Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Агеев, Функция кратности спектра и геометрические представления перекладываний, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 1, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:02:23

УДК 517.9

О. Н. Агеев

Функция кратности спектра и геометрические представления перекладываний

В статье решена задача о том, каким может быть множество $\mathcal{M}$ значений функции кратности спектра эргодического (строго эргодического) перекладывания, а также просто эргодической динамической системы. С помощью метода геометрических представлений построены типичные в метрическом и топологическом смысле подмножества преобразований в соответствующих подклассах с заранее заданным набором значений функции кратности спектра (естественно, из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). В построенных классах преобразований присутствует новый спектральный эффект – компонента спектра кратности 1 не совпадает со спектром любого фактора этих преобразований. Конструируются конкретные примеры строго эргодических перекладываний со всеми возможными наборами значений функции кратности спектра.

Библиография: 21 название.

В статье рассматриваются сохраняющие непрерывную меру μ преобразования T пространства Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$, называемые динамическими системами, и индуцированные ими унитарные операторы на $L_2(\mu)$: $(Tf)(x) = f(Tx)$. Преобразование T множества X и соответствующий ему оператор часто называют автоморфизмами и обозначают одним и тем же символом. В статье рассматриваются множества $\mathcal{M}(T)$ всех значений функции кратности спектра унитарного оператора, отвечающего преобразованию T в разных подклассах.

Настоящая работа относится к циклу вопросов, ставших классическими в теории динамических систем. Интенсивное исследование (см. обзоры [1], [2]) спектров унитарных операторов, отвечающих указанным преобразованиям, начавшееся после работы фон Неймана (в [3] было доказано, что спектральный инвариант является полным в классе преобразований с точечным спектром), выкристаллизовало сложность одной из основных нерешенных проблем теории преобразований с инвариантной мерой: определить точные условия на спектр унитарного оператора, при которых он может быть реализован динамической системой (см. [4], [5]). Не решены даже частные случаи этой задачи: существует ли преобразование с простым лебеговским спектром (проблема Банаха) и даже с однократной лебеговской компонентой. Заметим, что примеры преобразований с лебеговской компонентой любой четной кратности построены в [6], [7].

Как известно, спектр унитарного оператора полностью определяется следующей парой: функцией кратности спектра и мерой максимального спектрального типа. В классических подклассах (K -автоморфизмы, гауссовские динамические системы, автоморфизмы с положительной энтропией или с чисто точечным спектром) эргодические преобразования имеют либо простой спектр, либо неограниченную функцию кратности спектра, см. [8].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96135) и фонда INTAS-RFBR (грант № 95-418).

В работе Оселедца [9] построены первые примеры автоморфизмов (являющихся перекладываниями) с конечной, отличной от единицы функцией кратности спектра (здесь наибольший элемент множества $\mathcal{M}(T)$ заключен в промежутке от 2 до 30). Робинсоном [10] найдены примеры преобразований T с $\mathcal{M}(T) = \{1, n\}$ для любого натурального n (см. также работу [11]) и эти преобразования реализованы в перекладываниях. В работах [12], [13] последовательно уточнялся класс подмножеств из $\mathbb{N}$, допускающих реализацию как $\mathcal{M}(T)$ для эргодических преобразований T . Заметим, что эти конструкции существенно использовали наличие в централизаторе T косоуго произведения с непрерывным групповым автоморфизмом, дающее дополнительное ограничение на $\mathcal{M}(T)$ следующего вида: $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(T) \Rightarrow \text{НОК}(m_1, m_2) \in \mathcal{M}(T)$. Кроме того, среди преобразований с такого типа $\mathcal{M}(T)$ доказано существование аналитических диффеоморфизмов конечномерного тора, см. [14].

В настоящей работе предложен другой подход, основанный на геометрических моделях (см. [15], [16]). Этот метод не использует групповые автоморфизмы и обладает конструктивным потенциалом. К примеру, с помощью предложенной надстройки (см. (2)) можно с легкостью добавлять столько значений для функции кратности, сколько потребуется. В частности, можно надстроить преобразование с непрым конечнократным спектром так, что при этом спектр дополнится только циклическим пространством.

Отметим, что среди строящихся ниже автоморфизмов T_{ω_β} нет метрически изоморфных преобразованиям из вышеупомянутых работ, исключая, возможно, тривиальные случаи $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \{1\}$, $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \{1, 2\}$, так как компонента спектра кратности 1 не совпадает со спектром любого фактора этих автоморфизмов (в отличие от конструкций в [9]–[14]). Действительно, последнее утверждение есть непосредственное следствие того обстоятельства, что произведения ограниченных функций из этой компоненты не всегда будут принадлежать этой компоненте. Таким образом, в предложенной конструкции наблюдается новый спектральный эффект.

Пусть заданы полуинтервал $X = [a, b)$ и точки $a_1, a_2, \dots, a_m$, $a < a_1 < \dots < a_m < b$. *Перекладыванием* называется преобразование, являющееся сдвигом на каждом из полуинтервалов $[a, a_1)$, $[a_1, a_2)$, $\dots$, $[a_m, b)$. Обычно фиксируют набор длин этих полуинтервалов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и перестановку π , полностью определяющие перекладывание $T_{\lambda, \pi}$. Хорошо известно, что перекладывания не являются перемешивающими, имеют конечный ранг и, следовательно, ограниченную функцию кратности спектра. Этим, по-видимому, исчерпывается информация о спектральных свойствах общих перекладываний. В работе Вича [17] доказано, что в классе всех перекладываний $T_{\lambda, \pi}$ с фиксированной неприводимой перестановкой π содержится множество полной меры Лебега по λ перекладываний $T_{\lambda, \pi}$ с $\mathcal{M}(T_{\lambda, \pi}) = \{1\}$. Очевидно, что если T эргодично, то $1 \in \mathcal{M}(T)$, где 1 отвечает спектральной мере с носителем в нуле и циклическому пространству $\{f \in L_2(\mu) : Tf = f\}$.

В настоящей работе для любого ограниченного $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in \mathcal{M}$, построено множество полной меры по β строго эргодических преобразований T_{ω_β} с $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}$ в подклассе перекладываний. Кроме того, для любого $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $1 \in \mathcal{M}$, построено типичное множество (см. теорему 1) в подклассе эргодических преобразований T пространства Лебега с $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}$. Соответствующий факт о типичности в слабой топологии эргодических преобразований пространства Лебега с $\mathcal{M}(T) = \{1\}$ хорошо известен. Эти преобразования имеют сингулярный спектр,

тем самым проблема Банаха имеет отрицательное решение в рассматриваемом классе.

Заметим, что принято рассматривать спектр преобразований в чуть меньшем инвариантном подпространстве $\{f \in L_2(\mu) : f = \text{const}\}^\perp$. В значительной мере интерес здесь обусловлен нерешенной проблемой Рохлина – существует ли эргодическое преобразование с однородным конечнократным спектром, отличным от простого, т.е. с $\mathcal{M}(T) = \{n\}$, где $n \notin \{1, \infty\}$ (см. [1], [10], [18]).

Перейдем к точным формулировкам.

§1. Конструкция преобразований и основные формулировки

В статье мы используем следующие обозначения:

$$\mathcal{M} = \{1, n_1, n_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \quad \tilde{N} = \sum_j n_j, \quad \tilde{N} \leq \infty, \quad (1)$$

α – число из полуинтервала $[0, 1)$, естественно отождествленного с окружностью $\mathbb{S}^1$; β – либо число из $\mathbb{S}^1$, либо $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$; T_α – поворот в пространстве $([0, 1), m)$: $T_\alpha x = x + \alpha \pmod{1}$; E – тождественное преобразование (или оператор); $H_1 \oplus H_2$ – прямая сумма гильбертовых пространств H_i . Для преобразования T пространства Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$: $C(h) = C_T(h)$ – наименьшее замкнутое, инвариантное относительно оператора T , содержащее вектор h подпространство в $L_2(\mu)$ (называемое циклическим); σ_h – спектральная мера, отвечающая вектору $h \in L_2(\mu)$, т.е. единственная борелевская мера на $\mathbb{S}^1 \equiv [0, 1)$ с моментами

$$\hat{\sigma}_h(n) = \int_0^1 e^{2\pi i n \lambda} d\sigma_h(\lambda) = (T^n h, h).$$

По спектральной теореме имеем равенство $L_2(\mu) = \bigoplus_i C(h_i)$, где либо $\sigma_{h_i} \sim \sigma_{h_j}$, либо $\sigma_{h_i} \perp \sigma_{h_j}$. Отсюда

$$\mathcal{M}(T) = \{k_1, k_2, \dots\}, \quad k_i = \#\{j : \sigma_{h_i} \sim \sigma_{h_j}\},$$

где $\#A$ обозначает количество элементов в множестве A ($\#A \leq \infty$).

1.1. Конструкция T_{ω_β} . Фиксируем $\alpha \in [0, 1)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$. Далее для удобства будем использовать и другую нумерацию координат $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1n_1}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2n_2}, \beta_{31}, \dots)$ в $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$, учитывающую структуру множества $\mathcal{M}$. Определим сохраняющее меру Хаара $\mu = m \times l \times l \times \dots$ преобразование T_{ω_β} , действующее в $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2^{\tilde{N}} \equiv [0, 1) \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}$, по формуле

$$T_{\omega_\beta}(x, y) = (T_\alpha x, \omega_\beta(x) * y), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} y &= (y_{11}, y_{12}, \dots), \quad y_{ij} \in \{-1, 1\}, \\ \omega_\beta(x) &= (\omega_{\beta_{11}}(x), \omega_{\beta_{11}}(x - \beta_{12}), \dots, \omega_{\beta_{11}}(x - \beta_{1n_1}), \omega_{\beta_{21}}(x), \omega_{\beta_{21}}(x - \beta_{22}), \dots), \\ &\quad \beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}, \\ \omega_\gamma(x) &= \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \gamma, \\ 1, & \gamma \leq x < 1, \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{S}^1 \equiv [0, 1), \\ \omega_{\gamma_1}(x - \gamma_2) &\equiv \omega_{\gamma_1}(T_{1-\gamma_2}x), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{S}^1 \equiv [0, 1), \end{aligned}$$

и “ $*$ ” – покоординатное умножение в $\mathbb{Z}_2^{\tilde{N}}$ (в зарубежной литературе более распространена запись G -расширения с аддитивной групповой операцией).

При $\tilde{N} = 1$ преобразования (2) были предложены фон Нейманом и долгое время служили источником разнообразных контрпримеров ко многим гипотезам эргодической теории (см. [19]).

