Общероссийский математический портал

К. А. Зубрилин, Об идеале Бэра в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли, *Матем. сб.*, 1998, том 189, номер 12, 73–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 06:34:00

УДК 512

К. А. Зубрилин

Об идеале Бэра в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли

Исследована структура идеала Бэра конечно порожденной алгебры произвольной конечной сигнатуры над произвольным полем или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, удовлетворяющей системе тождеств Капелли порядка $n + 1$.

Доказано, что длина бэровской цепочки идеалов в такой алгебре не превосходит n . Доказано, что факторалгебра такой алгебры по наибольшему нильпотентному идеалу представима.

Библиография: 10 названий.

Для всякой алгебры A сигнатуры Ω можно определить идеал Бэра $B(A)$ при помощи трансфинитной индукции. Пусть $B_0(A) = (0)$. Для любого ординала α , если он непереломный, т.е. имеет вид $\alpha = \beta + 1$, полагаем $B_\alpha(A)$ как полный прообраз суммы всех нильпотентных идеалов в $A/B_\beta(A)$. Если α пределен, то $B_\alpha(A) = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta(A)$. Согласно принципу трансфинитной индукции найдется ординал α такой, что $B_\alpha(A) = B_{\alpha+1}(A)$. Тогда идеал $B_\alpha(A)$ назовем *идеалом Бэра алгебры A* . Нетрудно видеть, что $B(A)$ является полупервичным идеалом алгебры A и содержится в любом другом полупервичном идеале алгебры A (см. [1]). Бэровская цепочка идеалов может быть определена для алгебры произвольной сигнатуры.

Говорят, что алгебра удовлетворяет системе тождеств Капелли порядка n , если всякий полином, полилинейный и кососимметричный по некоторым n своим переменным, является тождеством этой алгебры.

Тождества Капелли могут быть определены для произвольной сигнатуры, хотя первоначально тождества Капелли рассматривались только для ассоциативных алгебр (см. [2]).

Тождества Капелли, с одной стороны, являются естественным обобщением тождества коммутативности и тождества ассоциативности. Если бинарная алгебра удовлетворяет тождествам Капелли порядка 2, то эта алгебра коммутативна и ассоциативна. С другой стороны, выполнение тождеств Капелли может рассматриваться как обобщение свойства конечномерности алгебры, поскольку во всякой m -мерной алгебре выполняются тождества Капелли порядка $m + 1$.

Впервые тождества Капелли были введены в рассмотрение Ю. П. Размысловым в [2] в связи с решением проблемы радикала ассоциативной PI-алгебры.

Комбинаторные аспекты тождеств Капелли произвольной сигнатуры изучались Размысловым в [3]. В этой же работе была построена структурная теория алгебр произвольной конечной сигнатуры над полем нулевой характеристики, удовлетворяющих системе тождеств Капелли некоторого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01088).

Развитию структурной теории алгебр произвольной конечной сигнатуры над полем произвольной характеристики или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, удовлетворяющих системе тождеств Капелли некоторого порядка, посвящены работы [4]–[7]. В этих работах показано, что структурная теория таких алгебр является содержательной и многие результаты о структуре ассоциативных PI-алгебр и конечномерных алгебр могут быть перенесены на случай алгебр произвольной конечной сигнатуры, удовлетворяющих тождествам Капелли некоторого порядка.

В [7] доказано, что для всякой конечно порожденной алгебры L произвольной конечной сигнатуры над полем произвольной характеристики или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, удовлетворяющей тождествам Капелли некоторого порядка, существует наибольший нильпотентный идеал $N(L)$, т.е. идеал $B_1(L)$ является (наибольшим) нильпотентным идеалом.

