Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Р. Менникен, Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 1, 29–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:29:47

УДК 517.98

М. С. Агранович, Р. Менникен

**Спектральные задачи для уравнения
Гельмгольца со спектральным параметром
в граничных условиях на негладкой поверхности**

Изучаются спектральные свойства четырех задач для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях или условиях сопряжения на замкнутой липшицевой поверхности S . Эти задачи связаны с классическими интегральными операторами типа потенциала на S для уравнения Гельмгольца. В случае бесконечно гладкой S такие задачи были изучены ранее. Показано, что в случае липшицевой S сохраняются наиболее существенные свойства собственных значений и корневых функций. Для этого используются средства теории потенциала в липшицевых областях и спектральной теории.

Библиография: 44 названия.

§ 1. Введение

1.1. Спектральные задачи в случае гладкой границы. Пусть $G = G^+$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ со связной для простоты $(n-1)$ -мерной границей S и G^- – дополнение к ее замыканию $\overline{G}^+ = G^+ \cup S$. Для простоты сначала будем считать, что $n = 3$. Наша цель состоит в рассмотрении четырех спектральных задач для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad (1.1)$$

в G^+ и/или G^- с условием излучения на бесконечности. Здесь $k = k' + ik''$ – любое фиксированное число, принадлежащее замкнутой верхней полуплоскости: $k'' = \operatorname{Im} k \geq 0$. (В дальнейшем, говоря о “любом k ”, мы имеем в виду любое k из этой полуплоскости.) Приведем постановку этих задач, считая сначала поверхность S гладкой. Обозначим через $\nu = \nu(x)$ единичный вектор внешней нормали к S в точке $x \in S$ и через $\partial_\nu = \partial_{\nu(x)}$ производную по направлению этого вектора. Условимся значками “+” и “–” обозначать предельные значения функций на S из G^+ и G^- соответственно. Через λ обозначается спектральный параметр.

ЗАДАЧА I. Ищется решение уравнения (1.1) в G^+ , удовлетворяющее условию

$$\lambda \partial_\nu u^+ + u^+ = 0 \quad \text{на } S. \quad (1.2)$$

Работа первого из авторов поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-01-00132) и немецким научным фондом DFG.

ЗАДАЧА II. Ищется решение уравнения (1.1) в G^- , удовлетворяющее условию

$$\lambda \partial_\nu u^- = u^- \quad \text{на } S \quad (1.3)$$

и условию излучения на бесконечности, которое мы напомним немного ниже.

ЗАДАЧА III. Ищется решение уравнения (1.1) вне S , удовлетворяющее условиям сопряжения

$$u^+ = u^- \quad \text{и} \quad \lambda(\partial_\nu u^- - \partial_\nu u^+) = u^\pm \quad \text{на } S \quad (1.4)$$

и условию излучения на бесконечности.

ЗАДАЧА IV. Ищется решение уравнения (1.1) вне S , удовлетворяющее условиям сопряжения

$$\partial_\nu u^+ = \partial_\nu u^- \quad \text{и} \quad \lambda \partial_\nu u^\pm = u^- - u^+ \quad \text{на } S \quad (1.5)$$

и условию излучения на бесконечности.

Условие излучения при $n = 3$, $k \neq 0$ имеет вид

$$\partial_r u(x) - iku(x) = o(r^{-1}) \quad \text{при } r = |x| \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

где $\partial_r = \partial/\partial r$.

Из интегрального представления решений, удовлетворяющих условию излучения (см. п. 2.2), следует, что при вещественных k в (1.6) фактически можно заменить $o(r^{-1})$ на $O(r^{-2})$, а для $u(x)$ получается оценка $u(x) = O(r^{-1})$. При $k'' > 0$ во все правые части можно добавить множитель $e^{-k''r}$, так что они экспоненциально убывают. Договоримся также, говоря об условии излучения, подразумевать, что при $k = 0$ оно заменяется условиями убывания

$$u(x) = O(r^{-1}), \quad \partial_r u(x) = O(r^{-2}). \quad (1.7)$$

Задачи I–IV возникли у физиков, см. книгу [1], и по поводу физического смысла этих задач мы отсылаем читателя к этой книге.

Приведенная постановка задач не совсем точна в следующем смысле: это задачи только для собственных функций. После сведения этих задач к уравнениям на S (см. п. 2.4) выясняется, что соответствующие интегральные операторы могут быть несамосопряженными, так что они, вообще говоря, могут иметь и присоединенные функции. Задачи, отвечающие присоединенным функциям, записываются более громоздко; наша цель на самом деле состоит в исследовании *спектральных свойств этих операторов*, тесно связанных с уравнением Гельмгольца. Первые два оператора можно охарактеризовать как переводящие данные Неймана для уравнения Гельмгольца в данные Дирихле (с обратным знаком в случае первого оператора). Третий, как мы увидим, получается из потенциала простого слоя сужением его значений на S , а четвертый, взятый с обратным знаком, является обратным к нормальной производной от потенциала двойного слоя на S ; см. п. 2.4.

Эти операторы определяются без затруднений, если k не является исключительным в том смысле, что $-k^2$ не принадлежит спектру внутренней задачи Дирихле или Неймана для оператора Лапласа. При исключительных k требуется некоторое дополнительное исследование.

В дополнении [2] к книге [1] спектральные свойства этих операторов проанализированы в предположении, что граница S является бесконечно гладкой.¹ При этом предположении они являются псевдодифференциальными эллиптическими операторами порядка -1 на S и компактны в $L_2(S)$. При $k' = \operatorname{Re} k = 0$ все четыре оператора являются самосопряженными, первый из них остается самосопряженным также при вещественных k . Вследствие эллиптичности собственные значения этих операторов имеют регулярную “классическую” асимптотику вида $-cj^{-1/2} + O(j^{-1})$, $c > 0$, а собственные функции принадлежат $C^\infty(S)$. Из них можно составить ортонормированный базис в $L_2(S)$, который остается безусловным базисом во всех соболевских L_2 -пространствах $H^t(S)$, $t \in \mathbb{R}$. Чем выше гладкость функции f на S , тем быстрее сходится ее ряд Фурье по этому базису в $H^t(S)$ при фиксированном t .

При остальных k операторы, отвечающие задачам I–IV, остаются эллиптическими, но являются несамосопряженными. Однако они близки к самосопряженным: их мнимые части имеют порядок не выше -3 . По этим причинам сохраняется асимптотика собственных значений с оценкой остатка, а мнимые части собственных значений убывают как $j^{-3/2}$. При этом мнимые части имеют определенный знак. Корневые функции принадлежат $C^\infty(S)$, и из них можно составить “безусловный базис со скобками”² сразу во всех пространствах $H^t(S)$. При вещественных ненулевых k операторы, отвечающие задачам II–IV, “бесконечно близки” к самосопряженным: их мнимые части имеют порядок $-\infty$. В этом случае мнимые части собственных значений убывают быстрее j^{-q} при любом натуральном q , а базис со скобками из корневых функций очень близок к ортогональному базису со скобками.

1.2. Те же задачи в случае негладкой границы. В настоящей работе эти задачи рассматриваются в намного более общих *липшицевых областях*, т.е. областях с липшицевой границей S . Напомним, что поверхность в $\mathbb{R}^n$ называется *липшицевой*, если ее локально, в некоторой окрестности $Z(x_0)$ любой ее точки x_0 , после подходящего поворота системы координат можно представить в виде графика функции $x_n = h(x')$, заданной в области G' пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и удовлетворяющей условию Липшица

$$|h(x') - h(y')| \leq C|x' - y'|, \quad (1.8)$$

где “липшицева постоянная” C не зависит от $x', y' \in G'$. Такая функция почти всюду дифференцируема (см., например, [6; гл. VIII]) и имеет ограниченный градиент, поэтому на S естественно вводится мера Лебега, индуцированная стандартной мерой объемлющего пространства. Локально элемент этой меры, или площади на S , записывается в виде $dS_x = (1 + |\nabla h(x')|^2)^{1/2} dx'$. Почти всюду относительно этой меры определен единичный вектор внешней нормали; следовательно, сохраняет смысл постановка задач I–IV. Координатные окрестности удобно считать цилиндрическими:

$$Z = Z(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x' - x'_0| < r, |x_n - x_{0n}| < s\}, \quad (1.9)$$

¹См. также работу [3] и обзоры [4; пп. 2.2, 6.2 и 6.3] и [5; п. 9.4e]. Отметим, что некоторые детали в настоящей статье, относящиеся к случаю гладкой S , дополняют проведенный в [2] анализ (при не вещественных и при исключительных k).

²Затронутые здесь понятия кратко напоминаются в § 4, см. также [4; п. 6.2].

где ввиду компактности S положительные r и s можно считать не зависящими от x_0 ; при этом $\pm x_n < h(x')$ в $G^\pm \cap Z$. Мы предположим, что $2Cr < s$, тогда точки пересечения $S \cap Z$ удалены от оснований цилиндра не меньше чем на $s/2$. Конечного набора таких цилиндров достаточно, чтобы покрыть S . Удобно также предположить, что $\varkappa Z(x_0)$ — образ цилиндра $Z(x_0)$ при преобразовании подобия относительно x_0 с достаточно большим фиксированным коэффициентом $\varkappa$ — остается координатным цилиндром; ср. [7], [8].

В классе липшицевых областей мы выделяем подкласс областей с почти гладкой границей, определенный в [9]: липшицева поверхность S называется *почти гладкой*, если она принадлежит C^∞ вне замкнутого подмножества S_0 нулевой меры Лебега на S . Простейшие примеры — поверхности многогранника, кругового цилиндра и кругового конуса в $\mathbb{R}^3$, а также их образы при диффеоморфизмах. Легко строится также почти гладкая поверхность “многогранника” с бесконечным множеством граней. Подмножество S_0 будем называть *сингулярным множеством*.

Наша цель в этой статье состоит в выяснении того, *в какой мере в областях с липшицевой или почти гладкой границей сохраняются спектральные свойства отвечающих задачам I–IV операторов*, кратко описанные выше. В общих чертах результаты состоят в следующем.

Соболевские пространства $H^t(S)$ в случае липшицевой поверхности, как известно, естественно определяются уже только при $|t| \leq 1$. Собственные и присоединенные функции, как правило, лежат в $H^1(S)$, но если S — почти гладкая поверхность, то они принадлежат C^∞ на открытом множестве $S \setminus S_0$. Для собственных значений в общем случае получается только оценка модулей сверху. Если же поверхность S почти гладкая, то получается точная асимптотика, но без усиленной оценки остаточного члена. Эта асимптотика выводится из общего результата об интегральных операторах типа потенциала на почти гладких поверхностях, полученного в [9]. В случае несамосопряженных операторов отношения мнимых частей собственных значений к их вещественным частям стремятся к нулю. Из корневых функций можно составить полную в $L_2(S)$ минимальную систему, и ряды Фурье по ней функций f из $L_2(S)$ допускают суммирование к f методом Абеля–Лидского. Полные формулировки читатель найдет в § 4, содержащем наиболее существенные результаты работы.

В § 5 мы освобождаемся от предположения о неисклужительности k в задачах I и II. В задаче III оно не используется с самого начала, а в задаче IV от него удастся освободиться частично. Случай уравнения Лапласа рассмотрен отдельно в п. 5.4, здесь дополнены примеры из п. 4 работы [9] и исправлен допущенный там недосмотр.