1.2. Спектральные результаты. Ясно, что пространство $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$ является польским (полным метрическим сепарабельным) в стандартной топологии покоординатной сходимости. Некоторое свойство называют *типичным* в группе $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$ (в топологическом смысле), если оно выполнено для всех β из некоторого плотного подмножества типа G_δ в $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$. Элементы этого подмножества будем называть *типичными*. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого иррационального α и типичного $\beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ преобразования T_{ω_β} из (2) эргодичны и $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого унитарного оператора U , $1 \in \mathcal{M}(U)$, существует эргодическая динамическая система T с $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(U)$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого унитарного оператора U , $1 \in \mathcal{M}(U)$, такого, что $\max\{n : n \in \mathcal{M}(U)\} < \infty$, существуют эргодические перекладывания T с $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(U)$.*

(В действительности при $\tilde{N} < \infty$ все T_{ω_β} суть перекладывания.)

Обозначим через $\Lambda_d(T)$ группу собственных значений преобразования T . Следующее замечание показывает типичность непрерывности спектра T_{ω_β} в дополнении к спектру T_α .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого иррационального α и типичного $\beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ преобразования T_{ω_β} удовлетворяют дополнительному ограничению

$$\Lambda_d(T_{\omega_\beta}) = \Lambda_d(T_\alpha) \equiv \{e^{2\pi i k x}\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Следующие утверждения показывают типичность в метрическом смысле преобразований T с заданным $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для почти всех $\beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ по мере $t \times t \times \dots$

$$\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В формулировке теоремы 1 условие эргодичности T_{ω_β} можно опустить, так как оно следует из того, что $1 \in \mathcal{M}(T_{\omega_\beta})$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого иррационального α и произвольного $\mathcal{M}$ из (1) если $\tilde{N} < \infty$, то для почти всех $\beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ по мере $t \times t \times \dots$ перекладывания T_{ω_β} из (2) строго эргодичны и $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}$.*

Заметим, что эргодичность относительно меры Лебега не гарантирует единственность, с точностью до константы, инвариантной борелевской меры, т.е. строгую эргодичность перекладываний (см. [20]).

Далее в §3 вводится отношение эквивалентности на группе характеров $\widehat{\mathbb{Z}_2^{\tilde{N}}}$ и приводится редукция теоремы 1 к теореме 3, формулируемой в терминах этой эквивалентности. Доказательства теорем 2, 3, следствий и замечаний проводятся

в §6. Параграфы 2, 4, 5 содержат подготовительный материал, фактически служащий (на основе метода геометрических моделей и индуцированных им метрик, см. §2, с использованием технических лемм, см. §4) доказательство теоремы 3 к поиску центров окрестностей – точек $\beta(n) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ в n -х моделях (см. §5) с нужными асимптотическими свойствами моментов.

Конструктивный подход, используемый в доказательстве теоремы 1 (или 3), дает возможность построить в §7 конкретные элементы из типичного множества с $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}$ (см. предложение 5).

Параграф 7 указывает также на любопытную связь геометрических моделей с одномерными отображениями.

§2. Геометрические представления

В [16] предложен метод геометрических моделей. Чтобы придать ясность и законченность изложению, уместно привести основные определения и обозначения.

2.1. Определения. Разложим число $\alpha \in \mathbb{S}^1 \equiv [0, 1)$ в непрерывную дробь

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots] = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}, \quad (3)$$

где α_i – натуральные числа. Напомним простейшие свойства непрерывных дробей. Представление α в виде (3) существует и единственно. Разложение (3) конечно, если α рационально, и бесконечно, если α иррационально. В первом случае

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}},$$

где p_n, q_n – взаимно простые числа. Числа q_n можно определять из формул

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_{n+1} = \alpha_n q_n + q_{n-1}.$$

Справедлива следующая оценка

$$|q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Обозначим

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1} + \dots}} \quad (4)$$

(a_n, b_n – меры верхних этажей в n -й модели). Введем последовательность $D(n) \subseteq \mathbb{R}^2, n = 2, 3, \dots$ (см. рис. 1), по формуле

$$D(n) = \left[0, 1 + \frac{b_n}{a_n}\right) \times \left[0, \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \cup [c_n, c_n + 1) \times \left[\frac{q_{n-1}}{q_n}, 1\right),$$

$$c_n = \frac{(1 + (-1)^n) b_n}{2a_n}.$$

РИС. 1

Определим биекцию $\varphi_1: [0, 1) \rightarrow D(2)$. Разобьем $[0, 1)$ на полуинтервалы

$$\begin{aligned}\Delta_0(1) &= [0, 1 - \alpha_1\alpha + \alpha), \\ \Delta_k(1) &= [1 + (k - \alpha_1)\alpha, 1 + (k + 1 - \alpha_1)\alpha), \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1 - 1.\end{aligned}$$

Положим

$$\varphi_1(x) = (z_1(2, x), z_2(2, x)) = \left(\frac{x}{\alpha} - k, \frac{k}{q_2} \right) \quad \text{при } x \in \Delta_k(1). \quad (5)$$

Определим биекции $\varphi_n: D(n) \rightarrow D(n+1)$ (см. рис. 1). Если n четно, то разобьем $[0, 1 + b_n/a_n)$ на полуинтервалы

$$\Delta_k(n) = \left[k \frac{b_n}{a_n}, (k+1) \frac{b_n}{a_n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, \alpha_n - 1, \quad \Delta_{\alpha_n}(n) = \left[\alpha_n \frac{b_n}{a_n}, 1 + \frac{b_n}{a_n} \right).$$

Положим

$$\varphi_n(z_1, z_2) = \left(\frac{a_n}{b_n} z_1 - k, \frac{q_n}{q_{n+1}} (z_2 + \alpha_n - k) \right) \quad \text{при } z_1 \in \Delta_k(n).$$

Если n нечетно, то разобьем $[0, 1 + b_n/a_n)$ на полуинтервалы

$$\begin{aligned}\Delta_0(n) &= \left[0, 1 + (1 - \alpha_n) \frac{b_n}{a_n} \right), \\ \Delta_k(n) &= \left[1 + (k - \alpha_n) \frac{b_n}{a_n}, 1 + (k + 1 - \alpha_n) \frac{b_n}{a_n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_n.\end{aligned}$$

Положим

$$\varphi_n(z_1, z_2) = \left(\frac{a_n}{b_n} z_1 - k, \frac{q_n}{q_{n+1}} (z_2 + k) \right) \quad \text{при } z_1 \in \Delta_k(n).$$

Множество $\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\dots\varphi_1(A) \subseteq D(n)$ назовем n -й моделью ($n = 2, 3, \dots$) множества $A \subseteq \mathbb{S}^1$. Пусть $z_1(n, x), z_2(n, x)$ — координаты точки $x \in \mathbb{S}^1$ в n -й модели. Нетрудно убедиться в том, что:

$$1. [0, 1 + b_n/a_n) \times \{0\} \subseteq \varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\dots\varphi_1(\mathbb{S}^1);$$

2. коэффициент растяжения при переходе от полуинтервала Δ к набору полуинтервалов $\varphi_n \varphi_{n-1} \dots \varphi_1(\Delta)$ не зависит от Δ (при фиксированном n);
3. в n -й модели, обозначая через P_n преобразование сдвига $\mathbb{R}^2$ вверх на $1/q_n$, для $x \in D(n)$ имеем

$$T_\alpha x = P_n(x),$$

если $P_n(x) \in D(n)$,

$$z_2(n, T_\alpha x) = 0, \quad z_1(n, T_\alpha x) = z_1(n, x) + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{a_n} \left(\bmod 1 + \frac{b_n}{a_n} \right),$$

если $P_n(x) \notin D(n)$.

2.2. Метрики ρ_n и $\rho_n^{(k)}$, индуцированные геометрическими моделями. Фиксируем номер $n > 1$. Рассмотрим дискретную подгруппу $\Gamma_n \subseteq \mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$\Gamma_n = \left\{ z = (z_1, z_2) : \exists k, m \in \mathbb{Z} \text{ такие, что} \right. \\ \left. z = k \cdot \left((-1)^{n+1}, \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) + m \cdot \left((-1)^{n+1} \frac{b_n}{a_n}, -1 \right) \right\}.$$

Евклидова метрика ρ в $\mathbb{R}^2$ стандартным образом индуцирует метрику ρ_n в факторгруппе $\mathbb{R}^2/\Gamma_n$, т.е. для $z', z'' \in \mathbb{R}^2/\Gamma_n$ имеет место формула

$$\rho_n(z', z'') = \min_{\substack{\tilde{z}' \in z' \Gamma_n \\ \tilde{z}'' \in z'' \Gamma_n}} \rho(\tilde{z}', \tilde{z}'').$$

Нетрудно убедиться в том, что множество $D(n)$, введенное выше, есть фундаментальная область группы Γ_n , т.е. $\gamma_1 D(n) \cap \gamma_2 D(n) = \emptyset$ при $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_n$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, и $\bigcup_{\gamma \in \Gamma_n} \gamma D(n) = \mathbb{R}^2$.¹

Естественное отождествление $D(n)$ с $\mathbb{R}^2/\Gamma_n$ определяет метрику ρ_n на элементах $D(n)$. А отождествление в n -й модели окружности $\mathbb{S}^1$ с подмножеством $D(n)$ определяет метрику ρ_n и на $\mathbb{S}^1$.

Сделаем следующие замечания:

1. Для любого $x \in \mathbb{S}^1$ множество $(T_\alpha x) \Gamma_n \subseteq \mathbb{R}^2$ получено сдвигом множества $x \Gamma_n$ вверх на $1/q_n$.

2. Для любых $x \in \mathbb{S}^1$ и n

$$\rho_n(x, T_\alpha x) \leq \frac{1}{q_n}. \quad (6)$$

3. Метрика ρ_n инвариантна относительно поворота на любой угол, т.е.

$$\forall \beta \in \mathbb{S}^1 \quad \rho_n(T_\beta x, T_\beta y) = \rho_n(x, y).$$

Пункт 2 следует из 1. Пункт 1 следует из определения Γ_n и рассмотрения поворота на угол α в n -й модели. Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{S}^1$ в силу пункта 1 имеем $\rho_n(T_\alpha^k x, T_\alpha^k y) = \rho_n(x, y)$. Выберем k из условия

$$z_2(n, T_\beta x) = z_2(n, T_\alpha^k x). \quad (7)$$

¹ γA обозначает множество $\{z \in \mathbb{R}^2 : \exists a \in A \text{ такое, что } \gamma + a = z\}$.

Рассмотрим поворот на угол α_0 , где $T_{\alpha_0}T_{\alpha}^k = T_{\beta}$. В силу (7) для любого $x \in \mathbb{S}^1$ множество $(T_{\alpha_0}x)\Gamma_n$ получено из $x\Gamma_n$ сдвигом по горизонтали. Поэтому для любых $x, y \in \mathbb{S}^1$ имеем $\rho_n(T_{\alpha_0}x, T_{\alpha_0}y) = \rho_n(x, y)$. Отсюда следует пункт 3.