В [5] доказано, что идеал Бэра $B(L)$ конечно порожденной алгебры L произвольной конечной сигнатуры над полем произвольной характеристики или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, удовлетворяющей тождествам Капелли некоторого порядка, совпадает с $B_s(L)$ для некоторого $s \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Структуру бэровского идеала алгебры, удовлетворяющей тождествам Капелли, описывает

ТЕОРЕМА 1. Пусть L – конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры Ω над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C и C -алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли порядка $n + 1$. Тогда в алгебре L идеал Бэра $B(L)$ совпадает с $B_n(L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра L над кольцом C называется *представимой*, если эта алгебра может быть вложена как C -подалгебра в $\tilde{C}$ -алгебру $\tilde{L}$, где $\tilde{C}$ – конечно порожденная коммутативно-ассоциативная C -алгебра, $\tilde{L}$ – конечно порожденный $\tilde{C}$ -модуль.

В работе [6] автором доказано, что во всякой конечно порожденной алгебре L над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C , удовлетворяющей тождествам Капелли порядка $n + 1$, найдется нильпотентный идеал I такой, что класс нильпотентности идеала I не превосходит n и алгебра L/I представима. Ранее эта теорема была доказана Размысловым в [3] для алгебры над полем нулевой характеристики, затем автором в [5] – для алгебры над произвольным полем или нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом, причем в обоих случаях утверждалось, что класс нильпотентности идеала I не превосходит $2^{n+1} - 2$. В [3], [6] был указан способ построения идеала I , и этот идеал был назван препятствием к представимости.

Новым результатом о представимости является

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры Ω над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C и C -алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли некоторого порядка. Тогда алгебра $L/N(L)$, где $N(L)$ – наибольший нильпотентный идеал алгебры L , представима.

В конечно порожденной ассоциативной PI-алгебре L по теореме Брауна–Кемера–Размыслова всегда $B(L) = B_1(L) = N(L)$ (см. [8], [9]). В этом случае

алгебра $L/N(L)$ полупервична, а значит, представима по теореме Капланского (см. [10]). Поэтому теоремы 1, 2 можно рассматривать как обобщения теорем Брауна–Кемера–Размыслова и Капланского, соответственно, на случай конечно порожденных алгебр конечной сигнатуры, удовлетворяющих тождествам Капелли некоторого порядка, над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом.

Из определения бэровской цепочки идеалов и теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть L – конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры Ω над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C и C -алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли некоторого порядка. Тогда алгебра $L/B_q(L)$, где $B_q(L)$ – элемент с номером q из бэровской цепочки идеалов алгебры L , представима.

При доказательстве теорем 1, 2 существенно используются структурные теоремы и комбинаторные методы из [3]–[7].

§ 1. Предварительные сведения и определения

Пусть C – коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей. Будем понимать под C -алгеброй сигнатуры Ω C -модуль A , на котором для каждого $\omega \in \Omega$ определена C -полилинейная операция с “арностью” $n = n(\omega)$

$$\omega: \underbrace{A \otimes_C A \otimes_C \cdots \otimes_C A}_{n \text{ раз}} \rightarrow A.$$

Для всякой C -алгебры A сигнатуры Ω обозначим через $D(A)$ ассоциативную C -алгебру, которая порождена в $\text{End}_C A$ единичным оператором и всеми элементами вида $f(\hat{x}_0, x_1, \dots, x_q)|_{x_1=v_1, \dots, x_q=v_q}$, где $f(x_0, \dots, x_q)$ – полином из абсолютно свободной C -алгебры сигнатуры Ω , который линеен по x_0 , и по определению $f(\hat{x}_0, v_1, \dots, v_q) \times v = f(v, v_1, \dots, v_q)$ для всех $v \in A$. Если A – бинарная алгебра, то алгебра $D(A)$ называется *алгеброй левых и правых умножений, ассоциированной с алгеброй A* .

Алгебра A обладает канонической структурой левого $D(A)$ -модуля. Эта структура задается естественным вложением алгебры $D(A)$ в алгебру $\text{End}_C A$. Идеалами алгебры A называют подмодули $D(A)$ -модуля A .