В § 6 мы несколько обобщаем наши рассмотрения — на случаи пространств $\mathbb{R}^n$ других размерностей, а также на случай несколько более общих граничных условий — с $\lambda/\sigma(x)$ вместо λ , где $\sigma(x)$ — положительная весовая функция. Кроме того, мы приводим замечания о задачах Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в липшицевых областях при исключительных k , дополняющие рассмотрение этих задач в [10], [11].

Насколько нам известно, спектральные задачи для эллиптических уравнений со спектральным параметром в граничных условиях на общих липшицевых или почти гладких поверхностях не рассматривались в литературе до [9] и настоящей

работы. Столь общая постановка привлекательна тем, что не нужно отдельно рассматривать различные типы особенностей границы и в многомерном случае можно одновременно рассматривать поверхности со сколь угодно сложными особенностями. Но при этом становятся неочевидными самые привычные факты, и мы должны, в частности, выяснить смысл и точную постановку спектральных задач в подходящих функциональных пространствах в случае липшицевой границы.

В §2 мы напомним используемые в нашей статье классические интегральные формулы для решений уравнения Гельмгольца в случае гладкой S и связанные с этими формулами факты, подготавливая переход к липшицевому случаю.

Аналитическую базу для нашего исследования составляют некоторые нетривиальные результаты теории потенциала в липшицевых областях, построенной главным образом за последние 20 лет [7], [8], [10]–[30]. Нам понадобятся “язык” этой теории и некоторые технические средства из нее. Так как она пока не получила широкой известности, то мы приводим необходимый нам материал из нее в §3. При этом в основном мы лишь формулируем нужные определения и утверждения со ссылками на литературу и краткими неформальными пояснениями. Однако несколько утверждений, которые не удалось найти в явном виде в литературе, мы приводим с полными доказательствами.

По аналогии с рассмотренными в предлагаемой статье задачами уже проведено изучение аналогичных задач для системы Ламе [31]. Возможны и некоторые дальнейшие обобщения; они будут рассмотрены в другом месте.

§2. Классическая теория решений уравнения Гельмгольца в случае гладкой S

Классические формулы и факты, которые мы напомним в пп. 2.1–2.3, в основном можно найти в [32] в случае достаточно гладкой поверхности S , а именно класса C^2 . Они имеют давнюю историю, см. ссылки в [32] и, в частности, [33]. Для упрощения изложения и экономии места мы будем здесь считать S бесконечно гладкой поверхностью. Это, в частности, даст возможность пользоваться понятиями исчисления псевдодифференциальных операторов – см. [2]–[5] и приведенные там ссылки.

2.1. Положим

$$\Phi(x, k) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}. \quad (2.1)$$

Это фундаментальное решение для уравнения Гельмгольца (1.1), удовлетворяющее условию излучения (1.6). Введем потенциалы простого и двойного слоя для уравнения (1.1):

$$u(x) = \mathcal{A}(k)\varphi(x) = \int_S \Phi(x-y, k)\varphi(y) dS_y \quad (x \in \mathbb{R}^3) \quad (2.2)$$

и

$$v(x) = \mathcal{B}(k)\psi(x) = \int_S \partial_{\nu(y)} \Phi(x-y, k)\psi(y) dS_y \quad (x \notin S) \quad (2.3)$$

с гладкими плотностями φ и ψ . Функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнению (1.1) вне S и условию излучения. Введем также интегральные операторы на S

$$A(k)\varphi(x) = \int_S \Phi(x-y, k)\varphi(y) dS_y \quad (x \in S) \quad (2.4)$$

и

$$B(k)\psi(x) = \int_S \partial_{\nu(y)} \Phi(x-y, k)\psi(y) dS_y \quad (x \in S) \quad (2.5)$$

— прямое значение потенциала двойного слоя.

На S имеют место соотношения

$$\mathcal{A}(k)\varphi^\pm = A(k)\varphi, \quad (2.6^\pm)$$

$$\partial_\nu \mathcal{A}(k)\varphi^\pm = \mp \frac{1}{2}\varphi + B'(k)\varphi, \quad (2.7^\pm)$$

$$\mathcal{B}(k)\psi^\pm = \pm \frac{1}{2}\psi + B(k)\psi, \quad (2.8^\pm)$$

$$\partial_\nu \mathcal{B}(k)\psi^+ = \partial_\nu \mathcal{B}(k)\psi^-, \quad (2.9)$$

где $B'(k)$ — транспонированный к $B(k)$ оператор — интегральный оператор с ядром $\partial_{\nu(x)} \Phi(x-y, k)$.

Оператор $A(k)$ является псевдодифференциальным оператором порядка -1 на S . Поэтому он действует ограниченным образом из $H^t(S)$ в $H^{t+1}(S)$ и компактен в $H^t(S)$. Здесь и дальше мы ограничиваемся неотрицательными t .

Кроме того, $A(k)$ — эллиптический оператор, а его главный символ имеет вещественные (отрицательные) значения, поэтому $A(k)$ как оператор из $H^t(S)$ в $H^{t+1}(S)$ фредгольмов и имеет нулевой индекс.

Кограничный, или потенциальный, оператор $\mathcal{A}(k)$ действует ограниченным образом из $H^t(S)$ в $H^{t+3/2}(G^+)$ и $H_{\text{loc}}^{t+3/2}(G^-)$.³ Функции из области значений этого оператора являются бесконечно гладкими вне S вследствие того, что это решения эллиптического уравнения (1.1).

Формулы (2.6) распространяются на φ из $H^0(S)$ предельным переходом, т.е. аппроксимацией таких функций гладкими, при этом левые и правые части этих формул принадлежат $H^1(S)$. Дифференцирование функций из $H^{t+3/2}$ приводит в $H^{t+1/2}$. Граничные значения на S решений уравнения Гельмгольца из $H^{t+1/2}(G^+)$ или $H_{\text{loc}}^{t+1/2}(G^-)$ принадлежат $H^t(S)$ (включая $t = 0$, см., например, [34; гл. 2, п. 7]). Поэтому соотношения (2.7) также распространяются на функции φ из $H^0(S)$.

Операторы $B(k)$ и $B'(k)$ являются псевдодифференциальными операторами порядка -1 , они компактны во всех $H^t(S)$, а $\frac{1}{2}I \pm B(k)$ и $\frac{1}{2}I \pm B'(k)$ — эллиптические псевдодифференциальные операторы порядка 0 с главным символом $1/2$. Поэтому они фредгольмовы как операторы в $H^t(S)$ и имеют нулевой индекс.

Оператор $\mathcal{B}(k)$ действует ограниченным образом из $H^t(S)$ в пространства $H^{t+1/2}(G^+)$ и $H_{\text{loc}}^{t+1/2}(G^-)$, функции из его области значений являются бесконечно гладкими вне S как решения уравнения (1.1), и соотношения (2.8)

³Здесь и дальше “loc” можно опустить при $k'' > 0$.

распространяются на ψ из $H^0(S)$. Соотношение (2.9) справедливо в $H^0(S)$, если $\psi \in H^1(S)$.

Такие же утверждения верны и при $k = 0$, т.е. в случае уравнения Лапласа вместо уравнения Гельмгольца. Аналоги операторов (2.2)–(2.5) в этом случае и оператор $B'(0)$ будем обозначать через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, A , B и B' . Эти операторы получаются из операторов (2.2)–(2.5) и $B'(k)$ заменой $\Phi(x-y, k)$ на $\Phi(x-y) = \Phi(x-y, 0)$, где $\Phi(x)$ – фундаментальное решение для уравнения Лапласа:

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (2.10)$$

2.2. Для достаточно гладких функций u и v справедлива первая формула Грина

$$\int_G \Delta u v dx = - \int_G \nabla u \nabla v dx + \int_S \partial_\nu u^+ v^+ dS. \quad (2.11)$$

Из нее следует, что для двух достаточно гладких функций u, v справедлива вторая формула Грина

$$\int_G [\Delta u v - u \Delta v] dx = \int_S [\partial_\nu u^+ v^+ - u^+ \partial_\nu v^+] dS. \quad (2.12)$$

Если $u(x)$ – решение уравнения Гельмгольца (1.1), то формула (2.11) принимает вид

$$-k^2 \int_G u v dx = - \int_G \nabla u \nabla v dx + \int_S \partial_\nu u^+ v^+ dS, \quad (2.13)$$

и если u, v – решения уравнения Гельмгольца, вообще говоря, с разными $k = k_1$ и k_2 , то формула (2.12) принимает вид

$$(k_2^2 - k_1^2) \int_G u v dx = \int_S [\partial_\nu u^+ v^+ - u^+ \partial_\nu v^+] dS. \quad (2.14)$$

Связность границы области G здесь несущественна.

Из (2.14) стандартным образом, с использованием фундаментального решения в качестве v при $k = k_1 = k_2$, выводятся интегральные представления достаточно гладких вплоть до границы решений уравнения (1.1). Если $u(x)$ – гладкое вплоть до S решение в G^+ , то

$$u(x) = [\mathcal{B}(k)u^+](x) - [\mathcal{A}(k)\partial_\nu u^+](x) \quad (x \in G^+); \quad (2.15)$$

при $x \in G^-$ правая часть равна нулю. Аналогично, если $u(x)$ – гладкое вплоть до S решение в G^- , удовлетворяющее условию излучения, то

$$u(x) = [\mathcal{A}(k)\partial_\nu u^-](x) - [\mathcal{B}(k)u^-](x) \quad (x \in G^-); \quad (2.16)$$

при $x \in G^+$ правая часть равна нулю. Из (2.15) и (2.16) в силу (2.6) и (2.8) вытекают соотношения на S , связывающие данные Дирихле и Неймана:

$$\left[B(k) \mp \frac{1}{2} I \right] u^\pm = A(k) \partial_\nu u^\pm \quad (2.17^\pm)$$

для гладких вплоть до S решений уравнения Гельмгольца в $G^\pm$ с условием излучения на бесконечности во втором случае.

2.3. Для сведения задач I–IV к интегральным уравнениям на S нужно знать, при каких k операторы $A(k)$ и $\frac{1}{2}I \pm B(k)$ обратимы. В классической теории этот вопрос исследуется в связи с вопросами существования и единственности решений внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. Эти задачи мы будем обозначать соответственно через $D^\pm(k)$ и $N^\pm(k)$. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле $D^\pm(k)$ нужны нам в форме

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в } G^\pm, \quad u^\pm = f \quad \text{на } S, \quad (2.18^\pm)$$

а внутренняя и внешняя задачи Неймана $N^\pm(k)$ – в форме

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в } G^\pm, \quad \partial_\nu u^\pm = g \quad \text{на } S \quad (2.19^\pm)$$

с условием излучения на бесконечности для внешних задач (условиями убывания при $k = 0$).