Для $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ положим $\rho_n^{(k)}(\alpha, \beta) = \max_{1 \leq i \leq k} \rho_n(\alpha_i, \beta_i)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{S}^1$. Заметим, что полуметрика $\rho_n^{(k)}$ является метрикой в $\mathbb{S}^{\tilde{N}}/\sim$, где $\alpha \sim \beta$ в точности тогда, когда $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

§3. Эквивалентность характеров и редукция к теореме 3

3.1. Характеры. Рассмотрим группу характеров $\widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$ группы $\mathbb{Z}_2^{\tilde{N}} \equiv \{-1, 1\}^{\tilde{N}}$. Каждый характер $\chi(y)$ зависит только от конечного числа координат. Следовательно, для любого $y = (y_{11}, y_{12}, \dots) \in \{-1, 1\}^{\tilde{N}}$ имеем $\chi(y) = y_{11}^{i_{11}} y_{12}^{i_{12}} \dots$, где $i_{kl} \in \{0, 1\}$ и $i_{kl} = 0$ при достаточно большом k . Далее характер χ будем отождествлять с соответствующим набором $(i_{11}, i_{12}, \dots)$ элементов $\{0, 1\}^{\tilde{N}}$ с нулевым “хвостом”.

Введем отношение эквивалентности на $\widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$. Положим:

$$1. \chi \sim \chi \quad \forall \chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}; \quad (8)$$

2. если $\chi_1 \neq \chi_2$, то

$$\chi_1 \sim \chi_2 \Leftrightarrow (i_{11}, i_{12}, \dots) \sim (j_{11}, j_{12}, \dots) \Leftrightarrow \exists k \exists m_1, m_2 \leq n_k \\ \left(m_1 \neq m_2 \ \& \ i_{km_1} = \sum_{r,l} i_{rl} = \sum_{r,l} j_{rl} = j_{km_2} = 1 \right). \quad (8')$$

Гильбертово пространство $L_2(\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}, m \times l^{\tilde{N}})$ представимо в виде прямой суммы инвариантных относительно $T_{\omega_{\beta}}$ подпространств H_{χ} , где $H_{\chi} = \{f(x)\chi(y) : f(x) \in L_2(\mathbb{S}^1, m), \chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}\}$. Оператор $T_{\omega_{\beta}}$ в подпространстве H_{χ} спектрально изоморфен оператору $\omega_{\chi}(x)T_{\alpha} : f(x) \mapsto \omega_{\chi}(x) \cdot f(T_{\alpha}x)$, действующему в $L_2(\mathbb{S}^1, m)$, где

$$\omega_{\chi}(x) \equiv \omega_{\beta_{11}}^{i_{11}}(x) \omega_{\beta_{12}}^{i_{12}}(x - \beta_{12}) \dots \omega_{\beta_{1n_1}}^{i_{1n_1}}(x - \beta_{1n_1}) \omega_{\beta_{21}}^{i_{21}}(x) \omega_{\beta_{22}}^{i_{22}}(x - \beta_{22}) \dots$$

Обозначим: $V_{\chi} = \omega_{\chi}(x)T_{\alpha}$, σ_{χ} – мера максимального спектрального типа оператора V_{χ} .

Доказательство следующей теоремы требует дополнительной подготовки (см. пп. 3.2, 3.3, §§4, 5) и будет проведено в §6.

ТЕОРЕМА 3. Для любого иррационального α пространство $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$ содержит плотное подмножество типа G_{δ} таких β , что

1. при любом $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$ оператор V_{χ} имеет простой спектр;
2. при любых $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$: $\chi_1 \sim \chi_2 \Rightarrow \sigma_{\chi_1} \sim \sigma_{\chi_2}$;
3. при любых $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$: $\chi_1 \not\sim \chi_2 \Rightarrow \sigma_{\chi_1} \perp \sigma_{\chi_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Перечислим мощности классов эквивалентности (8), (8') множества $\widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}: 1, 1, 1, \dots, n_1, n_2, \dots$. Пусть $\chi_i, i = 1, 2, \dots$, — характеры, лежащие в одноэлементных классах. В силу пп. 1, 3 теоремы 3 гильбертово пространство $\bigoplus_i H_{\chi_i}$ является циклическим для оператора T_{ω_β} с циклическим вектором h , где

$$\sigma_h = \sum_k 2^{-k} \sigma_{\chi_k}.$$

Учитывая теорему 3, получаем искомое представление $L_2(\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}, m \times l^{\tilde{N}})$ в виде прямой суммы циклических пространств.

Докажем эргодичность преобразования T_{ω_β} . Предположим, что T_{ω_β} неэргодично. Тогда существуют такие $\chi \neq \chi_0 \equiv 1$ и $f \in H_\chi$, что $T_{\omega_\beta} f = f$. Поэтому $\sigma_0 \leq \sigma_\chi$. Учитывая $\sigma_0 \leq \sigma_{\chi_0}$, получаем $\sigma_{\chi_0} \not\leq \sigma_\chi$. Это противоречит п. 3 теоремы 3. Доказательство теоремы 1 окончено.

3.2. Топологическая лемма. Выделим следующую топологическую лемму, фактически сводящую доказательство теоремы 3 к выбору необходимых окрестностей в $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$ в полуметрике $\rho_n^{(k)}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}, k \leq \tilde{N}$, и последовательность $\beta_n, n = 2, 3, \dots$, элементов множества $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$. Положим $U_\varepsilon(n) = \{\beta \in \mathbb{S}^{\tilde{N}} : \rho_n^{(k)}(\beta, \beta(n)) < \varepsilon\}$.

ЛЕММА 1. *Для любой последовательности номеров n'_s если $n'_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то множество $\bigcap_m \bigcup_{s>m} U_\varepsilon(n'_s)$ есть плотное подмножество типа G_δ пространства $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$ в стандартной топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим n -ю модель. Множество $\{x \in \mathbb{S}^1 : \rho_n(x, x_0) < \varepsilon\}$ состоит из конечного числа интервалов и поэтому открыто в $\mathbb{S}^1$ в стандартной топологии. Множество $U_\varepsilon(n)$ есть пересечение конечного числа цилиндрических множеств вида

$$U_\varepsilon(n, i, \beta(n)) = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}} : \rho_n(\beta_i, \beta_i(n)) < \varepsilon\}$$

и поэтому открыто в стандартной топологии.

Осталось показать, что для любых n и $\varepsilon > 0$ множество $\bigcup_{s>m} U_\varepsilon(n'_s)$ всюду плотно в $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$. Фиксируем произвольную окрестность пространства $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$. Окрестность содержит некоторое цилиндрическое множество следующего вида:

$$U(r, \Delta_1, \dots, \Delta_r) = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}} : \beta_i \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, r\},$$

где Δ_i — интервалы в $\mathbb{S}^1$. Положим $\varepsilon_0 = \min_i |\Delta_i|$. В силу принципа Дирихле с учетом иррациональности α при некотором n'' множество $\{l\alpha \pmod{1} : l = 0, 1, \dots, n''\}$ содержит хотя бы одну точку в каждом интервале $\Delta \in \mathbb{S}^1 \equiv [0, 1)$, где $|\Delta| = \varepsilon_0$. Выберем s с условием

$$\frac{n''}{qn'_s} < \varepsilon. \quad (9)$$

В силу выбора n'' для любого $i = 1, 2, \dots, r$ существует $l_i \in \{0, 1, \dots, n''\}$ со свойством $\beta_i(n'_s) + l_i \alpha \pmod{1} \in \Delta_i$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(n'_s) &= (T_\alpha^{l_1} \beta_1(n'_s), T_\alpha^{l_2} \beta_2(n'_s), \dots, T_\alpha^{l_r} \beta_r(n'_s), \beta_{r+1}(n'_s), \beta_{r+2}(n'_s), \dots) \\ &\in U(r, \Delta_1, \dots, \Delta_r). \end{aligned}$$

Для любого $i = 1, 2, \dots, r$, комбинируя (6), (9), получаем

$$\rho_{n'_s}(T_\alpha^{l_i} \beta_i(n'_s), \beta_i(n'_s)) \leq \frac{l_i}{q_{n'_s}} \leq \frac{n''}{q_{n'_s}} < \varepsilon.$$

Поэтому $\tilde{\beta}(n'_s) \in U_\varepsilon(n'_s)$. Лемма 1 доказана.

3.3. Схема доказательства теоремы 3. Пункт 2 теоремы 3 следует из явного указания унитарного оператора U со свойством $UV_{\chi_1} = V_{\chi_2}U$ для пары χ_1, χ_2 , где $\chi_1 \sim \chi_2$.

Для каждого характера $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_2^{\tilde{N}}}$ выбираются свои $\varepsilon > 0$ и множества $U_\varepsilon(n)$. Доказательство простоты спектра оператора V_χ при $\beta \in \bigcap_m \bigcup_{s>m} U_\varepsilon(n'_s)$ в целом следует доказательству теоремы 4 в [16] с учетом того, что распределение знаков $\omega_\chi(x)$ в n -й модели сводится к распределению знаков $\omega_{\beta_{i1}}(x)$, $\omega_{\beta_{i1}+\beta_{ij}}(x)$ при $\beta_{ij} \in \mathbb{S}^1$.

Для каждой пары χ_1, χ_2 такой, что $\chi_1 \sim \chi_2$, также выбираются свои $\varepsilon > 0$ и множества $U_\varepsilon(n)$ (см. §5). В доказательстве условия $\sigma_{\chi_1} \perp \sigma_{\chi_2}$ при $\beta \in \bigcap_m \bigcup_{n>m} U_\varepsilon(n)$ используются следующие две леммы.

ЛЕММА 2. Для любого эргодического преобразования T и функции $\varphi \in L_2(X, \mu)$ такой, что $|\varphi| = 1$ для почти всех x , если T^{k_i} слабо сходится к E , то оператор $U_\varphi^{k_i} - (U_\varphi^{k_i} \mathbf{1}, \mathbf{1}) \cdot E$ слабо сходится к нулю, где $U_\varphi: f(x) \mapsto \varphi(x)f(Tx)$ — унитарный оператор, действующий в $L_2(X, \mu)$.

ЛЕММА 3. Пусть σ_j — меры максимального спектрального типа унитарных операторов U_j , $j = 1, 2$, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве. Если для некоторых c_j , $j = 1, 2$, $c_1 \neq c_2$, последовательности $U_j^{k_m}$ слабо сходятся к $c_j E$ при $m \rightarrow \infty$, то $\sigma_1 \perp \sigma_2$.