Дополнительно будем предполагать, что среди сигнатурных операций алгебры A имеется операция, “арность” которой ≥ 2 .

Будем говорить, что идеал I алгебры A сигнатуры Ω является произведением идеалов $I_1, \dots, I_q$ алгебры A , если идеал I порожден элементами вида

$$g|_{x_1=v_1, \dots, x_q=v_q, \dots, x_r=v_r},$$

где $g(x_1, \dots, x_q, \dots, x_r)$ – полином из абсолютно свободной C -алгебры сигнатуры Ω , полилинейный по $x_1, \dots, x_q$ и зависящий, быть может, от других переменных x_i , $q < i$; $v_i \in I_i$, $1 \leq i \leq q$, и $v_i \in A$, если $i > q$. Будем писать в этом случае, что $I = (I_1 \dots I_q)$. Произведение идеалов, определенное таким образом, является коммутативным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Идеал I алгебры A сигнатуры Ω называется *нильпотентным класса n* , если

$$\underbrace{(I \dots I)}_{n \text{ раз}} \neq (0), \quad \underbrace{(I \dots I)}_{n+1 \text{ раз}} = (0).$$

Алгебра A сигнатуры Ω называется *полупервичной*, если алгебра A не содержит nilпотентных идеалов.

Иногда вместо $\underbrace{(I \dots I)}_{n \text{ раз}}$ мы будем писать I^n .

Отметим, что сумма двух или любого конечного числа nilпотентных идеалов является nilпотентным идеалом, поскольку идеал $\sum_{i=1}^m I_i$, где I_i , $1 \leq i \leq m$, — nilпотентный идеал класса n_i алгебры A сигнатуры Ω , nilпотентен в алгебре A класса не выше $\sum_{i=1}^m n_i$.

Пусть $\text{Car}_n(L)$ — идеал алгебры L , порожденный элементами вида

$$f|_{x_1=w_1, \dots, x_n=w_n, x_{n+1}=w_{n+1}, \dots},$$

где f — произвольный полином сигнатуры Ω , который полилинеен и кососимметричен по переменным $x_1, \dots, x_n$ и, возможно, зависит от других переменных типа x ; $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots$ — произвольные элементы из алгебры L . Из определения идеала $\text{Car}_n(L)$ следует, что алгебра $L/\text{Car}_n(L)$ удовлетворяет системе тождеств Капелли порядка n . В частности, $\text{Car}_1(L) = L$.

В работах [3], [6] доказана

ЛЕММА 1. Для всякой алгебры L сигнатуры Ω и множества переменных $x_1, x_2, \dots$ существует алгебра $\bar{L}$ той же сигнатуры Ω такая, что

- а) алгебра L является подалгеброй алгебры $\bar{L}$ и алгебра $\bar{L}$ порождена алгеброй L и элементами $x_1, x_2, \dots$;
- б) любое отображение множества $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ в алгебру $\bar{L}$ однозначно продолжается до гомоморфизма алгебры $\bar{L}$ в себя, тождественного на L ;
- в) элемент $f(x_1, \dots, x_q) \in \bar{L}$, который является полиномом сигнатуры Ω от $x_1, \dots, x_q$ и, возможно, от элементов алгебры L , равен нулю тогда и только тогда, когда $f(v_1, \dots, v_q) = 0$ в L для любых $v_1, \dots, v_q \in L$.

Алгебра $\bar{L}$ определена однозначно и является факторалгеброй свободного произведения свободной алгебры сигнатуры Ω со свободными образующими $x_1, x_2, \dots$ и алгебры L по идеалу обобщенных тождеств алгебры L .

Очевидно, что множества тождеств алгебры L и $\bar{L}$ совпадают, т.е. $\text{var } L = \text{var } \bar{L}$.

Элементы алгебры $\bar{L}$ можно рассматривать как полиномы сигнатуры Ω от переменных типа x : $x_i, i \in \mathbb{N}$, с коэффициентами из алгебры L .