При помощи первой формулы Грина проверяется, что для обеих внешних задач имеет место единственность при всех k (с $k'' \geq 0$), а для обеих внутренних задач – при $k'' > 0$. Кроме того, при помощи первой формулы Грина проверяется, что при $k'' > 0$ оператор $A(k)$ (из $H^t(S)$ в $H^{t+1}(S)$), а также операторы $\frac{1}{2}I \pm B(k)$ и $\frac{1}{2}I \pm B'(k)$ (в $H^t(S)$) аннулируют только нулевую функцию и поэтому обратимы. Аналогично обстоит дело при всех вещественных k , кроме исключительных k , которые образуют два счетных множества:

1) Первое составляют значения k , при которых нарушается единственность для задачи $D^+(k)$ и операторы $A(k)$, $\frac{1}{2}I + B(k)$ и $\frac{1}{2}I + B'(k)$ теряют обратимость, при этом

$$\text{Ker } A(k) = \{\partial_\nu u^+ : \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } G^+, u^+ = 0\} = \text{Ker} \left[\frac{1}{2}I + B'(k) \right]. \quad (2.20)$$

Первое из этих равенств проверено в [2], проверку второго и приведенной ниже формулы (2.21) можно найти в [32; п. 3.4]. Эти k будем называть *исключительными относительно задачи D^+* .

2) Второе множество составляют значения k , при которых нарушается единственность для задачи $N^+(k)$ и становятся необратимыми операторы $\frac{1}{2}I - B(k)$ и $\frac{1}{2}I - B'(k)$, при этом

$$\text{Ker} \left[\frac{1}{2}I - B(k) \right] = \{u^+ : \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } G^+, \partial_\nu u^+ = 0\}. \quad (2.21)$$

Эти k будем называть *исключительными относительно задачи N^+* .

Ввиду вещественности исключительных k подпространства (2.20) и (2.21) инвариантны относительно перехода от u к $\bar{u}$.

Несложно проверяется, что квадраты значений k , исключительных относительно задачи D^+ , совпадают с собственными значениями оператора $-\Delta_D$ в $L_2(G^+)$, действующего на функции как $-\Delta$, с областью определения, которая лежит в $H^2(G^+)$ и выделяется условием равенства нулю данных Дирихле. При этом кратность этого собственного значения равна размерности ядра $\text{Ker } A(\pm k)$. Аналогично, квадраты значений k , исключительных относительно задачи N^+ , совпадают с собственными значениями оператора $-\Delta_N$ в $L_2(G^+)$, который тоже

действует на функции как $-\Delta$ и имеет лежащую в $H^2(G^+)$ область определения, выделяемую условием равенства нулю данных Неймана. При этом кратность этого собственного значения совпадает с размерностью ядра $\text{Ker}[\frac{1}{2}I - B(\pm k)]$. Асимптотика этих собственных значений хорошо известна: в обоих случаях, если их перенумеровать натуральными числами в порядке неубывания с учетом кратности, $k_j^2 \sim c j^{2/3}$ с одной и той же положительной постоянной c (см. ссылки в [5; п. 9.1]).

Приведем формулы для решений задач $D^\pm(k)$ и $N^\pm(k)$:

$$u = \mathcal{B}(k) \left[B(k) \pm \frac{1}{2}I \right]^{-1} u^\pm, \quad (2.22^\pm)$$

$$u = \mathcal{A}(k) A^{-1}(k) u^\pm, \quad (2.23^\pm)$$

$$u = \mathcal{A}(k) \left[B'(k) \mp \frac{1}{2}I \right]^{-1} \partial_\nu u^\pm. \quad (2.24^\pm)$$

Эти формулы применимы при невещественных k , а также при вещественных k , не исключительных относительно задачи D^+ (формулы (2.22⁺), (2.23[±]) и (2.24[−])) и задачи N^+ (формулы (2.22[−]) и (2.24⁺)).

Примем, что k невещественно, и заметим, что можно написать два разных выражения для $u^\pm$ через $\partial_\nu u^\pm$: одно следует из соотношения (2.17[±]) на S , а второе — из (2.24[±]) и (2.6). Мы видим, что

$$\left[\frac{1}{2}I \pm B(k) \right]^{-1} A(k) = A(k) \left[\frac{1}{2}I \pm B'(k) \right]^{-1}. \quad (2.25)$$

Отсюда следует важное соотношение

$$B(k)A(k) = A(k)B'(k). \quad (2.26)$$

На вещественные k оно распространяется предельным переходом.

Отметим также, что при k , не исключительных относительно задачи D^+ , как показано в [10; лемма 6.2],

$$\partial_\nu (\mathcal{B}(k)\psi)^\pm = - \left[\frac{1}{2}I + B'(k) \right] A^{-1}(k) \left[\frac{1}{2}I - B(k) \right] \psi. \quad (2.27)$$

2.4. Теперь опишем сведение задач I–IV к уравнениям на S ([2], ср. [1]).

Пусть k невещественно или же вещественно, но не исключительно относительно задачи N^+ . Полагая в этом случае

$$T^+(k) = \left[\frac{1}{2}I - B(k) \right]^{-1} A(k), \quad (2.28)$$

мы получаем из (2.17⁺)

$$u^+ = -T^+(k) \partial_\nu u^+. \quad (2.29)$$

Теперь задача I подстановкой

$$\varphi = \partial_\nu u^+ \quad (2.30)$$

приводится к уравнению

$$T^+(k)\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.31)$$

Пусть теперь k невещественно или же вещественно, но не исключительно относительно задачи D^+ . Полагая

$$T^-(k) = \left[\frac{1}{2}I + B(k) \right]^{-1} A(k), \quad (2.32)$$

получаем из (2.17⁻)

$$u^- = T^-(k)\partial_\nu u^-, \quad (2.33)$$

и теперь задача II подстановкой

$$\varphi = \partial_\nu u^- \quad (2.34)$$

приводится к уравнению

$$T^-(k)\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.35)$$

Далее, задача III при любых k подстановкой

$$\varphi = \partial_\nu u^- - \partial_\nu u^+, \quad (2.36)$$

как видно из (2.17), приводится к уравнению

$$A(k)\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.37)$$

Наконец, задача IV при невещественных k , а также при вещественных k , не исключительных относительно обеих задач D^+ и N^+ , подстановкой

$$\varphi = \partial_\nu u^\pm \quad (2.38)$$

приводится к уравнению (см. (2.29), (2.33), (2.28) и (2.32))

$$T(k)\varphi = \lambda\varphi, \quad (2.39)$$

где

$$T(k) = T^+(k) + T^-(k) = \left[\frac{1}{4}I - B(k)^2 \right]^{-1} A(k). \quad (2.40)$$

Обратный к $-T(k)$ оператор совпадает с оператором (2.27) в силу (2.25).

Если φ – решение уравнения (2.31), то соответствующее решение задачи I восстанавливается как решение задачи $N^+(k)$ с граничным условием (2.30). Если φ – решение уравнения (2.35), то соответствующее решение задачи II есть решение задачи $N^-(k)$ с граничным условием (2.34). Далее, если φ – решение уравнения (2.37), то соответствующее решение задачи III восстанавливается как потенциал простого слоя, т.е. по формуле (2.2): это видно из (2.7). Наконец, если φ – решение уравнения (2.39), то соответствующее решение задачи IV определяется как решение задач $N^\pm(k)$ с граничными условиями (2.38). Вопрос о классах функций φ и классах решений соответствующих задач, при которых эти задачи эквивалентны соответствующим уравнениям на S , при бесконечно гладкой границе решается тривиально: все φ должны быть бесконечно гладкими на S , и все $u(x)$ должны быть бесконечно гладкими в $G^\pm$ вплоть до S . Это следует из эллиптичности задач, бесконечной гладкости S и эллиптичности уравнений на S (см. [4], [5]). Как мы уже отмечали в п. 1.1, эта эквивалентность имеет место только для собственных функций.

Задачи I, II и IV при исключительных k мы не будем рассматривать для гладкой S отдельно и поэтому отложим до § 5.

§ 3. Ревизия классической теории в случае липшицевой S

3.1. Некасательная сходимость. Как известно, компактные липшицевы поверхности удовлетворяют “равномерному условию конуса” (и обратно, если выполнено это условие, то поверхность липшицева; см., например, [35; п. 1.2.2] и приведенные там ссылки). Это условие состоит в следующем: для каждой точки x на S существует два открытых круговых конуса $\Gamma^+(x)$ и $\Gamma^-(x)$ с вершинами в x , конгруэнтных фиксированному конусу

$$\Gamma_0 = \{z = (z', z_n) : |z'| < \alpha(\beta - z_n), 0 < z_n < \beta\} \quad (3.1)$$

(с положительными α и β) и таких, что $\Gamma^\pm(x) \subset G^\pm$. Их принято называть *некасательными конусами*. Семейство всех некасательных конусов можно подчинить некоторому условию регулярности, см., например, [7], [8]. Регулярное семейство некасательных конусов строится с большим произволом. Например, на некотором воротнике поверхности S можно построить гладкое поле $\mu(x)$ единичных векторов, такое, что $\mu(x) \cdot \nu(x) \geq \text{const} > 0$ в тех точках на S , где нормаль существует. При этом оси цилиндров $Z(x)$ (с достаточно малыми r и s) и конусов $\Gamma^\pm(x)$ (с достаточно малыми α и β) можно направить вдоль $\mu(x)$, и можно обеспечить выполнение следующего условия: если $y \in \frac{9}{10}Z(x) \cap S$, то $\Gamma^\pm(x) + (y - x) \subset Z(x) \cap G^\pm$. Такое семейство $\{\Gamma^\pm(x)\}, x \in S$, регулярно. Эти конусы покрывают некоторый (меньший) воротник поверхности; ср. [7], [8].

Уточняя выписанные выше граничные условия в случае липшицевой S , мы под $u^+(x)$ и $u^-(x)$ будем понимать пределы функции $u(y)$ при $y \rightarrow x$ по $\Gamma^+(x)$ и $\Gamma^-(x)$ соответственно для почти всех $x \in S$. Такая сходимость называется *некасательной*. Аналогично, $\partial_\nu u^+(x)$ и $\partial_\nu u^-(x)$ следует понимать как пределы, например, от $\nabla u(y) \cdot \nu(x)$ при $y \rightarrow x$ по $\Gamma^\pm(x)$ для почти всех $x \in S$. Но здесь $\nu(x)$ можно заменить аппроксимирующим $\nu(x)$ вектором в рамках, указанных ниже в лемме 3.7, 6).

Вместо конусов можно пользоваться “множествами типа конуса” $\{y \in G^\pm : |x - y| < \gamma\rho(y, S)\}$, где $x \in S$, $\rho(y, S)$ – расстояние от y до S и γ достаточно велико (см., например, [29], [30], [20]), но конусы для нас будут более удобны.

В случае липшицевой S сохраняется также возможность понимания следа в смысле соболевских норм. Но теорема о том, что переход к следу – ограниченный оператор, скажем, из $H^s(G^+)$ в $H^{s-1/2}(S)$, справедлива для $1/2 < s < 3/2$ [16], [21], [28] и неверна при $s = 3/2$: можно даже построить функцию, принадлежащую $H^{3/2}$, со следом, не принадлежащим $H^1(S)$; см. [28] и приведенные там ссылки. При $s > 3/2$ оператор перехода к следу непрерывен из $H^s(G^+)$ в $H^1(S)$ (см. [28; с. 164], где рассмотрен объемный потенциал, и [21]). Однако на решениях уравнения Лапласа или Гельмгольца можно рассмотреть переход к следу также при $s = 1/2$ и $s = 3/2$ – см. следующий пункт.

