Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 4, 135–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:33:51

УДК 517.938

С. В. Тихонов

Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований

В работе вводится метрика, относительно которой множество перемешивающих сохраняющих меру преобразований является полным сепарабельным метрическим пространством. Исследуются всюду плотные и массивные множества в этом пространстве. Доказывается, что типичное перемешивающее преобразование имеет простой сингулярный спектр, обладает перемешиванием любой кратности, все его степени дизъюнкты между собой. Сверточные степени максимального спектрального типа для таких преобразований взаимно сингулярны, если их показатели отличаются более, чем в два раза. Показано, что сопряженные типичному перемешивающему преобразованию всюду плотны. Также всюду плотны сопряженные любому заранее фиксированному декартову произведению.

Библиография: 28 названий.

Введение

В работе изучаются типичные свойства перемешивающих сохраняющих конечную меру преобразований. В данном случае термин “типичность” требует некоторых пояснений. Все сохраняющие меру преобразования образуют полное сепарабельное метрическое пространство $\mathcal{A}$, и типичное свойство для них – это свойство, выполненное для преобразований из всюду плотного G_δ -множества (т.е. счетного пересечения открытых множеств). С этой точки зрения типичные свойства перемешивающих преобразований (в дальнейшем – перемешиваний) изучать невозможно: перемешивания сами нетипичны в $\mathcal{A}$. Выход из этой ситуации состоит в том, чтобы ввести на множестве перемешиваний собственную метрику, делающую его полным метрическим пространством. Идеальным был бы вариант, при котором такая метрика порождала бы топологию, совпадающую с топологией пространства $\mathcal{A}$. Однако это невозможно по теореме Александрова об абсолютной G_δ (см. [1; гл. 6, задачи, п. Л.]): в этом случае перемешивания были бы типичны в $\mathcal{A}$. Кажется почти очевидным, что искомая метрика должна учитывать предельное поведение степеней преобразования. Таким образом, неформально говоря, перемешивания должны быть близки друг другу, если все их степени достаточно близки друг к другу в топологии пространства $\mathcal{A}$. Метрика с этим свойством существует, и она будет введена ниже.

Прежде чем вводить эту метрику, скажем несколько слов о метриках в пространстве $\mathcal{A}$.

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6849.2006.1).

Пусть (X, Σ, μ) , $\mu(X) = 1$, – пространство Лебега. Зафиксируем счетный набор $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ множеств, порождающий σ -алгебру Σ . На множестве обратимых сохраняющих меру преобразований этого пространства можно ввести две метрики:¹

$$d(T, S) = \sum_i \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \Delta SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \Delta S^{-1}A_i)),$$

$$a(T, S) = \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)|.$$

Обе эти метрики задают одну топологию (см. доказательство вспомогательных утверждений в конце статьи). Относительно метрики d пространство $\mathcal{A}$ полно, относительно a – нет. Возможны два варианта метрики на перемешиваниях: расстояние между T и S задается формулой

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} d(T^k, S^k) \quad \text{или} \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k).$$

Можно показать, что относительно первой метрики пространство перемешиваний несепарабельно, а относительно второй неполно. Правильным является комбинированный вариант:

$$m(T, S) = d(T, S) + \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k).$$

Относительно такой метрики множество перемешиваний $\mathcal{M}$ является полным сепарабельным метрическим пространством.

Первые результаты о типичных свойствах преобразований появились в работах Рохлина [2] и Халмоша [3]. В последнее время интерес к таким свойствам связан, с одной стороны, с новыми методами, появившимися в работе Кинга [4], и с другой – с решением Агеевым [5] проблемы Рохлина об однородном спектре любой кратности категорными методами. Заметим, что перемешивания с двукратным спектром построены Рыжиковым [6], а примеров перемешиваний с однородным спектром конечной кратности большей двух на данный момент не известно.

Настоящая работа состоит из нескольких параграфов: в первом вводится метрика m , показывается, что множество $\mathcal{M}$ перемешиваний с этой метрикой есть полное сепарабельное метрическое пространство. В § 2 изучаются перемешивания, сопряженные с которыми всюду плотны в $\mathcal{M}$. Результаты такого рода являются полезным инструментом при изучении типичных свойств (в случае преобразований таким инструментом является лемма Халмоша о сопряжении). Доказывается, что преобразования, сопряженные типичному перемешиванию, всюду плотны, а также всюду плотны сопряженные любому декартову произведению. Как следствие всюду плотны бернуллиевские сдвиги с фиксированной энтропией.

Далее изучаются свойства типичных перемешиваний. Такими оказываются нулевая энтропия, дизъюнктивность всех степеней преобразования, простой

¹Конечно, можно ввести и другие метрики, например метрику сильной топологии.

и сингулярный спектр, перемешивание любой кратности. Кроме того, показывается взаимная сингулярность сверток максимальных спектральных типов типичного перемешивания, если показатели степеней этих сверток отличаются более, чем в два раза.

В следующем § 4, “для полноты картины”, метрика m рассматривается в пространстве $\mathcal{A}$. Это пространство оказывается полным относительно метрики m и несепарабельным; в нем нет преобразований, сопряженные с которыми всюду плотны.

В § 5 доказываются вспомогательные утверждения, используемые в основном тексте.

Пока введение метрики m порождает больше вопросов, чем ответов; некоторые из них сформулированы в конце работы.

Автор выражает благодарность А. М. Степину, Ж.-П. Туveno и В. В. Рыжикову, с которыми обсуждалась целесообразность введения такой метрики.

Также В. В. Рыжиков сделал несколько полезных замечаний, позволивших, в частности, упростить первоначальную конструкцию и доказательство теоремы 3 и установить типичность трехкратно перемешивающих преобразований в $\mathcal{M}$.

§ 1. Метрика на перемешивающих преобразованиях

Пусть T и S – два обратимых сохраняющих меру преобразования пространства Лебега (X, Σ, μ) , $\mu(X) = 1$, а $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – счетный набор множеств, порождающий σ -алгебру Σ . Мы будем отождествлять T и S и писать $T = S$, если они совпадают с точностью до множества меры нуль. Преобразование T называется перемешиванием, если для любых множеств $A, B \in \Sigma$ имеем $\mu(T^k A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$ при $k \rightarrow \infty$.

На множестве сохраняющих меру преобразований существует стандартная метрика – метрика слабой топологии:

$$d(T, S) = \sum_i \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \Delta SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \Delta S^{-1}A_i)),$$

делающая его полным сепарабельным пространством. Обозначим это пространство через $\mathcal{A}$. Известно [7], что $\mathcal{A}$ – топологическая группа и предбазу окрестностей в $\mathcal{A}$ образуют множества вида

$$\mathcal{U}(T, A_i, \varepsilon) = \{S \mid \mu(TA_i \Delta SA_i) < \varepsilon\}.$$

Наряду с метрикой d мы будем также рассматривать метрику a :

$$a(T, S) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)|.$$

В § 5, посвященном вспомогательным утверждениям, доказано, что эти метрики порождают одинаковую топологию.

Положим

$$m(T, S) = d(T, S) + \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k).$$

Очевидно, что $d(\cdot, \cdot)$ есть метрика, а топология, которую эта метрика порождает, не слабее топологии пространства $\mathcal{A}$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ всех перемешивающих преобразований, снабженное метрикой d .

ЛЕММА 1. *Предбазу окрестностей в $\mathcal{M}$ образуют множества вида*

$$\mathcal{Q}(T, A_i, A_j, \varepsilon) = \left\{ S \mid \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(S^k A_i \cap A_j)| < \varepsilon \right\}.$$

Доказательство этой леммы будет проведено позднее (см. § 5).