Добавив к леммам слабую сходимость $T_\alpha^{q_n}$ к E при $n \rightarrow \infty$, для завершения доказательства теоремы 3 достаточно равномерно по n отделить друг от друга пары $(V_{\chi_1}^{q_n} \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $(V_{\chi_2}^{q_n} \mathbf{1}, \mathbf{1})$, что, в свою очередь, достигается выбором $\beta(n)$ и ε в силу равномерной по n и $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$ непрерывности в полуметрике $\rho_n^{(k)}$ функции $|(V_\chi^{q_n} \mathbf{1}, \mathbf{1})|$ (см. лемму 6). Искомое плотное подмножество типа G_δ есть, очевидно, пересечение плотных подмножеств типа G_δ , рассмотренных выше.

Далее будут использоваться следующие сокращения:

$$\begin{aligned} \omega_\gamma(x) \omega_\gamma(T_\alpha x) \cdots \omega_\gamma(T_\alpha^{q_n-1} x) &= \omega_\gamma^{(n)}(x), \quad \gamma \in \mathbb{S}^1; \\ \omega_\chi(x) \omega_\chi(T_\alpha x) \cdots \omega_\chi(T_\alpha^{q_n-1} x) &= \omega_\chi^{(n)}(x), \quad \chi \in \widehat{\mathbb{Z}_2^{\tilde{N}}}; \\ \text{Мом}_n(\chi, \beta) &= |(V_\chi^{q_n} \mathbf{1}, \mathbf{1})| = \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_\chi^{(n)}(x) dm(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}}^{(n)^{i_{11}}}(x) \cdot \omega_{\beta_{11}}^{(n)^{i_{12}}}(x - \beta_{12}) \cdots dm(x) \right|. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2 почти непосредственно следует из леммы 4.

ЛЕММА 4 (см. [15]). Если последовательность функций h_n в сепарабельном гильбертовом пространстве ограничена по норме, U — унитарный оператор

и $h_n - Uh_n$ слабо сходится к нулю, то $h_n - P_U h_n$, где P_U – оператор ортогонального проектирования на $H_{\text{inv}} = \{h : h = Uh\}$, слабо сходится к нулю.

Для $f, g \in L_2(X, \mu)$ и $\varphi_i(x) = \varphi(x)\varphi(Tx) \cdots \varphi(T^{k_i-1}x)$, учитывая соотношение $\|T\varphi_i - \varphi_i\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и равенство $H_{\text{inv}} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$, имеем

$$(\varphi_i \cdot f, g) - (\varphi_i \cdot \mathbf{1}, \mathbf{1}) \cdot (f, g) \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что $\|T^{k_i}f - f\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и что $(\varphi_i \cdot \mathbf{1}, \mathbf{1}) = (U_\varphi^{k_i} \mathbf{1}, \mathbf{1})$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} (U_\varphi^{k_i} f, g) - (\varphi_i f, g) &\rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \\ (U_\varphi^{k_i} f, g) - (U_\varphi^{k_i} \mathbf{1}, \mathbf{1}) \cdot (f, g) &\rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Если меры σ_j не взаимно сингулярны, то существует вероятностная борелевская мера ρ на $\mathbb{S}^1 \equiv [0, 1)$, абсолютно непрерывная относительно σ_1 и σ_2 . Учитывая, что для любого $f \in L_2(\mathbb{S}^1, \sigma_j)$ при $t \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{S}^1} e^{2\pi i k_m \lambda} |f|^2 d\sigma_j(\lambda) \rightarrow c_j \int_{\mathbb{S}^1} |f|^2 d\sigma_j(\lambda),$$

при $t \rightarrow \infty$ для любого j имеем

$$\int_{\mathbb{S}^1} e^{2\pi i k_m \lambda} d\rho(\lambda) \rightarrow c_j.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 3.

§ 4. Свойства моментов

4.1. Далее нам потребуется распределение знаков функции $\omega_\beta^{(n)}(x)$ для точек x в n -й модели ($\beta \in \mathbb{S}^1$). Переформулируем с учетом §2 предложение 1 из [16] (см. рис. 2) в следующем виде:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Множества $S_\pm(n) = \{x : \omega_\beta^{(n)}(x) = \pm 1\}$ отделены друг от друга в n -й модели границей, являющейся образом линии

$$\begin{aligned} L_n = \{ & (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_2 = z_2(n, \beta), z_1 \in \Delta(n) \} \\ & \cup \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_1 = z_1(n, \beta), z_2(n, \beta) - 1 < z_2 \leq z_2(n, \beta) \} \end{aligned}$$

при естественной проекции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma_n$, где $(z_1(n, x), z_2(n, x))$ – координаты точки $x \in \mathbb{S}^1$ в n -й модели и

$$\Delta(n) = \begin{cases} [z_1(n, \beta) - b_n/a_n, z_1(n, \beta)] & \text{при нечетных } n, \\ [z_1(n, \beta), z_1(n, \beta) + b_n/a_n] & \text{при четных } n. \end{cases}$$

Заметим, что мера одного этажа, т.е. $m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_2(n, x) = c(n)\}$, убывает экспоненциально по n , поэтому не будет влиять на последующие оценки, как, впрочем, и знак $\omega_\beta^{(n)}(x)$ на линии L_n .

4.2. Две технические леммы.

Рис. 2

ЛЕММА 5. Существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого номера $n > 1$ найдутся $\beta_i \in \mathbb{S}^1$, $i = 1, 2, \dots, 6$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$1. \quad 1 - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_1}^{(n)}(x) dm(x) \right| > \varepsilon; \quad (10)$$

$$2. \quad 1 - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_2}^{(n)}(x) \omega_{\beta_2}^{(n)}(x - \beta_3) dm(x) \right| > \varepsilon; \quad (11)$$

$$3. \quad \left| \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_4}^{(n)}(x) \omega_{\beta_4}^{(n)}(x - \beta_5) \omega_{\beta_4}^{(n)}(x - \beta_6) dm(x) \right| - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_4}^{(n)}(x) dm(x) \right| \right| > \varepsilon. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 сразу следует из предложения 1. Без ограничения общности будем рассматривать только нечетные n .

Докажем пункт 2. Фиксируем $\varepsilon' = 1/4$. Ясно, что в n -й модели для точки $0 \in \mathbb{S}^1$ имеем $z_1(n, 0) = 0$, $z_2(n, 0) = (q_n - 1)/q_n$. Выберем β_3 из условий $z_1(n, \beta_3) = \varepsilon'$, $z_2(n, \beta_3) = z_2(n, 0)$, а β_2 — любая точка из $\mathbb{S}^1$ с условием

$$\varepsilon' + \frac{b_n}{a_n} < z_1(n, \beta_2) < 1 + \frac{b_n}{a_n} - \varepsilon'$$

(см. рис. 3). Тогда на $\mathbb{S}^1 \equiv [0, 1)$ имеем

$$0 < \beta_3 < \beta_2 < \beta_2 + \beta_3 < 1.$$

Рис. 3

Поэтому

$$\omega_{\beta_2}(x)\omega_{\beta_2}(x - \beta_3) = -1 \Leftrightarrow x \in \Delta = [0, \beta_3] \cup [\beta_2, \beta_2 + \beta_3].$$

В силу выбора β_2, β_3 (см. рис. 3) траектория длины q_n любой точки (т.е. набор $x, T_\alpha x, \dots, T_\alpha^{q_n-1}x$) попадает не более одного раза в множество Δ . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} & m\{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_2}^{(n)}(x)\omega_{\beta_2}^{(n)}(x - \beta_3) = -1\} \\ &= m\{x \in \mathbb{S}^1 : \exists k \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\} \text{ такое, что } T_\alpha^k x \in \Delta\} = q_n \cdot m(\Delta) \\ &= 2q_n \varepsilon' \cdot m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_2(n, x) = z_2(n, 0), z_1(n, x) \leq 1\} \\ &= 2\varepsilon' m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon' < m\{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_2}^{(n)}(x)\omega_{\beta_2}^{(n)}(x - \beta_3) = -1\} < 2\varepsilon'.$$

И, окончательно, имеем оценку (11), где $\varepsilon = 1/2$.

Докажем пункт 3. Фиксируем $\varepsilon' = 1/6$. Выбираем $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ из условий $z_2(n, \beta_4) = z_2(n, \beta_5) = z_2(n, \beta_6) = z_2(n, 0)$, $z_1(n, \beta_4) = z_1(n, \beta_5) = \varepsilon'$ и $z_1(n, \beta_6) = 2\varepsilon'$. Тогда на $\mathbb{S}^1 \equiv [0, 1]$ имеем

$$0 < \beta_4 = \beta_5 < \beta_6 = 2\beta_4 < \beta_6 + \beta_4 < \frac{1}{q_n}.$$

Поэтому

$$\omega_{\beta_4}(x)\omega_{\beta_4}(x - \beta_5)\omega_{\beta_4}(x - \beta_6) = -1 \Leftrightarrow x \in [0, \beta_6 + \beta_4].$$

Аналогично доказательству пункта 2 получим

$$\begin{aligned} & m\{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_4}^{(n)}(x)\omega_{\beta_4}^{(n)}(x - \beta_5)\omega_{\beta_4}^{(n)}(x - \beta_6) = -1\} \\ &= 3\varepsilon' m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1\} = 3m\{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_4}^{(n)}(x) = -1\}. \end{aligned}$$

Следовательно, левая часть в (12) есть в точности

$$4\varepsilon' m \{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1\}.$$

И, окончательно, имеем оценку (12), где $\varepsilon = 1/3$.

Фиксируем характер χ . Выбираем k из следующего условия: функция χ зависит только от первых k координат пространства $\{-1, 1\}^{\tilde{N}}$.

ЛЕММА 6. *Функция $\text{Мом}_n(\chi, \beta)$ равномерно непрерывна по β , n относительно $\rho_n^{(k)}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \forall \beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$*

$$\rho_n^{(k)}(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) < \delta \Rightarrow |\text{Мом}_n(\chi, \beta^{(1)}) - \text{Мом}_n(\chi, \beta^{(2)})| < \varepsilon,$$

где $\beta^{(i)} = (\beta_{11}^{(i)}, \beta_{12}^{(i)}, \dots)$, $\beta_{jk}^{(i)} \in \mathbb{S}^1$, $i = 1, 2$.

