2) = M_h(\mathcal{Z}(\nu, P)),$$

а C_7 и C_8 – абсолютные положительные постоянные.

Теорема 4.4 устанавливает точность теорем 4.1 и 4.3 для достаточно широкого класса измеряющих функций, удовлетворяющих условию (4.6). В этом классе имеются функции h и со сходящимся, и с расходящимся интегралом в (4.4). Например,

$$h(t) = t^d \left(\ln \frac{1}{t} \right)^p \left(\ln \ln \frac{1}{t} \right)^q$$

с $d < \alpha$ и произвольными p, q и т.д. Важно, что $\alpha > 1$, т.е. оказывается рассмотренной окрестность критического значения показателя $d = 1$, в которой различия между размерами множеств $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$ и $\mathcal{X}(|\nu|, P, 1/t)$ особенно существенны (ср. (4.2) и (4.3)). Хотя условие (4.6) и можно несколько ослабить (значение $\alpha = \log_{0.26} 0.25$ не является окончательным), но его нельзя отбросить. Более того, если взять в (4.6) $\alpha > 2$, то теорема 4.4 неверна: в этом случае при $h(t) = t^\alpha$ будет $M_h(G) = 0$ для любого множества $G \subset \mathbb{C}$.

§ 5. Доказательство теоремы 4.1

Доказательства теорем 4.1 и 4.3 используют тот же аппарат, что и доказательства теорем 1, 4 в [22] и теорем 2.1, 5.1 в [23]. Это понятие кривизны $c^2(\mu)$ меры μ , введенное Мельниковым, оценки аналитической емкости через кривизну, полученные Мельниковым и Толсой, и оценка аналитической емкости множества $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$, принадлежащая Толсе, а также, по существу, Назарову, Трейлю и Вольбергу (хотя нужное нам неравенство (5.2) и не было выписано ими в явном виде, но оно сразу же следует из полученных ими результатов; подробнее об этом сказано ниже после формулировки теоремы C). Как и

в [22], [23], метод применения этих результатов основан на построении вспомогательной меры μ . Но, несмотря на общность подходов к доказательству теоремы 4.1 и соответствующих результатов из [22], [23], построение меры μ , ее структура и вывод нужных неравенств имеют ряд существенных отличий. Перейдем к подробному изложению.

Следуя Мельникову [24], определим кривизну $c(\mu)$ положительной меры μ равенством

$$c^2(\mu) = \iiint \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z),$$

где $R(x, y, z)$ – радиус окружности, проходящей через три точки $x, y, z \in \mathbb{C}$; если точки x, y, z лежат на одной прямой (в частности, если две из них совпадают), то полагаем $R(x, y, z) = \infty$.

Аналитической емкостью $\gamma(E)$ компакта $E \subset \mathbb{C}$ называется величина

$$\gamma(E) = \sup |f'(\infty)|,$$

где супремум берется по всем функциям $f(z)$, голоморфным в $\mathbb{C} \setminus E$, для которых $|f(z)| \leq 1$ в $\mathbb{C} \setminus E$. Емкость $\gamma_+(E)$ определяется равенством

$$\gamma_+(E) = \sup \mu(E),$$

в котором перебираются такие положительные меры μ с носителями, принадлежащими E , что $\mathcal{E}\mu(z) \in L^\infty(\mathbb{C})$ и $\|\mathcal{E}\mu\|_\infty \leq 1$. Поскольку $|(\mathcal{E}\mu)'(\infty)| = \mu(E)$, то $\gamma_+(E) \leq \gamma(E)$. С другой стороны, как показал Толса [25], $\gamma(E) \leq C\gamma_+(E)$.

ТЕОРЕМА В. Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$

$$\gamma_+(E) \geq C \sup \left\{ [\mu(E)]^{3/2} [\mu(E) + c^2(\mu)]^{-1/2} \right\}, \quad (5.1)$$

где C – абсолютная постоянная и супремум берется по всем положительным мерам μ таким, что $\text{supp } \mu \subset E$ и $\mu(D(z, r)) \leq r$ для любого круга $D(z, r)$.

Неравенство (5.1) с γ вместо γ_+ было получено Мельниковым [24]. Усиленная версия (5.1) принадлежит Толсе [26].

ТЕОРЕМА С. Найдется такая абсолютная постоянная C , что для любой (вообще говоря, комплексной) меры Радона ν и любого $\lambda > 0$

$$\gamma_+ \{ z \in \mathbb{C} : \mathcal{E}_* \nu(z) > \lambda \} \leq \frac{C \|\nu\|}{\lambda}. \quad (5.2)$$

Теорема С установлена Толсой в [27; с. 321] для положительных радоновских мер ν . Справедливость этого утверждения и для комплексных мер отмечена в [28; с. 164]. Заметим, что все составляющие доказательства были независимо получены также Назаровым, Трейлем и Вольбергом, причем для более общего случая – операторов с ядрами Кальдерона–Зигмунда. А именно, оценки слабого типа установлены одновременно в [29] и [30; с. 483]; необходимые свойства емкости γ_+ изложены в [31; с. 29–33]. Теорема С является прямым следствием отмеченных фактов.

В дальнейшем для краткости полагаем $\mathbf{M} := M_h(\mathcal{E}^*(\nu, P))$.

ЛЕММА 5.1. Пусть задано число $P > 0$ и дискретная мера ν , состоящая из (комплексных) зарядов ν_k , расположенных в точках z_k , $k = 1, \dots, N$, $N > 1$, и пусть

$$\mathbf{M} > \frac{100\|\nu\|}{P} I_1^{1/2}, \quad \text{где } I_1 := \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{h^2(t_2)}{2t_2^2}, \quad (5.3)$$

а числа t_1 и t_2 определены в теореме 4.1. Тогда найдется положительная мера μ со следующими свойствами:

- 1) мера μ сосредоточена на семействе кругов $D_j = D(w_j, r_j)$, $j = 1, 2, \dots, N_0$ (вообще говоря, отличных от кругов, покрывающих множество $\mathcal{Z}^*(\nu, P)$), с $N_0 \leq N$;
- 2) $\overline{D}_j \subset \mathcal{Z}^*(\nu, \frac{1}{2}P)$;
- 3) $D(w_k, 4r_k) \cap (\bigcup_{j \neq k} D_j) = \emptyset$, $k = 1, 2, \dots, N_0$;
- 4) $r_j \geq t_1$;
- 5) $C\mathbf{M} \leq \|\mu\| \leq \mathbf{M}$;
- 6) для любого круга $D(z, r) \subset \mathbb{C}$

$$\mu(D(z, r)) < \begin{cases} r^2 h(t_1) t_1^{-2}, & 0 \leq r < t_1, \\ h(r), & r \geq t_1. \end{cases} \quad (5.4)$$

ЛЕММА 5.2. Пусть мера μ удовлетворяет условию (5.4) и $\|\mu\| \leq \mathbf{M} = h(t_2)$. Тогда

$$c^2(\mu) \leq 8\|\mu\| I_2, \quad \text{где } I_2 := \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{h^2(t_1)}{2t_1^2} + \frac{h^2(t_2)}{2t_2^2}. \quad (5.5)$$

Отложив доказательства лемм 5.1 и 5.2 до следующего параграфа (первое из них весьма объемно), покажем, как доказывается теорема 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Если $\mathbf{M} \leq 100\|\nu\|P^{-1}I_1^{1/2}$, то неравенство (4.1) выполнено и теорема 4.1 доказана. Предположим, что

$$\mathbf{M} > 100\|\nu\|P^{-1}I_1^{1/2}$$

(т.е. имеет место (5.3)). Пусть μ – мера из леммы 5.1. В силу (5.4) для любого круга $D(z, r) \subset \mathbb{C}$ имеем

$$\frac{\mu(D(z, r))}{r} < \max_{t_1 \leq r \leq t_2} \frac{h(r)}{r} =: a_h < \infty.$$

Введем меру $\eta = a_h^{-1}\mu$. Очевидно, $c^2(\eta) = a_h^{-3}c^2(\mu)$. Согласно свойству 2) из леммы 5.1 $\text{supp } \eta \subset \mathcal{Z}^*(\nu, \frac{1}{2}P)$. Используя (5.1) с η вместо μ и (5.5), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_+ \left(\mathcal{Z}^* \left(\nu, \frac{P}{2} \right) \right) &\geq C \|\eta\|^{3/2} (\|\eta\| + c^2(\eta))^{-1/2} \\ &= C \|\mu\|^{3/2} (a_h^2 \|\mu\| + c^2(\mu))^{-1/2} \\ &\geq C \|\mu\|^{3/2} (a_h^2 \|\mu\| + 8\|\mu\| I_2)^{-1/2} = C \|\mu\| (a_h^2 + 8I_2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Неравенства (5.2) с $\lambda = \frac{1}{2}P$, (5.6) и первое неравенство в 5) из леммы 5.1 дают оценку

$$C \frac{\|\nu\|}{P} \geq \gamma_+ \left(\mathcal{Z}^* \left(\nu, \frac{P}{2} \right) \right) \geq C \|\mu\| (a_h^2 + 8I_2)^{-1/2} \geq C\mathbf{M} (a_h^2 + 8I_2)^{-1/2},$$

из которой сразу следует (4.1).

§ 6. Доказательства лемм 5.1 и 5.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Пусть $|\nu| = \{|\nu_1|, \dots, |\nu_N|\}$ – вариация меры ν . На первом этапе рассуждения мы покажем, что если исключить из $\mathbb{C}$ множество $\mathcal{Z}_3$ с высокой плотностью меры $|\nu|$, то в оставшихся точках плоскости $\mathbb{C}$ изменение потенциала Коши будет “не очень быстрым”; при этом h -обхват множества $\mathcal{Z}^*(\nu, P) \setminus \mathcal{Z}_3$ окажется больше, чем $0.5\mathbf{M}$. Положим

$$S = \{z_1, \dots, z_N\}, \quad d(z) = \text{dist}(z, S).$$

Назовем точку $z \in \mathbb{C}$ *нормальной* (относительно $|\nu|$ и h), если неравенство

$$|\nu|(D(z, r)) \leq 8^{-1} P I_1^{-1/2} h(r) \quad (6.1)$$

справедливо для всех $r \geq 0$. Обозначим через G множество точек $z \in \mathbb{C}$, не являющихся нормальными. Для каждой точки $z \in G$ найдется число $r = r(z) > 0$ такое, что

$$h(r) < 8 I_1^{1/2} P^{-1} |\nu|(D(z, r)). \quad (6.2)$$

Мы получили покрытие множества G кругами. Поскольку (см. (5.3), (6.2))

$$h(t_2) = \mathbf{M} > \frac{100 \|\nu\|}{P} I_1^{1/2} \geq \frac{100 |\nu|(D(z, r))}{P} I_1^{1/2} > h(r),$$

то радиусы этих кругов ограничены в совокупности. По лемме Безиковича [1; с. 30], [13; с. 2–6], [10; гл. 3, лемма 3.2] выделим подпокрытие кратности не выше шести. Обозначим круги этого подпокрытия через $D'_k = D(w'_k, r'_k)$ и положим $\mathcal{Z}_3 = \bigcup_k D'_k$. Тогда

$$M_h(\mathcal{Z}_3) \leq \sum_k h(r'_k) \stackrel{(6.2)}{<} \frac{8 I_1^{1/2}}{P} \sum_k |\nu|(D'_k) \leq 6 \frac{8 I_1^{1/2}}{P} \|\nu\| \stackrel{(5.3)}{<} 0.5\mathbf{M}. \quad (6.3)$$

Покажем, что

$$|\nu|(D(z, r)) < 0.2Pr \quad \text{для любых } z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_3 \text{ и } r > 0. \quad (6.4)$$

Действительно, при $0 < r < t_2$ в силу (6.1) и (5.3) имеем

$$\begin{aligned} |\nu|(D(z, r)) &\leq \frac{Ph(r)}{8} \left[\int_{t_1}^r \frac{h^2(t)}{t^3} dt + h^2(r) \left(\frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2t_2^2} \right) + \frac{h^2(t_2)}{2t_2^2} \right]^{-1/2} \\ &< \frac{Ph(r)}{8} \left[\frac{h^2(r)}{2r^2} \right]^{-1/2} < 0.2Pr. \end{aligned}$$

Пусть $r \geq t_2$. Используя (5.3), получаем

$$\mathbf{M} > \frac{100 \|\nu\|}{P} \left[\frac{h^2(t_2)}{2t_2^2} \right]^{1/2} = \frac{100 \|\nu\|}{P} \frac{\mathbf{M}}{\sqrt{2} t_2},$$