ЛЕММА 2. *Пространство $\mathcal{M}$ сепарабельно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что при фиксированных $A, B \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{M}$ существует счетный набор множеств, покрывающий $\mathcal{M}$ и такой, что если два преобразования T и S лежат в одном из этих множеств, то

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(T^k A \cap B) - \mu(S^k A \cap B)| \leq \varepsilon.$$

Пусть

$$\mathcal{O}_p = \left\{ T \mid \sup_{|k| > p} |\mu(T^k A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Пространство $\mathcal{A}$ сепарабельно, и для фиксированного $p \in \mathbb{N}$ его можно покрыть счетной системой множеств $\{\mathcal{Q}_{l,p}\}_{l \in \mathbb{N}}$ таких, что

$$P, Q \in \mathcal{Q}_{l,p} \Rightarrow \sup_{|k| \leq p} |\mu(P^k A \cap B) - \mu(Q^k A \cap B)| < \varepsilon.$$

Набор множеств $\{\mathcal{Q}_{l,p} \cap \mathcal{O}_p\}_{p,l \in \mathbb{N}}$ – искомый. Действительно, он покрывает все пространство и для $T, S \in \mathcal{Q}_{l,p} \cap \mathcal{O}_p$ имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(T^k A \cap B) - \mu(S^k A \cap B)| \\ & \leq \max \left\{ \sup_{|k| \leq p} |\mu(T^k A \cap B) - \mu(S^k A \cap B)|, \right. \\ & \quad \left. \sup_{|k| > p} |\mu(T^k A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| + \sup_{|k| > p} |\mu(S^k A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \right\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ниже, как правило без ссылок, будут использоваться несколько простых оценок, собранных в лемме 10 (см. § 5).

ТЕОРЕМА 1. *$\mathcal{M}$ есть полное сепарабельное метрическое пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сепарабельность $\mathcal{M}$ следует из леммы 2, надо показать его полноту.

Пусть $\{T_i\}$ – фундаментальная последовательность. Тогда она фундаментальна и в пространстве $\mathcal{A}$, где сходится к некоторому преобразованию T . Так как $\mathcal{A}$ – топологическая группа, то при этом $T_i^k \rightarrow T^k$ для любого фиксированного $k \in \mathbb{Z}$. Нам достаточно показать, что T перемешивает и что

$$\sup_k a(T^k, T_i^k) \rightarrow 0,$$

так как $d(T, T_i) \rightarrow 0$ вследствие выбора T .

Поскольку последовательность $\{T_i\}$ фундаментальна, найдется такое i , что при $l, m > i$ и любом k имеем $a(T_l^k, T_m^k) < \varepsilon$. Далее, T_l^k слабо сходится к T^k , значит, существует такое $n(k)$, что $a(T_{n(k)}^k, T^k) < \varepsilon$. Тогда при $m > i$

$$\sup_k a(T^k, T_m^k) \leq \sup_k (a(T^k, T_{n(k)}^k) + a(T_m^k, T_{n(k)}^k)) < 2\varepsilon.$$

Далее, для выбранного m и любых множеств A_i, A_j существует такое число k_0 , что из $|k| > k_0$ следует, что

$$|\mu(T_m^k A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| < \varepsilon.$$

Тогда (см. п. 4) леммы 11) имеем

$$\begin{aligned} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| &\leq |\mu(T_m^k A_i \cap A_j) - \mu(T^k A_i \cap A_j)| \\ &\quad + |\mu(A_i)\mu(A_j) - \mu(T_m^k A_i \cap A_j)| < \varepsilon(2^{i+j+1} + 1), \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности ε , i и j следует перемешивающее свойство преобразования T .

Обоснуем сделанный нами выбор метрики.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пространство $\mathcal{M}$ неполно в метрике*

$$w(T, S) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k)$$

и несепарабельно в метрике

$$r(T, S) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} d(T^k, S^k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $\{T^k\}$ для произвольного перемешивания T .

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и число J , при котором

$$\sum_{i, j > J} \frac{1}{2^{i+j}} < \varepsilon.$$

Выберем такой номер l , что при $|k| > l$

$$|\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| < \frac{\varepsilon}{2^{2J^2}}$$

для всех $0 < i, j \leq J$.

Тогда для $p, n > l$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} w(T^p, T^n) &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^{kp}, T^{kn}) \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i, j \leq J} \frac{1}{2^{i+j}} (|\mu(T^{kp} A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| \\ &\quad + |\mu(T^{kn} A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)|) + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i, j > J} \frac{1}{2^{i+j}} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что последовательность $\{T^k\}$ является фундаментальной в метрике w . Для ее предела S имеем

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} (|\mu(S^k A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)|) = 0,$$

что невозможно.

Рассмотрим теперь метрику r . Пусть $\bigotimes X_i$ – пространство, состоящее из бесконечных в обе стороны последовательностей элементов X . Это пространство изоморфно единичному отрезку с мерой Лебега, и, не теряя общности, можно считать, что множество A_1 лежит в нулевой координатной σ -алгебре. Преобразование π , сдвигающее вправо все элементы каждой последовательности, является бернуллиевским сдвигом и, значит, перемешивает. Пусть T – произвольное перемешивающее преобразование. Для каждого множества $J \subset \mathbb{Z}$ рассмотрим преобразование T_J , переводящее j -ю координату x_j каждой последовательности в Tx_j , если $j \in J$, и оставляющее на месте все остальные координаты. Тогда набор преобразований $\{\pi T_J\}_J$ несчетен и r -расстояние между любыми двумя преобразованиями не меньше, чем

$$r(\pi T_{J_1}, \pi T_{J_2}) \geq \sup_{k \in \mathbb{Z}} d((\pi T_{J_1})^k, (\pi T_{J_2})^k) \geq d((\pi T_{J_1})^k, (\pi T_{J_2})^k),$$

где k выбирается как первый (все равно, в какую сторону) номер координаты, принадлежащей $J_1 \Delta J_2$. Тогда

$$\begin{aligned} r(\pi T_{J_1}, \pi T_{J_2}) &\geq \sum_i \frac{1}{2^i} \mu((\pi T_{J_1})^k A_i \Delta (\pi T_{J_2})^k A_i) \\ &\geq \frac{1}{2} \mu((\pi T_{J_1})^k A_1 \Delta (\pi T_{J_2})^k A_1) = \frac{1}{2} \mu(TA_1 \Delta A_1). \end{aligned}$$

Поскольку множество A_1 не является инвариантным относительно T , это расстояние отделено от нуля константой, не зависящей от J_1 и J_2 .

§ 2. Всюду плотные множества

При изучении типичных свойств преобразований важную роль играет лемма Халмоша о сопряжении, показывающая, в каких случаях сопряженные данному преобразованию всюду плотны в $\mathcal{A}$.

Здесь мы докажем два утверждения в этом направлении: что сопряженные типичному перемешиванию и сопряженные любому декартову произведению всюду плотны (теоремы 2 и 3 соответственно).

Через $\bigotimes T_i$ обозначим прямое произведение преобразований $T_1, \dots, T_n, \dots$, действующее на счетном произведении пространств Лебега $X_1 \times \dots \times X_n \times \dots$. На этом произведении рассматривается мера $\bigotimes \mu$, являющаяся произведением мер пространств $\{X_i\}$ (см., например, [8; гл. 5, § 6, п. 2]).

Известно, что $(X_1 \times \dots \times X_n \times \dots)$ также является пространством Лебега (см. [2]) и имеет метрический изоморфизм V с пространством X . Таким образом, $V^{-1}(\bigotimes T_i)V$ есть некоторое сохраняющее меру преобразование X . Если

множество преобразований вида $\{V^{-1}(\otimes T_i)V\}_V$ всюду плотно в $\mathcal{M}$, то, допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что сопряженные преобразованию $\otimes T_i$, действующему на $(X_1 \times \cdots \times X_n \times \cdots)$, всюду плотны в $\mathcal{M}$.

Доказательство следующей леммы основано на идее, появившейся в [9].