В [6] доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть конечно порожденная C -алгебра L конечной сигнатуры удовлетворяет системе тождеств Капелли порядка $n + 1$. Тогда существуют такие коммутативная и ассоциативная C -алгебра Φ с единицей и идеал J Φ -алгебры $\Phi \otimes_C L$, что идеал $J \cap L$ алгебры L nilпотентен

класса не выше n и в C -алгебре Φ существует такая конечно порожденная C -подалгебра Φ' , что Φ' -модуль $\Phi' \cdot L/L \cap J$ конечно порожден.

Там же показано, что в качестве Φ можно взять кольцо полиномов $\Phi(L) = C[\sigma_q(a) : a \in D(L), 1 \leq q \leq n]$, где $\sigma_q(a)$, $a \in D(L)$, $1 \leq q \leq n$, являются свободными коммутирующими переменными. Будем считать, что $\sigma_0(a) = 1_C$ для всех $a \in D(L)$. И там же показано, что в качестве J можно взять $J(L)$ – идеал $\Phi(L)$ -алгебры $\Phi(L) \otimes_C L$, порожденный элементами вида

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \sigma_q(a) \otimes a^{n-q} \times v,$$

где $v \in L$, $a \in D(L)$.

Пусть идеал W_n алгебры $\bar{L}$ – это наименьший идеал алгебры $\bar{L}$ среди тех идеалов, которые

- 1) содержат все элементы вида $d_n(x_1, \dots, x_n)$, где $d_n(x_1, \dots, x_n)$ – элемент алгебры $\bar{L}$, полилинейный и кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_n$ и зависящий, быть может, от других переменных типа x ;
- 2) замкнуты относительно всех гомоморфизмов алгебры $\bar{L}$ в себя, которые являются тождественным отображением на L и переводят переменные типа x в переменные типа x .

Отметим, что идеал W_n содержит все элементы алгебры $\bar{L}$, полилинейные и кососимметричные по n переменным типа x , и $W_n \subset \text{Car}_n(\bar{L})$.

В [6] доказана

ЛЕММА 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ – полином сигнатуры Ω , полилинейный по $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, кососимметричный по $x_1, \dots, x_n$ и зависящий, может быть, от других переменных. Тогда полином

$$f - \sum_{j=1}^n f|_{x_j=x_{n+1}, x_{n+1}=x_j} \quad (1)$$

кососимметричен по $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$.

В [7] доказана

ЛЕММА 3. Пусть в алгебре L конечной сигнатуры Ω над нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C выполняются тождества Капелли порядка $n+1$. Тогда $(W_n \cdot J(\bar{L})) \cap \bar{L} = (0)$.

Рассмотрим абсолютно свободную C -алгебру F сигнатуры Ω от свободных образующих типа x : $x_1, x_2, \dots$ и типа z : $z_1, z_2, \dots$. Пусть сигнатура Ω содержит операции “арности” не выше d .

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_q, z_1, \dots)$ – произвольный моном из алгебры F сигнатуры Ω , полилинейный по $x_1, x_2, \dots, x_q$ и зависящий, быть может, от переменных типа z . Зафиксируем натуральное s . Тогда для $q \geq d \cdot s$ после перенумерации переменных типа x и типа z моном f имеет вид:

$$f_1(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots)|_{z_1=f_2},$$

где моном f_1 полилинеен по $x_1, \dots, x_m, z_1$ и зависит, быть может, от других переменных типа z , моном f_2 полилинеен по $x_{m+1}, \dots, x_q$ и зависит, быть может, от переменных типа z , причем $s \leq q - m < d \cdot s$ (см. [7]).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующую лемму, представляющую самостоятельный интерес.

ЛЕММА 4. Положим $R \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cap}_n(L) \cap B(L)$. Тогда $R \subseteq B_1(L)$.