откуда

$$|\nu|(D(z, r)) \leq \|\nu\| < 0.01 \sqrt{2} P t_2 < 0.2Pr$$

и неравенство (6.4) доказано. Положим

$$\mathcal{Z}_4 = \mathcal{Z}^*(\nu, P) \setminus \mathcal{Z}_3.$$

Очевидно (см. (6.3)),

$$M_h(\mathcal{Z}_4) \geq \mathbf{M} - M_h(\mathcal{Z}_3) > \mathbf{M} - 0.5\mathbf{M} = 0.5\mathbf{M}. \quad (6.5)$$

Приступим к построению искомым кругов D_j . Для каждого индекса $j = 1, \dots, N$, для которого множество $\{w \in \mathbb{C} : w \in \mathcal{Z}_4, d(w) = |w - z_j|\}$ непусто, мы выберем точку $w_j \in \mathcal{Z}_4$ со следующими свойствами: $d(w_j) = |w_j - z_j|$ и

$$d(w_j) > \frac{3}{4} \sup\{d(w) : w \in \mathcal{Z}_4, d(w) = |w - z_j|\}$$

(точки w_j для разных j не обязательно различны). Возьмем $r_j = 0.1d(w_j)$ и рассмотрим круг $D_j = D(w_j, r_j)$. Покажем, что $\bar{D}_j \subset \mathcal{Z}^*(\nu, P/2)$. Поскольку $w_j \in \mathcal{Z}^*(\nu, P)$, то найдется $\varepsilon > 0$, для которого $|\mathcal{C}_\varepsilon \nu(w_j)| > P$. Можно считать, что $\varepsilon > d(w_j) - \delta$ со сколь угодно малым $\delta > 0$. Для любых точек $z \in \bar{D}_j$ и $\xi \in S$ имеем

$$|\xi - z| \geq |\xi - w_j| - r_j \geq |\xi - w_j| - 0.1|\xi - w_j| = 0.9|\xi - w_j|.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & |\mathcal{C}_\varepsilon \nu(w_j) - \mathcal{C}_{\varepsilon - |w_j - z|} \nu(z)| \\ & \leq \left| \int_{|\xi - w_j| > \varepsilon} \frac{w_j - z}{(\xi - w_j)(\xi - z)} d\nu(\xi) \right| + \left| \int_{\{|\xi - z| > \varepsilon - |w_j - z|\} \cap \{|\xi - w_j| \leq \varepsilon\}} \frac{d\nu(\xi)}{\xi - z} \right|. \end{aligned}$$

Модуль первого интеграла не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{0.1d(w_j)}{0.9} \int_{|\xi - w_j| > \varepsilon} \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - w_j|^2} = \frac{d(w_j)}{9} \int_\varepsilon^\infty \frac{d|\nu|(D(w_j, t))}{t^2} \\ & = \frac{d(w_j)}{9} \int_0^\infty \frac{2|\nu|(D(w_j, t))}{t^3} dt \leq \frac{d(w_j)}{9} \int_{d(w_j)}^\infty \frac{2 \cdot 0.2P}{t^2} dt < 0.05P \end{aligned} \quad (6.6)$$

(мы проинтегрировали по частям и затем использовали (6.4)). Опять применяя (6.4), получаем, что модуль второго интеграла не превосходит

$$\int_{\{|\xi - z| > \varepsilon - |w_j - z|\} \cap \{|\xi - w_j| \leq \varepsilon\}} \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - z|} < \frac{0.2P\varepsilon}{\varepsilon - |w_j - z|} < \frac{0.2P\varepsilon}{\varepsilon - 0.1d(w_j)} < 0.25P,$$

если δ достаточно мало. Таким образом,

$$|\mathcal{C}_\varepsilon \nu(w_j) - \mathcal{C}_{\varepsilon - |w_j - z|} \nu(z)| < 0.3P.$$

Учитывая, что $|\mathcal{C}_\varepsilon \nu(w_j)| > P$, приходим к неравенству $\mathcal{C}_* \nu(z) > 0.7P$. Тем самым показано, что имеет место свойство 2) из леммы 5.1.

Для того чтобы выполнялись остальные свойства из леммы 5.1, мы удалим часть дисков D_j . Соответствующее рассуждение разобьем на несколько этапов.

Установим сначала, что

$$\mathcal{Z}_4 \subset \bigcup_j D(w_j, 24r_j). \quad (6.7)$$

Возьмем произвольную точку $z \in \mathcal{Z}_4$ и подберем такой индекс j , что $d(z) = |z - z_j|$. Тогда

$$|z - w_j| \leq |z - z_j| + |z_j - w_j| < \frac{4}{3} d(w_j) + d(w_j) = \frac{70}{3} r_j < 24r_j,$$

откуда и следует (6.7).

Обозначим через D_{j_1} круг $D(w_j, r_j)$ с наибольшим радиусом r_j . Удалим все круги D_j , $j \neq j_1$, для которых $D_j \cap D(w_{j_1}, 4r_{j_1}) \neq \emptyset$. Из оставшихся кругов D_j , $j \neq j_1$, выберем наибольший круг $D_{j_2} = D(w_{j_2}, r_{j_2})$, удалим все круги D_j , $j \neq j_2$, для которых $D_j \cap D(w_{j_2}, 4r_{j_2}) \neq \emptyset$, и т.д. Для всех кругов $D(w_j, r_j)$, удаленных на k -м шаге, $r_j \leq r_{j_k}$ и $|w_j - w_{j_k}| < 5r_{j_k}$. Следовательно,

$$D(w_j, 24r_j) \subset D(w_{j_k}, 29r_{j_k}).$$

Полученные круги D_{j_k} , $k = 1, \dots, N_1$, где $N_1 \leq N$, будем для простоты в дальнейшем обозначать также через $D_1, D_2, \dots, D_{N_1}$. Заметим, что $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{N_1}$. По построению имеет место свойство 3) леммы 5.1.

В силу (6.7)

$$\mathcal{Z}_4 \subset \bigcup_k D(w_k, 29r_k).$$

Отсюда и из (6.5) получаем

$$M_h \left(\bigcup_k D(w_k, 29r_k) \right) \geq M_h(\mathcal{Z}_4) > 0.5\mathbf{M}. \quad (6.8)$$

Поскольку каждый круг $D(w_k, 29r_k)$ можно покрыть не более чем C_9 кругами радиуса r_k (C_9 – абсолютная постоянная), то

$$M_h \left(\bigcup_{k:r_k < t_1} D(w_k, 29r_k) \right) \leq C_9 \sum_{k:r_k < t_1} h(r_k) < C_9 N h(t_1) < 0.1\mathbf{M},$$

если постоянная C_5 в теореме 4.1 достаточно мала. В силу (6.8) имеем

$$\begin{aligned} & M_h \left(\bigcup_{k:r_k \geq t_1} D(w_k, 29r_k) \right) \\ & \geq M_h \left(\bigcup_k D(w_k, 29r_k) \right) - M_h \left(\bigcup_{k:r_k < t_1} D(w_k, 29r_k) \right) > 0.4\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Удалим из совокупности $\{D_j\}_{j=1}^{N_1}$ круги с $r_j < t_1$, удовлетворив тем самым условию 4) леммы 5.1. Оставшиеся круги будем по-прежнему обозначать через D_j , $j = 1, \dots, N_0$, где $N_0 \leq N_1$. Тогда

$$M_h \left(\bigcup_j D(w_j, 29r_j) \right) > 0.4\mathbf{M}, \quad r_j \geq t_1. \quad (6.9)$$

Построение искомой меры μ состоит из нескольких шагов; некоторые из них аналогичны конструкции из доказательства теоремы Фростмана (см. [32; гл. II, теорема 1]). Сначала возьмем меру $\mu^{(0)}$, равномерно распределенную

на каждом круге D_j , $j = 1, \dots, N_0$, с одинаковой для всех кругов плотностью $(2t_1)^{-2}h(t_1)$. Будем считать, что все множество $\bigcup_j D_j$ размещено в первой четверти координатной плоскости. Обозначим через $Q(w, l)$ квадрат

$$Q(w, l) = \{z = x + iy : |x - a| \leq l, |y - b| \leq l\}, \quad \text{где } w = a + ib.$$

Положим

$$\begin{aligned} l_p &= 2^p t_1, \quad w_{k,m}^{(p)} = (1 + 2k)l_p + i(1 + 2m)l_p, \\ Q_{k,m}^{(p)} &= Q(w_{k,m}^{(p)}, l_p), \quad p, k, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, $\mu^{(0)}(Q_{k,m}^{(0)}) \leq h(l_0)$ для любого квадрата $Q_{k,m}^{(0)}$.

Предположим теперь, что определены меры $\mu^{(p)}$ при $p = 0, \dots, q-1$. На каждом квадрате $Q_{k,m}^{(q)}$ определим меру $\mu^{(q)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^{(q)}|_{Q_{k,m}^{(q)}} &= \mu^{(q-1)}|_{Q_{k,m}^{(q)}}, \quad \text{если } \mu^{(q-1)}(Q_{k,m}^{(q)}) \leq h(l_q), \\ \mu^{(q)}|_{Q_{k,m}^{(q)}} &= \frac{h(l_q)}{\mu^{(q-1)}(Q_{k,m}^{(q)})} \mu^{(q-1)}|_{Q_{k,m}^{(q)}}, \quad \text{если } \mu^{(q-1)}(Q_{k,m}^{(q)}) > h(l_q). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Очевидно, что $\mu^{(q)} \leq \mu^{(q-1)}$. При достаточно больших q все множество $\bigcup_j D_j$ содержится в квадрате $Q_{0,0}^{(q-1)}$, поэтому неравенство $\mu^{(q-1)}(Q_{k,m}^{(q)}) \leq h(l_q)$ заведомо выполнено, и наше построение закончено. Полученную таким образом меру обозначим через μ . Докажем, что после деления на абсолютную постоянную она удовлетворяет всем условиям 1)–6), кроме, возможно, последнего неравенства в 5).

Свойства 1)–4) уже установлены. Покажем, что $\|\mu\| \geq CM$.

Если для некоторого квадрата $Q_{k,m}^{(0)}$ выполнено неравенство

$$\mu(Q_{k,m}^{(0)}) < \mu^{(0)}(Q_{k,m}^{(0)}), \quad (6.11)$$

то в силу (6.10) найдется квадрат $Q_{k',m'}^{(p)}$, $p > 0$, содержащий $Q_{k,m}^{(0)}$ и такой, что $\mu(Q_{k',m'}^{(p)}) = h(l_p)$. Обозначим через $\tilde{Q}_n$ “максимальные” квадраты с этим свойством, т.е. квадраты, для которых:

- а) $\tilde{Q}_n = Q_{k_n, m_n}^{(p_n)}$, $\mu(\tilde{Q}_n) = h(l_{p_n})$;
- б) пересечение $\tilde{Q}_n \cap \tilde{Q}_s$, $n \neq s$, либо пусто, либо состоит лишь из граничных точек квадратов (т.е. ни один из этих квадратов не содержит другого);
- в) каждый квадрат $Q_{k,m}^{(0)}$ со свойством (6.11) содержится в одном из квадратов $\tilde{Q}_n$.

Заметим, что число квадратов $\tilde{Q}_n$ конечно и, возможно, равно нулю (последнее может иметь место лишь при $\mu = \mu^{(0)}$).

Круги D_j разобьем на две группы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ следующим образом: $D_j = D(w_j, r_j) \in \mathcal{G}_1$ в том и только в том случае, если найдется квадрат $\tilde{Q}_n$, для которого

$$D_j \cap \tilde{Q}_n \neq \emptyset \quad \text{и} \quad r_j \leq l_{p_n}. \quad (6.12)$$

Остальные круги D_j отнесем к $\mathcal{G}_2$. Через $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ будем обозначать и объединения соответствующих кругов. Одно из множеств $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ может оказаться пустым. Покажем, что

$$M_h\left(\bigcup_{j:D_j \in \mathcal{G}_1} D(w_j, 29r_j)\right) \leq C\mu\left(\bigcup_{n:\tilde{Q}_n \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset} \tilde{Q}_n\right). \quad (6.13)$$

Пусть $D_j \in \mathcal{G}_1$, и пусть $\tilde{Q}_n = Q(w_{k_n, m_n}^{(p_n)}, l_{p_n})$ – квадрат со свойствами (6.12). Для любой точки $z \in D(w_j, 29r_j)$ имеем

$$|z - w_{k_n, m_n}^{(p_n)}| < |z - w_j| + |w_j - w_{k_n, m_n}^{(p_n)}| < 29r_j + r_j + \sqrt{2}l_{p_n} < 32l_{p_n}.$$

Поэтому

$$\bigcup_{j:D_j \in \mathcal{G}_1} D(w_j, 29r_j) \subset \bigcup_{n:\tilde{Q}_n \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset} D(w_{k_n, m_n}^{(p_n)}, 32l_{p_n}).$$

Каждый круг радиуса $32l_{p_n}$ можно покрыть не более чем C_{10} кругами радиуса l_{p_n} . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} M_h\left(\bigcup_{j:D_j \in \mathcal{G}_1} D(w_j, 29r_j)\right) &\leq M_h\left(\bigcup_{n:\tilde{Q}_n \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset} D(w_{k_n, m_n}^{(p_n)}, 32l_{p_n})\right) \\ &\leq C_{10} \sum_{n:\tilde{Q}_n \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset} h(l_{p_n}) = C_{10} \sum_{n:\tilde{Q}_n \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset} \mu(\tilde{Q}_n) = C_{10}\mu\left(\bigcup_{n:\tilde{Q}_n \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset} \tilde{Q}_n\right). \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (6.13) доказано.