ЛЕММА 3. *Если $\{T_i\}$ – счетный всюду плотный в $\mathcal{M}$ набор преобразований, то сопряженные преобразованию $\otimes T_i$ всюду плотны в $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что мы можем с любой точностью приблизить каждое преобразование T_j . Зафиксируем некоторую его окрестность $\mathcal{Q}(T_j, A, B, \varepsilon)$. Следующая простая выкладка показывает, что попадает или нет преобразование $V(\otimes T_j)V^{-1}$ в эту окрестность – не зависит от того, куда изоморфизм V переводит, например, множество $T_i^2 A$, а зависит лишь от того, куда V переводит множества A и B :

$$\mu(V^{-1}(\otimes T_i^k)VA \cap B) - \mu(T_j^k A \cap B) = \mu((\otimes T_i^k)VA \cap VB) - \mu(T_j^k A \cap B)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. Возьмем изоморфизм V таким, что

$$\begin{aligned} VA &= X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots, \\ VB &= X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times B \times X_{j+1} \times \cdots. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда для любого k имеем

$$\begin{aligned} &\mu((\otimes T_i^k)VA \cap VB) - \mu(T_j^k A \cap B) \\ &= \mu((\otimes T_i^k)(X_1 \times \cdots \times A \times X_{j+1} \times \cdots) \cap (X_1 \times \cdots \times B \times X_{j+1} \times \cdots)) \\ &\quad - \mu(T_j^k A \cap B) \\ &= \mu(X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times (T_i^k A \cap B) \times X_{j+1} \times \cdots) - \mu(T_j^k A \cap B) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$V(\otimes T_i)V^{-1} \in \mathcal{Q}(T_j, A, B, \varepsilon).$$

Окрестность $\mathcal{Q}(T_j, A, B, \varepsilon)$ не произвольная, а является элементом базы окрестностей, поэтому надо показать, что проведенные рассуждения верны и для конечного пересечения элементов базы. Достаточно взять V таким, чтобы оно удовлетворяло требованиям (1) для всех этих элементов.

ЛЕММА 4. *Пусть $U \in \mathcal{A}$. Тогда отображение $\tilde{U}: T \mapsto U^{-1}TU$ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим окрестность $\mathcal{Q}(U^{-1}TU, A_i, A_j, \varepsilon)$ преобразования $U^{-1}TU$ и окрестность $\mathcal{Q}(T, UA_i, UA_j, \varepsilon)$ преобразования T . Тогда

$$\begin{aligned} &P \in \mathcal{Q}(T, UA_i, UA_j, \varepsilon) \\ \Rightarrow &\varepsilon > \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(T^k UA_i \cap UA_j) - \mu(P^k UA_i \cap UA_j)| \\ &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(U^{-1}T^k UA_i \cap A_j) - \mu(U^{-1}P^k UA_i \cap A_j)| \\ \Rightarrow &U^{-1}PU \in \mathcal{Q}(U^{-1}TU, A_i, A_j, \varepsilon). \end{aligned}$$

Напомним, что подмножество метрического пространства имеет тип G_δ , если его можно представить как счетное пересечение открытых множеств.

ТЕОРЕМА 2. *Множество перемешиваний, сопряженные с каждым из которых всюду плотны, имеет тип G_δ и всюду плотно в пространстве $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{T_i\}$ – счетный всюду плотный в $\mathcal{M}$ набор преобразований. Множество W преобразований, сопряженные с которыми всюду плотны, состоит в точности из тех перемешиваний, которые можно сопряжением перевести в каждое из множеств

$$\mathcal{O}_n(T_i) = \left\{ S \mid d(T_i, S) < \frac{1}{n} \right\}, \quad i, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$W = \bigcap_{i,n} \{S \mid \exists U: U^{-1}SU \in \mathcal{O}_n(T_i)\}.$$

Покажем, что все множества из правой части равенства открыты. Зафиксируем i, n, S, U . Поскольку $\tilde{U}(T): T \rightarrow U^{-1}TU$ – непрерывное отображение, то прообраз окрестности точки $P = U^{-1}SU$ будет содержать и некоторую окрестность точки S .

Всюду плотность следует из инвариантности W относительно сопряжений и леммы 3.

Хотя эта теорема показывает, как ведет себя типичное перемешивающее преобразование, она не дает никаких критериев, гарантирующих всюду плотность совокупности сопряженных тому или иному преобразованию.

Башней (Рохлина) для преобразования T называется пара $(E \in \Sigma, n \in \mathbb{N})$, если множества $E, TE, \dots, T^{n-1}E$ попарно не пересекаются. Последние называются *этажами башни*, а число n – ее *высотой*.

Крепостью назовем набор башен, этажи которых не пересекаются между собой. Если объединение этажей этих башен покрывает все пространство, то будем говорить о *крепости полной меры*.

Преобразование T называется *апериодическим*, если множество

$$\{x \in M \mid \exists n \neq 0: T^n x = x\}$$

имеет меру нуль.

По поводу следующей леммы см. [10], [11].

ЛЕММА 5. *Для любых апериодического преобразования T и натурального числа k существует крепость полной меры $\{(E, k), (G, k+1)\}$.*

ТЕОРЕМА 3. *Для любых перемешивающих преобразований T и S сопряженные их декартову произведению всюду плотны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое преобразование Q . Пусть A и B – произвольные множества и V – метрический изоморфизм из X в $X \times X$,

переводящий A и B в $A \times X$ и $B \times X$ соответственно. Покажем, что для фиксированного ε можно так выбрать преобразование P , сопряженное $T \times S$, что $P \in \mathcal{Q}(Q, A, B, 2\varepsilon)$.

Для построения нужного преобразования нам понадобятся параметры, характеризующие “скороности перемешивания” T и Q .

Пусть $k > 1/\varepsilon$ – натуральное число такое, что

$$|t| > \varepsilon k \quad \Rightarrow \quad |\mu(Q^t A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя, если надо, к преобразованию, сопряженному T , можно считать выполненной импликацию

$$|t| < 2k \quad \Rightarrow \quad |\mu(Q^t A \cap B) - \mu(T^t A \cap B)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем g такое, что

$$|t| \geq g \quad \Rightarrow \quad |\mu(T^t A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем также число n , удовлетворяющее неравенствам $(k+1)/(nk) < \varepsilon/2$ и $n > g$.

По лемме 5 можно построить крепость полной меры $\{(E, nk), (G, nk+1)\}$ для преобразования S .

Через E_i и G_i обозначим i -е этажи башен (E, nk) и $(G, nk+1)$ соответственно.

Пусть $b_i = 3^{i-1}g$ при $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что каждое $s \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $|s + b_i - b_j| < g$ не более чем для одной пары i, j , $1 \leq i \neq j \leq n$.

Через $f(y)$ обозначим функцию, ставящую в соответствие точке y число b_i , если номер этажа башни, в котором располагается y , меньше $(i+1)k$ и не меньше ik , и число b_n при $y \in G_{nk+1}$.

Преобразование P будет взято в виде косоого произведения

$$P = U^{-1}(T \times S)U, \quad \text{где } U(x, y) = (T^{f(y)}x, y).$$

В этом случае $P^t(x, y) = (T^{-f(y)+t+f(S^t y)}x, S^t y)$.

Мы разобьем пространство на несколько множеств по типу поведения точки (x, y) в зависимости от y и степени t .