Для доказательства леммы 4 достаточно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Для любых $r, t > 0$ найдется такое натуральное l , что

$$R^l \subseteq (R^r)^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Зафиксируем r . Если $t = 1$, то утверждение очевидно и $l(1) = r$. Предположим, что утверждение доказано для некоторого t и

$$R^{l(t)} \subseteq (R^r)^t.$$

Докажем, что в качестве $l(t+1)$ можно взять $d \cdot l(t) + d \cdot r + 1$, где d — максимальная “арность” операций из сигнатуры Ω .

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_{l(t+1)}, z_1, \dots)$ — произвольный моном из алгебры F сигнатуры Ω , полилинейный по $x_1, x_2, \dots, x_{l(t+1)}$ и зависящий, быть может, от переменных типа z . Достаточно доказать, что для любых $v_1, \dots, v_{l(t+1)} \in R$, $w_1, w_2, \dots \in L$

$$f|_{x_1=v_1, \dots, x_{l(t+1)}=v_{l(t+1)}, z_1=w_1, z_2=w_2, \dots} \in (R^r)^{t+1}$$

в алгебре L .

Тогда моном f после перенумерации переменных типа x и типа z имеет вид

$$f_1(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots)|_{z_1=f_2},$$

где моном f_1 полилинеен по $x_1, \dots, x_m, z_1$ и зависит, быть может, от других переменных типа z , а моном f_2 полилинеен по $x_{m+1}, \dots, x_{l(t+1)}$ и зависит, быть может, от переменных типа z , причем $l(t) \leq l(t+1) - m < d \cdot l(t)$. Поэтому для любых $v_{m+1}, \dots, v_{l(t+1)} \in R$, $w_1, w_2, \dots \in L$

$$f_2|_{x_{m+1}=v_{m+1}, \dots, x_{l(t+1)}=v_{l(t+1)}, z_1=w_1, z_2=w_2, \dots} \in (R^r)^t$$

в алгебре L .

Достаточно доказать, что для произвольного монома $g(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots)$ из алгебры F сигнатуры Ω , полилинейного по $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1$, и зависящего, быть может, от других переменных типа z , где $m > d \cdot r + 1$, для любых $v_1, \dots, v_m \in R$, $w_1 \in (R^r)^t$, $w_2, \dots \in L$

$$g|_{x_1=v_1, \dots, x_m=v_m, z_1=w_1, z_2=w_2, \dots} \in (R^r)^{t+1}$$

в алгебре L .

Этот моном g после перенумерации переменных типа x и типа z , кроме z_1 , имеет вид

$$g_1(x_1, \dots, x_j, z_2, \dots) \Big|_{z_2=g_2},$$

где моном g_1 полилинеен по $x_1, \dots, x_j, z_2$ и зависит, быть может, от других переменных типа z , а моном g_2 полилинеен по $x_{j+1}, \dots, x_m$ и зависит, быть может, от переменных типа z , причем $r \leq m - j < d \cdot r$. Таким образом, $j \geq 1$.

Поэтому для любых $v_{j+1}, \dots, v_m \in R, w_1, w_2, \dots \in L$

$$g_2 \Big|_{x_{j+1}=v_{j+1}, \dots, x_m=v_m, z_1=w_1, z_2=w_2, \dots} \in R^r$$

в алгебре L .

Если моном g_1 зависит от z_1 , то для любых $v_1, \dots, v_m \in R, w_1 \in (R^r)^t, w_2, \dots \in L$

$$\begin{aligned} g \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_m=v_m, z_1=w_1, z_2=w_2, \dots} \\ = (g_1(x_1, \dots, x_j, z_1, z_2, \dots) \Big|_{z_2=g_2}) \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_m=v_m, z_1=w_1, \dots} \\ = g_1 \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_j=v_j, z_1=w_1, z_2=u, \dots, z_i=w_i, \dots} \in (R^r)^{t+1} \end{aligned}$$

в алгебре L , поскольку $w_1 \in (R^r)^t$. Так как элемент u лежит в R^r , утверждение леммы 5 в этом случае доказано.