Рассмотрим теперь произвольный круг $D_j \in \mathcal{G}_2$. С ним могут пересекаться лишь те квадраты $\tilde{Q}_n$, для которых $l_{p_n} < r_j$. Введем следующие множества (объединения) квадратов:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^j &= \{\tilde{Q}_n : \tilde{Q}_n \cap D_j \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{R}_2^j &= \{Q_{k, m}^{(0)} : Q_{k, m}^{(0)} \cap D_j \neq \emptyset, Q_{k, m}^{(0)} \notin \mathcal{R}_1^j\}. \end{aligned}$$

Заметим, что длины сторон всех квадратов из $\mathcal{R}_1^j$ и $\mathcal{R}_2^j$ не превосходят $2r_j$. Поэтому в силу свойства 3) эти квадраты не пересекаются с другими кругами D_s , $s \neq j$, и, следовательно, не входят в объединение из правой части неравенства (6.13). Мы покажем, что

$$M_h(D_j) \leq C(\mu(\mathcal{R}_1^j) + \mu(\mathcal{R}_2^j)) = C\mu(D_j), \quad D_j \in \mathcal{G}_2. \quad (6.14)$$

Обозначим через $A(G)$ площадь множества G . Возможны два случая.

а) $A(\mathcal{R}_1^j \cap D_j) \geq A(D_j)/2$. При должном выборе абсолютной постоянной C каждому квадрату $\tilde{Q}_n \in \mathcal{R}_1^j$ можно сопоставить C таких кругов с радиусами l_{p_n} , чтобы совокупность этих кругов, взятая по всем квадратам $\tilde{Q}_n \in \mathcal{R}_1^j$, образовала покрытие круга D_j . Поэтому

$$M_h(D_j) \leq C \sum_{n:\tilde{Q}_n \in \mathcal{R}_1^j} h(l_{p_n}) = C \sum_{n:\tilde{Q}_n \in \mathcal{R}_1^j} \mu(\tilde{Q}_n) = C\mu(\mathcal{R}_1^j).$$

б) $A(\mathcal{R}_1^j \cap D_j) < A(D_j)/2$. Так как $A(\mathcal{R}_1^j \cap D_j) + A(\mathcal{R}_2^j \cap D_j) = A(D_j)$, то в этом случае $A(\mathcal{R}_2^j \cap D_j) > A(D_j)/2$. Поскольку $A(\mathcal{R}_2^j) < 12A(D_j)$, то $A(\mathcal{R}_2^j) < 24A(\mathcal{R}_2^j \cap D_j)$. Обозначим через K количество квадратов $Q_{k,m}^{(0)}$ в $\mathcal{R}_2^j$. Легко видеть, что круг D_j можно покрыть CK кругами радиуса l_0 с подходящей абсолютной постоянной C . Напомним, что на множестве $\mathcal{R}_2^j \cap D_j$ мера μ совпадает с $\mu^{(0)}$, т.е. распределена равномерно с плотностью $(2t_1)^{-2}h(t_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} M_h(D_j) &\leq CKh(l_0) = \frac{C}{4l_0^2} 4l_0^2 Kh(l_0) = \frac{C}{4l_0^2} A(\mathcal{R}_2^j)h(l_0) \\ &< \frac{C}{4l_0^2} h(l_0)24A(\mathcal{R}_2^j \cap D_j) = 24C\mu(\mathcal{R}_2^j \cap D_j) = 24C\mu(\mathcal{R}_2^j) \end{aligned}$$

(последнее равенство вытекает из того, что $\mathcal{R}_2^j \cap D_s = \emptyset$ при $s \neq j$). Таким образом, (6.14) выполняется в любом случае. Отсюда получаем

$$M_h(D(w_j, 29r_j)) \leq C_9 M_h(D_j) < C\mu(D_j), \quad j : D_j \in \mathcal{G}_2.$$

Объединяя эту оценку с (6.9) и (6.13), имеем

$$\mathbf{M} < 2.5M_h\left(\bigcup_j D(w_j, 29r_j)\right) < C\|\mu\|,$$

и первое неравенство в 5) доказано.

Далее, поскольку $\mu \leq \mu^{(0)}$, то для любого круга $D(w, r) \subset \mathbb{C}$

$$\mu(D(w, r)) \leq \mu^{(0)}(D(w, r)) \leq \frac{1}{4t_1^2} h(t_1)\pi r^2.$$

Таким образом, первое неравенство в (5.4) справедливо при всех $r \geq 0$ (а не только при $0 \leq r < t_1$). Проверим второе неравенство в (5.4). Для данного $r \geq t_1 = l_0$ подберем такое $p \geq 0$, что $l_p \leq r < l_{p+1}$. Тогда круг $D(w, r)$ может пересекаться не более чем с C квадратами $Q_{k,m}^{(p)}$. Согласно (6.10)

$$\mu(D(w, r)) \leq C\mu^{(p)}(Q_{k,m}^{(p)}) \leq Ch(l_p) \leq Ch(r).$$

Если последняя константа C превосходит единицу, то поделим построенную меру на C . При этом все условия леммы 5.1 оказываются выполненными, кроме, возможно, второго неравенства в 5). В случае, если $\|\mu\| > \mathbf{M}$, мы умножим меру μ на константу $\mathbf{M}/\|\mu\| < 1$, удовлетворив тем самым всем требованиям леммы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Возьмем произвольную точку $x \in \text{supp } \mu$ и оценим $c_\mu^2(x)$. Положим $\mathcal{F}(x) = \{(y, z) \in \mathbb{C}^2 : |z - x| \leq |y - x|\}$. Очевидно, $2R(x, y, z) \geq |y - x|$ при $(y, z) \in \mathcal{F}(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} c_\mu^2(x) &:= \iint \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\mu(y) d\mu(z) \\ &\leq 2 \iint_{\mathcal{F}(x)} \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\mu(y) d\mu(z) \leq 8 \iint_{\mathcal{F}(x)} \frac{1}{|y - x|^2} d\mu(y) d\mu(z). \end{aligned}$$

Обозначив $\mu_x(r) = \mu(\overline{D}(x, r))$, запишем последнее выражение в виде

$$8 \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\overline{D}(x, |y-x|))}{|y-x|^2} d\mu(y) = 8 \int_0^\infty \frac{\mu_x(r)}{r^2} d\mu_x(r).$$

В силу (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu_x(r)}{r} &\leq \frac{h(t_1)}{t_1^2} r \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0, \\ \frac{\mu_x(r)}{r} &\leq \frac{\|\mu\|}{r} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$c_\mu^2(x) \leq 8 \int_0^\infty \frac{\mu_x(r)}{r^2} d\mu_x(r) = 8 \int_0^\infty \frac{[\mu_x(r)]^2}{r^3} dr.$$

Близкие оценки были проведены Маттилой [33]. Используя (5.4) и условие $\|\mu\| \leq \mathbf{M} = h(t_2)$, приходим к неравенству

$$c_\mu^2(x) \leq 8 \left(\frac{h^2(t_1)}{t_1^4} \int_0^{t_1} r dr + \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(r)}{r^3} dr + \int_{t_2}^\infty \frac{h^2(t_2)}{r^3} dr \right) = 8I_2.$$

Осталось проинтегрировать обе части по $d\mu$:

$$c^2(\mu) = \int c_\mu^2(x) d\mu(x) \leq 8I_2 \|\mu\|,$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Доказательство теоремы 4.3

ЛЕММА 7.1. Пусть последовательность множеств $E_n \subset \mathbb{C}$ такова, что $E_n \nearrow E$ при $n \rightarrow \infty$, где E – ограниченное множество в $\mathbb{C}$. Тогда для любой измеряющей функции h

$$M_h(E) \leq C \lim_{n \rightarrow \infty} M_h(E_n). \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}_h(G)$ – аналог h -обхвата по Хаусдорфу множества G , порожденный покрытиями множества G диадическими квадратами $Q(w_{k,m}^{(p)}, l_p)$, где

$$w_{k,m}^{(p)} = (1 + 2k)l_p + i(1 + 2m)l_p, \quad l_p = 2^p, \quad p, k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Очевидно,

$$C_{11}M_h(G) \leq \mathcal{M}_h(G) \leq C_{12}M_h(G). \quad (7.2)$$

В [32; гл. II, п. 3] доказано, что для линейных множеств E_n справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}_h(E_n) = \mathcal{M}_h(E), \quad E_n \nearrow E. \quad (7.3)$$

Если h -обхват любой $(m-1)$ -мерной гиперплоскости равен нулю, то приведенное доказательство без изменений переносится на m -мерный случай (этот факт отмечен в [32]). Для наших целей этого достаточно, так как в силу (4.4)

$h(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$ и, следовательно, h -обхват любой прямой равен нулю. В [32] отмечено также, что в общем случае вместо $\mathcal{M}_h(E)$ следует взять определенную модификацию этой величины, для которой также имеют место соотношения (7.2), (7.3). Из этих соотношений сразу следует (7.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\mathbf{M} > \frac{100\|\nu\|}{P} I_3^{1/2}, \quad \text{где } I_3 := \int_0^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{h^2(t_2)}{2t_2^2}, \quad (7.4)$$

а число t_2 определено в теореме 4.3. Действительно, в противном случае неравенство (4.5) справедливо и теорема 4.3 доказана. Как и в начале доказательства леммы 5.1 (см. § 6), определим множество $\mathcal{Z}_3$ (здесь мы сохраняем обозначение из леммы 5.1), подставляя в (6.1) и далее I_3 вместо I_1 . Точно так же доказывается, что

$$M_h(\mathcal{Z}_3) < 0.5\mathbf{M}, \quad (7.5)$$

$$|\nu|(D(z, r)) < 0.2Pr \quad \text{для любых } z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_3 \text{ и } r > 0. \quad (7.6)$$

Для заданного $\delta > 0$ положим

$$\mathcal{Z}_\delta^*(\nu, P) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sup_{\varepsilon > \delta} |\mathcal{C}_\varepsilon \nu(z)| > P \right\}.$$

Существует мера ν' , состоящая из конечного числа точечных зарядов, для которой

$$\|\nu'\| = \|\nu\|, \quad |\mathcal{C}_\varepsilon \nu(z) - \mathcal{C}_\varepsilon \nu'(z)| < 0.3P \quad \text{для любых } z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_3 \text{ и } \varepsilon \geq \delta. \quad (7.7)$$

Для построения такой меры ν' покроем плоскость достаточно мелкой сеткой квадратов и поместим в центр каждого из них заряд, равный мере ν этого квадрата (меру на сторонах смежных квадратов отнесем к любому из них). Разность интегралов по квадратам, лежащим в области $\{\xi : |\xi - z| > \varepsilon \geq \delta\}$, можно сделать сколь угодно малой, а по лежащим в этой области частям квадратов, пересекающихся с окружностью $|\xi - z| = \varepsilon$, не превосходящей $0.25P$ (здесь используется (7.6)). При $\delta = 1/n$ обозначим такую меру через ν_n . Согласно (7.7)

$$\mathcal{Z}_{1/n}^*(\nu, P) \setminus \mathcal{Z}_3 \subset \mathcal{Z}_{1/n}^*(\nu_n, 0.7P) \setminus \mathcal{Z}_3 \subset \mathcal{Z}^*(\nu_n, 0.7P), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Положим

$$x_P := \max \left\{ x : h(x) \leq \frac{C_4 \|\nu\|}{0.7P} \left[\int_0^x \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{0 < t \leq x} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (7.8)$$

$$x_{P,n} : h(x_{P,n}) = M_h(\mathcal{Z}^*(\nu_n, 0.7P))$$

(равенство $x_P = \infty$ возможно только если $h(\infty) < \infty$). В силу теоремы 4.1 $x_{P,n} \leq x_P$, $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, $\mathcal{Z}_{1/n}^*(\nu, P) \setminus \mathcal{Z}_3 \nearrow \mathcal{Z}^*(\nu, P) \setminus \mathcal{Z}_3$. Отсюда и из леммы 7.1 выводим, что

$$M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P) \setminus \mathcal{Z}_3) \leq Ch(x_P)$$

и в силу (7.5)

$$h(t_2) = \mathbf{M} = M_h(\mathcal{Z}^*(\nu, P)) \leq Ch(x_P)$$

(с другой постоянной C). Применяя неравенство в фигурных скобках из (7.8) при $x = x_P$ (если $x_P < \infty$, то имеет место равенство), получаем

$$h(t_2) \leq \frac{C \cdot C_4 \|\nu\|}{0.7P} \left[\int_0^{x_P} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{0 < t \leq x_P} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2}.$$

Если $x_P \leq t_2$, то отсюда сразу следует (4.5) с $C_6 = C \cdot C_4/0.7$. Если $x_P > t_2$, то из неравенства в (7.8) при $x = x_P$ получаем

$$\begin{aligned} h(t_2) &\leq \frac{h(t_2)}{h(x_P)} \frac{C_4 \|\nu\|}{0.7P} \left[\int_0^{x_P} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{0 < t \leq x_P} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2} \\ &< \frac{h(t_2)}{h(x_P)} \frac{C_4 \|\nu\|}{0.7P} \left[\int_0^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{h^2(x_P)}{2t_2^2} + \max_{0 < t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} + \frac{h^2(x_P)}{t_2^2} \right]^{1/2} \\ &< \frac{C_4 \|\nu\|}{0.7P} \left[\int_0^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{3h^2(t_2)}{2t_2^2} + \max_{0 < t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2} \\ &< \frac{C_4 \|\nu\|}{0.7P} \frac{5}{2} \left[\int_0^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{0 < t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

и мы опять пришли к неравенству (4.5) с $C_6 = 25C_4/7$.