- Множество H_1 состоит из тех y , для которых $f(y) = f(S^t y)$. В этом случае $P^t(x, y) = (T^t x, S^t y)$.
- Множество H_2 состоит из тех точек y , которые не лежат в H_1 и для которых $|t - f(y) + f(S^t y)| < g$. Из свойств функции f следует, что при $f(y_1) \neq f(S^t y_1)$ имеем

$$|t - f(y_1) + f(S^t y_1)| < g, \quad |t - f(y_2) + f(S^t y_2)| < g \quad \Rightarrow \quad f(y_1) = f(y_2).$$

Следовательно, при $t \geq g$ мера множества H_2 оценивается сверху мерой этажей крепости, соответствующих одному и тому же числу b_i при некотором i . Наихудший вариант здесь возникает, когда $i = n$, в этом случае

$$\mu(H_2) \leq (k+1)\mu(E \sqcup G) < \frac{k+1}{nk}.$$

– Множество H_3 состоит из всех оставшихся точек. Множество H_3 является объединением множеств

$$H_{3i} = \{y \mid P^t(x, y) = (T^i x, S^t y)\}$$

при $i \in \mathbb{N}$, $|i| \geq g$. Так как

$$\begin{aligned} & \left| \mu(P^t(A \times H_{3i}) \cap (B \times S^t H_{3i})) - \mu(A)\mu(B)\mu(H_{3i}) \right| \\ &= \left| \mu((T^i A \times S^t H_{3i}) \cap (B \times S^t H_{3i})) - \mu(A)\mu(B)\mu(H_{3i}) \right| \\ &= \left| \mu(T^i A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| \mu(H_{3i}) < \frac{\varepsilon}{2} \mu(H_{3i}), \end{aligned}$$

то в этом случае

$$\left| \mu(P^t(A \times H_3) \cap (B \times S^t H_3)) - \mu(A)\mu(B)\mu(H_3) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \mu(H_3).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V^{-1}P^t V A \cap B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| = \left| \mu(P^t(A \times X) \cap (B \times X)) - \mu(Q^t A \cap B) \right| \\ & \leq \sum_{i=1,2,3} \left| \mu(P^t(A \times H_i) \cap (B \times S^t H_i)) - \mu(Q^t A \cap B)\mu(H_i) \right| \\ & \leq \mu(H_1) \left| \mu(T^t A \cap B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| + 2\mu(H_2) + \frac{\varepsilon}{2} \mu(H_3) \\ & \quad + \left| \mu(A)\mu(B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| \mu(H_3). \end{aligned}$$

Дальнейшая оценка зависит от t .

Если $t \geq g$, то

$$\begin{aligned} & \left| \mu(P^t(A \times H_1) \cap (B \times S^t H_1)) - \mu(A)\mu(B)\mu(H_1) \right| \\ &= \mu(H_1) \left| \mu(T^t A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \mu(H_1). \end{aligned}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V^{-1}P^t V A \cap B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| \\ & < \mu(H_1) \left| \mu(A)\mu(B) - \mu(T^t A \cap B) \right| + 2\mu(H_2) + \frac{\varepsilon}{2} \mu(H_3) \\ & \quad + \left| \mu(A)\mu(B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| (\mu(H_1) + \mu(H_3)) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Если $k < t < g < nk$, то мера множества H_1 равна нулю, так как $f(y)$ меняется за время k , но не успевает вернуться в начальное положение за время меньше nk . В этом случае

$$\begin{aligned} & \left| \mu(V^{-1}P^t V A \cap B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| \\ & < 2\mu(H_2) + \frac{\varepsilon}{2} \mu(H_3) + \left| \mu(A)\mu(B) - \mu(Q^t A \cap B) \right| \mu(H_3) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Если $k\varepsilon < t \leq k$, то оба модуля не превосходят $\varepsilon/2$, следовательно, вся сумма не более 2ε .

Наконец, если $t \leq k\varepsilon$, то первый модуль не более $\varepsilon/2$, а мера множества H_3 не превосходит $kn\varepsilon/(kn) = \varepsilon$.

Таким образом, во всех случаях

$$|\mu(P^t(A \times X) \cap (B \times X)) - \mu(Q^t A \cap B)| \leq 2\varepsilon.$$

Выбор чисел k , g и n зависит от рассматриваемой окрестности. Заметим, что эти числа можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли соответствующим неравенствам для любого заранее фиксированного конечного набора окрестностей. Поэтому можно построить преобразование, сопряженное $T \times S$ и попадающее во все окрестности одновременно.

Определение и свойства гауссовских систем, упомянутых в следующем утверждении, можно найти, например, в [12].

СЛЕДСТВИЕ. *Сопряженные гауссовской динамической системе и бернуллиевскому сдвигу с любой энтропией всюду плотны.*

Действительно, и те и другие преобразования представляются как декартовы произведения, значит, сопряженные с ними всюду плотны.

§ 3. Типичность

Напомним, что множество имеет тип G_δ , если оно является счетным пересечением открытых множеств; *массивным множеством* называется всюду плотное G_δ -множество в метрическом пространстве. Свойство, выполненное для массивного множества элементов метрического пространства, называется *типичным*. Наконец, выражение “*типичен элемент, обладающий свойством C* ” означает, что свойство C типично.

О преобразованиях, типичных в $\mathcal{A}$, накоплено много информации. Конечно, не все из типичных свойств преобразований являются таковыми и для перемешиваний (это почти тавтология: свойство не быть перемешиванием типично в $\mathcal{A}$). Однако топология пространства $\mathcal{M}$ сильнее топологии пространства автоморфизмов, что позволяет в некоторых случаях сводить вопрос о массивности того или иного семейства перемешиваний к вопросу о его всюду плотности и соответствующему факту для автоморфизмов.

Через $\mathbf{i}$ обозначим отображение $T \mapsto T$ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{A}$. Это отображение непрерывно, следовательно, прообраз каждого G_δ -множества является множеством того же типа (см., например, [13]).

Дизъюнктность. Два преобразования T и S называются *дизъюнктными*, если на $X \times X$ существует только одна мера, инвариантная относительно $T \times S$, координатные проекции которой совпадают с мерой Лебега μ . Заметим, что эта единственная мера есть мера $\mu \otimes \mu$. Более общо, *счетное семейство преобразований $\{T_j\}$ дизъюнктно*, если для любого конечного множества индексов J существует единственная мера, инвариантная относительно декартова произведения преобразований с индексами из J , координатные проекции которой совпадают с мерой Лебега. Понятие дизъюнктности ввел Фюрстенберг [14], в дальнейшем оно исследовалось многими авторами. Основные “категорные” результаты получены дель Юнко [15] и приведены ниже.

ЛЕММА 6. Следующие множества массивны в $\mathcal{A}$:

- множество преобразований, дизъюнктных фиксированному эргодическому преобразованию;
- множество преобразований T таких, что $\{T^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – дизъюнктное семейство;
- при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ множество преобразований T таких, что $\{T^k\}_{k \in [-n, n]}$ – дизъюнктное семейство.

Рудольф [16] построил перемешивание $\tilde{S}$ такое, что семейство $\{\tilde{S}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ дизъюнктно.

ТЕОРЕМА 4. Типичны перемешивающие преобразования T , для которых семейство $\{T^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ дизъюнктно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения следует, что свойство дизъюнктности наследственно, т.е. если оно выполняется для некоторого семейства преобразований, то это свойство выполнено и для любого его подсемейства. Поэтому достаточно показать, что для фиксированного числа $n \in \mathbb{N}$ множество преобразований T , для которых семейство $\{T^k\}_{k \in [-n, n]}$ дизъюнктно, является массивным. Это множество имеет тип G_δ как прообраз множества такого же типа при отображении $\mathbf{i}$. Покажем, что оно всюду плотно.

Для фиксированного $l > n$ перемешивание $Q = \tilde{S} \times \tilde{S}^l$ и все его степени до $l - 1$ включительно дизъюнкты. Действительно, если $j, k \in \{1, \dots, l - 1\}$, $j \neq k$, то преобразования $\tilde{S}^j \times \tilde{S}^{lj}$ и $\tilde{S}^k \times \tilde{S}^{lk}$ суть декартовы произведения различных степеней $\tilde{S}$ ($lj \neq lk$, так как $j \neq k$ и $lj > l - 1 > k$). Предположим, что некоторая мера инвариантна относительно декартова произведения $\bigotimes_{j=1, \dots, l-1} Q^j$ и ее координатными проекциями являются меры Лебега. “Координатные” в данном случае – это проекции на пространства, на которых действуют степени преобразования $\tilde{S} \times \tilde{S}^l$, т.е. на пространства вида $X \times X$; однако проекции меры на каждое пространство X в этом случае тоже окажутся лебеговыми как проекции лебеговой меры. По свойству преобразования $\tilde{S}$ исходная мера единственна.