3.2. Пространства $V^\pm(k)$ и $W^\pm(k)$. Для функции w , определенной в G^+ или G^- , положим соответственно

$$w_*^+(x) = \sup_{y \in \Gamma^+(x)} |w(y)| \quad \text{и} \quad w_*^-(x) = \sup_{y \in \Gamma^-(x)} |w(y)| \quad (x \in S). \quad (3.2)$$

Это так называемые *некасательные максимальные функции* для $w(x)$.

Введем пространства $V^+(k)$, $V^-(k)$, $W^+(k)$ и $W^-(k)$ (ср. с [10]). Первое из них состоит из решений уравнения Гельмгольца (1.1) в G^+ , бесконечно гладких в G^+ и имеющих некасательные пределы почти всюду на S , с $u_*^+ \in L_2(S)$. Величину $\|u_*^+\|$, где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(S)$, можно принять за норму в этом пространстве.⁴ Второе состоит из решений уравнения (1.1) в G^- , бесконечно гладких в G^- , удовлетворяющих условию излучения, имеющих некасательные пределы почти всюду на S , с конечной нормой $\|u_*^-\|$. Третье пространство состоит из решений уравнения (1.1) в G^+ , бесконечно гладких в G^+ , с некасательными пределами для u и ∇u и конечной нормой $\|u_*^+\| + \|(\nabla u)_*^+\|$. Четвертое – из решений уравнения (1.1) в G^- , бесконечно гладких в G^- , удовлетворяющих условию излучения, с некасательными пределами почти всюду для u и ∇u и конечной нормой $\|u_*^-\| + \|(\nabla u)_*^-\|$.

В работах по граничным задачам в липшицевых областях, на результаты которых мы будем опираться, задачи Дирихле по существу рассматриваются в пространствах $V^\pm(k)$ или $W^\pm(k)$, а задачи Неймана – в $W^\pm(k)$. Задачи I–IV мы будем рассматривать в пространствах $W^\pm(k)$.

В [19], [28] “апостериори” показано, что $V^+(0)$ и $W^+(0)$ совпадают с пространствами решений уравнения Лапласа из $H^{1/2}(G^+)$ и $H^{3/2}(G^+)$ соответственно, а пространства $V^-(0)$ и $W^-(0)$ – с пространствами решений этого уравнения из $H_{\text{loc}}^{1/2}(G^-)$ и $H_{\text{loc}}^{3/2}(G^-)$ с условиями убывания (1.7). (Упомянутый результат получен для ограниченных областей, но без предположения о связности границы, поэтому он верен и для внешних областей.)

Нам нужно перенести этот результат на случай уравнения Гельмгольца.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пространства $V^+(k)$ и $W^+(k)$ совпадают с пространствами решений уравнения (1.1) из $H^{1/2}(G^+)$ и $H^{3/2}(G^+)$, а $V^-(k)$ и $W^-(k)$ – с пространствами решений этого уравнения из $H_{\text{loc}}^{1/2}(G^-)$ и $H_{\text{loc}}^{3/2}(G^-)$, удовлетворяющих условию излучения.*

Отметим, что близкие утверждения встречаются в литературе (см., например, [36]) и что наше доказательство будет элементарным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай ограниченной области G^+ .

При $n = 3$ (и $n = 2$) проще всего поступить следующим образом. Введем объемный потенциал

$$U(x) = \int_{G^+} \Phi(x-y)F(y) dy \quad (3.3)$$

с плотностью $F = k^2 u$, где u – решение уравнения (1.1). Если $u \in V^+(k)$, то u принадлежит L_2 в граничной полоске (в силу сказанного о некасательных конусах в начале п. 3.1) и, значит, в G^+ ; разумеется, это верно и при предположении $u \in H^{1/2}(G^+)$. Поэтому U – функция из $H^2(G^+)$, и она ограничена (что легко проверяется при помощи неравенства Шварца). Положим $v = u + U$. Это гармоническая функция, и для нее эквивалентность включений $v \in H^{1/2}(G^+)$ и $v \in V^+(0)$, как мы отметили выше, известна. Отсюда сразу следует аналогичное утверждение для u .

При $n > 3$ объемный потенциал (3.3) имеет ядро $c|x-y|^{-n+2}$, где c – постоянная. Техническая трудность состоит в проверке того, что $U_*^+ \in L_2(S)$, если известно,

⁴Предупредим читателя, что мы не рассматриваем пространства L_p при $p \neq 2$.

что 1) $u \in V^+(k)$ или 2) $u \in H^{1/2}(G^+)$. Проверим это утверждение в предположении 1). Умножая u на элементы разбиения единицы, сводим дело к проверке того, что если u — функция с малым носителем и $u_*^+ \in L_2(S)$, то $U_*^+ \in L_2(S)$. Вне носителя функции u потенциал U принадлежит C^∞ . Поэтому достаточно рассмотреть $U(x)$ в координатной окрестности $\varepsilon Z(x_0)$ в предположении, что $\text{supp } u \subset \delta Z(x_0)$, где $0 < \delta < \varepsilon$ и ε — малое число. В этом случае, учитывая, что $|u(y)| \leq u_*^+(\hat{y})$, где $\hat{y}$ — точка на S над y , заменяя $|x - y|$ на $|x' - y'|$ и интегрируя по y_n , получаем

$$|U(x)| \leq C_1 \int u_*^+(\hat{y}) |x' - y'|^{2-n} dy' \leq C_2 \int u_*^+(\hat{y}) |\hat{x} - \hat{y}|^{2-n} dS$$

с учетом условия Липшица (1.8). Правая часть зависит только от $\hat{x}$, поэтому оценка равномерна по x_n . Аналогичная оценка получается, если слегка наклонить систему координат, так, чтобы новая ось x_n образовывала малый угол со старой. Следовательно, если конусы $\Gamma^+(x)$ достаточно узкие (т.е. α — достаточно малое число), то получается равномерная оценка вида

$$U_*^+(x) \leq C_3 \int u_*^+(\hat{y}) |\hat{x} - \hat{y}|^{2-n} dS,$$

и остается воспользоваться ограниченностью интегрального оператора со слабой особенностью в $L_2(S)$.

Таким образом, мы проверили, что из $u \in V^+(k)$ следует $u \in H^{1/2}(G^+)$.

Пусть теперь u — решение уравнения (1.1) из $H^{1/2}(G^+)$. Мы обойдем отмеченную выше техническую трудность в случае 2) следующим образом. Определим функцию $v(x, t) = u(x)e^{\pm kt}$ в цилиндрической области $\Omega = G^+ \times (0, 1)$. Очевидно, что $v(x, t)$ гармонична. Проверим, что она принадлежит $H^{1/2}(\Omega)$. Так как $e^{\pm kt}$ — бесконечно гладкая функция, то достаточно проверить это для $w(x, t) \equiv u(x)$. Ясно, что $w \in L_2(\Omega)$. Остается заметить, что

$$\iiint_{\Omega \times \Omega} \frac{|w(x, t) - w(y, \tau)|^2}{[|x - y|^2 + |t - \tau|^2]^{\frac{n+2}{2}}} dx dt dy d\tau = \iint_{G \times G} |u(x) - u(y)|^2 I(x, y) dx dy,$$

где

$$I(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 [|x - y|^2 + |t - \tau|^2]^{-\frac{n+2}{2}} dt d\tau,$$

а этот интеграл не превосходит

$$\int_0^1 d\tau \int_{\mathbb{R}} [|x - y|^2 + |t - \tau|^2]^{-\frac{n+2}{2}} dt = C_4 |x - y|^{-(n+1)}.$$

Итак, $w \in H^{1/2}(\Omega)$ и v — гармоническая функция из $H^{1/2}(\Omega)$. Значит, она принадлежит $V^+(0)$ в Ω , так что v_*^+ и w_*^+ принадлежат $L_2(\partial\Omega)$. Примем, что для точек (x, t) боковой поверхности $S \times (0, 1)$ при t , достаточно близких к $1/2$, проекции некасательных конусов $\Gamma^+(x, t)$ на G^+ совпадают с некасательными конусами $\Gamma^+(x)$ точек $x \in S$. Тогда сразу получаем, что $u_*^+ \in L_2(S)$, т.е. $u \in V^+(k)$.

В проведенных рассуждениях несущественна связность границы, поэтому результат верен для области

$$G_R^- = B_R \setminus \overline{G}^+, \quad (3.4)$$

где B_R – открытый шар большого радиуса R с центром в начале координат, содержащий $\bar{G}^+$ внутри себя. Так как решения уравнения (1.1) в G^- принадлежат $C^\infty(G^-)$, то результат распространяется на внешнюю область G^- .

Применяя полученный результат к u и ∇u , получаем совпадение классов решений из $W^+(k)$ и $H^{3/2}(G^+)$, $W^-(k)$ и $H_{\text{loc}}^{3/2}(G^-)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Отметим дополнительные возможности для проведения доказательства в многомерном случае.

Если считать известными интегральные представления решений уравнения (1.1) из $V^\pm(k)$ или $W^\pm(k)$ через данные Дирихле или Коши соответственно (см. ниже пп. 3.3–3.5), то принадлежность этих решений к $H^{1/2}$ или $H^{3/2}$ следует также из того обстоятельства, что это верно для главных частей соответствующих потенциалов. Но отдельного рассмотрения требует тогда случай исключительных k (ср. ниже п. 6.3). Мы предпочли сразу проверить теорему 3.1 и будем пользоваться ею в настоящем параграфе.

Прием перехода к функции $u(x)e^{\pm kt}$ в Ω можно использовать и для проверки того, что из $u \in V^+(k)$ следует $u \in H^{1/2}(G^+)$. Но тогда надо проверять, что $w_*^+ \in L_2$ на всей поверхности цилиндра Ω .

С другой стороны, из доказанной теоремы следует, что если $u(x)$ – решение уравнения (1.1) из $H^{1/2}(G^+)$, то для объемного потенциала (3.3) с $F = u$ мы имеем $U_*^+ \in L_2(S)$, а из $u(x) \in V^+(k)$ в G^+ следует, что $u(x)e^{\pm kt} \in V^+(0)$ в Ω .

3.3. Операторы типа потенциала. В случае липшицевой S интегральные операторы B и B' перестают быть операторами со слабой особенностью. Даже в случае поверхности S класса C^1 их ограниченность в $L_2(S)$ была проблематичной до появления работы [14]. В этой работе для липшицевых поверхностей с малыми липшицевыми константами, в частности для поверхностей класса C^1 , была доказана теорема об ограниченности в $L_2(S)$ сингулярных интегральных операторов, применимая к B , B' и $\nabla_t A$, где ∇_t – тангенциальный градиент (разность между градиентом и его проекцией на нормаль к S), определенный почти всюду на S . В [15] было получено обобщение теоремы из [14] на случай общих липшицевых поверхностей. Приведем формулировку этого важнейшего результата, следуя [20].