§ 8. Доказательство теоремы 4.4

Доказательство теоремы 4.4 базируется на следующей основной лемме.

ЛЕММА 8.1. Пусть положительные числа l_j , $j = 0, 1, \dots, n$, таковы, что

$$l_0 = 1, \quad \frac{l_{j+1}}{l_j} \leq 0.26, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.1)$$

Пусть, далее, E_n – множество, состоящее из 4^n квадратов $E_{n,k}$ со сторонами l_n и центрами $z_{n,k}$, введенное в § 2, а мера ν состоит из 4^{n+1} одинаковых зарядов, равных 4^{-n-1} и расположенных в вершинах квадратов $E_{n,k}$. Тогда для множества $\mathcal{E}$ квадратов, определяемого соотношением

$$\mathcal{E} = \left\{ E_{n,k} : |\operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,k})| > 10^{-6} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_{j-1}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (8.2)$$

справедливо неравенство

$$\#\mathcal{E} > \delta 4^n, \quad (8.3)$$

где, как и ранее, $\#\mathcal{E}$ – число элементов (в данном случае квадратов) множества $\mathcal{E}$, а $\delta > 0$ – абсолютная постоянная.

Доказательство леммы 8.1, в свою очередь, использует ряд лемм и будет проведено в следующих параграфах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. Сначала будем предполагать, что $N \leq C_8$ (постоянную C_8 мы выберем позднее). Поместим все заряды в одну точку $z = 0$ (носители зарядов можно сделать и различными, расположив их достаточно близко к 0). Тогда $\mathcal{X}(\nu, P) = D(0, t_2)$, где $t_2 = \eta/P$, и $M_h(\mathcal{X}(\nu, P)) = h(t_2)$. Для доказательства последнего равенства достаточно убедиться в том, что $\sum_j h(t'_j) \geq h(t_2)$ для любого покрытия множества $\mathcal{X}(\nu, P)$ кругами $D^j = D(w_j, t'_j)$. Если имеется круг D^j с $t'_j \geq t_2$, то последнее неравенство очевидно. Пусть $t'_j < t_2$ для всех j . Так как $D(0, t_2) \subset \bigcup_j D^j$, то $t_2^2 \leq \sum_j (t'_j)^2$. Отсюда получаем

$$\sum_j h(t'_j) \stackrel{(4.6)}{\geq} h(t_2) \sum_j \left(\frac{t'_j}{t_2}\right)^\alpha \geq h(t_2) \sum_j \left(\frac{t'_j}{t_2}\right)^2 \geq h(t_2),$$

что и требовалось доказать. Возьмем $t_1 = t_2$. Тогда правая часть неравенства (4.7) равна

$$C_7 \frac{\eta}{P} \frac{h(t_2)}{t_2} = C_7 h(t_2) < h(t_2),$$

и справедливость (4.7) доказана, если $C_7 < 1$.

Пусть теперь $N > C_8$. Константу C_8 выберем больше 64, так что $N > 64$. Прежде всего рассмотрим случай, когда число N имеет вид $N = 4^{n+1}$. Рассмотрим равенство

$$h(\tau_0) = \frac{\eta}{P} \left[\int_{t_1}^{\tau_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt \right]^{1/2}, \quad \text{где } h(t_1) = \frac{16h(\tau_0)}{N}. \quad (8.4)$$

Для фиксированных η , P и N отношение правой части первого равенства к левой стремится к нулю при $\tau_0 \rightarrow \infty$ (так как $h(\infty) = \infty$) и к бесконечности при $\tau_0 \rightarrow 0$. Последнее следует из того, что в силу (4.6)

$$\left(\frac{t_1}{\tau_0}\right)^\alpha \leq \frac{h(t_1)}{h(\tau_0)} = \frac{16}{N} < \frac{1}{4},$$

т.е. $t_1 < 0.26\tau_0$. Кроме того, согласно (4.6) $h(0.26\tau_0) \geq Ch(\tau_0)$. Поэтому найдется хотя бы одно значение τ_0 , удовлетворяющее первому равенству в (8.4). Определим числа τ_j , $j = 1, \dots, n$, из равенств

$$h(\tau_j) = 4^{-j} h(\tau_0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.5)$$

Заметим, что $t_1 = \tau_{n-1}$. Согласно (4.6)

$$\left(\frac{\tau_{j+1}}{\tau_j}\right)^\alpha \leq \frac{h(\tau_{j+1})}{h(\tau_j)} = \frac{1}{4},$$

откуда

$$\frac{\tau_{j+1}}{\tau_j} \leq 0.26. \quad (8.6)$$

Положим $l_j = \tau_j/\tau_0$, $j = 0, 1, \dots, n$. Пусть E_n — соответствующее множество, состоящее из 4^n квадратов $E_{n,k}$ со сторонами l_n и центрами $z_{n,k}$, $\mathcal{E}$ — множество квадратов, определенное в (8.2). Пусть, далее,

$$a = 16 \cdot 10^6, \quad E'_n = a^{-1} \tau_0 E_n, \quad E'_{n,k} = a^{-1} \tau_0 E_{n,k}, \quad z'_{n,k} = a^{-1} \tau_0 z_{n,k}.$$

Через ν обозначим меру, образованную 4^{n+1} одинаковыми точечными зарядами ν_j величины $\eta 4^{-n-1}$, помещенными в вершины z'_j квадратов $E'_{n,k}$. Покажем, что эта мера удовлетворяет условию (4.7). Учитывая, что в (8.2) предполагалось $\|\nu\| = 1$, при n, k таких, что $E_{n,k} \in \mathcal{E}$, имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}\nu(z'_{n,k})| &> \frac{10^{-6}\eta}{a^{-1}\tau_0} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_{j-1}} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{10^{-6}\eta}{16a^{-1}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{2-j}}{\tau_{j-1}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\stackrel{(8.5)}{>} \frac{\eta}{h(\tau_0)} \left[\sum_{j=2}^n \left(\frac{h(\tau_{j-2})}{\tau_{j-1}} \right)^2 \right]^{1/2} > \frac{2\eta}{h(\tau_0)} \left[\sum_{j=2}^n \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j-2}} \frac{h^2(t)}{t^3} dt \right]^{1/2} \\ &= \frac{2\eta}{h(\tau_0)} \left[\int_{\tau_{n-1}}^{\tau_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt \right]^{1/2} \stackrel{(8.4)}{=} 2P. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Для произвольного числа $\tau \in [\tau_n, \tau_0]$ подберем такое β , что $\tau_n \leq \beta \leq \tau \leq 2\beta \leq \tau_0$ (это возможно в силу соотношений $\tau_n < \tau_{n-1} = t_1 < 0.26\tau_0$). Тогда

$$h(\tau_0) \stackrel{(8.4)}{>} \frac{\eta}{P} \left[\int_{\beta}^{2\beta} \frac{h^2(t)}{t^3} dt \right]^{1/2} > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\eta h(\beta)}{P\beta} \stackrel{(4.6)}{\geq} \frac{C\eta h(\tau)}{P\tau}, \quad C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \quad (8.8)$$

Возьмем положительное число $\varepsilon < 1/2$. Для $z \in D(z'_{n,k}, \varepsilon a^{-1}\tau_n)$ имеем (с различными константами C)

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}\nu(z'_{n,k}) - \mathcal{C}\nu(z)| &\leq \sum_{j=1}^{4^{n+1}} \frac{|z - z'_{n,k}| \nu_j}{|z - z'_j| |z'_{n,k} - z'_j|} \leq C \sum_{p=0}^n \frac{\varepsilon a^{-1} \tau_n \eta 4^{-p}}{a^{-2} \tau_p^2} \\ &\stackrel{(8.5)}{=} C a \varepsilon \eta \tau_n \sum_{p=0}^n \frac{h(\tau_p)}{h(\tau_0) \tau_p^2} \stackrel{(8.8)}{<} C \varepsilon \tau_n P \sum_{p=0}^n \frac{1}{\tau_p} < \frac{C \varepsilon \tau_n P}{\tau_n} = C \varepsilon P. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8.7) следует, что если абсолютная постоянная $\varepsilon > 0$ достаточно мала и $z \in D(z'_{n,k}, \varepsilon a^{-1}\tau_n)$ при n, k таких, что $E_{n,k} \in \mathcal{E}$, то $|\mathcal{C}\nu(z)| > P$, т.е.

$$\mathcal{Z}'_{\varepsilon} := \{D'_{n,k} : E_{n,k} \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{Z}(\nu, P), \quad \text{где } D'_{n,k} := D(z'_{n,k}, \varepsilon a^{-1}\tau_n). \quad (8.9)$$

Квадраты j -й генерации множества $\tau_0 E_n = a E'_n$ имеют стороны, равные τ_j . Так как эти числа удовлетворяют равенству (8.5), то к множеству $a \mathcal{Z}'_{\varepsilon}$ применима лемма 2.2, согласно которой

$$M_h(a \mathcal{Z}'_{\varepsilon}) > C h(\tau_0),$$

где C – абсолютная постоянная (поскольку константы ε и δ в (8.3) – абсолютные). Но $M_h(aG) \leq CM(G)$ для любого множества $G \subset \mathbb{C}$, где C зависит только от a (это следует из того, что любой круг радиуса ar можно покрыть $C = C(a)$ кругами радиуса r). Следовательно,

$$M_h(\mathcal{Z}'_{\varepsilon}) > C h(\tau_0).$$

Объединяя это неравенство с (8.9), получаем

$$h(t_2) = M_h(\mathcal{Z}(\nu, P)) \geq M_h(\mathcal{Z}'_{\varepsilon}) > C h(\tau_0). \quad (8.10)$$

Поэтому нужное неравенство (4.7) будет сразу следовать из (8.4), если мы покажем, что

$$\int_{t_1}^{\tau_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt > C \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt, \quad \int_{t_1}^{\tau_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt > C \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \frac{h^2(t)}{t^2}. \quad (8.11)$$

В силу (8.10) и (8.5) с $j = n - 1$ получаем

$$M_h(\mathcal{Z}(\nu, P)) > Ch(\tau_0) = C4^{n-1}h(\tau_{n-1}) = \frac{1}{16} C4^{n+1}h(\tau_{n-1}) = \frac{1}{16} CNh(\tau_{n-1}).$$

Поэтому при надлежащем выборе константы C_8

$$h(t_1) = h(\tau_{n-1}) < \frac{C_8 M_h(\mathcal{Z}(\nu, P))}{N} < M_h(\mathcal{Z}(\nu, P)) = h(t_2),$$

откуда следует, что $t_1 < t_2$. Если $\tau_0 \geq t_2$, то первое неравенство из (8.11) очевидно. Пусть $\tau_0 < t_2$. Из оценок (8.8) при $\tau = \tau_0$ получаем

$$h(\tau_0) > C\eta \frac{h(\tau_0)}{P\tau_0}, \quad \text{т.е. } \frac{\eta}{P} < \frac{\tau_0}{C}.$$

Очевидно,

$$|\mathcal{C}\nu(z)| < \frac{\eta}{\text{dist}(z, E'_n)} < P \quad \text{при } \text{dist}(z, E'_n) > \frac{\eta}{P}.$$

Поэтому

$$\mathcal{Z}(\nu, P) \subset D\left(z'_{0,1}, \frac{\sqrt{2}}{2} a^{-1}\tau_0 + \frac{\eta}{P}\right) \subset D(z'_{0,1}, C\tau_0),$$

где $z'_{0,1}$ – центр квадрата E'_0 . Следовательно,

$$h(t_2) = M_h(\mathcal{Z}(\nu, P)) \leq h(C\tau_0) \stackrel{(4.6)}{\leq} C'h(\tau_0), \quad C' > 1. \quad (8.12)$$

Значит,

$$\int_{\tau_0}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt < C \frac{h^2(\tau_0)}{\tau_0^2} < C \int_{t_1}^{\tau_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt$$

(во втором неравенстве мы воспользовались оценками интеграла в (8.8) при $\tau = 2\beta = \tau_0$). Отсюда получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{h^2(t)}{t^3} dt < \left\{ \int_{t_1}^{\tau_0} + \int_{\tau_0}^{t_2} \right\} \frac{h^2(t)}{t^3} dt < C \int_{t_1}^{\tau_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt.$$

Тем самым, первое неравенство в (8.11) установлено. Второе сразу следует из (8.8), и теорема 4.4 в случае $N = 4^{n+1}$ доказана.