Осталось заметить, что сопряженные такому преобразованию всюду плотны в $\mathcal{M}$ по теореме 3.

СЛЕДСТВИЕ. Существует несчетное дизъюнктное семейство перемешиваний.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим перемешивание T такое, что все его степени дизъюнкты, и найдем максимальное дизъюнктное семейство перемешиваний, содержащее $\{T^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Предположим, что это семейство $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ счетно. Зафиксируем конечное множество $J \in \mathbb{N}$ и рассмотрим декартово произведение преобразований $\{S_i\}_{i \in J}$. Множество перемешиваний, дизъюнктных этому преобразованию, имеет тип G_δ (как прообраз множества такого типа при отображении $\mathbf{i}$, см. лемму 6) и содержит декартово произведение всех остальных перемешиваний в семействе и сопряженные этому произведению. По теореме 3 это множество массивно. Взяв пересечение таких множеств по всем конечным $J \in \mathbb{N}$, получим массивное множество перемешиваний, дизъюнктных

семейству $\{S_i\}_{i \in J}$, что противоречит максимальнойности последнего. Значит, это семейство не может быть счетным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это утверждение также можно вывести из результатов Абдалаи о дизъюнктности. Приведенное здесь доказательство представляется более простым технически. В. В. Рыжиков сообщил автору, что в качестве несчетного дизъюнктного семейства преобразований можно взять множество ненулевых элементов любого перемешивающего потока ранга 1.

Энтропия. Относящиеся сюда определения и свойства энтропии можно найти, например, в [12]. Нам важно, что преобразования с нулевой энтропией имеют тип G_δ в $\mathcal{A}$ [17] и энтропия декартова произведения равна сумме энтропий сомножителей.

ТЕОРЕМА 5. *Типичное перемешивающее преобразование имеет нулевую энтропию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемешивания с нулевой энтропией имеют тип G_δ как прообраз множества такого же типа при отображении $\mathbf{i}$. Существуют перемешивания с нулевой энтропией (такowymi являются перемешивания с конечно-кратным спектром, см. [18], например перемешивания ранга 1). Надо лишь заметить, что для каждого перемешивающего преобразования T с нулевой энтропией преобразование $T \times T$ также имеет нулевую энтропию и сопряженные ему всюду плотны.

Спектр. С каждым обратимым сохраняющим меру преобразованием T можно связать унитарный оператор, действующий по формуле U_T : $U_T f = f \circ T$ на пространстве $L_2^0(X)$ функций с интегрируемым квадратом и нулевым средним. *Максимальным спектральным типом* преобразования T называется максимальный спектральный тип соответствующего унитарного оператора (обозначение σ_T), а *функцией кратности* $k(T)$ – функция кратности соответствующего оператора. Напомним, что спектральный тип – это класс эквивалентных мер на единичной окружности комплексной плоскости. Если функция кратности оператора тождественно равна 1, то говорят, что преобразование имеет *простой спектр*. Если максимальный спектральный тип преобразования взаимно сингулярен с мерой Лебега на окружности, то говорится о *сингулярном спектре*.

Простой спектр типичен [19], сингулярность спектра типичного преобразования следует из взаимной сингулярности сверточных степеней его максимального спектрального типа² [20].

ТЕОРЕМА 6. *Типичное перемешивающее преобразование имеет простой спектр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [21] существует перемешивающее гауссовское преобразование T с простым спектром. Такие преобразования бесконечно делимы, следовательно, сопряженные с T всюду плотны в $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}$ –

²Ниже будет дано определение этого понятия.

сепарабельные пространства, то можно выбрать счетное семейство преобразований $\{U_i\}$ таких, что множество $\{U_i^{-1}TU_i\}$ всюду плотно и в $\mathcal{M}$, и в $\mathcal{A}$. Далее [5; лемма 2], существует последовательность окрестностей $\{\mathcal{O}_i(U_i^{-1}TU_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ в $\mathcal{A}$ каждого из этих преобразований такая, что любое преобразование из множества

$$\bigcap_k \bigcup_{i \geq k} \mathcal{O}_i(U_i^{-1}TU_i)$$

имеет простой спектр. Прообраз каждого из пересекаемых множеств при отображении вложения $\mathcal{M}$ в $\mathcal{A}$ открыт (так как множества открыты) и всюду плотен, так как содержит перемешивания, сопряженные T с помощью преобразований $\{U_i\}_{i \geq k}$. Значит, прообраз всего пересечения является пересечением счетного числа всюду плотных открытых множеств, т.е. массивным множеством.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как преобразования с простым спектром имеют нулевую энтропию, то из последнего результата также следует типичность нулевой энтропии, доказанная нами напрямую.

Сингулярность спектральных типов сверточных степеней. Пусть $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$ – декартово произведение преобразований, действующее на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Пространство $L_2^0(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ разлагается в прямую сумму пространств

$$\bigoplus_{J \subset \{1, \dots, n\}, J \neq \emptyset} L_2^0(J),$$

являющихся замыканием линейной оболочки функций вида $f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n$, где $f_i \in L_2^0(X)$ при $i \in J$ и $f_i = 1$ при $i \notin J$. Эти пространства инвариантны относительно $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$. *Сверткой* максимальных спектральных типов преобразований $T_1, \dots, T_n$ называется максимальный спектральный тип оператора $U_{T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n}$, суженного на $L_2^0(\{1, \dots, n\})$; соответствующее обозначение таково:

$$\bigast_{i \in \{1, \dots, n\}} \sigma_{T_i} = \sigma_{T_1} \ast \dots \ast \sigma_{T_n}.$$

Если все $T_1, \dots, T_n$ совпадают с T , то эта свертка называется n -й *сверточной степенью* максимального спектрального типа преобразования T и обозначается σ_T^{*n} .

Заметим, что максимальный спектральный тип самого произведения $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$ представляется в виде

$$\sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, J \neq \emptyset} \bigast_{j \in J} \sigma_{T_j}.$$

Взаимная сингулярность спектральных типов сверточных степеней преобразования является типичным свойством [22].

ЛЕММА 7. Пусть $s_1, \dots, s_n$ и $q_1, \dots, q_m$ – два конечных набора (возможно, повторяющихся) натуральных чисел. Тогда множество преобразований T , для которых свертки

$$\sigma_{T^{s_1}} \ast \dots \ast \sigma_{T^{s_n}} \quad \text{и} \quad \sigma_{T^{q_1}} \ast \dots \ast \sigma_{T^{q_m}}$$

взаимно сингулярны, есть G_δ -множество в $\mathcal{A}$.

Доказательство ничем не отличается от доказательства леммы 1.4 из [23]. Нам понадобится результат, анонсированный в [6] (см. также [24], [25]).

ЛЕММА 8. *Существует перемешивание $\tilde{T}$, все сверточные степени максимального спектрального типа которого взаимно сингулярны:*

$$\sigma_{\tilde{T}}^{*k} \perp \sigma_{\tilde{T}}^{*m}$$

при $k \neq m$.

ТЕОРЕМА 7. *Типичны перемешивания T , для которых*

$$k > 2n \quad \Rightarrow \quad \sigma_T^k \perp \sigma_T^n.$$

В частности, при $k > 2$ имеем

$$\sigma_T \perp \sigma_T^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем преобразование $\tilde{T} \times \tilde{T}$ для $\tilde{T}$ из леммы 8. Свертки максимального спектрального типа такого преобразования представляются в виде

$$(\sigma_{\tilde{T}} + \sigma_{\tilde{T}}^{*2})^{*n} = \sum_{i=n}^{2n} \sigma_{\tilde{T}}^{*i} \quad \text{и} \quad (\sigma_{\tilde{T}} + \sigma_{\tilde{T}}^{*2})^{*k} = \sum_{i=k}^{2k} \sigma_{\tilde{T}}^{*i}.$$

При $k > 2n$ все максимальные спектральные типы справа в первом выражении взаимно сингулярны с аналогичными максимальными спектральными типами во втором выражении вследствие выбора $\tilde{T}$. По теореме 3 сопряженные $\tilde{T} \times \tilde{T}$ всюду плотны в $\mathcal{M}$, и поскольку множество перемешиваний с требуемым свойством инвариантно относительно сопряжений, то оно всюду плотно. Для доказательства массивности осталось применить лемму 7.