Доказательство леммы 6 использует следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого $\varepsilon' > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого n выполняется*

$$\rho_n(\beta_1, \beta_2) < \delta \Rightarrow \exists i: m \{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_1}^{(n)}(x) \neq (-1)^{(i)} \omega_{\beta_2}^{(n)}(x)\} < \varepsilon'. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $\rho_n(\beta_1, \beta_2) < \delta$ геометрически эквивалентно требованию: множество $\beta_2 \Gamma_n \subset \mathbb{R}^2$ есть образ $\beta_1 \Gamma_n$ при сдвиге на вектор $\bar{a}$, где $|\bar{a}| < \delta$. Ясно, что достаточно ограничиться следующими двумя случаями, в которых для определенности n нечетно.

1. Сдвиг по горизонтали на вектор $\bar{a}$. Выберем $z' = (z'_1, z'_2)$ и $z'' = (z''_1, z''_2)$ с условиями $z' \in \beta_1 \Gamma_n$, $z'' \in \beta_2 \Gamma_n$, $\rho(z', z'') < \delta$. Положим

$$\Delta_1 = [z'_1, z''_1] \times [z'_2 - 1, z'_2], \quad c = \omega_{\beta_1}^{(n)}(x_0) \omega_{\beta_2}^{(n)}(x_0),$$

где $x_0 \in \mathbb{S}^1$ удовлетворяет условию $x_0 \Gamma_n \notin \Delta_1$. Учитывая предложение 1, имеем

$$\{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_1}^{(n)}(x) \omega_{\beta_2}^{(n)}(x) \neq c\} \subseteq \{x \in \mathbb{S}^1 : x \Gamma_n \cap \Delta_1 \neq \emptyset\}.$$

Учитывая неравенства

$$\begin{aligned} m \{x \in \mathbb{S}^1 : x \Gamma_n \cap \Delta_1 \neq \emptyset\} &\leq 2m \{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq \delta\} \\ &= 2\delta m \{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1\} < 2\delta, \end{aligned}$$

получаем (13).

2. Сдвиг по вертикали на вектор $\bar{a}$. Выберем точки $z' = (z'_1, z'_2)$ и $z'' = (z''_1, z''_2)$ с условиями $z' \in \beta_1 \Gamma_n$, $z'' \in \beta_2 \Gamma_n$, $\rho(z', z'') < \delta$, $z'_2 < z''_2$. Положим

$$\Delta_2 = \left[z'_1 - \frac{b_n}{a_n}, z'_1 \right] \times [z'_2, z''_2], \quad c = \omega_{\beta_1}^{(n)}(x_0) \omega_{\beta_2}^{(n)}(x_0),$$

где точка $x \in \mathbb{S}^1$ удовлетворяет условию $x_0 \Gamma_n \notin \Delta_2$. Учитывая предложение 1, имеем

$$\{x \in \mathbb{S}^1 : \omega_{\beta_1}^{(n)}(x) \omega_{\beta_2}^{(n)}(x) \neq c\} \subseteq \{x \in \mathbb{S}^1 : x \Gamma_n \cap \Delta_2 \neq \emptyset\}.$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned}
 m\{x \in \mathbb{S}^1 : x\Gamma_n \cap \Delta_2 \neq \emptyset\} &\leq 2m\left\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq \frac{b_n}{a_n}, z_2(n, x) < \delta\right\}, \\
 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta} \right] \cdot m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1, z_2(n, x) < \delta\} \\
 &< \sum_{k=1}^{[1/\delta]} m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1, (k-1)\delta \leq z_2(n, x) < k\delta\} \\
 &\leq m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1\} < 1,
 \end{aligned}$$

получаем (13). Предложение 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Ясно, что достаточно доказать лемму для $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$, не совпадающих только на первых k координатах. В силу неравенства треугольника для полуметрики $\rho_n^{(k)}$ достаточно доказать лемму для $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$, не совпадающих на одной координате, например на первой или второй. Разберем два соответствующих случая.

1. Пусть $\beta_{12}^{(1)} \neq \beta_{12}^{(2)}$. Если $i_{12} = 0$ ($\chi = y_{11}^{i_{11}} y_{12}^{i_{12}} \dots$), то моменты совпадают, иначе имеем

$$\begin{aligned}
 &|\text{Мом}_n(\chi, \beta^{(1)}) - \text{Мом}_n(\chi, \beta^{(2)})| \\
 &= \left| \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}^{(1)}}^{(n)}(x - \beta_{12}^{(1)}) \varphi(x) dm(x) \right| - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}^{(1)}}^{(n)}(x - \beta_{12}^{(2)}) \varphi(x) dm(x) \right| \right| \quad (14)
 \end{aligned}$$

для некоторой функции $\varphi(x) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \{-1, 1\}$. Используя тождество

$$\omega_{\beta}(x - \gamma) \equiv \begin{cases} \omega_{\beta+\gamma}(x) \omega_{\gamma}(x) & \text{при } \gamma + \beta \leq 1, \\ -\omega_{\beta+\gamma-1}(x) \omega_{\gamma}(x) & \text{при } \gamma + \beta > 1, \end{cases}$$

переписываем правую часть (14) в виде

$$\begin{aligned}
 &\left| \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}^{(1)} + \beta_{12}^{(1)} \pmod{1}}^{(n)}(x) \omega_{\beta_{12}^{(1)}}^{(n)}(x) \varphi(x) dm(x) \right| \right. \\
 &\quad \left. - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}^{(1)} + \beta_{12}^{(2)} \pmod{1}}^{(n)}(x) \omega_{\beta_{12}^{(2)}}^{(n)}(x) \varphi(x) dm(x) \right| \right|. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Учитывая предложение 2 при $\varepsilon' = \varepsilon/4$ и инвариантность метрики ρ_n (см. §2) при повороте на $\beta_{11}^{(1)}$, получаем, что две подынтегральные функции в (15), с точностью до умножения на -1 , отличаются на множестве меры менее чем $2\varepsilon'$, т.е. имеем нужную оценку.

2. Пусть $\beta_{11}^{(1)} \neq \beta_{11}^{(2)}$. Без ограничения общности $i_{11} = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
 &|\text{Мом}_n(\chi, \beta^{(1)}) - \text{Мом}_n(\chi, \beta^{(2)})| \\
 &= \left| \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}^{(1)}}^{(n)}(x) \omega_{\beta_{11}^{(1)}}^{(n)}(x - \beta_{12}^{(1)}) \dots \omega_{\beta_{11}^{(1)}}^{(n)}(x - \beta_{1n_1}^{(1)}) \varphi(x) dm(x) \right| \right. \\
 &\quad \left. - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}^{(2)}}^{(n)}(x) \omega_{\beta_{11}^{(2)}}^{(n)}(x - \beta_{12}^{(1)}) \dots \omega_{\beta_{11}^{(2)}}^{(n)}(x - \beta_{1n_1}^{(1)}) \varphi(x) dm(x) \right| \right|.
 \end{aligned}$$

Рассуждая, как и при доказательстве пункта 1, получаем требуемую оценку.

§5. Выбор центров требуемых окрестностей

Цель этого параграфа – по заданной паре характеров χ_1 и χ_2 ($\chi_1 \approx \chi_2$) и номеру n указать, учитывая §4, такие элементы $\beta(n)$ из множества $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$, чтобы моменты $\text{Мом}_n(\chi_i, \beta(n))$, $i = 1, 2$, были равномерно по n отделены друг от друга.

Здесь, как и выше, χ_1 и χ_2 отождествим с наборами $(i_{11}, i_{12}, \dots)$ и $(j_{11}, j_{12}, \dots)$.

I. Рассмотрим частный случай $i_{kr} = j_{kr} = 0$ при $k = 2, 3, \dots, r = 1, 2, \dots, n_k$. Если неверно равенство

$$\sum_r i_{1r} = \sum_r j_{1r} \pmod{2}, \quad (16)$$

то положим $\beta_{12} = \beta_{13} = \dots = 0$, $\beta_{11} = \beta_1$, где β_1 – из леммы 5. Тогда получим

$$\text{Мом}_n = 1 - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{11}}^{(n)}(x) dm(x) \right|.$$

Здесь и далее

$$\text{Мом}_n = |\text{Мом}_n(\chi_1, \beta(n)) - \text{Мом}_n(\chi_2, \beta(n))|.$$

Осталось использовать оценку (10).

Если верно равенство (16), то, учитывая условие $\chi_1 \approx \chi_2$, нетрудно убедиться, что с точностью до перемены мест символов i и j имеет место хотя бы один из следующих вариантов:

1. $\exists m_1 \left(1 < m_1 \text{ \& } i_{11} = i_{1m_1} = 1 \text{ \& } j_{11} = j_{1m_1} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 0 \pmod{2} \right)$;
2. $\exists m_1, m_2 \left(1 < m_1 < m_2 \text{ \& } i_{1m_p} = 1 \text{ \& } j_{1m_p} = 0, p = 1, 2, \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 0 \pmod{2} \right)$;
3. $\exists m_1, m_2 \left(1 < m_1 < m_2 \text{ \& } i_{1m_p} = 1 \text{ \& } j_{1m_p} = 0, p = 1, 2, \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 1 \pmod{2} \right)$;
4. $\exists m_2, m_3 \left(1 < m_p, p = 2, 3, \text{ \& } i_{11} = i_{1m_2} = i_{1m_3} = j_{1m_3} = 1 \text{ \& } j_{11} = j_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 1 \pmod{2} \right)$;
5. $\exists m_1, m_2 \left(i_{11} = j_{11} = i_{1m_1} = j_{1m_2} = 1 \text{ \& } j_{1m_1} = i_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 0 \pmod{2} \right)$;
6. $\exists m_2, m_3 \left(i_{11} = i_{1m_3} = j_{1m_2} = j_{1m_3} = 1 \text{ \& } j_{11} = i_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 0 \pmod{2} \right)$;
7. $\exists m_1, m_2, m_3 \left(1 < m_p, p = 1, 2, 3, \text{ \& } i_{1m_1} = j_{1m_2} = i_{1m_3} = j_{1m_3} = 1 \text{ \& } j_{1m_1} = i_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 0 \pmod{2} \right)$;
8. $\exists m_1, m_2, m_3 \left(m_1 \neq m_3 \text{ \& } i_{11} = j_{1m_2} = i_{1m_3} = j_{1m_3} = i_{1m_1} = j_{1m_1} = 1 \text{ \& } j_{11} = i_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 1 \pmod{2} \right)$;
9. $\exists m_1, m_2, m_3 \left(m_3 \neq 1 \text{ \& } i_{11} = j_{11} = i_{1m_1} = j_{1m_2} = i_{1m_3} = j_{1m_3} = 1 \text{ \& } j_{1m_1} = i_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 1 \pmod{2} \right)$;
10. $\exists m_1, m_2, m_3 \left(1 < m_p, p = 1, 2, 3, \text{ \& } i_{1m_1} = j_{1m_2} = i_{1m_3} = j_{1m_3} = 1 \text{ \& } j_{1m_1} = i_{1m_2} = 0 \text{ \& } \sum_r i_{1r} = 1 \pmod{2} \right)$.