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – вещественно-аналитическая функция со свойствами

$$K(-x) = -K(x), \quad (3.5)$$

$$K(tx) = t^{1-n}K(x) \quad (3.6)$$

($x \neq 0, t > 0$) и $h: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица (1.8) на $\mathbb{R}^{n-1}$. Для $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ положим

$$\psi_\varepsilon(x') = \int_{|x'-y'| > \varepsilon} K(x' - y', h(x') - h(y')) \varphi(y') dy', \quad (3.7)$$

$$\psi(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(x'), \quad \psi_*(x') = \sup_{\varepsilon > 0} \psi_\varepsilon(x'). \quad (3.8)$$

Тогда $\|\psi_*\| \leq C' \|\varphi\|$, где C' – постоянная, зависящая только от n и C в (1.8), и предел $\psi(x')$ существует для почти всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Отсюда и из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости под знаком интеграла получается, что $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi$ в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ и оператор $\varphi \mapsto \psi$ ограничен в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Кроме того, используя дополнительно ограниченность перехода к максимальной функции Харди–Литтлвуда (см. [6; гл. I, § 1]), можно убедиться в квадратичной интегрируемости некасательных максимальных функций для соответствующего потенциала, см. [7], [8]. Еще проще последнее проверяется для потенциалов со слабой особенностью, например для $\mathcal{A}\varphi$.

Типичные примеры нужных нам ядер K в многомерном случае (как правило, это ядра главных частей рассматриваемых интегральных операторов на S с точностью до дополнительных множителей, зависящих только от x или от y):

$$K_j(x - y) = (x_j - y_j)|x - y|^{-n} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.9)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Интеграл (2.5) определен в смысле главного значения по Коши, т.е. как предел интеграла по $\{y : |x - y| > \varepsilon\}$; этот предел существует для почти всех x и в смысле сходимости в $L_2(S)$, так что $B(k)$ является ограниченным оператором в $L_2(S)$. Аналогично обстоит дело с операторами $B'(k)$ и $\nabla_t A$.*

Оператор $A(k)$ действует ограниченным образом из $H^0(S)$ в $H^1(S)$.

Оператор $\mathcal{B}(k)$ действует ограниченным образом из $H^0(S)$ в $V^\pm(k)$. Оператор $\mathcal{A}(k)$ действует ограниченным образом из $H^0(S)$ в $W^\pm(k)$.

В [7], [8] это проверено для $k = 0$. В [10], [11] результаты распространяются на любые k . Для этого достаточно воспользоваться следующим утверждением:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Разности $A(k) - A$, $B(k) - B$ и $B'(k) - B'$ являются компактными операторами из $H^0(S)$ в $H^1(S)$. Разность $\mathcal{B}(k) - \mathcal{B}$ — ограниченный оператор из $H^0(S)$ в $W^\pm(k)$.*

Сказанное остается в силе, если в этих разностях заменить A , B , B' и $\mathcal{B}$ соответственно на $A(k_1)$, $B(k_1)$, $B'(k_1)$ и $\mathcal{B}(k_1)$ с любым k_1 .

Действительно,

$$\Phi(x, k) - \Phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \left(ik - \frac{k^2}{2}|x| + \dots \right), \quad (3.10)$$

поэтому, например, ядра операторов $B(k) - B(k_1)$ и $B'(k) - B'(k_1)$ имеют особенность на два порядка ниже, чем, скажем, ядро оператора B , и при $n = 3$ даже ограничены, а сужение оператора $\nabla(\mathcal{B}(k) - \mathcal{B}(k_1))$ на S — интегральный оператор со слабой особенностью. Отметим, что мы несколько усилили утверждение о $B(k) - B$ и $B'(k) - B'$ по сравнению с [10], [11].

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Соотношения (2.6) при $\varphi \in L_2(S)$ переносятся на случай липшицевой поверхности. При этом пределы $\mathcal{A}(k)\varphi^\pm$ понимаются в смысле некасательной сходимости и принадлежат $H^1(S)$. Соотношения (2.7) и (2.8) остаются в силе также в смысле некасательной сходимости, причем в (2.7) и (2.8) обе части принадлежат $L_2(S)$.*

3.4. Формулы Грина и их следствия. Для вывода формул Грина в липшицевых областях нужна их аппроксимация областями с гладкими границами. Приведем соответствующую лемму (ср. [37], [7], [8], [20]).

ЛЕММА 3.7. Пусть S — замкнутая липшицева поверхность. Тогда существует последовательность бесконечно гладких замкнутых поверхностей S_j со следующими свойствами:

- 1) S_j — граница области G_j^+ с замыканием $\overline{G_j^+} \subset G^+$.
- 2) Поверхности S и S_j связаны липшицевым диффеоморфизмом $\Lambda_j: S \rightarrow S_j$, причем в локальных координатах липшицевы постоянные для Λ_j и Λ_j^{-1} ограничены равномерно по j .
- 3) $\Lambda_j(x) \in \Gamma^+(x)$ при всех j и всех $x \in S$, при этом $\Lambda_j(x) \rightarrow x$ равномерно по $x \in S$.
- 4) Если S локально задана как график липшицевой функции $h(x')$ (см. (1.8)), а S_j — как график бесконечно гладкой функции $h_j(x')$ для тех же x' , то градиенты $\nabla h_j(x')$ равномерно по j и x' ограничены и сходятся к $\nabla h(x)$ почти всюду и в L_2 .
- 5) Существуют такие функции $\omega_j(x)$ на S , равномерно по j и x ограниченные сверху и снизу положительными постоянными, что для любой суммируемой функции f на S

$$\int_{S_j} f(\Lambda_j^{-1}(x)) dS = \int_S f(x) \omega_j(x) dS,$$

причем $\omega_j(x) \rightarrow 1$ почти всюду на S и в $L_2(S)$.

- 6) Единичные векторы $\nu(\Lambda_j(x))$ внешних нормалей к S_j сходятся к $\nu(x)$ почти всюду на S и в $L_2(S)$.

Аналогичное семейство бесконечно гладких поверхностей S_j' аппроксимирует S со стороны G^- .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть поверхность S липшицева. Тогда первая формула Грина (2.13) остается в силе для $u \in W^+(k)$ и $v \in H^1(G^+)$.

Для доказательства записываем формулу вида (2.13) в G_j для той же u и функции $v_l \in C^1(\overline{G}^+)$, сходящейся к v в $H^1(G^+)$ при $l \rightarrow \infty$ (см., например, [35]):

$$-k^2 \int_{G_j^+} u v_l dx = - \int_{G_j^+} \nabla u \nabla v_l dx + \int_{S_j} \partial_\nu u^+ v_l^+ dS.$$

Первые два интеграла сходятся к соответствующим интегралам по G^+ . Третий интеграл переписывается в виде

$$\int_S (\nabla u)(\Lambda_j(x)) \cdot \nu(\Lambda_j(x)) v_l(\Lambda_j(x)) \omega_j(x) dS.$$

Здесь подынтегральное выражение сходится к пределу $\nabla u(x) \cdot \nu(x) v_l(x)$ почти всюду на S и имеет мажоранту $\text{const}(\nabla u)_*^+ \max |v_l|$, интегрируемую в силу неравенства Шварца. Применяв теорему Лебега о мажорируемой сходимости под знаком интеграла, получаем формулу Грина для u и v_l в G^+ , в которой остается перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$.

Связность границы несущественна. В качестве следствия получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. При $u \in W^+(k_1)$, $v \in W^+(k_2)$ справедлива вторая формула Грина (2.14). При $u \in W^+(k)$ и $u \in W^-(k)$ справедливы интегральные представления (2.15) и (2.16) соответственно и соотношения (2.17 $^\pm$) на S .

3.5. Задачи Дирихле и Неймана и обратимость операторов типа потенциала. Задачи Дирихле и Неймана теперь уточняются следующим образом: в (2.18) $u^\pm = f$ принадлежит $H^0(S)$ или $H^1(S)$, в (2.19) $\partial_\nu u^\pm = g$ принадлежит $H^0(S)$.

Исследование этих задач в липшицевых областях началось с работ [17], [18]. В них методами гармонического анализа доказано, что задача $D^+(0)$ с $u^+ \in H^0(S)$ имеет единственное решение в $V^+(0)$. Исследование основано на сравнении гармонической меры $d\omega^x$ с поверхностной мерой dS . Напомним, что для непрерывной f существует единственная гармоническая в липшицевой области G^+ функция, непрерывная вплоть до S и равная f на S . Эта функция представима в виде $\int_S P(x, y) f(y) dS_y$, где $P(x, y)$ — ядро Пуассона; $P(x, y) dS_y$ — это и есть $d\omega^x$. В [17] доказано, что в случае липшицевой S гармоническая мера и поверхностная мера взаимно абсолютно непрерывны и, более того, $P(x, y)$ как функция от y принадлежит $L_2(S)$. Смотри также [24], [26], [27], где предложено упрощенное доказательство этих результатов на основе “тождества типа Реллиха” для гармонических функций. В [25] при помощи аналогичного тождества доказано, что задача $N^+(0)$ с $g \in H^0(S)$ при условии $g \perp 1$ имеет единственное решение в $W^+(0)$, ортогональное 1 в G^+ . Кроме того, доказана теорема о регулярности решения u задачи $D^+(0)$: если $f \in H^1(S)$, то $u \in W^+(0)$. Работы [24], [25] не свободны от некоторых ограничений на форму S , которые вскоре были сняты [7], [8], [26].

Методы теории потенциала в применении к задачам $D^+(0)$ и $N^+(0)$ в липшицевых областях развиты в [7], [8]; ранее это было сделано для областей с границами класса C^1 в [23] на основе упомянутой выше теоремы из [14]. В таких областях, как показано в [23], операторы B и B' еще компактны; но в липшицевых областях они, вообще говоря, некомпактны (см., например, [22]). Поэтому нельзя доказать обратимость операторов $\frac{1}{2}I + B$ и $\frac{1}{2}I + B'$ и фредгольмовость операторов $\frac{1}{2}I - B$ и $\frac{1}{2}I - B'$ с нулевым индексом классическими средствами. В [7], [8] для этой цели сначала выводятся “неравенства типа Реллиха”

$$\left\| \left(\frac{1}{2}I \mp B' \right) f \right\| \leq C \left(\left\| \left(\frac{1}{2}I \pm B' \right) f \right\| + \left| \int_S A f dS \right| \right) \quad (f \in L_2(S)) \quad (3.11)$$

из тождества типа Реллиха. Эти неравенства используются в [7], [8] вместе с аппроксимацией области G областями G_j (см. лемму 3.7). Доказывается также обратимость оператора A из $H^0(S)$ в $H^1(G)$.

При других k операторы $\frac{1}{2}I \pm B(k)$, $\frac{1}{2}I \pm B'(k)$ и $A(k)$ можно рассматривать как слабые возмущения только что упомянутых операторов с $k = 0$ (см. предложение 3.5), и это сразу дает фредгольмовость и равенство индекса нулю при любом k . Если устанавливается тривиальность их ядер (при помощи формул Грина), то эти операторы автоматически оказываются обратимыми. В [10] этим путем исследованы не вещественные k , а в [11] охвачены и вещественные

неисключительные k .⁵ Мы теперь приведем формулировку окончательных результатов и затем добавочно прокомментируем некоторые детали, но завершение описания исключительных k отложим до следующего пункта. Пока мы будем называть k исключительным относительно задачи D^+ , если однородная задача $D^+(k)$ имеет нетривиальные решения, и относительно задачи N^+ , если однородная задача $N^+(k)$ имеет нетривиальные решения. Исключительные k вещественны.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $k'' > 0$. Тогда оператор $A(k)$ из $H^0(S)$ в $H^1(S)$ и операторы $\frac{1}{2}I \pm B(k)$ и $\frac{1}{2}I \pm B'(k)$ в $H^0(S)$ обратимы. Оператор $\frac{1}{2}I \pm B(k)$ ограничен и обратим также в $H^1(S)$. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле (2.18 $^\pm$) с $f \in H^0(S)$ имеют единственное решение соответственно в $V^+(k)$ и $V^-(k)$, и оно представимо в виде (2.22 $^\pm$). При $f \in H^1(S)$ решение принадлежит $W^\pm(k)$ и представимо в виде (2.22 $^\pm$) и (2.23 $^\pm$). Внутренняя и внешняя задачи Неймана (2.19 $^\pm$) с $g \in H^0(S)$ имеют единственное решение соответственно в $W^\pm(k)$, и оно представимо в виде (2.24 $^\pm$).