ЗАМЕЧАНИЕ. Опираясь на результат [6], нетрудно показать, что множество перемешиваний T , для которых $\sigma_T \perp \sigma_T^{*2}$, есть непустое G_δ -множество. Однако установить его всюду плотность не удастся, так как оно заведомо не содержит декартовых произведений.

Преобразование называется n -кратно перемешивающим, если для любых множеств $B_1, \dots, B_n \in \Sigma$ имеем

$$\mu(B_1 \cap T^{k_1} B_2 \cap \dots \cap T^{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}} B_n) \rightarrow \mu(B_1)\mu(B_2) \cdots \mu(B_n)$$

при $k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \rightarrow \infty$.

Вопрос о том, следует ли перемешивание любой кратности из двукратного, — один из самых известных нерешенных вопросов в эргодической теории.

СЛЕДСТВИЕ. *Типичное перемешивание обладает перемешиванием любой кратности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемешивания, удовлетворяющие условию $\sigma_T \perp \sigma_T^{*3}$, обладают сингулярным спектром (если спектр T не сингулярен, то σ_T^{*3} содержит лебеговскую компоненту и, следовательно, не может быть взаимно сингулярен с σ_T). Для перемешивающих преобразований с сингулярным спектром перемешивание любой кратности установлено Остом [26].

§ 4. Метрика t в пространстве сохраняющих меру преобразований

ТЕОРЕМА 8. *Пространство $\mathcal{A}$ t -полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{T_i\}$ – фундаментальная последовательность; она фундаментальна и в пространстве сохраняющих меру преобразований с метрикой d . В этом пространстве она сходится к некоторому преобразованию T . Так как $\mathcal{A}$ – топологическая группа, то при этом $T_i^k \rightarrow T^k$ для любого фиксированного $k \in \mathbb{Z}$. Достаточно показать, что $\sup_k (T^k, T_i^k) \rightarrow 0$.

Зафиксируем некоторый номер l такой, что для $n > l$ имеем

$$\sup_k (T_n^k, T_l^k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как T_n^k слабо сходятся к T^k , то существует такой номер l_0 , зависящий от k , что $a(T_{l_0}^k, T^k) < \varepsilon/2$.

Тогда для всех $n > l$ имеем

$$a(T_n^k, T^k) \leq a(T_{l_0}^k, T_n^k) + a(T_{l_0}^k, T^k) \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности k заключаем, что $\sup_k (T^k, T_i^k) \rightarrow 0$.

Назовем преобразование T *жестким относительно целочисленной последовательности $\{b_i\}$* , если $T^{b_i} \rightarrow I$ в слабой топологии пространства $\mathcal{A}$ при $i \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 9. *Пусть $\{a_i\}$ – целочисленная последовательность. Множество преобразований T , жестких относительно некоторой подпоследовательности в $\{a_i\}$, массивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$\bigcap_i \bigcup_{j>i} \left\{ T \mid d(T^{a_j}, I) < \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Это множество является всюду плотным G_δ -множеством как счетное пересечение открытых множеств. Каждое из преобразований, лежащих в этом множестве, жесткое по некоторой подпоследовательности последовательности $\{a_i\}$. Нетрудно убедиться и в обратном: любое подобное преобразование лежит в данном множестве.

Покажем, что при фиксированном j множество

$$\bigcup_{j>i} \left\{ T \mid d(T^{a_j}, I) < \frac{1}{2^i} \right\}$$

всюду плотно, из этого будет следовать требуемое утверждение. По лемме Халмоша о сопряжении для этого, в свою очередь, достаточно существования одного апериодического преобразования, удовлетворяющего условию $d(T^{a_j}, I) < 1/2^i$. Рассмотрев любой перемешивающий поток $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ и взяв T_α с α , достаточно близким к нулю, получим требуемое преобразование.

ТЕОРЕМА 9. *Пространство $\mathcal{A}$ несепарабельно в метрике t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$c = \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| > 0.$$

Рассмотрим все возможные подмножества $\mathcal{A}$, состоящие из слабо перемешивающих преобразований, m -расстояние между любыми двумя из которых не меньше c . На таких подмножествах можно ввести отношение частичного порядка, а именно: одно из множеств меньше другого, если оно полностью в нем содержится. Любое возрастающее семейство таких множеств имеет верхнюю грань – объединение всех множеств в семействе. По лемме Цорна существует максимальный элемент, скажем, множество A . Предположим, что оно счетно. Для каждого преобразования T_j из A существует последовательность $\{a_i\}$, на которой оно перемешивает. По лемме 9 существует массивное множество B_j преобразований, жестких по некоторой подпоследовательности $\{b_i\}$ последовательности $\{a_i\}$. Рассмотрим любое слабо перемешивающее преобразование S из массивного множества $\bigcap_j B_j$ (поскольку множество слабо перемешивающих преобразований само массивно, см. [7], то такие S существуют). Расстояние между S и любым элементом T_j множества A не меньше c , так как

$$\begin{aligned} \sup_k (T_j^k, S^k) &\geq \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(T_j^{b_k} A_i \cap A_j) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S^{b_k} A_i \cap A_j) \right| \\ &\geq \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(A_i \cap A_j) - \mu(A_i)\mu(A_j)| = c. \end{aligned}$$

Это противоречит максимальнойности множества A . Значит, A несчетно.

В заключение докажем, что сопряженные с любым сохраняющим меру преобразованием не могут быть всюду плотны в пространстве A , снабженном метрикой m .

ЛЕММА 10. Для любого преобразования T отображение $U \mapsto U^{-1}TU$ из пространства $\mathcal{A}$ с метрикой d в пространство $\mathcal{A}$ с метрикой m непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $V \in \mathcal{U}(U, A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(U, B, \varepsilon)$, то для всех k имеем

$$\begin{aligned} |\mu(V^{-1}T^kVA \cap B) - \mu(U^{-1}T^kUA \cap B)| &= |\mu(T^kVA \cap VB) - \mu(T^kUA \cap UB)| \\ &\leq \mu(VA \Delta UA) + \mu(VB \Delta UB) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Сопряженные любому преобразованию не могут быть плотны в пространстве $\mathcal{A}$ с метрикой m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{U_i\}$ – счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{A}$, то вследствие предыдущей леммы m -замыкание счетного семейства преобразований $\{U_i^{-1}TU_i\}$ совпадает с m -замыканием семейства $\{U^{-1}TU\}$. Однако оно не может быть всем пространством, так как последнее несепарабельно.

§ 5. Вспомогательные факты

В следующей лемме собраны несколько простых соотношений, часто используемых в тексте.