Если $\exists m_1, m_2$ ($i_{1m_p} = 1$ & $j_{1m_p} = 0$, $p = 1, 2$ ($m_1 \neq m_2$)), то возможен один из вариантов 1–4. В противном случае для пары χ_1, χ_2 подойдет хотя бы один из вариантов 5–10.

Пусть $\beta_2, \dots, \beta_6$ выбраны по лемме 5. Определим ниже β_{1l} , $l = 1, 2, \dots, n$, для каждого из случаев 1–10:

- 1–2. $\beta_{11} = \beta_2, \beta_{1m_1} = \beta_3, \beta_{1l} = 0$ при $l \notin \{1, m_1\}$;
- 3. $\beta_{11} = \beta_4, \beta_{1m_1} = \beta_5, \beta_{1m_2} = \beta_6, \beta_{1l} = 0$ при $l \notin \{1, m_1, m_2\}$;
- 4. $\beta_{11} = \beta_4, \beta_{1m_2} = \beta_5, \beta_{1m_3} = \beta_6, \beta_{1l} = \beta_{1m_3}$ при $l \notin \{1, m_2, m_3\}$;
- 5. $\beta_{11} = \beta_2, \beta_{1m_1} = \beta_3, \beta_{1l} = 0$ при $l \notin \{1, m_1\}$;
- 6–7. $\beta_{11} = \beta_2, \beta_{1m_2} = \beta_3, \beta_{1l} = 0$ при $l \notin \{1, m_2\}$;
- 8–10. $\beta_{11} = \beta_4, \beta_{1m_1} = \beta_5, \beta_{1m_3} = \beta_6, \beta_{1m_2} = \beta_{1m_3}, \beta_{1l} = 0$ при $l \notin \{1, m_1, m_2, m_3\}$;

Отсюда в каждом случае получим, что Мом_n есть в точности соответствующая левая часть одной из формул (11), (12). Следовательно, выбор $\beta(n)$ с заявленными свойствами осуществлен.

II. Общий случай легко следует из I. Действительно, для любого характера χ введем характеры $\chi(k)$, определяемые наборами $(i_{11}^{(k)}, i_{12}^{(k)}, \dots)$, где

$$i_{lr}^{(k)} = \begin{cases} i_{lr} & \text{при } l = k, \\ 0 & \text{при } l \neq k, \end{cases}$$

здесь χ определяется набором $(i_{11}, i_{12}, \dots)$ (т.е. $\chi = y_{11}^{i_{11}} y_{12}^{i_{12}} \dots$).

Если при $\chi_1 \approx \chi_2$ для некоторого k_0 верно $\chi_1(k_0) \approx \chi_2(k_0)$, то определим $\beta_{k_0 l}$, $l = 1, 2, \dots, n_{k_0}$, как и в пункте I, и положим $\beta_{kl} = 0$ при $k \neq k_0$.

Если для любого k верно $\chi_1(k) \sim \chi_2(k)$, то тогда можно выбрать $k_1, k_2, m_1, m_2, m_3, m_4$ ($m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2; m_1, m_2 \leq n_{k_1}; m_3, m_4 \leq n_{k_2}$) с условиями

$$\begin{aligned} i_{k_1 r} &= 1 \Leftrightarrow r = m_1; & i_{k_2 r} &= 1 \Leftrightarrow r = m_3; \\ j_{k_1 r} &= 1 \Leftrightarrow r = m_2; & j_{k_2 r} &= 1 \Leftrightarrow r = m_4 \end{aligned}$$

(возможен вариант, когда $m_3 = m_4$). Пусть для определенности $m_1 \neq 1$. Положим $\beta_{k_1 1} = \beta_{k_2 1}$, $\beta_{kr} = 0$ при $k \notin \{k_1, k_2\}$, $r = 1, 2, \dots, n_k$, $\beta_{k_2 2} = \beta_{k_2 3} = \dots = \beta_{k_2 n_{k_2}} = 0$ и если $m_2 \neq 1$, то $\beta_{k_1 m_2} = 0$. Имеем

$$\text{Мом}_n = 1 - \left| \int_{\mathbb{S}^1} \omega_{\beta_{k_1 1}}^{(n)}(x - \beta_{k_1 m_1}) \omega_{\beta_{k_1 1}}^{(n)}(x) dm(x) \right|.$$

Осталось выбрать $\beta_{k_1 1} = \beta_2$ и $\beta_{k_1 m_1} = \beta_3$, где β_2 и β_3 – из леммы 5. Выбор $\beta(n)$ в общем случае осуществлен.

§ 6. Доказательства теорем 2, 3, следствий и замечаний

Этот параграф использует обозначения §§ 2, 3.

6.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Фиксируем пару характеров $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$ таких, что $\chi_1 \sim \chi_2$. Для определенности пусть $\chi_1(y) = y_{11}$, $\chi_2(y) = y_{12}$. Пункт 2 следует из равенства

$$T_{1-\beta_{12}} V_{\chi_1} f(x) = \omega_{\beta_{11}}(x - \beta_{12}) f(x + \alpha - \beta_{12}) = V_{\chi_2} T_{1-\beta_{12}} f(x).$$

Зафиксируем характер χ . Построим плотное подмножество типа G_δ таких β , для которых V_χ имеет простой спектр. Положим $\beta(n) = (0, 0, \dots)$, $\varepsilon = 0.01$, k определим по характеру (см. лемму 6).

Нетрудно убедиться, что если

$$d_n = \frac{q_{n-1}b_n}{q_n a_n} \geq \frac{1}{2},$$

то $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 1$ и $d_{n+1} < 1/2$. Пусть

$$\beta \in \bigcap_m \bigcup_{\substack{n > m, \\ d_n < \frac{1}{2}}} U_\varepsilon(n). \quad (17)$$

Фиксируем n с условиями $d_n < 1/2$, $\beta \in U_\varepsilon(n)$ и пусть для определенности n нечетно. Рассмотрим n -ю модель (см. рис. 4). Имеем

$$m\{x \in \mathbb{S}^1 : z_1(n, x) \leq 1\} \geq \frac{2}{3}. \quad (18)$$

Рис. 4

Функция $\omega_\chi(x)$ может иметь разрывы только в точках β_{ij} , $\beta_{ij} + \beta_{i1}$, где $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$. Учитывая инвариантность метрики ρ_n относительно поворота, имеем

$$\rho_n(\beta_{ij}, 0) < 0.01, \quad \rho_n(\beta_{ij} + \beta_{i1}, 0) < 0.02$$

для таких β_{ij} , от которых зависит $\omega_\chi(x)$. Заметим, что $z_1(n, 0) = 0$ и $z_2(n, 0) = 1 - 1/q_n$. Следовательно, все точки разрыва функции $\omega_\chi(x)$ в n -й модели расположены в заштрихованных зонах на рис. 4.

Положим $h_n(x) = \chi'_{D_n}$, $\tilde{D}_n = \bigcup_{j=0}^{[0.98q_n-1]} T_\alpha^{-j} D_n$, где χ'_A — индикатор множества A , $D_n = \{x \in \mathbb{S}^1 : z_2(n, x) = z_2(n, 0), 0.02 < z_1(n, x) < 0.98\}$. Учитывая (18), при достаточно большом n имеем

$$m(\tilde{D}_n) \geq 0.6. \quad (19)$$

Так как $\|\chi'_{\tilde{D}_n} - T_\alpha \chi'_{\tilde{D}_n}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и T_α – эргодично, то по лемме 4 для любой f из $L_2(\mathbb{S}^1, m)$ имеем

$$\int_{\tilde{D}_n} f dm - m(\tilde{D}_n) \int_{\mathbb{S}^1} f dm \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Используем следующий хорошо известный классический факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если существуют $\theta > 0$ и последовательность векторов h_n из $L_2(\mathbb{S}^1, m)$, обладающие свойством*

$$\forall h \quad (\|h\| = 1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d^2(C_U(h_n), h) \leq \frac{1}{2} - \theta, \quad (21)$$

то унитарный оператор U имеет простой спектр, где $C_U(f)$ – циклическое пространство вектора f относительно U ,

$$d(g, C_U(h)) = \min_{f \in C_U(h)} \|g - f\|_{L_2}.$$

Свойство (21) достаточно доказать для всюду плотного подмножества векторов h . Поэтому рассмотрим только функцию h , постоянную на всех полуинтервалах в k -й модели, начиная с некоторого k . Без ограничения общности $k \leq n$. Тогда $h(x)$ и $\omega_\chi(x)$ постоянны на интервалах $T_\alpha^{-j} D_n$, $j = 0, 1, \dots, [0.98q_n] - 1$. Следовательно, $V_\chi^l \chi'_{D_n} = d(l) \chi'_{T_\alpha^{-l} D_n}$, где $l = 0, 1, \dots, [0.98q_n] - 1$, а $d(l)$ не зависит от x . Отсюда $\chi'_{T_\alpha^{-l} D_n} \in C_{V_\chi}(h_n)$. Поэтому

$$h(x) \chi'_{\tilde{D}_n} = \sum_j h(x) \cdot \chi'_{T_\alpha^{-j} D_n} \in C_{V_\chi}(h_n).$$

Следовательно, учитывая (19) и (20), имеем

$$\begin{aligned} d^2(C(h_n), h) &\leq \|h \cdot \chi'_{\tilde{D}_n} - h\|^2 = \int_{\mathbb{S}^1 \setminus \tilde{D}_n} |h|^2 dm \\ &= (1 - m(\tilde{D}_n)) + \left(m(\tilde{D}_n) \cdot \int_{\mathbb{S}^1} |h|^2 dm - \int_{\tilde{D}_n} |h|^2 dm \right) < 0.41 \end{aligned}$$

при достаточно большом n . Осталось учесть предложение 3 и топологическую лемму для множества в формуле (17).

Фиксируем пару χ_1, χ_2 такую, что $\chi_1 \approx \chi_2$. Определим $\beta(n)$, $\delta > 0$, номер k , а значит, и $U_\delta(n)$. Для любого n и выбранных в § 5 $\beta(n)$ имеем

$$|\text{Мом}_n(\chi_1, \beta(n)) - \text{Мом}_n(\chi_2, \beta(n))| > \varepsilon, \quad (22)$$

где ε определено в лемме 5. Выберем такие $\delta > 0$ и номер k (см. лемму 6), что для любых $n, i = 1, 2$ и $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$

$$\rho_n^{(k)}(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) < \delta \Rightarrow |\text{Мом}_n(\chi_i, \beta^{(1)}) - \text{Мом}_n(\chi_i, \beta^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (23)$$

Пусть $\beta \in \bigcap_m \bigcup_{n>m} U_\delta(n)$, тогда $\beta \in \bigcap_l U_\delta(n'_l)$ для некоторой последовательности $n'_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$. Следовательно, $\rho_{n'_l}^{(k)}(\beta, \beta(n'_l)) < \delta$ для любого l . Учитывая (22), (23), для любого l получаем

$$|\text{Мом}_{n'_l}(\chi_1, \beta) - \text{Мом}_{n'_l}(\chi_2, \beta)| > \frac{\varepsilon}{3}. \quad (24)$$

Выбирая (если потребуется) подпоследовательность n'_{l_p} , учитывая лемму 2, получаем

$$V_{\chi_i}^{q_{n'_{l_p}}} \rightarrow c_i \cdot E \quad \text{при } p \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

В силу (24) имеем

$$|c_1 - c_2| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Осталось применить лемму 3 и топологическую лемму.