Пусть теперь k вещественно. Тогда сохраняется однозначная разрешимость внешних задач и остается в силе утверждение об ограниченности оператора $B(k)$ в $H^1(S)$. Если k не исключительно относительно задачи D^+ , то сохраняются все утверждения об обратимости операторов $A(k)$, $\frac{1}{2}I + B(k)$ и $\frac{1}{2}I + B'(k)$ и формулы (2.22 $^+$), (2.23) и (2.24 $^-$) для решений задач Дирихле и Неймана. Если k не исключительно относительно задачи N^+ , то сохраняются все утверждения об обратимости операторов $\frac{1}{2}I - B(k)$ и $\frac{1}{2}I - B'(k)$ и формулы (2.22 $^-$) и (2.24 $^+$) для решений задач Дирихле и Неймана.

Приведем нужные нам простые предложения, поясняющие, как получается этот результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. В пространстве $H^0(S)$

$$\text{Ker } A(k) = \{ \partial_\nu u^+ : u \in W^+(k), u^+ = 0 \} = \text{Ker} \left[\frac{1}{2}I + B'(k) \right]. \quad (3.12)$$

Ядро $\text{Ker}[\frac{1}{2}I - B(k)]$ в $H^0(S)$ лежит в $H^1(S)$ и выражается формулой

$$\text{Ker} \left[\frac{1}{2}I - B(k) \right] = \{ u^+ : u \in W^+(k), \partial_\nu u^+ = 0 \}. \quad (3.13)$$

Формулы (3.12) и (3.13) для двух последних ядер приведены в [11]. В отличие от [11] мы не предполагаем в формулировке, что последнее ядро содержится в $H^1(S)$, но это следует из приведенного ниже предложения 3.14. В [11] проверена формула (3.13); проверим формулы (3.12).

Пусть u – решение уравнения (1.1) из $W^+(k)$ и $u^+ = 0$. Формула (2.17 $^+$) показывает, что $A(k)\partial_\nu u^+ = 0$.

⁵Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца рассматриваются также в работах [12], [13], но только для k из некоторой части верхней полуплоскости. С работой [11] авторы познакомились при подготовке настоящей статьи к печати, это позволило заменить ссылками на нее некоторые доказательства, относящиеся к вещественным k . В этой работе в основе изложения – факторизация оператора Гельмгольца в рамках соответствующей клиффордовой алгебры; но можно обойтись и без такого подхода.

Обратно, пусть $A(k)\varphi = 0$, $\varphi \in H^0(S)$. Рассмотрим функцию $u = -\mathcal{A}(k)\varphi$. Она принадлежит $W^\pm(k)$, но $u^\pm = 0$, так что $u = 0$ в G^- и $\partial_\nu u^- = 0$. Из (2.7) видно, что $\varphi = \partial_\nu u^+$.

Пусть снова u — решение уравнения (1.1) из $W^+(k)$ и $u^+ = 0$. Тогда в силу (2.15) $u = -\mathcal{A}(k)\varphi$, где $\varphi = \partial_\nu u^+$. Так как $u^- = 0$, то $u = 0$ в G^- и $\partial_\nu u^- = 0$. Из (2.7-) видно, что $[\frac{1}{2}I + B'(k)]\varphi = 0$.

Обратно, пусть $[\frac{1}{2}I + B'(k)]\varphi = 0$. Рассмотрим функцию $u = \mathcal{A}(k)\varphi$. Она принадлежит $W^\pm(k)$ и равна нулю в G^- , так как в силу (2.7-) $\partial_\nu u^- = 0$. Значит, $u^\pm = 0$, т.е. $A(k)\varphi = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. *Формула (2.26) верна при всех k .*

Она получается сначала при не вещественных k сравнением двух выражений для $u^\pm$ через $\partial_\nu^\pm u$, как в гладком случае, и снова распространяется на вещественные k предельным переходом.

Из (2.26) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. *Если оператор $A(k)$ обратим, то*

$$B(k) = A(k)B'(k)A^{-1}(k) \quad \text{и} \quad \left[\frac{1}{2}I \pm B(k)\right]^{-1} = A(k)\left[\frac{1}{2}I \pm B'(k)\right]^{-1}A^{-1}(k),$$

где последнее равенство с минусами верно при условии обратимости оператора $\frac{1}{2}I - B'(k)$ в $H^0(S)$.

Отсюда видно, что в случае обратимости оператора A из ограниченности оператора $B'(k)$ в $H^0(S)$ следует ограниченность оператора $B(k)$ в $H^1(S)$, а из обратимости $\frac{1}{2}I \pm B'(k)$ в $H^0(S)$ следует обратимость соответственно $\frac{1}{2}I \pm B(k)$ в $H^1(S)$. Эти соображения использованы в [7], [8] при $k = 0$ (это значение не исключительно относительно D^+) и в [10] при не вещественных k . Далее, при любом вещественном k мы имеем $B(k) = B(i) + \dots$, где многоточием обозначен оператор с более слабой (на два порядка) особенностью ядра, поэтому $B(k)$ ограничен в $H^1(S)$ при всех k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. *При любом k из того, что $\varphi \in H^0(S)$,*

$$\left[\frac{1}{2}I \pm B(k)\right]\varphi = \psi \tag{3.14}$$

и $\psi \in H^1(S)$, следует, что $\varphi \in H^1(S)$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно подействовать на обе части в (3.14) оператором $[\frac{1}{2}I \pm B(i)]^{-1}$.

Из последнего предложения вытекает обратимость оператора $\frac{1}{2}I - B(k)$ в $H^1(S)$, если он обратим в $H^0(S)$, даже если $A(k)$ не обратим [11]. Действительно, ограниченный оператор $\frac{1}{2}I - B(k)$ взаимно однозначно отображает $H^1(S)$ на себя, и достаточно воспользоваться теоремой Банаха об обратном операторе.

Теорема 3.10 не содержит полного набора формул для решений внешних задач при исключительных k . Но модифицированные формулы можно получить, как в случае гладкой S , см. [32; п. 3.6], а также [11] и п. 6.3 ниже.

Еще одно пояснение к теореме 3.10. Единственность для $D^+(k)$ при не вещественных k и для $D^-(k)$ при всех k проверяется при помощи формулы Грина в предположении, что решение принадлежит $W^\pm(k)$. Специального доказательства требует следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. Пусть u – решение внутренней или внешней задачи Дирихле (2.18 $^{\pm}$) из $V^{\pm}(k)$ с $u^{\pm} \in H^1(S)$. Тогда $u \in W^{\pm}(k)$.

Здесь k – любое, и мы несколько дополняем результаты по задаче Дирихле из [10] и [11]. При этом мы можем дать короткое и простое доказательство. Приведем его для внешней задачи: случай внутренней задачи проще.

Пусть $\theta(x)$ – бесконечно гладкая функция в G^- , равная единице вблизи S и нулю при $|x| \geq R$, где R достаточно велико. Тогда $(1 - \theta)u \in C^\infty(\overline{G}^-)$. Рассмотрим объемный потенциал вида (3.3) с плотностью F , равной $k^2 u + \Delta[(1 - \theta)u]$ в G^- ; она финитна. Так как финитная функция F принадлежит $H^{1/2}(G^-)$, то $U_-^* \in L_2(S)$ (см. конец п. 3.2). Положим $v = \theta u + U$. Это гармоническая функция из $V^-(0)$, но $v^- \in H^1(S)$. Поэтому $v \in W^-(0)$, $v \in H^{3/2}(G_R^-)$, $\theta u \in H^{3/2}(G^-)$, $u \in H_{\text{loc}}^{3/2}(G^-)$ и $u \in W^-(k)$, см. теорему 3.1.

3.6. Связь исключительных k с собственными значениями операторов $-\Delta_D$ и $-\Delta_N$ в липшицевой области. Так как теперь существенна негладкость границы, то нам понадобятся “вариационные” определения этих операторов (см., например, [38; гл. 6]). Рассмотрим эрмитову форму

$$a_D[u, v] = \int_{G^+} \nabla u \nabla \bar{v} dx \quad \text{на } \mathring{H}^1(G^+). \quad (3.15)$$

Здесь $\mathring{H}^1(G^+)$ – замыкание линейала $C_0^\infty(G^+)$ в $H^1(G^+)$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением (3.15), плотное в $H^0(G^+)$. Форма (3.15) замкнута и плотно определена в $H^0(G^+)$, соответствующая квадратичная форма является положительно определенной. Поэтому эта форма определяет самосопряженный оператор A_D в $H^0(G^+)$, имеющий область определения $\mathcal{D}(A_D) \subset \mathring{H}^1(G^+)$, такой, что

$$\int_{G^+} A_D u \bar{v} dx = a_D[u, v] \quad \text{при } u \in \mathcal{D}(A_D), \quad v \in \mathring{H}^1(G^+). \quad (3.16)$$

Оператор A_D имеет ограниченный обратный оператор B_D , определяемый равенством

$$\int_{G^+} w \bar{v} dx = a_D[B_D w, v] \quad (w \in H^0(G^+), \quad v \in \mathring{H}^1(G^+)), \quad (3.17)$$

и область определения $\mathcal{D}(A_D)$ оператора A_D совпадает с областью значений оператора B_D . Оператор A_D и есть $-\Delta_D$.

Оператор $A_N = 1 - \Delta_N$ определяется аналогично при помощи формы

$$a_N[u, v] = \int_{G_+} (\nabla u \nabla \bar{v} + u \bar{v}) dS \quad \text{на } H^1(G^+). \quad (3.18)$$

Он имеет ограниченный обратный оператор B_N , определяемый равенством

$$\int_{G^+} w \bar{v} dx = a_N[B_N w, v] \quad (w \in H^0(G^+), \quad v \in H^1(G^+)), \quad (3.19)$$

и область определения $\mathcal{D}(A_N)$ совпадает с областью значений оператора B_N .

ТЕОРЕМА 3.16. *Множество квадратов k^2 чисел k , исключительных относительно задачи D^+ , совпадает с множеством собственных значений оператора $-\Delta_D$. При этом кратность собственного значения равна размерности $\text{Ker } A(\pm k)$.*

Аналогично множество квадратов k^2 чисел k , исключительных относительно задачи N^+ , совпадает с множеством собственных значений оператора $-\Delta_N$. При этом кратность собственного значения равна размерности $\text{Ker}[\frac{1}{2}I - B(\pm k)]$.