Для произвольного натурального числа $N > 16$ (не обязательно вида $N = 4^{n+1}$) подберем n , для которого $4^{n+1} \leq N < 4^{n+2}$. “Лишние” $N - 4^{n+1}$ заряда совместим с указанными выше точками z'_j и выберем величины зарядов так, чтобы полученная мера совпадала с определенной выше. Поэтому (4.7) будет выполняться и в этом случае, если взять $4C_8$ вместо C_8 .

Но можно построить и меру ν с N различными точками. Опишем одну из возможных конструкций. Пусть ν – определенная выше мера, состоящая

из 4^{n+1} одинаковых зарядов величины $\eta 4^{-n-1}$, расположенных в точках z'_j . Очевидно,

$$\mathcal{Z}\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)\nu, P\right) \nearrow \mathcal{Z}(\nu, P), \quad k \rightarrow \infty.$$

В силу (7.1)

$$M_h\left(\mathcal{Z}\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)\nu, P\right)\right) > \frac{1}{2C} M_h(\mathcal{Z}(\nu, P))$$

для достаточно больших k ; здесь C – константа из (7.1). Зафиксируем один из таких номеров k и поместим в каждую точку z'_j заряд величины $(1 - \frac{1}{2k})\eta 4^{-n-1}$. “Лишние” $N - 4^{n+1}$ точки с суммарным зарядом $\frac{1}{2k}\eta$ расположим произвольно на некотором расстоянии ρ от множества $\{z'_j\}$. Полученную меру обозначим ν' . При больших ρ множество $\mathcal{Z}(\nu', P)$ распадется на две части: $\mathcal{Z}^1(\nu', P)$ будет располагаться ближе к $\{z'_j\}$, а $\mathcal{Z}^2(\nu', P)$ ближе к “лишним” точкам. Выберем числа ρ и k настолько большими, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathcal{Z}\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)\nu, P\right) \subset \mathcal{Z}^1(\nu', P) \subset \mathcal{Z}(\nu, P), \quad M_h(\mathcal{Z}^2(\nu', P)) < M_h(\mathcal{Z}(\nu, P)).$$

Поэтому $M_h(\mathcal{Z}(\nu', P)) \asymp M_h(\mathcal{Z}(\nu, P))$ с абсолютными константами сравнения. Отсюда следует, что если неравенство (4.7) справедливо для меры ν , то оно справедливо и для ν' (с другими постоянными C_7, C_8).

Фактически мы доказали, что величина $M_h(\mathcal{Z}(\nu, P))$ сравнима с $h(\tau_0)$ (см. (8.10) и (8.12)), где τ_0 определено равенством (8.4). Здесь имеется определенная аналогия с оценками множества $\mathcal{X}(\mu, P, K)$ для потенциалов с действительными ядрами (см. следствие 2.3). Вместо равенства (8.4) в этом случае выступает (1.8).

§ 9. Одна техническая лемма

Пусть E_n – множество, состоящее из квадратов $E_{n,k}$, $k = 1, \dots, 4^n$, со сторонами l_n и центрами $z_{n,k}$, введенное в § 2, причем $l_0 = 1$. Заметим, что стороны этих квадратов параллельны осям координат. С каждым квадратом $E_{n,k}$ мы ассоциируем последовательность векторов

$$\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(k)}, \quad \text{где } \mathbf{e}_j^{(k)} = (p_j^{(k)}, q_j^{(k)}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

причем каждый вектор $\mathbf{e}_j^{(k)}$ является одним из следующих векторов: $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$. Например, если $\mathbf{e}_1^{(k)} = (-1, 1)$, то из четырех квадратов множества E_1 квадрат $E_{n,k}$ лежит в левом верхнем квадрате Q ; $\mathbf{e}_2^{(k)} = (1, -1)$ означает, что квадрат $E_{n,k}$ находится в правом нижнем из четырех квадратов множества E_2 , лежащих в Q , и т.д. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между квадратами $E_{n,k}$ и парами $(\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{q}^{(k)})$ мультииндексов $\mathbf{p}^{(k)} = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$, $\mathbf{q}^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)})$.

ЛЕММА 9.1. Пусть множество E_n удовлетворяет условию (8.1), а мера ν состоит из 4^{n+1} одинаковых зарядов, равных 4^{-n-1} и расположенных

Рис. 1

в вершинах квадратов $E_{n,k}$. Пусть, далее, квадраты E_{n,k_1} и E_{n,k_2} таковы, что $\mathbf{q}^{(k_1)} = \mathbf{q}^{(k_2)}$ и

$$\begin{aligned} p_i^{(k_1)} &= -1, \quad p_i^{(k_2)} = 1 \quad \text{для некоторого } i, \\ p_j^{(k_1)} &= p_j^{(k_2)} \quad \text{для } j \neq i. \end{aligned}$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,k_1}) - \operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,k_2}) > 0.05 \frac{4^{-i}}{l_{i-1}}. \quad (9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 7.1 из [23], разобьем квадраты $E_{n,k}$ на следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \{E_{n,k} : \mathbf{e}_j^{(k)} \neq \mathbf{e}_j^{(k_1)} = \mathbf{e}_j^{(k_2)} \text{ при некотором } j < i\}, \\ \mathcal{Q}_2 &= \{E_{n,k} : \mathbf{e}_j^{(k)} = \mathbf{e}_j^{(k_1)}, j = 1, 2, \dots, i\}, \\ \mathcal{Q}_3 &= \{E_{n,k} : \mathbf{e}_j^{(k)} = \mathbf{e}_j^{(k_2)}, j = 1, 2, \dots, i\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_4 &= \{E_{n,k} : \mathbf{e}_j^{(k)} = \mathbf{e}_j^{(k_1)}, j = 1, 2, \dots, i-1, \mathbf{e}_i^{(k)} = -\mathbf{e}_i^{(k_1)}\}, \\ \mathcal{Q}_5 &= \{E_{n,k} : \mathbf{e}_j^{(k)} = \mathbf{e}_j^{(k_1)}, j = 1, 2, \dots, i-1, \mathbf{e}_i^{(k)} = -\mathbf{e}_i^{(k_2)}\}\end{aligned}$$

(одна из возможных конфигураций показана на рис. 1). При $i = 1$ полагаем $\mathcal{Q}_1 = \emptyset$. Для простоты обозначим $z_{n,k_1} = a$, $z_{n,k_2} = b$. Легко видеть, что

$$\int_{\mathcal{Q}_2} \frac{d\nu(z)}{z-a} = \int_{\mathcal{Q}_3} \frac{d\nu(z)}{z-b}, \quad b-a = l_{i-1} - l_i.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\nu(a) - \mathcal{C}\nu(b) &= \int_{\mathcal{Q}_1} \frac{(a-b)d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} + \int_{\mathcal{Q}_4} \frac{(a-b)d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} + \int_{\mathcal{Q}_5} \frac{(a-b)d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} \\ &\quad + \int_{\mathcal{Q}_3} \frac{d\nu(z)}{z-a} - \int_{\mathcal{Q}_2} \frac{d\nu(z)}{z-b} =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.\end{aligned}$$

Оценим каждый интеграл отдельно. Введем последовательность множеств $G_1, G_2, \dots, G_{i-1}$ следующим образом: G_{i-1} — множество, состоящее из трех квадратов из E_{i-1} , расположенных в том же квадрате из E_{i-2} , что и точки a, b , и не содержащих этих точек; G_{i-2} — множество из трех квадратов из E_{i-2} , расположенных в том же квадрате из E_{i-3} , что и G_{i-1} , и не содержащих G_{i-1} , и т.д. Для полученных множеств справедливы соотношения

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ E_{n,k} : E_{n,k} \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j \right\}, \quad \nu(G_j) = 3 \cdot 4^{-j}, \quad (9.2)$$

$$|z-a| \geq l_{j-1} - 2l_j, \quad |z-b| \geq l_{j-1} - 2l_j \quad \text{при } z \in G_j.$$

Множество G_j состоит из трех квадратов $G_{j,1}, G_{j,2}, G_{j,3}$ из E_j . Пусть $G_{j,0}$ — квадрат из E_j , содержащий точки a и b (заметим, что $G_{j,0} \notin G_j$). Будем считать, что $G_{j,1}$ расположен по горизонтали с $G_{j,0}$, $G_{j,2}$ — по вертикали с $G_{j,0}$ и $G_{j,3}$ — по диагонали. Квадрат $G_{j,1}$ содержит четыре квадрата из E_{j+1} , мера ν каждого из которых равна 4^{-j-1} . Для двух из них (ближних к $G_{j,0}$) выполняются неравенства из (9.2), а для двух дальних справедлива более точная оценка

$$|z-a| \geq l_{j-1} - l_j - l_{j+1}, \quad |z-b| \geq l_{j-1} - l_j - l_{j+1}. \quad (9.3)$$

Кроме того, для любых точек $z \in G_{j,1}$ и $w \in G_{j,0}$ имеем

$$\text{либо } |\arg(z-w)| \leq \frac{\pi}{4}, \quad \text{либо } \pi \geq |\arg(z-w)| \geq \frac{3\pi}{4},$$

в зависимости от того, какой из квадратов $G_{j,0}, G_{j,1}$ окажется справа. Мы воспользовались тем, что по условию (8.1) $\lambda_j := l_j/l_{j-1} < 1/3$. Таким образом, $\operatorname{Re}[(z-a)(z-b)] \geq 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}0 &\leq \operatorname{Re} \int_{G_{j,1}} \frac{d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} \leq \frac{1}{2} 4^{-j} \left[\frac{1}{(l_{j-1} - 2l_j)^2} + \frac{1}{(l_{j-1} - l_j - l_{j+1})^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2} \left[\frac{1}{(1 - 2\lambda_j)^2} + \frac{1}{(1 - \lambda_j - \lambda_j \lambda_{j+1})^2} \right] < 3.2761 \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2},\end{aligned}$$

так как $\lambda_j = l_j/l_{j-1} \leq 0.26$ (см. (8.1)). Далее,

$$\frac{\pi}{4} \leq |\arg(z - w)| \leq \frac{3\pi}{4}, \quad z \in G_{j,2}, \quad w \in G_{j,0},$$

причем для всех таких z и w величины $\arg(z - w)$ имеют один и тот же знак. Поэтому

$$\pi \geq |\arg[(z - a)(z - b)]| \geq \frac{\pi}{2}, \quad z \in G_{j,2}, \quad w \in G_{j,0},$$

и, следовательно, $\operatorname{Re}(z - a)(z - b) \leq 0$. Оценивая модули $|z - a|$, $|z - b|$ как в (9.2), (9.3) и проводя аналогичные оценки интегралов, приходим к неравенствам

$$-3.2761 \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2} < \operatorname{Re} \int_{G_{j,2}} \frac{d\nu(z)}{(z - a)(z - b)} \leq 0.$$

Рассмотрим интеграл по квадрату $G_{j,3}$. Для определенности будем предполагать, что $G_{j,3}$ расположен правее и ниже квадрата $G_{j,0}$ (это не нарушит общности рассуждений). Тогда для любых точек $z \in G_{j,3}$ и $w \in G_{j,0}$ имеем

$$-\frac{l_{j-1}}{l_{j-1} - 2l_j} < \operatorname{tg}(\arg(z - w)) < -\frac{l_{j-1} - 2l_j}{l_{j-1}},$$

откуда в силу (8.1) получаем

$$-\frac{1}{0.48} \leq -\frac{1}{1 - 2\lambda_j} < \operatorname{tg}(\arg(z - w)) < -(1 - 2\lambda_j) \leq -0.48.$$

Поэтому

$$|\cos(\arg[(z - a)(z - b)])| \leq \frac{1 - (0.48)^2}{1 + (0.48)^2} < 0.6255, \quad z \in G_{j,3}.$$