Если моном g_1 не зависит от z_1 , тогда моном g_2 линейен по z_1 . Поскольку $R = \text{Cap}_n(L) \cap B(L)$, достаточно доказать, что

$$g \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_m=v_m, z_1=w_1, z_2=w_2, \dots} \in (R^r)^{t+1}$$

в алгебре L , если $v_1 \in \text{Cap}_n(L), v_2, \dots, v_m \in R, w_1 \in (R^r)^t, w_2, \dots \in L$.

Поэтому достаточно доказать, что для любого полинома $h(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots)$ сигнатуры Ω из алгебры F , полилинейного и кососимметричного по переменным $y_1, \dots, y_n$ типа z и зависящего, быть может, от других переменных типа z , полином $g \Big|_{x_1=h}$ принимает значения из $(R^r)^{t+1}$ при подстановке вместо переменных типа x — элементов из R , вместо z_1 — элемента из $(R^r)^t$, а вместо остальных переменных типа z — элементов из алгебры L .

Поскольку в алгебре L выполняются тождества Капелли порядка $n + 1$, то по лемме 2 полином

$$g \Big|_{x_1=h} - \sum_{i=1}^n (g \Big|_{x_1=h}) \Big|_{y_i=z_1, z_1=y_i}$$

обращается в нуль в алгебре L при всех подстановках вместо переменных типа x и типа z элементов из алгебры L .

Поэтому достаточно доказать, что для всякого i полином $(g \Big|_{x_1=h}) \Big|_{y_i=z_1, z_1=y_i}$ принимает значения из $(R^r)^{t+1}$ при подстановке вместо переменных типа x — элементов из R , вместо z_1 — элемента из $(R^r)^t$, а вместо остальных переменных типа z — элементов из алгебры L . Достаточно доказать этот факт для $i = 1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{h} &= h(z_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \Big|_{z_1=w_1, y_2=w_2, \dots} \in (R^r)^t, \\ \bar{g}_2 &= g_2 \Big|_{x_{j+1}=v_{j+1}, \dots, x_m=v_m, z_2=w_2, \dots} \in R^r \end{aligned}$$

в алгебре L для произвольных $w_1 \in (R^r)^t$, $w_2, \dots \in L$, $v_{j+1}, \dots, v_m \in R$.

Тогда элемент

$$g_1(x_1, \dots, x_j, z_2, \dots) \Big|_{x_1=\bar{h}, x_2=v_2, \dots, z_2=\bar{g}_2, z_i=w_i, \dots}$$

лежит в $(R^r)^{t+1}$, где $\bar{h} \in (R^r)^t$, $\bar{g}_2 \in R^r$, а $v_i \in R$, $w_i \in L$. Таким образом, утверждение леммы 5 полностью доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. По теореме 2 [5] длина бэровской цепочки идеалов алгебры L конечна, а теорема 1 [7] позволяет утверждать, что найдутся такие натуральные $r_1, \dots, r_s$, что $(\dots((B(L)^{r_1})^{r_2})\dots)^{r_s} = (0)$. Тогда $(\dots((R^{r_1})^{r_2})\dots)^{r_s} = (0)$. Из леммы 5 получаем, что для достаточно большого l выполняется равенство $R^l = (0)$. Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Проведем индукцию по порядку тождеств Капелли. Пусть алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли порядка 2. Тогда $\text{Car}_1(L) = L$, $B(L) = B(L) \cap \text{Car}_1(L)$. По лемме 4 идеал $B(L)$ нильпотентен, а значит, $B_1(L) = B(L)$. Основание индукции доказано.

Пусть во всех конечно порожденных алгебрах A конечной сигнатуры Ω , удовлетворяющих тождествам Капелли порядка n , выполняется $B_{n-1}(A) = B(A)$.