Собственные функции операторов $-\Delta_D$ и $-\Delta_N$ принадлежат $H^{3/2}(G^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k исключительно относительно задачи D^+ . Пусть u — любая отличная от тождественного нуля функция из $W^+(k)$ с $u^+ = 0$. Возьмем функцию $v \in \mathring{H}^1(G^+)$ и применим первую формулу Грина (2.13) к u и $\bar{v}$. Мы получим

$$k^2 \int_{G^+} u \bar{v} dx = \int_{G^+} \nabla u \nabla \bar{v} dx. \quad (3.20)$$

Теперь видно, что $B_D u = k^{-2}u$, т.е. $-\Delta_D u = k^2 u$.

Обратно, пусть u — собственная функция оператора $-\Delta_D$, отвечающая собственному значению k^2 . Тогда $u \in \mathring{H}^1(G^+)$ и мы имеем (3.20). Отсюда следует, что $\Delta u + k^2 u = 0$ в G^+ в смысле обобщенных функций и, значит, в обычном смысле (ввиду эллиптичности оператора Гельмгольца). Поэтому u — решение однородной задачи $D^+(k)$ из $H^{1/2}(G^+)$ и, значит, из $V^+(k)$. Но тогда $u \in W^+(k)$ в силу предложения 3.15, так что $u \in H^{3/2}(G^+)$ в силу теоремы 3.1.

Пусть теперь k исключительно относительно задачи N^+ , и пусть u — отличная от тождественного нуля функция из $W^+(k)$ с $\partial_\nu u^+ = 0$. Возьмем любую функцию $v \in H^1(G^+)$ и применим формулу (2.13) к u и $\bar{v}$. Мы снова получим (3.20) и можем сделать вывод, что $-\Delta_N u = k^2 u$.

Обратно, пусть u — собственная функция оператора $-\Delta_N$, отвечающая собственному значению k^2 . Тогда $u \in H^1(G^+)$ и мы имеем (3.20) для всех $v \in H^1(G^+)$. Используя функции $v \in C_0^\infty(G^+)$, легко убедиться в том, что $\Delta u + k^2 u = 0$ в G^+ в смысле обобщенных функций, и значит, в обычном смысле. Введем объемный потенциал

$$U_1(x) = \int_{G^+} \Phi(x-y, i)(k^2 + 1)u(y) dy.$$

Эта функция принадлежит $H^2(G^+)$ и удовлетворяет уравнению $(\Delta - 1)U_1 = (k^2 + 1)u$ в G^+ , а $\partial_\nu U_1^+ \in H^{1/2}(S)$. Положим $u_1 = u + U_1$. Эта функция удовлетворяет уравнению $(\Delta - 1)u_1 = 0$ и принадлежит $H^1(G^+)$, а $u_1^* \in L_2(S)$ (в силу теоремы 3.1). По существу граничное условие $\partial_\nu u^+ = 0$ выполняется в некотором обобщенном смысле, а формально в силу (3.20) и (2.11)

$$\begin{aligned} \int_{G^+} (\Delta - 1)U_1 \cdot \bar{v} dx &= (k^2 + 1) \int_{G^+} u \bar{v} dx = \int_{G^+} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{G^+} u \bar{v} dx \\ &= - \int_{G^+} U_1 \bar{v} dx - \int_{G^+} \nabla U_1 \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_S \partial_\nu U_1^+ \bar{v}^+ dS, \end{aligned}$$

так что

$$\int_{G^+} \nabla u_1 \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{G^+} u_1 \bar{v} dx = \int_S \partial_\nu U_1^+ \bar{v}^+ dS \quad (3.21)$$

для любой функции $v \in H^1(G^+)$. Теперь определим u_2 как (единственное) решение уравнения $(\Delta - 1)u_2 = 0$ с граничным условием $\partial_\nu u_2^+ = \partial_\nu U_1^+$. Оно принадлежит $W^+(i)$ и $H^{3/2}(G^+)$, и

$$0 = \int_{G^+} (\Delta - 1)u_2 \cdot \bar{v} dx = - \int_{G^+} u_2 \bar{v} dx - \int_{G^+} \nabla u_2 \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_S \partial_\nu U_1^+ \bar{v}^+ dS \quad (3.22)$$

для тех же v . Сравнивая (3.21) и (3.22), получаем

$$\int_{G^+} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{G^+} (u_1 - u_2) \bar{v} dx = 0.$$

Полагая $v = u_1 - u_2$, заключаем, что $u_1 - u_2 = 0$ в G^+ , т.е. $u_1 = u_2$. Мы видим, что $u = u_2 - U_1$ — функция из $H^{3/2}(G^+)$, или, что то же, из $W^+(k)$, при этом $\partial_\nu u^+ = 0$ в обычном для этого пространства смысле.

Собственные значения операторов $-\Delta_D$ и $-\Delta_N$ с учетом кратности сохраняют такую же асимптотику, как в гладком случае: $k_j^2 \sim cj^{2/3}$ (см., например, [39]).

Связность границы не нужна для справедливости теоремы 3.16. Из нее следуют утверждения о конечной кратности и изолированности исключительных k , приведенные в [11].

3.7. Сведение задач I–IV к уравнениям на S при неисключительных k . Теперь все сказанное в п. 2.4 можно повторить, рассматривая задачи I–IV в $W^\pm(k)$, так как в этом случае можно пользоваться формулами (2.17). Все четыре оператора $T^\pm(k)$, $A(k)$ и $T(k)$ действуют ограниченным образом из $H^0(S)$ в $H^1(S)$.

§ 4. Спектральные свойства операторов $A(k)$, $T^\pm(k)$ и $T(k)$

4.1. Несколько определений из теории операторов в гильбертовом пространстве. Приведем несколько определений для удобства читателя. Пусть $\mathcal{T}$ — компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, вообще говоря, несамосопряженный. Если 0 — собственное значение этого оператора, то будем предполагать, что соответствующее корневое подпространство конечномерно. Составим последовательность $\{\lambda_j(\mathcal{T})\}$ ($j = 1, 2, \dots$) собственных значений оператора $\mathcal{T}$ следующим образом: если 0 — собственное значение кратности q_0 , то положим $\lambda_1(\mathcal{T}) = \dots = \lambda_{q_0}(\mathcal{T}) = 0$, далее расположим ненулевые собственные значения в порядке невозрастания модулей с учетом кратностей.

Напомним, что s -числа $s_j(\mathcal{T})$ ($j = 1, 2, \dots$) оператора $\mathcal{T}$ — это ненулевые собственные значения неотрицательного оператора $(\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^{1/2}$, где $\mathcal{T}^*$ — сопряженный к $\mathcal{T}$ оператор, занумерованные в порядке невозрастания с учетом кратностей. Если оператор самосопряженный или нормальный, то это модули его собственных значений.

Известно, что из $s_j(\mathcal{T}) = O(j^{-\alpha})$, где α — положительное число, следует, что $|\lambda_j(\mathcal{T})| = O(j^{-\alpha})$ (см. например, [40; гл. 2, § 3]).

Оператор $\mathcal{T}$ называется *диссипативным*, если $\operatorname{Im}(\mathcal{T}\varphi, \varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in H$. В этом случае $\operatorname{Im} \lambda_j(\mathcal{T}) \geq 0$. Кроме того, в этом случае в корневых подпространствах, отвечающих вещественным собственным значениям, все корневые векторы являются собственными (см. [40; гл. 5, § 1]).

Система векторов в H называется *полной*, если их конечные линейные комбинации всюду плотны в H .

Предположим, что корневые векторы оператора $\mathcal{T}$ в H образуют полную систему, и составим систему $\{\varphi_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) из базисов во всех корневых подпространствах, причем так, чтобы вектор φ_j отвечал собственному значению λ_j . Это минимальная полная система. Для такой системы строится биортогональная к ней система $\{\psi_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$): $(\varphi_j, \psi_k) = \delta_{jk}$. При этом $\{\psi_k\}$ составляется из базисов в корневых подпространствах сопряженного оператора $\mathcal{T}^*$, по крайней мере если $\lambda = 0$ – не собственное значение или оператор $\mathcal{T}$ диссипативен [2]. Разумеется, если $\mathcal{T}$ самосопряженный оператор, то можно просто считать систему $\{\varphi_j\}$ ортонормированным базисом.

В общем случае, если f – любой вектор из H , можно сопоставить ему формальный ряд Фурье по системе $\{\varphi_j\}$:

$$f \mapsto \sum c_j \varphi_j, \quad \text{где } c_j = (f, \psi_j). \quad (4.1)$$

Возникает вопрос о возможности восстановления f по этому ряду.

Система $\{\varphi_j\}$ называется *базисом со скобками*, если существует такая не зависящая от f возрастающая последовательность индексов $\{j_l\}$ ($l = 0, 1, \dots$) с $j_0 = 0$, что

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=j_l+1}^{j_{l+1}} c_j \varphi_j \right) \quad (4.2)$$

в смысле сходимости по норме в H . Если нулевого собственного значения нет, то скобками выделяется группа членов, отвечающих близким собственным значениям, причем для разных групп собственные значения различны. Если 0 – собственное значение кратности q_0 , то будем считать, что $j_1 = q_0$, тогда сказанное относится к $l \geq 1$. Конечно, можно определить базисность со скобками любой полной минимальной системы векторов, не обязательно связанной с каким-либо оператором, но здесь это нам не нужно.

Этот базис со скобками называется *безусловным*, если любое изменение порядка членов в ряде по l не отражается на его сходимости к f . Наличие безусловного базиса со скобками из корневых функций для интересующих нас самосопряженных операторов, притом с контролируемым ростом j_l , удастся установить в случае бесконечно гладкой S , см. [2], [4].

Заметим, что член ряда по l в (4.2) (с $l > 0$, если 0 – собственное значение) – это результат применения к f проектора Рисса

$$P_l = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_l} \mathcal{T}(I - \lambda \mathcal{T})^{-1} d\lambda, \quad (4.3)$$

где контур Γ_l замкнут, не проходит через собственные значения и окружает только собственные значения, отвечающие φ_j с $j_l < j \leq j_{l+1}$; направление обхода – положительное относительно ограниченной контуром области. Под знаком интеграла стоит модифицированная резольвента оператора $\mathcal{T}$.

Теперь определим метод суммирования Абеля–Лидского ряда (4.2) и для этого введем операторы

$$P_l(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_l} e^{-t(-\lambda)^{-\alpha}} \mathcal{T}(I - \lambda \mathcal{T})^{-1} d\lambda, \quad t > 0. \quad (4.4)$$

Если 0 – собственное значение, то это формула для $l > 0$, а $P_0(t)f \equiv P_0 f$ – нулевой член ряда по l в (4.2). В (4.4) знак в показателе приспособлен к случаю, когда аргументы величин λ_j стремятся к π : α – положительное число; $(-\lambda)^{-\alpha} = |\lambda|^{-\alpha} e^{-i\alpha \arg(-\lambda)}$, где $\arg(-\lambda) \in (-\pi, \pi]$, $\arg(-\lambda_j) \rightarrow 0$. В работе [41] ряд (4.2) назван суммируемым (к f) методом Абеля порядка α , если последовательность $\{j_l\}$, не зависящую от f , можно выбрать так, что ряд $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(t)f$ сходится в H при $t > 0$ и его сумма $f(t)$ сходится к f при $t \downarrow 0$. Мы называем этот метод *методом Абеля–Лидского порядка α* .