Квадрат $G_{j,3}$ содержит четыре квадрата из множества E_{j+1} . Для одного из них (ближайшего к квадрату $G_{j,0}$)

$$|z - a| \geq \sqrt{2}(l_{j-1} - 2l_j) = \sqrt{2}l_{j-1}(1 - 2\lambda_j) > 0.6788l_{j-1}.$$

Для другого (дальнего)

$$|z - a| \geq \sqrt{2}(l_{j-1} - l_j - l_{j+1}) = \sqrt{2}l_{j-1}(1 - \lambda_j - \lambda_j\lambda_{j+1}) > 0.9509l_{j-1},$$

а для двух оставшихся

$$\begin{aligned} |z - a| &\geq \sqrt{(l_{j-1} - 2l_j)^2 + (l_{j-1} - l_j - l_{j+1})^2} \\ &= l_{j-1}\sqrt{(1 - 2\lambda_j)^2 + (1 - \lambda_j - \lambda_j\lambda_{j+1})^2} > 0.8261l_{j-1}. \end{aligned}$$

Аналогичные оценки справедливы и для $|z - b|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{Re} \int_{G_{j,3}} \frac{d\nu(z)}{(z - a)(z - b)} \right| \\ &< \frac{4^{-j-1}}{l_{j-1}^2} 0.6255 \left(\frac{1}{0.6788^2} + \frac{1}{0.9509^2} + \frac{2}{0.8261^2} \right) < 0.9707 \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left| \operatorname{Re} \int_{G_j} \frac{d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} \right| < \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2} (3.2761 + 0.9707) < 4.247 \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2}.$$

Суммируя по $j = 1, \dots, i-1$, получаем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} I_1| &= \left| \operatorname{Re} \int_{\mathcal{Q}_1} \frac{(a-b) d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} \right| \\ &\leq (l_{i-1} - l_i) \sum_{j=1}^{i-1} \left| \operatorname{Re} \int_{G_j} \frac{d\nu(z)}{(z-a)(z-b)} \right| < 4.247 \cdot l_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\frac{l_{i-1}}{l_{j-1}} = \frac{l_{i-1}}{l_{i-2}} \frac{l_{i-2}}{l_{i-3}} \cdots \frac{l_j}{l_{j-1}} = \lambda_{i-1} \lambda_{i-2} \cdots \lambda_j \leq (0.26)^{i-j}, \quad j = 1, \dots, i-1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{4^{-j}}{l_{j-1}^2} &= \frac{1}{l_{i-1}^2} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{l_{i-1}}{l_{j-1}} \right)^2 4^{-j} \leq \frac{1}{l_{i-1}^2} \sum_{j=1}^{i-1} ((0.26)^2 4)^{i-j} 4^{-i} \\ &< \frac{4^{-i}}{l_{i-1}^2} \sum_{k=1}^{\infty} (4(0.26)^2)^k = \frac{4^{-i}}{l_{i-1}^2} \frac{4(0.26)^2}{1 - 4(0.26)^2} < 0.3707 \frac{4^{-i}}{l_{i-1}^2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\operatorname{Re} I_1| < 4.247 \cdot 0.3707 l_{i-1} \frac{4^{-i}}{l_{i-1}^2} < 1.575 \frac{4^{-i}}{l_{i-1}}.$$

Рассмотрим интегралы по $\mathcal{Q}_4$, $\mathcal{Q}_5$. Обозначим для краткости $z - a = x + iy$, $b - a = d$. Тогда $z - b = x - d + iy$, и при $z \in \mathcal{Q}_4$

$$\operatorname{Re}[(z-a)(z-b)] = x(x-d) - y^2 \leq l_{i-1} l_i - (l_{i-1} - 2l_i)^2 = l_{i-1}^2 (\lambda_i - (1 - 2\lambda_i)^2),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} (b-a) \operatorname{Re}[(z-a)(z-b)] \\ = (l_{i-1} - l_i) \operatorname{Re}[(z-a)(z-b)] \leq l_{i-1}^3 (1 - \lambda_i) (-4\lambda_i^2 + 5\lambda_i - 1). \end{aligned}$$

Функция $f(t) = (t-1)(4t^2 - 5t + 1)$ возрастает на промежутке $(-\infty, 1/2]$. Поэтому

$$(b-a) \operatorname{Re}[(z-a)(z-b)] \leq l_{i-1}^3 f(0.26) < 0.022 l_{i-1}^3.$$

Для оценки модулей $|z-a|$ и $|z-b|$ рассмотрим треугольник azb . Если величина $\varphi := |\arg(z-b)| > \pi/2$, то и $\arg[(z-a)(z-b)] > \pi/2$, а значит,

$$(b-a) \operatorname{Re}[(z-a)(z-b)] < 0.$$

В случае $\varphi \leq \pi/2$ наименьшие значения модулей $|z-a|$ и $|z-b|$ принимаются при $\varphi = \pi/2$ и $y = l_{i-1} - 2l_i$. При этом

$$\begin{aligned} |z-a|^2 &= (b-a)^2 + (l_{i-1} - 2l_i)^2 = l_{i-1}^2 [(1 - \lambda_i)^2 + (1 - 2\lambda_i)^2] \geq 0.778 l_{i-1}^2, \\ |z-b|^2 &= (l_{i-1} - 2l_i)^2 = l_{i-1}^2 (1 - 2\lambda_i)^2 \geq 0.2304 l_{i-1}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} \frac{b-a}{(z-a)(z-b)} \leq \frac{1}{l_{i-1}} \frac{0.022}{0.2304 \cdot 0.778} < 0.123 \frac{1}{l_{i-1}}$$

и, таким образом,

$$\operatorname{Re} I_2 > -0.123 \frac{4^{-i}}{l_{i-1}}.$$

Заметим, что можно получить еще более точную оценку, если интегралы по квадратам из E_{i+1} , лежащим в $\mathcal{Q}_4$, рассматривать отдельно.

Аналогично получается такая же оценка и для $\operatorname{Re} I_3$.

Осталось оценить $\operatorname{Re} I_4$ и $\operatorname{Re} I_5$. Очевидно,

$$l_{i-1} - 2l_i \leq \operatorname{Re}(z-a) \leq l_{i-1}, \quad |\operatorname{Im}(z-a)| \leq l_i \quad \text{для любого } z \in \mathcal{Q}_3.$$

Обозначая $z-a = x+iy$, имеем

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z-a} = \frac{x}{x^2+y^2} \geq \frac{l_{i-1}}{l_{i-1}^2+l_i^2} = \frac{1}{l_{i-1}} \frac{1}{1+\lambda_i^2} \geq 0.936 \frac{1}{l_{i-1}}, \quad z \in \mathcal{Q}_3$$

(первое неравенство следует из того, что функция $f(x) = x/(x^2+y^2)$ убывает при $x \geq y$). Аналогично,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{b-z} \geq 0.936 \frac{1}{l_{i-1}}, \quad z \in \mathcal{Q}_2.$$

Учитывая, что $\nu(\mathcal{Q}_2) = \nu(\mathcal{Q}_3) = 4^{-i}$, получаем

$$\operatorname{Re} I_4 + \operatorname{Re} I_5 \geq 2 \cdot 4^{-i} 0.936 \frac{1}{l_{i-1}} = 1.872 \frac{4^{-i}}{l_{i-1}}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(a) - \operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(b) > (-1.575 - 2 \cdot 0.123 + 1.872) \frac{4^{-i}}{l_{i-1}} > 0.05 \frac{4^{-i}}{l_{i-1}}.$$

Лемма 9.1 доказана.

§ 10. Две леммы комбинаторного характера

ЛЕММА 10.1. Пусть задано J различных конечных числовых множеств G_j . Тогда найдется не менее J различных подмножеств множеств G_j (среди которых может быть пустое) таких, что дополнение каждого из этих подмножеств содержит хотя бы одно из множеств G_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $U = \bigcup_{j=1}^J G_j$ и $k = \#U$. Обозначим элементы множества U через $a_1, a_2, \dots, a_k$. Рассуждение проведем индукцией по k .

При $k = 1$ множество G_j может быть либо одно $\{a_1\}$, либо два $\{a_1\}$ и $\emptyset$. Искомые подмножества служат либо $\emptyset$, либо $\{a_1\}$ и $\emptyset$ соответственно.

Предположим, что утверждение верно при $k = m$. Покажем, что тогда оно справедливо и при $k = m+1$. Обозначим набор заданных множеств G_j , $j = 1, \dots, J$, через $\mathcal{G}$ и положим $G'_j = G_j \setminus \{a_{m+1}\}$ (если G_j не содержит

элемента a_{m+1} , то $G'_j = G_j$). Пусть J_1 – количество различных множеств среди совокупности множеств G'_j , $j = 1, \dots, J$. В силу предположения индукции существует J_1 различных подмножеств $g_1, \dots, g_{J_1}$ множеств G'_j , дополнение каждого из которых содержит хотя бы одно из множеств G'_j , а значит, и из множеств G_j (здесь мы пользуемся тем, что $a_{m+1} \notin g_i$, $i = 1, \dots, J_1$). Если $J_1 \geq J$, то утверждение доказано: подмножества $g_1, \dots, g_{J_1}$ и будут искомыми.

Предположим теперь, что $J_1 < J$. Так как все множества G_j различны, то среди всех множеств G'_j , $j = 1, \dots, J$, не может быть более двух, равных друг другу. Поэтому имеется ровно $J_2 = J - J_1$ пар $(G_j, G_{j'})$ таких, что $G'_j = G'_{j'} = G_j$. При этом $G_j \in \mathcal{G}$, $a_{m+1} \notin G_j$ и $G_{j'} = G_j \cup \{a_{m+1}\} \in \mathcal{G}$. Возьмем набор $\mathcal{G}'$, состоящий из J_2 различных множеств G_j , входящих в указанные пары. Используя предположение индукции, выделим J_2 различных подмножеств $g'_1, \dots, g'_{J_2}$, дополнение каждого из которых содержит хотя бы одно из множеств $G_j \in \mathcal{G}'$ (некоторые множества g'_i могут совпадать с множествами g_j). Поскольку $a_{m+1} \notin G_j$, то дополнения множеств $h_i := g'_i \cup \{a_{m+1}\}$ тоже содержат хотя бы одно из G_j . Все множества h_i различны и $h_i \neq g_j$, поскольку $a_{m+1} \in h_i$, но $a_{m+1} \notin g_j$. При этом h_i являются подмножествами множеств из $\mathcal{G}$, поскольку $G_j \cup \{a_{m+1}\} \in \mathcal{G}$ при $G_j \in \mathcal{G}'$. Таким образом, множества $g_1, \dots, g_{J_1}, h_1, \dots, h_{J_2}$ и образуют искомую совокупность из J подмножеств.

Пусть заданы положительные числа $s_1, \dots, s_n$. Для каждого вектора $\mathbf{p}^{(k)} = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$, $k = 1, \dots, 2^n$, компоненты которого состоят из минус и плюс единиц, положим

$$S(\mathbf{p}^{(k)}) = \sum_{j=1}^n p_j^{(k)} s_j.$$

ЛЕММА 10.2. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторое множество различных векторов $\mathbf{p}^{(k)}$, причем $\mathcal{A} \subseteq \{\mathbf{p}^{(k)} : S(\mathbf{p}^{(k)}) \leq 0\}$. Тогда найдется множество $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbf{p}^{(k)} : S(\mathbf{p}^{(k)}) \geq 0\}$, обладающее следующими свойствами:

- 1) все векторы из $\mathcal{B}$ различны;
- 2) $\#\mathcal{A} \leq \#\mathcal{B}$;
- 3) каждый вектор $\mathbf{p}' \in \mathcal{B}$ получается из какого-то вектора $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ путем замены определенного количества отрицательных компонент вектора $\mathbf{p}$ (своих для каждого $\mathbf{p}'$) положительными при сохранении всех положительных компонент вектора $\mathbf{p}$ (разные векторы $\mathbf{p}'$ могут получаться из одного и того же вектора $\mathbf{p}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем векторы $\mathbf{p}^{(k)}$ таким образом, что $\mathbf{p}^{(k)} \in \mathcal{A}$, $k = 1, \dots, J$, $\mathbf{p}^{(k)} \notin \mathcal{A}$, $k = J+1, \dots, 2^n$. Обозначим через G_k , $k = 1, \dots, 2^n$, множество номеров отрицательных компонент вектора $\mathbf{p}^{(k)}$. Очевидно, все множества G_k различны и

$$S(\mathbf{p}^{(k)}) \leq 0 \iff \sum_{j \in G_k} s_j \geq \frac{s}{2}, \quad \text{где } s = \sum_{j=1}^n s_j.$$

К множествам G_k , $k = 1, \dots, J$, применим лемму 10.1. Пусть H_k , $k = 1, \dots, I$, $I \geq J$, – различные подмножества, существование которых утверждается в лемме 10.1. Положим

$$\mathbf{p}'^{(k)} = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) : \quad p_j^{(k)} = -1 \quad \text{при } j \in H_k, \quad p_j^{(k)} = 1 \quad \text{при } j \notin H_k. \quad (10.1)$$

Покажем, что $S(\mathbf{p}^{(k)}) \geq 0$, $k = 1, \dots, I$. Действительно, пусть дополнение соответствующего множества H_k содержит множество G_i , $1 \leq i \leq J$. Так как $\mathbf{p}^{(i)} \in \mathcal{A}$, то $S(\mathbf{p}^{(i)}) \leq 0$, и, следовательно, $\sum_{j \in G_i} s_j \geq s/2$. Поэтому $\sum_{j \in H_k} s_j \leq s/2$, т.е. $S(\mathbf{p}^{(k)}) \geq 0$. Справедливость свойств 1) и 2) леммы 10.2 сразу следует из леммы 10.1. Свойство 3) вытекает из (10.1) и того факта, что H_k является подмножеством некоторого множества G_m , $m = 1, \dots, J$, соответствующего вектору $\mathbf{p}^{(m)} \in \mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.3. Из теоремы Холла (см., например, [34]) и из леммы 10.2 вытекает более сильное утверждение, чем лемма 10.2: существует взаимно однозначное соответствие множеств $\mathcal{A} := \{\mathbf{p}^{(k)} : S(\mathbf{p}^{(k)}) \leq 0\}$ и $\mathcal{B} := \{\mathbf{p}^{(k)} : S(\mathbf{p}^{(k)}) \geq 0\}$, обладающее свойством 3) из леммы 10.2. Нам такое усиление не понадобится.