Искомым плотным подмножеством типа G_δ будет пересечение плотных подмножеств типа G_δ , введенных выше. Теорема 2 доказана.

6.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Если преобразование T эргодично, то, очевидно, $1 \in \mathcal{M}(T)$. Следовательно, достаточно так надстроить любое преобразование T_{ω_β} из теоремы 1, чтобы у функции кратности спектра добавилось только значение ∞ .

Рассмотрим декартово произведение $\tilde{T} = T_{\omega_\beta} \times T_0$, где $\mathcal{M}(T_0) = \{1, \infty\}$ и компонента кратности 1 состоит из констант (например, T_0 – автоморфизм Бернулли).

Преобразование $\tilde{T}$ эргодично в силу непрерывности спектра T_0 .

Гильбертово пространство $L_2(\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}} \times X, m \times l^{\tilde{N}} \times \mu)$ представимо в виде прямой суммы инвариантных относительно $\tilde{T}$ подпространств H_i , $i \in \mathbb{Z}_+$, где H_i – наименьшее замкнутое подпространство, содержащее конечные линейные комбинации функций вида $f(x, y) \cdot \psi(z)$, где $f(x, y) \in L_2(\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}, m \times l^{\tilde{N}})$, $\psi(z) \in C(h_i)$, $C(h_i)$ – i -е циклическое пространство в спектральном разложении оператора T_0 ($C(h_0) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$). Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \tilde{T}|_{H_0} &\sim T_{\omega_\beta}|_{L_2(\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}, m \times l^{\tilde{N}})}, \\ \tilde{T}|_{H_j} &\sim \tilde{T}|_{H_i} \quad \text{при } 0 \neq i \neq j \neq 0, \end{aligned}$$

где “ $\sim$ ” – спектральный изоморфизм.

6.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. По теореме 1 преобразование T_{ω_β} с заданной ограниченной функцией кратности спектра может действовать в пространстве $\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}$, состоящем из $2^{\tilde{N}}$ полуинтервалов (для некоторого $\tilde{N} < \infty$). Расположим на оси друг за другом эти полуинтервалы. В силу того, что функция $\omega_\beta(x)$ кусочно постоянна, преобразование T_{ω_β} есть перекладывание на полученном полуинтервале. Доказательство следствия 2 окончено.

6.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 1. Достаточно для каждого характера $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}} \setminus \{\mathbf{1}\}$ построить плотное подмножество типа G_δ таких β , для которых оператор V_χ имеет непрерывный спектр. Используем следующее простое наблюдение, не нуждающееся в доказательстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если для некоторого $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1$, последовательность операторов $V_\chi^{k_m}$ слабо сходится к cE при $m \rightarrow \infty$, то унитарный оператор V_χ не имеет собственных векторов.

Зафиксируем номер n и такое r_0 , что $i_{r_0 j_0} = 1$ для некоторого $j_0 \leq n_{r_0}$ ($\chi = y_{11}^{i_{11}} y_{12}^{i_{12}} \dots$). Определим $\beta(n) = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$, $\delta > 0, k$. При $r \neq r_0$ положим $\beta_{rj} = 0$. Если

$$\sum_j i_{r_0 j} = 1 \pmod{2}, \quad (25)$$

то пусть

$$\beta_{r_0 j} = \begin{cases} \beta_1 & \text{при } j = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где β_1 выбрано по лемме 5. Если не верно (25), то существует такое j_1 , $j_1 \leq n_{r_0}$, что $j_0 \neq j_1$ и $i_{r_0 j_1} = 1$. В этом случае

$$\beta_{r_0 j} = \begin{cases} \beta_2 & \text{при } j = 1, \\ \beta_3 & \text{при } j = j_{t_0}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $t_0 \in \{0, 1\}$ выбрано с условием $j_{t_0} \neq 1$, а β_2, β_3 выбраны по лемме 5.

Учитывая (10), (11) соответственно, для любого n имеем

$$\text{Мом}_n(\chi, \beta(n)) < 1 - \varepsilon. \quad (26)$$

В силу леммы 6 выберем такие $\delta > 0$ и k (χ уже задан), что неравенство $\rho_n^{(k)}(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) < \delta$ влечет

$$|\text{Мом}_n(\chi, \beta^{(1)}) - \text{Мом}_n(\chi, \beta^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (27)$$

Пусть $\beta \in \bigcap_m \bigcup_{n > m} U_\delta(n)$, тогда $\beta \in \bigcap_l U_\delta(n'_l)$ для некоторой последовательности n'_l с условием $n'_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$.

Следовательно, $\rho_{n'_l}^{(k)}(\beta, \beta(n'_l)) < \delta$ для любого l . Учитывая (26), (27), для любого l получаем

$$\text{Мом}_{n'_l}(\chi, \beta) < 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбираем (если потребуется) подпоследовательность n'_{l_p} , имеем

$$\text{Мом}_{n'_{l_p}}(\chi, \beta) \rightarrow c < 1 \quad \text{при } p \rightarrow \infty.$$

Для завершения доказательства достаточно последовательно применить лемму 2 для операторов $V_\chi^{q_{n'_{l_p}}}$, предложение 4 и топологическую лемму.

6.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 2. Учитывая структуру построенного в теореме 3 множества, замечание, очевидно, следует из следующего утверждения: $\forall \delta > 0 \forall k \forall r \forall n'_l, l = 1, 2, \dots,$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} n'_l = +\infty \Rightarrow m \times m \times \dots \left(\bigcup_{l > r} U_\delta(n'_l) \right) = 1. \quad (28)$$

Докажем (28). Преобразования

$$T_i = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{i-1 \text{ раз}} \times T_\alpha \times \underbrace{E \times \dots}_{\tilde{N}-i \text{ раз}}$$

действуют в $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$ и как операторы в $L_2(\mathbb{S}^{\tilde{N}}, m \times m \times \dots)$. Рассматривая n'_l -е модели, получаем

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \quad \forall l \quad \int_{\mathbb{S}^{\tilde{N}}} f_l d(m \times m \times \dots) &> c, \\ \|T_i f_l - f_l\|_{L_2} &\rightarrow 0 \quad \forall i \text{ при } l \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (29)$$

здесь и далее f_l — индикатор множества $U_\delta(n'_l)$. Используя лемму 4, получаем

$$f_l - \text{Pr}_{T_i} f_l \rightarrow 0 \quad \forall i \text{ при } l \rightarrow \infty \quad (30)$$

($\rightarrow$ — слабая сходимость). Если $g_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то, очевидно, $\text{Pr}_{T_i} g_n \rightarrow 0$ для любого i при $n \rightarrow \infty$, и ввиду (30) получим

$$f_l - P_0 f_l \rightarrow 0 \text{ при } l \rightarrow \infty, \quad (31)$$

где $P_0 = \text{Pr}_{T_1} \text{Pr}_{T_2} \dots \text{Pr}_{T_k}$ — проектор на подпространство функций, не зависящих от первых k координат пространства $\mathbb{S}^{\tilde{N}}$. Но f_l зависит только от первых k координат. Поэтому

$$P_0 f_l = \int_{\mathbb{S}^{\tilde{N}}} f_l d(m \times m \times \dots) \cdot \mathbf{1}.$$

Перепишем (31) в виде

$$\int_{\mathbb{S}^{\tilde{N}}} f_l \bar{g} d(m \times \dots) - \int_{\mathbb{S}^{\tilde{N}}} f_l d(m \times \dots) \cdot \int_{\mathbb{S}^{\tilde{N}}} \bar{g} d(m \times \dots) \rightarrow 0$$

$\forall g \in L_2$ при $l \rightarrow \infty$. Рассматривая в качестве g индикатор множества $\bigcup_{l > r} U_\delta(n'_l)$, учитывая (29), получаем (28).

6.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 3. Предположим противное. Тогда существует инвариантная функция в некотором H_{χ_0} , где $\chi_0 \neq \mathbf{1}$, т.е. функция вида $\varphi(x)\chi_0(y)$, где $\varphi(x + \alpha)\omega_{\chi_0}(x)\chi_0(y) = \varphi(x)\chi_0(y)$ для почти всех $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}^{\tilde{N}}$. Отсюда $|\varphi(x)|$ инвариантна относительно эргодического T_α , поэтому $|\varphi(x)| = \text{const}$ для почти всех x . Можно считать, что $|\varphi(x)| = 1$. Тогда оператор

$$U: f(x, y) \mapsto \varphi(x)\chi_0(y)f(x, y)$$

унитарен. Заметим, что для $f \in L_2(\mathbb{S}^1, m)$, $\chi(y) \in \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$

$$\begin{aligned} T_{\omega_\beta} U f(x) \chi(y) &= \varphi(x + \alpha) f(x + \alpha) \omega_{\chi_0 \chi}(x) \chi_0(y) \chi(y), \\ U T_{\omega_\beta} f(x) \chi(y) &= \varphi(x) f(x + \alpha) \omega_\chi(x) \chi_0(y) \chi(y). \end{aligned}$$

Учитывая равенство $\omega_{\chi_0 \chi}(x) = \omega_{\chi_0}(x) \omega_\chi(x)$, получаем

$$U T_{\omega_\beta} = T_{\omega_\beta} U.$$

Заметим, что оператор U переставляет пространства H_χ как инволюция и

$$T_{\omega_\beta}|_{H_\chi} \sim T_{\omega_\beta}|_{U H_\chi}$$

для любого χ . Поэтому функция кратности спектра T_{ω_β} принимает только четные значения. Полученное противоречие доказывает замечание 3.

6.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Равенство $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}$ и эргодичность T_{ω_β} для почти всех β следуют из замечаний 2 и 3.

Преобразование T_{ω_β} является косым сдвигом на коммутативной компактной группе $\mathbb{S}^1 \times \widehat{\mathbb{Z}}_2^{\tilde{N}}$. Поэтому из эргодичности T_{ω_β} при $\tilde{N} < \infty$ следует строгая эргодичность (см. [21]). Доказательство теоремы 2 окончено.