Пусть алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли порядка $n+1$, $n > 1$. Тогда $B_{n-1}(L/\text{Car}_n(L)) = B(L/\text{Car}_n(L))$,

$$B(L)/(\text{Car}_n(L) \cap B(L)) \subseteq B_{n-1}(L/\text{Car}_n(L)).$$

В силу $\text{Car}_n(L) \cap B(L) \subseteq B_1(L)$ получаем $B_n(L) = B(L)$. Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим n -мерную бинарную алгебру L с базисом $e_1, \dots, e_n$. Умножение на базисных элементах задается следующим образом: $e_i \cdot e_i = e_{i+1}$, если $1 \leq i < n$; $e_n \cdot e_n = 0$, $e_i \cdot e_j = 0$, если $i > j$; $e_i \cdot e_j = e_j$, если $i < j$. Тогда $B_i(L) = \langle e_{n-i+1}, \dots, e_n \rangle$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому $B(L) = B_n(L) \neq B_{n-1}(L)$. Таким образом, оценка длины бэровской цепочки, даваемая теоремой 1, не может быть улучшена в классе бинарных алгебр.

§3. Доказательство теоремы 2

Теорема 2 очевидным образом следует из следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть L – конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры Ω над полем произвольной характеристики или произвольным нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом C и C -алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли порядка $n+1$. Пусть I_1 – нильпотентный идеал в алгебре L . Тогда в алгебре L существует нильпотентный идеал I_2 такой, что $I_1 \subseteq I_2$, алгебра L/I_2 представима и $I_2^{n+1} \subseteq I_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Пусть R – идеал алгебры L . Определим идеал $J(L, R)$ как идеал $\Phi(L)$ -алгебры $\Phi(L) \otimes_C L/R$, порожденный элементами вида

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \sigma_q(a) \otimes \bar{a}^{n-q} \times v,$$

где $v \in L/R$, $a \in D(L)$, $\bar{a}$ – образ a при естественном эпиморфизме из $D(L)$ в $D(L/R)$. Тогда по теореме 3 идеал $J(L, R) \cap L/R$ нильпотентен класса не выше n , и факторалгебра $(L/R)/(J(L, R) \cap L/R)$ представима. Определим $I(L, R)$ как полный прообраз идеала $J(L/R) \cap L/R$ алгебры L/R в алгебре L при естественном гомоморфизме $\varphi: L \rightarrow L/R$. Тогда $R \subseteq I(L, R)$, $I(L, R)^{n+1} \subseteq R$ и алгебра $L/I(L, R)$ представима. Из определения идеала $I(L, R)$ следует, что

$$I(L, R) = (\Phi(L) \otimes_C R + J(L)) \cap L.$$

Проведем индукцию по порядку тождеств Капелли. Пусть алгебра L удовлетворяет тождествам Капелли порядка 2. Тогда в качестве I_2 возьмем $I(L, I_1)$. Из определения идеала $I(L, I_1)$ и теоремы 3 получаем, что $(I_2 \cdot I_2) \subseteq I_1$ и алгебра L/I_2 представима. Так как идеал I_1 нильпотентен, получаем $I_2 \subseteq B_2(L)$. Из теоремы 1 следует, что $B_2(L) = B_1(L)$. По теореме 1 [7] следует, что $B_1(L) = N(L)$. Таким образом, идеал I_2 нильпотентен. Основание индукции доказано.

Пусть лемма 6 верна для всех алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли порядка n . Положим $I_2 = I(L, I_1)$. Тогда $I(L, \text{Сар}_n(L) + I_1) \supseteq I(L, I_1) = I_2$.

По предположению индукции для некоторого t

$$\underbrace{(I_2 \cdot \dots \cdot I_2)}_{t \text{ раз}} \subseteq \text{Сар}_n(L).$$

Пусть выполняется следующее:

- 1) идеал I_1 алгебры L нильпотентен класса r ;
- 2) $f(x_1, x_2, \dots, x_q, z_1, \dots)$ – произвольный моном из свободной алгебры F сигнатуры Ω , полилинейный по $x_1, x_2, \dots, x_q$ и зависящий, быть может, от переменных типа z ;
- 3) $q > d \cdot t + r$, где d – максимальная “арность” операций из сигнатуры Ω .