ЛЕММА 11. *Имеют место следующие соотношения:*

- 1) если $\mu(A) = \mu(C)$, то $|\mu(A \Delta B) - \mu(C \Delta B)| = 2|\mu(A \cap B) - \mu(C \cap B)|$;
- 2) $|\mu(A \cap B) - \mu(C \cap B)| \leq \frac{1}{2}\mu(A \Delta C)$;
- 3) $|\mu(A \cap B) - \mu(C \cap D)| \leq \frac{1}{2}\mu(A \Delta C) + \frac{1}{2}\mu(D \Delta B)$;
- 4) $|\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)| \leq 2^{i+j}a(T, S)$;
- 5) если $\mu(A \Delta (\bigsqcup_{i \in I} A_i)) < \varepsilon$, $\mu(B \Delta (\bigsqcup_{j \in J} A_j)) < \varepsilon$ и P, Q – некоторые преобразования, то

$$\left| \mu(PA \cap B) - \mu(QA \cap B) \right| - \left| \sum_{i \in I, j \in J} (\mu(PA_i \cap A_j) - \mu(QA_i \cap A_j)) \right| < 2\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это утверждение – простое следствие следующих равенств:

$$\begin{aligned} & |\mu(A \Delta B) - \mu(C \Delta B)| \\ &= |\mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B) - (\mu(C) + \mu(B) - 2\mu(C \cap B))| \\ &= |(\mu(A) - \mu(C)) + 2(\mu(C \cap B) - \mu(A \cap B))| = 2|\mu(A \cap B) - \mu(C \cap B)|. \end{aligned}$$

2) Имеем

$$\begin{aligned} & |\mu(A \cap B) - \mu(C \cap B)| \\ &= |\mu(A \cap C \cap B) + \mu((A \setminus C) \cap B) - (\mu(A \cap C \cap B) + \mu((C \setminus A) \cap B))| \\ &\leq \mu(A \setminus C) = \frac{1}{2}\mu(A \Delta C). \end{aligned}$$

3) Действительно,

$$\begin{aligned} |\mu(A \cap B) - \mu(C \cap D)| &\leq |\mu(A \cap B) - \mu(C \cap B)| + |\mu(C \cap B) - \mu(C \cap D)| \\ &\leq \frac{1}{2}\mu(A \Delta C) + \frac{1}{2}\mu(D \Delta B). \end{aligned}$$

4) Это неравенство немедленно следует из простой оценки

$$\sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)| \geq \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)|.$$

5) Обозначим $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ и $\bigsqcup_{j \in J} A_j$ через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответственно. Так как разность двух модулей не превышает модуля разности их подмодульных выражений, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left| \mu(PA \cap B) - \mu(QA \cap B) \right| - \left| \sum_{i \in I, j \in J} (\mu(PA_i \cap A_j) - \mu(QA_i \cap A_j)) \right| \right| \\ & \leq \left| \mu(PA \cap B) - \mu(QA \cap B) - \sum_{i \in I, j \in J} (\mu(PA_i \cap A_j) - \mu(QA_i \cap A_j)) \right| \\ & = \left| \mu(PA \cap B) - \mu(QA \cap B) - \mu(P\tilde{A} \cap \tilde{B}) + \mu(Q\tilde{A} \cap \tilde{B}) \right| \\ & \leq \left| \mu(PA \cap B) - \mu(P\tilde{A} \cap \tilde{B}) \right| + \left| \mu(QA \cap B) - \mu(Q\tilde{A} \cap \tilde{B}) \right|. \end{aligned}$$

Это выражение оценивается сверху (см. выше) величиной

$$\frac{1}{2}(\mu(PA \triangle P\tilde{A}) + \mu(B \triangle \tilde{B}) + \mu(QA \triangle Q\tilde{A}) + \mu(B \triangle \tilde{B})) \leq 2\varepsilon.$$

ЛЕММА 12. *Топология, порождаемая метрикой a , задается базой окрестностей вида*

$$\mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon) = \{S \mid |\mu(TA \cap B) - \mu(SA \cap B)| < \varepsilon\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что множества $\mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon)$ открыты. Формально надо показать, что каждое множество такого вида содержит некоторую a -окрестность *любого* лежащего в ней преобразования. Однако для преобразования Y , лежащего в $\mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon)$, можно указать множество $\mathcal{O}(Y, A, B, \varepsilon(Y)) \subset \mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon)$, поэтому достаточно ограничиться преобразованием T . Пусть I и J – такие конечные множества индексов, что

$$\mu\left(A \triangle \left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right)\right) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mu\left(B \triangle \left(\bigsqcup_{j \in J} A_j\right)\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Рассмотрим множество преобразований S таких, что

$$a(T, S) < \delta = \frac{\varepsilon}{\#I * \#J * 2^{\max\{i:i \in I\} + \max\{j:j \in J\} + 1}}.$$

Здесь решетка обозначает число элементов в конечном множестве. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \mu(TA \cap B) - \mu(SA \cap B) \right| & < \frac{2\varepsilon}{4} + \left| \sum_{i \in I, j \in J} (\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)) \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i \in I, j \in J} 2^{i+j} a(T, S) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon)$ – открытое множество.

Докажем далее, что в любой δ -окрестности преобразования T находится конечное пересечение нескольких окрестностей вида $\mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon)$. Пусть множество $I = \{1, \dots, n\}$ таково, что

$$\sum_{i, j \in \mathbb{N} \setminus I} \frac{1}{2^{i+j}} < \frac{\delta}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 S &\in \bigcap_{i,j \in I} \mathcal{O}\left(T, A_i, A_j, \frac{\delta}{2n^2}\right) \\
 \Rightarrow a(T, S) &= \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)| \\
 &< \sum_{i,j \in I} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)| + \frac{\delta}{2} < \delta.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 13. *Топологии, порождаемые метриками a и d , совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$S \in \mathcal{O}(T, A, TA, \varepsilon).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \mu(TA \triangle SA) &= |\mu(TA \triangle SA) - \mu(TA \triangle TA)| \\
 &= 2|\mu(SA \cap TA) - \mu(TA \cap TA)| < 2\varepsilon \Rightarrow S \in \mathcal{U}(T, A, 2\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $S \in \mathcal{U}(T, A, \varepsilon)$. Тогда

$$|\mu(TA \cap B) - \mu(SA \cap B)| \leq \mu(TA \triangle SA) < \varepsilon \Rightarrow S \in \mathcal{O}(T, A, B, \varepsilon).$$

ЛЕММА 14. *Топология, порожденная метрикой*

$$w(T, S) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k),$$

совпадает с топологией, порожденной m -метрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в каждой m -окрестности преобразования T найдется w -окрестность того же преобразования. Пусть

$$\mathcal{O}_m(T) = \left\{ S \mid d(T, S) + \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k) < \varepsilon \right\}.$$

Так как топологии пространства $\mathcal{A}$, порожденные метриками a и d , совпадают, то существует такое $\delta > 0$, что

$$a(T, S) < \delta \Rightarrow d(T, S) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда искомая w -окрестность T задается неравенством $w(T, S) < \min\{\delta, \varepsilon/2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Рассмотрим множество

$$\left\{ S \mid \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k) < \varepsilon \right\}.$$

Зафиксируем такой номер l , что

$$\sum_{i>l, j>l} \frac{1}{2^{i+j}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и систему множеств

$$\left\{ \mathcal{Q}\left(T, A_i, A_j, \frac{\varepsilon}{4l^2}\right) \right\}_{i,j \leq l}.$$

Если преобразование S лежит в пересечении этих множеств, то

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{Z}} a(T^k, S^k) &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(S^k A_i \cap A_j)| \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i \leq l, j \leq l} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(S^k A_i \cap A_j)| + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i>l, j>l} \frac{1}{2^{i+j}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Осталось показать, что $\mathcal{Q}(T, A_i, A_j, \varepsilon)$ – открытое множество. Для этого согласно предыдущей лемме достаточно установить, что любая окрестность такого вида содержит некоторую w -окрестность T .

Имеем

$$w(T, S) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(T^k A_i \cap A_j) - \mu(S^k A_i \cap A_j)| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{i+j} a(T^k, S^k) \leq \varepsilon.$$

Вопросы

Многие из формулируемых здесь вопросов связаны между собой, так что ответ на один из них может прояснить ответы и на другие.

Плотность. Существуют ли перемешивающие преобразования, сопряженные с которыми не всюду плотны? Если да, то каковы критерии всюду плотности сопряженных к данному перемешиванию?

В этой связи возникает следующий вопрос: можно ли указать перемешивание T такое, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого множества B , $\mu(B) = 1/2$, найдется число $k \neq 0$, для которого

$$|\mu(T^k B \cap B) - \mu^2(B)| > \varepsilon?$$

Заметим, что сопряженные с таким перемешиванием не могут быть всюду плотны в $\mathcal{M}$. Следовательно, типичные перемешивания и любые декартовы произведения этим свойством не обладают.

Как сообщил автору В. В. Рыжиков, он располагает доказательством того, что таких перемешиваний не существует.