Заметим, что при $\tilde{N} = \infty$ эргодические преобразования T_{ω_β} также являются строго эргодическими, поскольку являются пределом расширяющейся последовательности строго эргодических факторов.

§ 7. Конструктивные примеры (типичные точки)

7.1. Мотив. Информация о типичности некоторого множества еще не содержит указания на то, какими конкретно являются точки из этого множества. Далее будем строить такие типичные точки, которые тесно связаны с типичными точками некоторых одномерных отображений или композиций таковых.

7.2. Редукция к одномерам. Для наглядности рассмотрим $\alpha = [1, 1, \dots] = (\sqrt{5} - 1)/2$ и $\tilde{N} < \infty$ (разбор остальных случаев проводится по той же схеме с очевидными изменениями). Учитывая (4) и формулу

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \dots + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_1}}}},$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{b_n}{a_n}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1} b_n}{q_n a_n} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Рассмотрим n -ю модель, $n = 2, 3, \dots$. По нечетным n множества $D(n)$ “стабилизируются” к $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (по четным — к D_0). Ясно, что точки $\beta_i = \beta_i(n) \in \mathbb{S}^1$,

$i = 1, 2, \dots, 6$, из леммы 5 можно выбрать стабилизирующимися в том смысле, что начиная с некоторого n_0 координаты $z_j(n, \beta_i(n))$ зависят только от четности n . В силу (32) в теореме 3 искомое типичное множество есть пересечение не более чем счетного числа множеств вида

$$\bigcap_m \bigcup_{n > m} U_\varepsilon(n) \quad (\varepsilon > 0), \quad (33)$$

где центры $\beta(n) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ окрестностей $U_\varepsilon(n)$ (см. §§5, 6) также стабилизируются (в действительности, при $\tilde{N} < \infty$ имеем пересечение конечного числа множеств вида (33)).

Для $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots) \in \mathbb{S}^{\tilde{N}}$ обозначим

$$\tilde{\psi}_n(\beta) = (\psi_n(\beta_{11}), \psi_n(\beta_{12}), \dots) \in D(n) \times D(n) \times \dots,$$

где $\psi_n = \varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\dots\varphi_1$ и φ_i из §2. Ясно, что если орбита точки β всюду плотна в $\tilde{D}_0 = D_0 \times D_0 \times \dots$, а именно, $\{\tilde{\psi}_n(\beta)\}_{n \in 2\mathbb{N}}$ всюду плотно в $\tilde{D}_0$, то β будет типичной, т.е. будет содержаться в каждом множестве (33).

Фиксируем окрестность $U \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^2$. Рассмотрим множества

$$\varphi_{n-1}^{-1}(U \cap D(n)), \varphi_{n-2}^{-1}\varphi_{n-1}^{-1}(U \cap D(n)), \dots, \varphi_k^{-1}\varphi_{k+1}^{-1}\dots\varphi_{n-1}^{-1}(U \cap D(n))$$

при достаточно большом n , $1 < k < n$. Очевидно, что локально φ_p^{-1} растягивает вертикальные слои, а горизонтальные – сжимает. Следовательно, при любом k , меньшем некоторого k_0 , существует такой интервал $\Delta_k \subseteq [0, 1 + b_k/a_k) = [0, (\sqrt{5} + 1)/2)$, что

$$\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\dots\varphi_k\{(z_1, z_2) \in D(k) : z_1 \in \Delta_k\} \subseteq U.$$

Поэтому если последовательность $\{(z_1(n, \beta_{11}), z_1(n, \beta_{12}), \dots)\}_{n \in 2\mathbb{N}}$ всюду плотна в $[0, (\sqrt{5} + 1)/2)^{\tilde{N}}$, то орбита точки $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$ всюду плотна в $\tilde{D}_0$.

Ограничение отображения $\varphi_{2n+1}\varphi_{2n}$ на первую координату дает одномерное отображение на $[0, (\sqrt{5} + 1)/2)$ следующего вида

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\alpha^2}, & 0 \leq z < \alpha, \\ \frac{z - \alpha}{\alpha^2}, & \alpha \leq z < 2\alpha, \\ \frac{z - \alpha}{\alpha^2} - 1, & 2\alpha \leq z < 1 + \alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. Определим действие эндоморфизма T на $[0, 1)$ по формуле

$$Tz = \begin{cases} \frac{z}{\alpha^2}, & 0 \leq z < \alpha^2, \\ \frac{z}{\alpha^2} - 1, & \alpha^2 \leq z < 2\alpha^2, \\ \frac{z - 1}{\alpha^2} + 1, & 2\alpha^2 \leq z < 1 \end{cases}$$

Рис. 5

(см. рис. 5). Так как $T = afa^{-1}$, где $a(z) = (\sqrt{5} + 1)z/2$, то последовательность $\{z_1(n, \beta_{11}), z_1(n, \beta_{12}), \dots\}_{n \in 2\mathbb{N}}$ всюду плотна в точности тогда, когда

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (T^i(\alpha z_1(2, \beta_{11})), T^i(\alpha z_1(2, \beta_{12})), \dots) \text{ всюду плотно в } [0, 1]^{\tilde{N}}. \quad (34)$$

Перейдем к символической реализации T . Разбиение $\eta = \{[0, \alpha^2], [\alpha^2, 2\alpha^2], [2\alpha^2, 1]\}$ является образующим. Пара (η, T) естественным образом задает стационарный случайный процесс T' в пространстве $\Omega \subseteq \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$, состоящем из всех допустимых последовательностей, т.е. последовательностей, не содержащих комбинацию “20”. Нетрудно по точке $x \in \Omega$ конструктивно определить ее прообраз $\psi^{-1}(x) \in [0, 1]$. Ясно, что (34) имеет место в точности тогда, когда множество

$$\bigcup_i (T'^i \psi(\alpha z_1(2, \beta_{11})), T'^i \psi(\alpha z_1(2, \beta_{12})), \dots)$$

всюду плотно в $\Omega^{\tilde{N}}$. Следовательно, достаточно указать набор точек $\{e^{(i)}\}_{i=1}^{\tilde{N}} \subseteq \Omega$ со следующим свойством: для любого n и любых допустимых наборов чисел $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$, где $x_j^{(i)} \in \{0, 1, 2\}$, существует такое k , что $e_{j+k}^{(i)} = x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{N}$, $e^{(i)} = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots)$.

Обозначим через $B_i^{(j)}$ все допустимые наборы длины i , $i \geq 2$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, занумерованные так, что набор $B_i^{(1)} B_i^{(2)} \dots B_i^{(k_i)} B_i^{(1)}$ тоже будет допустимым. Положим

$$\begin{aligned} C_i^{(j)} &= \underbrace{B_i^{(1)} B_i^{(1)} \dots B_i^{(1)}}_{k_i^{j-1} \text{ раз}} \underbrace{B_i^{(2)} \dots B_i^{(2)}}_{k_i^{j-1} \text{ раз}} \dots \underbrace{B_i^{(k_i)} \dots B_i^{(k_i)}}_{k_i^{j-1} \text{ раз}}, \\ \tilde{C}_i^{(j)} &= \underbrace{C_i^{(j)} \dots C_i^{(j)}}_{k_i^{\tilde{N}-j} \text{ раз}}, \\ e^{(j)} &= (\tilde{C}_2^{(j)}, 1, \tilde{C}_3^{(j)}, 1, \dots), \quad j = 1, 2, \dots, \tilde{N}. \end{aligned} \quad (35)$$

Ясно, что точки $e^{(j)}$ искомые. Подытоживая § 7 с учетом (5), заключаем, что имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\tilde{N} < \infty$, $e^{(j)}$ выбраны в (35), $\beta_j = \psi^{-1}(e^{(j)})$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\tilde{N}})$. Тогда преобразование T_{ω_β} из (2) эргодично и $\mathcal{M}(T_{\omega_\beta}) = \mathcal{M}$.

Ясно, что построенные перекладывания являются строго эргодическими (см. доказательство теоремы 2).

В заключение отметим, что возможно прямое построение типичной точки β при использовании добавок на n -м шаге, соответствующих геометрически изменению только координат $z_1(n, \beta_{ij})$ в n -й модели, однако этот путь значительно больше загроможден техническими деталями.

Список литературы

1. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М. Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1975. С. 129–262.
2. Вершик А. М., Юзвинский С. А. Динамические системы с инвариантной мерой // Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1969. С. 133–187.
3. Neumann J. von. Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik // Ann. of Math. (2). 1932. V. 33. P. 587–642.
4. Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 3–56.
5. Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г. Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–111.
6. Агеев О. Н. Динамические системы с четнократной лебеговской компонентой в спектре // Матем. сб. 1988. Т. 136 (178). С. 307–319.
7. Lemanczyk M. Toeplitz $\mathbb{Z}_2$ -extensions // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 1988. V. 24. №1. P. 1–43.
8. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
9. Оселедец В. Н. О спектре эргодических автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. №5. С. 1009–1011.
10. Robinson E. A. Ergodic measure preserving transformations with arbitrary finite spectral multiplicities // Invent. Math. 1983. V. 72. №2. P. 299–314.
11. Goodson G. R. On the spectral multiplicity of a class of finite rank transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 93. №2. P. 303–306.
12. Robinson E. A. Transformations with highly nonhomogeneous spectrum of finite multiplicity // Israel J. Math. 1986. V. 56. №1. P. 75–78.
13. Goodson G. R., Kwiatkowski J., Lemanczyk M., Liardet P. On the multiplicity function of ergodic group extensions of rotations // Studia Math. 1992. V. 102. №2. P. 157–174.
14. Blanchard F., Lemanczyk M. Measure-preserving diffeomorphisms with an arbitrary spectral multiplicity // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1993. V. 1. №2. P. 275–294.
15. Агеев О. Н. Перемешивание в компонентах и перекладывания $T_{\alpha, \beta}$ // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 143–144.
16. Агеев О. Н. Спектральный тип перекладываний $T_{\alpha, \beta}$ // Матем. сб. 1997. Т. 188. №8. С. 13–44.
17. Veech W. A. The metrical theory of interval exchanges transformations. I. General spectral properties // Amer. J. Math. 1984. V. 106. P. 1331–1359.
18. Katok A. B. Constructions in ergodic theory // Preprint, 1986.
19. Каток А. Б., Стёпин А. М. Аппроксимации в эргодической теории // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 81–106.
20. Keane M. Nonergodic interval exchange transformations // Israel J. Math. 1977. V. 26. №2. P. 188–196.
21. Fürstenberg H. Strict ergodicity and transformation of the torus // Amer. J. Math. 1961. V. 83. №4. P. 573–601.