Тогда после перенумерации переменных типа x и типа z полином f имеет вид:

$$f_1(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots) \Big|_{z_1=f_2},$$

где моном f_1 полилинеен по $x_1, \dots, x_m, z_1$ и зависит, быть может, от других переменных типа z , а моном f_2 полилинеен по $x_{m+1}, \dots, x_q$ и зависит, быть может, от переменных типа z , причем $t \leq q - m < d \cdot t$. Поэтому $m > r$.

Подставляя в полином f произвольным образом вместо переменных типа x произвольные элементы из I_2 , а вместо переменных типа z – произвольные элементы из L , получаем

$$f \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_q=v_q, z_2=w_2, \dots} = f_1 \Big|_{x_1=v_1, \dots, x_m=v_m, z_1=u, z_2=w_2, \dots},$$

где $v_1, \dots, v_q \in I_2$, $w_2, \dots \in L$, $u \in \text{Сар}_n(L)$, поскольку степень полинома f_2 по переменным типа x не менее t .

Поэтому

$$\underbrace{(I_2 \cdot \dots \cdot I_2)}_{q \text{ раз}} \subseteq (\text{Сар}_n(L) \cdot \underbrace{I_2 \cdot \dots \cdot I_2}_{r+1 \text{ раз}}).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, заметим, что всякий элемент из $\text{Сар}_n(L)$ является C -линейной комбинацией элементов вида $h|_{x_1=v_1, x_2=v_2, \dots}$, где h — элемент из W_n , $v_1, v_2, \dots \in L$.

Поэтому для доказательства леммы 6 достаточно доказать, что

$$(W_n \cdot \underbrace{\bar{I}_2 \cdot \dots \cdot \bar{I}_2}_{r+1 \text{ раз}}) = (0),$$

где $\bar{I}_2$ — идеал алгебры $\bar{L}$, порожденный идеалом I_2 .

Так как

$$(\underbrace{I_1 \cdot \dots \cdot I_1}_{r+1 \text{ раз}}) = (0),$$

получаем

$$\begin{aligned} (W_n \cdot \underbrace{\bar{I}_2 \cdot \dots \cdot \bar{I}_2}_{r+1 \text{ раз}}) &\subseteq ((W_n \cdot J(\bar{L})) + \Phi(\bar{L}) \otimes_C (W_n \cdot \underbrace{\bar{I}_1 \cdot \dots \cdot \bar{I}_1}_{r+1 \text{ раз}})) \cap \bar{L} \\ &\subseteq (W_n \cdot J(\bar{L})) \cap \bar{L}. \end{aligned}$$

По лемме 3 имеем

$$(W_n \cdot J(\bar{L})) \cap \bar{L} = (0).$$

Таким образом, идеал I_2 нильпотентен класса не выше q .

Доказательство леммы 6 окончено.

Список литературы

1. Baer R. Radical ideals // Amer. J. Math. 1943. V. 65. P. 537–568.
2. Размыслов Ю. П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. №3. С. 337–360.
3. Размыслов Ю. П. Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №1. С. 143–166.
4. Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A. Capelli identities and representations of finite type // Comm. Algebra. 1994. V. 22. №14. P. 5733–5744.
5. Зубрилин К. А. Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли // Матем. сб. 1995. Т. 186. №3. С. 53–64.
6. Зубрилин К. А. О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. №2. С. 409–430.
7. Зубрилин К. А. О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли // Матем. сб. 1997. Т. 188. №8. С. 93–102.
8. Кемер А. Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала Джекобсона конечно порожденной PI-алгебры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 245. №4. С. 793–799.
9. Braun A. The Jacobson radical in a finitely generated P.I. algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. №2. P. 385–386.
10. Kaplansky I. Rings with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. P. 575–589.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.01.1998