§ 11. Вероятностная лемма Колмогорова и доказательство леммы 8.1

Нам понадобится следующая лемма А. Н. Колмогорова.

ЛЕММА 11.1 (см. [35; лемма IV]). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – взаимно независимые случайные величины, математические ожидания $M\xi_j$ которых равны нулю. Пусть, далее,

$$b_j = M\xi_j^2, \quad B_n = \sum_{j=1}^n b_j, \quad \Xi_n = \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad |\xi_j| \leq m_j, \\ M_n = \max_{1 \leq j \leq n} m_j, \quad W_n(x) = P\{\Xi > x\}.$$

Если $x > 0$, $xM_n/B_n =: \omega < 1/256$, $x^2/B_n =: \Lambda > 512$, то

$$W_n(x) > e^{-(x^2/(2B_n))(1+\varepsilon)}, \quad (11.1)$$

где ε – наибольшее из чисел $32\sqrt{(\ln \Lambda)/\Lambda}$ и $64\sqrt{\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.1. Пусть

$$s_j = \frac{4^{-j}}{l_{j-1}}, \quad M_n = \max_{1 \leq j \leq n} s_j, \quad B_n = \sum_{j=1}^n s_j^2. \quad (11.2)$$

Каждому вектору $\mathbf{p}^{(k)} = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$, $k = 1, \dots, 2^n$, поставим в соответствие число

$$S(\mathbf{p}^{(k)}) = \sum_{j=1}^n p_j^{(k)} s_j.$$

Для фиксированного вектора $\mathbf{q}$, компоненты которого состоят из минус и плюс единиц, введем следующие множества квадратов $E_{n,k}$ (или, другими словами, множества векторов $\mathbf{p}^{(k)}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{q}) &= \{E_{n,k} : \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}, |\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,k})| > 10^{-6}\sqrt{B_n}\}, \\ \mathcal{E}_2(\mathbf{q}) &= \{E_{n,k} : \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}, |\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,k})| \leq 10^{-6}\sqrt{B_n}\}, \\ \mathcal{E}_3(\mathbf{q}) &= \{E_{n,k} : \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}, S(\mathbf{p}^{(k)}) < -23\sqrt{B_n}\}, \\ \mathcal{E}_4(\mathbf{q}) &= \{E_{n,k} : \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}, S(\mathbf{p}^{(k)}) \geq -23\sqrt{B_n}\}. \end{aligned}$$

Докажем неравенство

$$\#\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) > \delta 2^n. \quad (11.3)$$

Предположим сначала, что

$$M_n \geq (23 \cdot 256)^{-1} \sqrt{B_n} > 0.00008 \sqrt{B_n}.$$

Пусть индекс $i \in [1, n]$ такой, что $s_i = M_n$. Каждому вектору $\mathbf{p}^{(k)}$ поставим в соответствие такой вектор $\mathbf{p}^{(m)}$, $m = m(k)$, что $p_i^{(k)} = -p_i^{(m)}$, а остальные компоненты векторов $\mathbf{p}^{(k)}$ и $\mathbf{p}^{(m)}$ совпадают. Очевидно, что $\mathbf{p}^{(m_1)} \neq \mathbf{p}^{(m_2)}$ при $k_1 \neq k_2$. В силу (9.1)

$$|\operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,m}) - \operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,k})| > 0.05 s_i.$$

Если $\mathbf{p}^{(k)} \in \mathcal{E}_2(\mathbf{q})$, то

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,m})| &\geq |\operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,m}) - \operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,k})| - |\operatorname{Re} \mathcal{C} \nu(z_{n,k})| \\ &> 0.05 s_i - 10^{-6} \sqrt{B_n} > (0.05 \cdot 0.00008 - 10^{-6}) \sqrt{B_n} > 10^{-6} \sqrt{B_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{p}^{(m)} \in \mathcal{E}_1(\mathbf{q})$. Поэтому $\#\mathcal{E}_2(\mathbf{q}) \leq \#\mathcal{E}_1(\mathbf{q})$. Отсюда и из очевидного равенства $\#\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) + \#\mathcal{E}_2(\mathbf{q}) = 2^n$ получаем (11.3).

Рассмотрим теперь случай

$$M_n < (23 \cdot 256)^{-1} \sqrt{B_n}. \quad (11.4)$$

Выбор вектора $\mathbf{p}^{(k)}$, $k = 1, \dots, 2^n$, будем считать случайным событием с одинаковой для всех векторов вероятностью, равной 2^{-n} . Тем самым задана случайная величина Ξ_n со значениями $S(\mathbf{p}^{(k)})$. Очевидно, Ξ_n можно интерпретировать как сумму независимых случайных величин ξ_j , $j = 1, \dots, n$, принимающих значения s_j и $-s_j$ с вероятностями $1/2$.

Применим лемму 11.1. В нашем случае $b_j = s_j^2$, $m_j = s_j$ и, следовательно, величины B_n , M_n из леммы 11.1 совпадают с определенными в (11.2). Возьмем

$$x = 23 \sqrt{B_n}.$$

В силу (11.4) $\omega := x M_n / B_n < 1/256$, $\Lambda = 23^2 = 529 > 512$, и условия леммы 11.1 выполнены. Так как

$$\varepsilon < \max(32 \sqrt{(\ln 529)/529}, 4) = 4,$$

то согласно (11.1) $W_n(23 \sqrt{B_n}) > \delta$, где δ – абсолютная постоянная. В силу симметрии закона распределения случайной величины Ξ_n имеем

$$\mathbf{P}\{\Xi_n < -23 \sqrt{B_n}\} > \delta.$$

Это означает, что

$$\#\mathcal{E}_3(\mathbf{q}) > \delta 2^n. \quad (11.5)$$

Рассмотрим множество $\mathcal{A} = \mathcal{E}_2(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_3(\mathbf{q})$. Если $\mathcal{A} = \emptyset$, то $\#\mathcal{A} = 0$ и мы сразу имеем следующие ниже оценки (11.6). Пусть $\mathcal{A} \neq \emptyset$, и пусть $\mathcal{B}$ – множество векторов, соответствующее множеству $\mathcal{A}$ согласно лемме 10.2. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{p}' \in \mathcal{B}$. Он получается из некоторого вектора $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$

заменой определенного количества отрицательных компонент положительными. Обозначим через F множество номеров изменяемых компонент вектора $\mathbf{p}$. Пусть $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(k)}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}^{(m)}$, $\#F = d$. Поскольку $S(\mathbf{p}^{(m)}) \geq 0$, то

$$23\sqrt{B_n} < S(\mathbf{p}^{(m)}) - S(\mathbf{p}^{(k)}) = 2 \sum_{j \in F} s_j.$$

С другой стороны, применяя лемму 9.1 d раз (последовательно для каждой компоненты из F), получаем

$$\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,k}) - \operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,m}) > 0.05 \sum_{j \in F} s_j > \frac{1}{2} \cdot 0.05 \cdot 23\sqrt{B_n} = 0.575\sqrt{B_n},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} & |\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,m})| \\ & \geq |\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,k}) - \operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,m})| - |\operatorname{Re} \mathcal{C}\nu(z_{n,k})| > (0.575 - 10^{-6})\sqrt{B_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_1(\mathbf{q})$. Кроме того, $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_4(\mathbf{q})$ (так как $S(\mathbf{p}') \geq 0$ при $\mathbf{p}' \in \mathcal{B}$). Учитывая, что $\#\mathcal{A} \leq \#\mathcal{B}$, имеем

$$\#(\mathcal{E}_2(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_3(\mathbf{q})) = \#\mathcal{A} \leq \#\mathcal{B} \leq \#(\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_4(\mathbf{q})).$$

Таким образом, для каждого вектора $\mathbf{q}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \#\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) &= \#(\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_3(\mathbf{q})) + \#(\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_4(\mathbf{q})) \\ &\geq \#(\mathcal{E}_1(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_3(\mathbf{q})) + \#(\mathcal{E}_2(\mathbf{q}) \cap \mathcal{E}_3(\mathbf{q})) = \#\mathcal{E}_3(\mathbf{q}) \stackrel{(11.5)}{>} \delta 2^n, \end{aligned} \quad (11.6)$$

и мы пришли к (11.3). Поскольку имеется 2^n различных векторов $\mathbf{q}$ и $\mathcal{E} = \bigcup_{\mathbf{q}} \mathcal{E}_1(\mathbf{q})$, то $\#\mathcal{E} > \delta 4^n$.

§ 12. О сравнении h -обхвата по Хаусдорфу и аналитической емкости

Используемый аппарат позволяет дополнить известные результаты о связи h -обхвата по Хаусдорфу и аналитической емкости γ .

ТЕОРЕМА 12.1. *При условии (4.4) для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$*

$$\gamma(E) \geq C_{13} M_h(E) \left[\int_0^\tau \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \max_{0 < t \leq \tau} \frac{h^2(t)}{t^2} \right]^{-1/2}, \quad (12.1)$$

где τ определено равенством $h(\tau) = M_h(E)$.

Если дополнительно предположить, что выполнено условие (4.6) с $0 < \alpha < \log_3 4$, то для любого $l_0 > 0$ найдется компакт E такой, что

$$\gamma(E) < C(\alpha) M_h(E) \left[\int_0^\tau \frac{h^2(t)}{t^3} dt \right]^{-1/2}, \quad Ch(l_0) \leq h(\tau) = M_h(E) \leq C' h(l_0), \quad (12.2)$$

где постоянная $C(\alpha)$ зависит только от α , а C и C' – абсолютные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 12.1 основано на той же идее, что и доказательство теоремы 4.1, т.е. на использовании вспомогательной меры и применении теорем В и С из § 5. Но построение нужной меры в данном случае значительно проще. Более того, фактически она уже построена: по теореме Фростмана [32; гл. II, теорема 1] существует неотрицательная мера μ , сосредоточенная на E , для которой

$$\mu(E) \geq CM_h(E) \quad (12.3)$$

и $\mu(D(w, r)) \leq h(r)$ для любого круга $D(w, r) \subset \mathbb{C}$. Без ограничения общности можно предполагать, что $\|\mu\| \leq M_h(E)$ (в противном случае разделим μ на константу $\|\mu\|/M_h(E) > 1$). В силу условия (4.4) $h(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Повторяя доказательство леммы 5.2 (см. § 6) при $t_1 = 0$ и $t_2 = \tau$ с очевидными упрощениями (так как $t_1 = 0$), придем к оценке

$$c^2(\mu) \leq 8\|\mu\| \left[\int_0^\tau \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{h^2(\tau)}{2\tau^2} \right] \quad (12.4)$$

(являющейся, по существу, модифицированной формой теоремы 2.2 из [33; с. 198]). Далее,

$$\frac{\mu(D(w, r))}{r} \leq \max_{0 < t \leq \tau} \frac{h(t)}{t} =: a_h < \infty$$

для любого круга $D(w, r) \subset \mathbb{C}$. Как и в доказательстве теоремы 4.1 (§ 5), введем меру $\eta = a_h^{-1}\mu$ и воспользуемся соотношениями (5.1) с η вместо μ и (12.4). Повторяя оценки (5.6), получим

$$\gamma_+(E) \geq C\|\mu\|(a_h^2 + 8I_2)^{-1/2}, \quad \text{где } I_2 := \int_0^\tau \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{h^2(\tau)}{2\tau^2}.$$

Это неравенство вместе с (12.3) сразу приводит к (12.1).