Более общо, пусть $\{\beta_i\}$ – конечный набор положительных чисел, сумма которых не больше единицы. Существуют ли такие перемешивание T и число $\varepsilon > 0$, что для любого набора непересекающихся множеств $\{B_i \mid \mu(B_i) = \beta_i\}$ найдутся такие числа i, j и $k \neq 0$, что

$$|\mu(T^k B_i \cap B_j) - \beta_i \beta_j| > \varepsilon?$$

Ранг 1. Являются ли типичными перемешивания ранга 1? Такие преобразования обладают рядом специфических свойств, и положительный ответ на этот вопрос дал бы много информации о типичных перемешиваниях. Кроме того, значительная часть примеров перемешивающих преобразований строится в классе преобразований ранга 1, и хотелось бы знать, насколько полно этот класс описывает все множество перемешиваний.

Заметим также, что типичность перемешиваний ранга 1 эквивалентна их всюду плотности. Вследствие этого общий вопрос можно переформулировать следующим образом: существует ли окрестность бернуллиевского сдвига с бесконечной энтропией, в которой нет перемешиваний ранга 1?

Квадратный корень и вложение в поток. Проблема существования квадратного корня из типичного преобразования была положительно решена Кингом [4]. Затем последовала серия работ, обобщающих полученные Кингом утверждения. Наиболее сильным на данный момент является результат Степина и Еременко [27] о наличии бесконечномерного тора в централизаторе типичного преобразования (как следствие отсюда вытекает наличие у такого преобразования континуума корней любой степени и вкладываемость в континуум потоков; см. также результат автора [28] о том, что корни типичного преобразования, лежащие в наперед заданном массивном множестве, образуют множество мощности континуума).

Типичны ли перемешивания, имеющие корень? Специфика доказательства Кинга заключается в том, что не дается явного массивного множества преобразований, имеющих корни. Такое множество можно выделить, но, возможно, в нем не окажется ни одного перемешивания или лежащие в нем перемешивания не будут всюду плотны в $\mathcal{M}$.

В любом случае, одно из двух типичных свойств преобразований – иметь ранг 1 и иметь квадратный корень – нетипично для перемешиваний.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что доказательство Кинга основано на исследовании точек локальной плотности отображения $T \mapsto T^2$ (преобразование называется точкой локальной плотности отображения, если образ любой его окрестности плотен в некоторой окрестности образа этого преобразования).

Существуют ли точки локальной плотности для отображения $T \mapsto T^2$ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$? Более частный вопрос: являются ли точками локальной плотности автоморфизмы Бернулли?

Список литературы

- [1] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1968; пер. с англ.: J. L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, Toronto–New York–London, 1955.
- [2] В. А. Рохлин, “Об основных понятиях теории меры”, *Матем. сб.*, **25(67)** (1949), 107–150; англ. пер.: V. A. Rohlin, “On the fundamental ideas of measure theory”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **71** (1952), 1–55.
- [3] P. R. Halmos, “In general a measure preserving transformation is mixing”, *Ann. of Math.* (2), **45:4** (1944), 786–792.
- [4] J. L. F. King, “The generic transformation has roots of all orders”, *Colloq. Math.*, **84–85:2** (2000), 521–547.

- [5] O. Ageev, “The homogeneous spectrum problem in ergodic theory”, *Invent. Math.*, **160**:2 (2005), 417–446.
- [6] V. V. Ryzhikov, “Homogeneous spectrum, disjointness of convolutions, and mixing properties of dynamical systems”, *Selected Russian Mathematics*, **1**:1 (1999), 13–24.
- [7] П. Р. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, ИЛ, М., 1959; РХД, **12**, Удмурдский ун-т, Ижевск, 1999; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Publications of the Mathematical Society of Japan, **3**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1956.
- [8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 6-е изд., Наука, М., 1989; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [9] E. Glasner, J.-P. Thouvenot, B. Weiss, “Every countable group has the weak Rohlin property”, *Bull. London Math. Soc.*, **38**:6 (2006), 932–936.
- [10] S. Alpern, “Return times and conjugates of an antiperiodic transformation”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1**:2 (1981), 135–143.
- [11] В. В. Рыжиков, “Представление преобразований, сохраняющих меру Лебега, в виде произведения периодических преобразований”, *Матем. заметки*, **38**:6 (1985), 860–865; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “Representation of transformations preserving the Lebesgue measure in the form of a product of periodic transformations”, *Math. Notes*, **38**:5–6 (1985), 978–981.
- [12] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, S. V. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [13] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, vol. I, Academic Press, New York–London; PWN, Warszawa, 1966.
- [14] H. Furstenberg, “Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation”, *Math. Systems Theory*, **1**:1 (1967), 1–49.
- [15] A. del Junco, “Disjointness of measure-preserving transformations, minimal self-joinings and category”, *Ergodic theory and dynamical systems. I* (College Park, MD, 1979–80), Progr. Math., **10**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981, 81–89.
- [16] D. J. Rudolph, “An example of a measure preserving map with minimal self-joinings, and applications”, *J. Anal. Math.*, **35** (1979), 97–122.
- [17] В. А. Рохлин, “Об энтропии метрического автоморфизма”, *Докл. АН СССР*, **124** (1959), 980–983.
- [18] В. А. Рохлин, “Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой”, *УМН*, **22**:137 (1967), 3–56; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations”, *Russian Math. Surveys*, **22**:5 (1967), 1–52.
- [19] С. А. Юзвинский, “О метрических автоморфизмах с простым спектром”, *Докл. АН СССР*, **172**:5 (1967), 1036–1038; англ. пер.: S. A. Yuzvinskii, “Metric automorphisms with simple spectrum”, *Soviet Math. Dokl.*, **8** (1967), 243–245.
- [20] А. М. Степин, “Спектральные свойства типичных динамических систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 801–834; англ. пер.: A. M. Stepin, “Spectral properties of generic dynamical systems”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:1 (1987), 159–192.
- [21] И. В. Гирсанов, “О спектрах динамических систем, порождаемых гауссовскими стационарными процессами”, *Докл. АН СССР*, **119** (1958), 851–853.
- [22] А. М. Степин, “О связи аппроксимативных и спектральных свойств метрических автоморфизмов”, *Матем. заметки*, **13** (1973), 403–409; англ. пер.: A. M. Stepin, “Connections between the approximative and spectral properties of metric automorphisms”, *Math. Notes*, **13**:3 (1973), 244–247.
- [23] A. del Junco, M. Lemanczyk, “Generic spectral properties of measure-preserving maps and applications”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:3 (1992), 725–736.

- [24] El H. El Abdalaoui, “On the spectrum of the powers of Ornstein transformations”, *Sankhyā Ser. A*, **62**:3 (2000), 291–306.
- [25] В. В. Рыжиков, “О спектральных и перемешивающих свойствах конструкций ранга 1 в эргодической теории”, *Докл. РАН*, **409**:4 (2006), 448–450; англ. пер.: V. V. Ryzhikov, “On the spectral and mixing properties of rank-one constructions in ergodic theory”, *Dokl. Math.*, **74**:1 (2006), 545–547.
- [26] B. Host, “Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum”, *Israel J. Math.*, **76**:3 (1991), 289–298.
- [27] А. М. Степин, А. М. Еременко, “Неединственность включения в поток и общирность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 95–108; англ. пер.: A. M. Stepin, A. M. Eremenko, “Non-unique inclusion in a flow and vast centralizer of a generic measure-preserving transformation”, *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1795–1808.
- [28] С. В. Тихонов, “Вложение действий евклидовой решетки в потоки с многомерным временем”, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 97–132; англ. пер.: S. V. Tikhonov, “Embedding lattice actions in flows with multidimensional time”, *Sb. Math.*, **197**:1 (2006), 95–126.

С. В. Тихонов (S. V. Tikhonov)

Российский государственный
торгово-экономический университет
E-mail: Tikhonovc@mail.ru

Поступила в редакцию
04.10.2006