Для построения компакта со свойством (12.2) зафиксируем произвольное число $l_0 > 0$ и определим числа l_j из равенств

$$h(l_j) = 4^{-j}h(l_0), \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.5)$$

Согласно (4.6) $(l_{j+1}/l_j)^\alpha \leq h(l_{j+1})/h(l_j) = 4^{-1}$. Следовательно,

$$l_{j+1}/l_j \leq 4^{-1/\alpha} =: \lambda < 1/3.$$

Положим $E = \bigcap_{n=0}^\infty E_n$, где E_n – построенное выше (§ 2) множество квадратов со сторонами l_j . Применим теперь теорему 4 из [36]: *если $l_{j+1}/l_j \leq \lambda < 1/3$ и E – определенное выше канторово множество, то найдется постоянная C , зависящая только от λ и такая, что*

$$\gamma_+(E_n) < C \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad n \geq 1. \quad (12.6)$$

Оценим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 &= \frac{1}{16} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{4^{1-j}}{l_j} \right)^2 \stackrel{(12.5)}{=} \frac{1}{16h^2(l_0)} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{h(l_{j-1})}{l_j} \right)^2 \\ &> \frac{1}{16h^2(l_0)} \sum_{j=1}^\infty \int_{l_j}^{l_{j-1}} \frac{h^2(t)}{t^3} dt > \frac{C}{M_h^2(E)} \int_0^{l_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt. \end{aligned} \quad (12.7)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 1.2 из [11], согласно которой $Ch(l_0) \leq M_h(E) \leq C'h(l_0)$. Если $l_0 \geq \tau$, то (12.6) и (12.7) совместно с неравенством Толсы $\gamma(E) \leq C\gamma_+(E)$ сразу дают (12.2). Если $l_0 < \tau$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{h^2(t)}{t^3} dt &= \left\{ \int_0^{l_0} + \int_{l_0}^\tau \right\} \frac{h^2(t)}{t^3} dt < \int_0^{l_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + \frac{Ch^2(l_0)}{l_0^2} \\ &\stackrel{(4.6)}{<} \int_0^{l_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt + C' \frac{h^2(l_0/2)}{(l_0/2)^2} < \left\{ \int_0^{l_0} + C'' \int_{l_0/2}^{l_0} \right\} \frac{h^2(t)}{t^3} dt \\ &< (1 + C'') \int_0^{l_0} \frac{h^2(t)}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Эта оценка, объединенная с (12.6), (12.7) и неравенством Толсы, опять приводит к (12.2).

СЛЕДСТВИЕ 12.2. Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$

$$\gamma(E) \geq C(d-1)^{1/2} [M_h(E)]^{1/d}, \quad \text{где } h(t) = t^d, \quad 1 < d \leq 2. \quad (12.8)$$

С другой стороны, для любого $d \in (1, 2]$ найдется компакт E такой, что

$$\gamma(E) < C'(d-1)^{1/2} [M_h(E)]^{1/d}, \quad h(t) = t^d, \quad (12.9)$$

где C и C' – абсолютные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (12.8) непосредственно следует из (12.1). Для доказательства (12.9) положим $\alpha_1 = (1 + \log_3 4)/2$. Пусть C_{14} – абсолютная постоянная, равная значению $C(\alpha_1)$ в (12.2). При $0 < d \leq \alpha_1$ функция $h(t) = t^d$ удовлетворяет условию (4.6) с $\alpha = \alpha_1$. Поэтому (12.9) вытекает из (12.2) с постоянной $C' = \sqrt{2} C_{14}$. При $\alpha_1 < d \leq 2$ возьмем в качестве E круг произвольного радиуса r_0 . Равенство $M_h(E) = r_0^d$ уже доказано (даже в более общей ситуации) – см. начало доказательства теоремы 4.4 в § 8. Равенство $\gamma(E) = r_0$ хорошо известно (см., например, [37; с. 8]). Поэтому (12.9) имеет место с $C' = (\alpha_1 - 1)^{-1/2}$.

При $d > 2$ неравенство (12.8) тривиально, а (12.9) неверно, поскольку в этом случае $M_h(E) = 0$ для любого $E \subset \mathbb{C}$.

Теорема 12.1 и следствие 12.2 дополняют теорему 4.1 и следствие 4.2 из [37], в которых рассматриваются ньютонова емкость $C(E)$, порожденная потенциалом $\int |\zeta - z|^{-1} d|\nu|(\zeta)$, и “непрерывная” аналитическая емкость. Интересно, что для емкости $C(E)$ справедливо утверждение, аналогичное следствию 12.2, но без показателя $1/2$ в правых частях (12.8), (12.9). Имеют место и более общие теоремы – аналоги теоремы 12.1 (см. [37; с. 73–74], [11; предложения 3.1, 3.2 и следствие 3.1]).

Приводимое далее следствие можно рассматривать как аналог классической теоремы Фростмана о связи емкостей, порожденных потенциалами с положительными ядрами, и меры Хаусдорфа Λ_h (см., например, [32; гл. IV, теорема 1]). Применительно к аналитической емкости этот аналог выглядит следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 12.3. Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$ из условия $\gamma(E) > 0$ следует, что $\Lambda_h(E) > 0$ при $h(t) = t$.

С другой стороны, если $\Lambda_h(E) > 0$ для измеряющей функции h , удовлетворяющей условию (4.4), то $\gamma(E) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть следствия 12.3 является переформулировкой классической теоремы Пенлеве и приводится для полноты изложения. Вторая часть сразу следует из (12.1), поскольку мера Хаусдорфа и обхват обращаются в нуль одновременно.

Очевидно, в первой части следствия 12.3 нельзя взять $h(t) = o(t)$ (контрпримером служит отрезок $E = [a, b]$). Теорема 3 из [36] показывает, что и вторая часть является точной: если h удовлетворяет условию (4.6) с $0 < \alpha < \log_3 4$ и интеграл в (4.4) расходится, то найдется компакт E , для которого $\Lambda_h(E) > 0$, но $\gamma(E) = 0$. Поэтому зазор между условиями на h в первой и второй частях следствия 12.3 уменьшить нельзя. Заметим, что этот зазор оказывается все же меньше, чем в случае ньютоновой емкости $C(E)$. Для $C(E)$ импликация

$$\Lambda_h(E) > 0 \implies C(E) > 0$$

верна при более сильном условии $\int_0^\infty t^{-2} h(t) dt < \infty$, чем (4.4).

Достаточность условия (4.4) для положительности аналитической емкости при определенных предположениях была впервые установлена Маттилой [33]. Из теоремы 3.8 в [33] и теоремы Фростмана, примененной в доказательстве теоремы 12.1, также можно вывести следствие 12.3.

Автор признателен профессорам А. Л. Вольбергу, М. А. Гирныку, К. М. Дьяконову, Б. С. Капину, Н. К. Никольскому и доценту Л. В. Кирьяновой за полезное обсуждение работы и библиографические указания.

Заключительная часть работы была выполнена на факультете математики университета Кентукки (Лексингтон, США). Автор благодарен факультету за оказанное гостеприимство.

Список литературы

- [1] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability*, Cambridge Stud. Adv. Math., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [2] В. Я. Эйдерман, “Оценки картановского типа для потенциала Коши”, *Докл. РАН*, **407**:5 (2006), 604–608.
- [3] “Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **45** (1928), 255–346.
- [4] L. V. Ahlfors, “Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen”, *Comment. Phys.-Math.*, **5**:16 (1931), 1–19.
- [5] G. Valiron, *Directions de Borel des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1938.
- [6] A. J. Macintyre, W. H. J. Fuchs, “Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial”, *J. London Math. Soc.*, **15**:3 (1940), 162–168.
- [7] Н. В. Говоров, “Об оценке снизу функции, субгармонической в круге”, *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, **6** (1968), 130–150.
- [8] Н. Н. Мейман, “Об оценке сверху потенциала плоского электростатического поля”, *Докл. АН СССР*, **202** (1972), 1268–1270; англ. пер.: N. N. Meiman, “On an upper bound for the potential of a plane electrostatic field”, *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 285–288.
- [9] W. K. Hayman, “Questions of regularity connected with the Phragmén–Lindelöf principle”, *J. Math. Pures Appl. (9)*, **35** (1956), 115–126.
- [10] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

- [11] В. Я. Эйдерман, “Оценки потенциалов и δ -субгармонических функций вне исключительных множеств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:6 (1997), 181–218; англ. пер.: V. Ya. Eiderman, “Estimates for potentials and δ -subharmonic functions outside exceptional sets”, *Izv. Math.*, **61**:6 (1997), 1293–1329.
- [12] Е. А. Горин, А. Л. Колдобский, “О потенциалах мер в банаховых пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:1 (1987), 65–80.
- [13] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$* , Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
- [14] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, т. 1, Мир, М., 1980; пер. с англ.: W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions*, Vol. I, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1976.
- [15] G. Boole, “On the comparison of transcendents, with certain applications to the theory of definite integrals”, *Philos. Trans. R. Soc.*, **147** (1857), 745–803.
- [16] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [17] S. V. Hruščëv, S. A. Vinogradov, “Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series”, *Complex Analysis and Spectral Theory*, Lecture Notes in Math., **864**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, 171–213.
- [18] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [19] Н. В. Говоров, Ю. П. Лапенко, “Оценки снизу модуля логарифмической производной многочлена”, *Матем. заметки*, **23**:4 (1978), 527–535; англ. пер.: N. V. Govorov, Ju. P. Lapenko, “Lower bounds for the modulus of the logarithmic derivative of a polynomial”, *Math. Notes*, **23**:3–4 (1978), 288–292.
- [20] А. А. Пекарский, “Неравенства для производных рациональных функций в пространствах Лоренца”, *Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, **3** (1997), 14–16.
- [21] J. M. Marstrand, “The distribution of the logarithmic derivative of a polynomial”, *J. London Math. Soc.*, **38** (1963), 495–500.
- [22] Дж. М. Андерсон, В. Я. Эйдерман, “Оценки преобразования Коши точечных масс (логарифмической производной многочлена)”, *Докл. РАН*, **401**:5 (2005), 583–586.
- [23] J. M. Anderson, V. Ya. Eiderman, “Cauchy transforms of point masses: the logarithmic derivative of polynomials”, *Ann. of Math.* (2), **163**:3 (2006), 1057–1076.
- [24] М. С. Мельников, “Аналитическая емкость: дискретный подход и кривизна меры”, *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 57–76; англ. пер.: M. S. Mel’nikov, “Analytic capacity: discrete approach and curvature of measure”, *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 827–846.
- [25] X. Tolsa, “Painlevé’s problem and the semiadditivity of analytic capacity”, *Acta Math.*, **190**:1 (2003), 105–149.
- [26] X. Tolsa, “ L^2 -boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures”, *Duke Math. J.*, **98**:2 (1999), 269–304.
- [27] X. Tolsa, “On the analytic capacity γ_+ ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **51**:2 (2002), 317–344.
- [28] M. Melnikov, X. Tolsa, “Estimate of the Cauchy integral over Ahlfors regular curves”, *Selected topics in complex analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser, Basel, 2005, 159–176.
- [29] X. Tolsa, “Cotlar’s inequality without the doubling condition and existence of principal values for the Cauchy integral of measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **502** (1998), 199–235.
- [30] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, “Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderón–Zygmund operators on nonhomogeneous spaces”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1998**:9 (1998), 463–487.

- [31] A. Volberg, *Calderón–Zygmund capacities and operators on nonhomogeneous spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **100**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [32] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971; пер. с. англ.: L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1967.
- [33] P. Mattila, “On the analytic capacity and curvature of some Cantor sets with non- σ -finite length”, *Publ. Mat.*, **40**:1 (1996), 195–204.
- [34] О. Оре, *Графы и их применение*, УРСС, М., 2002; пер. с. англ.: O. Ore, *Graphs and their uses*, New Math. Library, **34**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.
- [35] A. Kolmogoroff, “Über das Gesetz des iterierten Logarithmus”, *Math. Ann.*, **101**:1 (1929), 126–135; рус. пер.: А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика (сборник статей)*, Наука, М., 1986.
- [36] В. Я. Эйдерман, “Мера Хаусдорфа и емкость, ассоциированная с потенциалами Коши”, *Матем. заметки*, **63**:6 (1998), 923–934; англ. пер.: V. Ya. Eiderman, “Hausdorff measure and capacity associated with Cauchy potentials”, *Math. Notes*, **63**:6 (1998), 813–822.
- [37] J. Garnett, *Analytic capacity and measure*, Lecture Notes in Math., **297**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

В. Я. Эйдерман (V. Ya. Eiderman)

Московский государственный строительный университет

E-mail: neiderman@orc.ru

Поступила в редакцию

03.10.2006 и 03.04.2007