4.2. Комплексная симметрия. Если $\mathcal{T}$ – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H , то *комплексно сопряженный* оператор $\overline{\mathcal{T}}$ определяется формулой $\overline{\mathcal{T}}f = \overline{\mathcal{T}\overline{f}}$. Если $\mathcal{T}$ – интегральный оператор в $L_2(S)$ с ядром $K(x, y)$, то $\overline{\mathcal{T}}$ – интегральный оператор с комплексно сопряженным ядром $\overline{K}(x, y)$. Ясно, что $\mathcal{T}^* = \overline{\mathcal{T}'}$, где $\mathcal{T}^*$ и $\mathcal{T}'$ – соответственно сопряженный и транспонированный к $\mathcal{T}$ операторы ($(\mathcal{T}u, \overline{v}) = (u, \overline{\mathcal{T}'v})$). Мы называем оператор $\mathcal{T}$ *комплексно-симметричным*, если $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, т.е. $\mathcal{T}^* = \overline{\mathcal{T}}$. В этом случае

$$\operatorname{Re} \mathcal{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \mathcal{T}^*) = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \overline{\mathcal{T}}), \quad \operatorname{Im} \mathcal{T} = \frac{1}{2i}(\mathcal{T} - \mathcal{T}^*) = \frac{1}{2i}(\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}}). \quad (4.5)$$

В [2], в случае гладкой поверхности, отмечено, что *все операторы $A(k)$, $T^{\pm}(k)$ и $T^{+}(k)$ комплексно-симметричны*. Это замечание остается в силе в случае липшицевой S . Для оператора $A(k)$ это непосредственно видно из (2.4) и (2.1). Для операторов $T^{\pm}(k)$ это следует из (2.28), (2.32) и (2.25), для $T(k)$ – из (2.40).

Из комплексной симметрии следует возможность так построить полную минимальную систему корневых функций φ_j , что биортогональная к ней система будет совпадать с комплексно сопряженной системой: $\int_S \varphi_j \varphi_k dS = \delta_{jk}$ (см. [2]; ср. [1]).

Далее в этом параграфе число $k = k' + ik''$ считается отличным от нуля.

4.3. Оператор $A(k)$. Применим первую формулу Грина (2.13) с $v = \overline{u}$ в G_R^- (см. (3.4)) и учтем условие излучения. Получим

$$-k^2 \int_{G_R^-} |u|^2 dx = - \int_{G_R^-} |\nabla u|^2 dx - \int_S \partial_\nu u^- \overline{u}^- dx + ik \int_{S_R} |u|^2 dx + o(1). \quad (4.6)$$

Сложим эту формулу с первой формулой Грина (2.13) для G^+ тоже с $v = \overline{u}$. Мы считаем (см. п. 2.4), что $u = \mathcal{A}(k)\varphi$ и $\varphi = \partial_\nu u^- - \partial_\nu u^+$. Учитывая, что в силу (2.17) $A(k)\varphi = u^\pm$, получаем

$$(A(k)\varphi, \varphi)_S = \overline{k}^2 \int_{B_R} |u|^2 dx - \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - i\overline{k} \int_{S_R} |u|^2 dS + o(1). \quad (4.7)$$

При $k'' > 0$, отделяя вещественную и мнимую части и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\operatorname{Re}(A(k)\varphi, \varphi)_S = [(k')^2 - (k'')^2] \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx, \quad (4.8)$$

$$\operatorname{Im}(A(k)\varphi, \varphi)_S = -2k'k'' \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx. \quad (4.9)$$

Если же $k'' = 0$, то из (4.7) получаем

$$\operatorname{Im}(A(k)\varphi, \varphi)_S = -k' \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |u|^2 dS, \quad (4.10)$$

причем предел существует, так как левая часть не зависит от R .

ТЕОРЕМА 4.1. *Оператор $A(k)$ является самосопряженным в том и только в том случае, если $k' = 0$, и в этом случае его собственные значения отрицательны.*

При $k' \neq 0$ оператор $A(k)$ не имеет вещественных собственных значений за одним возможным исключением: $\lambda = 0$ – собственное значение тогда и только тогда, когда k вещественно и исключительно относительно задачи D^+ . Соответствующее корневое подпространство совпадает с $\operatorname{Ker} A(k)$ и, в частности, конечномерно, присоединенных функций в нем нет.

При $k' < 0$ оператор $A(k)$ диссипативен, при $k' > 0$ диссипативен оператор $-A(k)$, так что знаки мнимых частей ненулевых собственных значений противоположны знаку k' .

При $|k'| \leq k''$ вещественные части собственных значений отрицательны.

Здесь все утверждения следуют из формул (2.1), (2.4) и (4.8)–(4.10). Поясним только, что равенство $\operatorname{Im}(A(k)\varphi, \varphi)_S = 0$ с ненулевой φ возможно, как видно из (4.9) и (4.10), только при вещественном k и равенстве нулю правой части в (4.10), а отсюда, как известно [32; п. 3.3], [33], следует, что $u(x) = 0$ в G^- . Тогда $0 = u^- = u^+$, так что φ – собственная функция, отвечающая нулевому собственному значению. Присоединенных функций, отвечающих нулевому собственному значению, нет в силу диссипативности оператора $A(k)$ или $-A(k)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для s -чисел оператора $A(k)$ при любом k справедлива оценка*

$$s_j(A(k)) \leq Cj^{-1/2}, \quad (4.11)$$

так что аналогичная оценка верна для модулей собственных значений этого оператора.

Если оператор $A(k)$ не самосопряженный, то при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ все его собственные значения, за исключением, может быть, конечного числа, лежат в угловой ε -окрестности $\{\lambda : |\arg \lambda| > \pi - \varepsilon\}$ отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$ (и даже в полукрестности, см. предыдущую теорему).

Если S – почти гладкая поверхность, то собственные значения имеют асимптотику

$$\lambda_j(A(k)) = -cj^{-1/2} + o(j^{-1/2}), \quad (4.12)$$

где c – положительная постоянная, не зависящая от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (4.11) следует из того, что $A(k)$ – ограниченный оператор из $H^0(S)$ в $H^1(S)$. Это общеизвестный факт в случае гладкой S , см. ссылки в [4; п. 5.4], а на случай липшицевой S его можно перенести, например, при помощи липшицева диффеоморфизма из леммы 3.7. Эта оценка следует также из общего результата в [9; п. 2]. Если оператор $A(k)$ самосопряженный, то он, как мы видели, отрицателен, и в случае почти гладкой поверхности асимптотика (4.12) следует из общей теоремы в [9; п. 3].

В силу предложения 3.5 при любом не чисто мнимом k , когда $A(k)$ – несамосопряженный оператор, мы можем рассматривать его как слабое возмущение самосопряженного оператора $A(i)$:

$$A(k) = A(i)[I + C(k)], \quad (4.13)$$

где $C(k)$ – компактный оператор в $H^0(S)$. При этом либо оператор $A(k)$ аннулируется только в нуле, либо корневое подпространство, отвечающее собственному значению 0, конечномерно. Во втором случае, как известно, при помощи добавления к $A(k)$ подходящего конечномерного оператора это собственное значение можно заменить ненулевым числом, не затрагивая корневые функции и остальные собственные значения. Отсюда следуют утверждения теоремы о собственных значениях оператора $A(k)$, включая (4.12): см. [40; гл. 5, § 11].

ТЕОРЕМА 4.3. *Корневые функции оператора $A(k)$, отвечающие ненулевым собственным значениям, принадлежат $H^1(S)$. Если поверхность S почти гладкая, то все корневые функции принадлежат C^∞ вне сингулярного множества S_0 .*

Если $A(k)$ – несамосопряженный оператор, то совокупность корневых функций полна в $H^0(S)$ и из них можно образовать минимальную полную систему, ряд Фурье по которой суммируется методом Абеля–Лидского порядка $2+\varepsilon$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Аналогичное утверждение справедливо в $H^1(S)$ для этой же системы и для векторов из области значений оператора $A(k)$ (для всех векторов из $H^1(S)$, если k не исключительно относительно задачи D^+).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно для собственных функций, поскольку собственные значения отличны от нуля, а для соответствующих решений уравнения Гельмгольца $u^\pm \in H^1(S)$. Далее это утверждение легко последовательно проверяется для присоединенных функций первого порядка, второго порядка и т. д. Если поверхность почти гладкая, то можно воспользоваться локальной теоремой о гладкости решений эллиптических псевдодифференциальных уравнений. Утверждение о полноте и суммируемости следует из (4.13) и известных теорем, см. [4; § 6] и приведенные там ссылки; возможное наличие конечномерного корневого подпространства, отвечающего нулевому собственному значению, не препятствует применению этих теорем в силу замечания в конце предыдущего доказательства. Последнее утверждение теоремы проверяется следующим образом: если

$$f(t) = \sum P_l(t)f \quad \text{и} \quad f(t) \rightarrow f \quad \text{в} \quad H^0(S)$$

(см. определение метода Абеля–Лидского в п. 4.1), то для $g = A(k)f$ имеем

$$g(t) = \sum P_l(t)A(k)f = A(k)f(t) \quad \text{и} \quad g(t) \rightarrow A(k)f = g \quad \text{в} \quad H^1(S).$$

Собственные функции, отвечающие собственному значению 0, могут не принадлежать $H^1(S)$. Это мы покажем на примере в п. 4.6.

4.4. Оператор $T^+(k)$. Здесь мы предполагаем, что k не исключительно относительно задачи N^+ . Свойства оператора $T^+(k)$ в основном аналогичны свойствам оператора $A(k)$. Из первой формулы Грина (2.13) для области G^+ с $v = \bar{u}$ и (2.29) получаем

$$(T^+(k)\varphi, \varphi)_S = \bar{k}^2 \int_{G^+} |u|^2 dx - \int_{G^+} |\nabla u|^2 dx, \quad (4.14)$$

где u – решение задачи $N^+(k)$ с $\partial_\nu u^+ = \varphi$. Из (4.14) следует, что

$$\operatorname{Re}(T^+(k)\varphi, \varphi)_S = [(k')^2 - (k'')^2] \int_{G^+} |u|^2 dx - \int_{G^+} |\nabla u|^2 dx \quad (4.15)$$

и

$$\operatorname{Im}(T^+(k)\varphi, \varphi)_S = -2k'k'' \int_{G^+} |u|^2 dx. \quad (4.16)$$

ТЕОРЕМА 4.4. *Оператор $T^+(k)$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда либо k' , либо k'' равно нулю.*

При $k' = 0$ его собственные значения отрицательны, а при $k'' = 0$ отрицательны, начиная с некоторого номера. Во втором случае $\lambda = 0$ – собственное значение тогда и только тогда, когда k исключительно относительно задачи D^+ . Соответствующее корневое подпространство совпадает с $\operatorname{Ker} A(k)$ и, в частности, конечномерно, присоединенных функций в нем нет.

При остальных k собственные значения невещественны. В первой четверти ($k' > 0, k'' > 0$) оператор $-T^+(k)$ диссипативен, во второй четверти ($k' < 0, k'' > 0$) диссипативен оператор $T^+(k)$, поэтому знаки мнимых частей собственных значений противоположны знаку k' .

При $|k'| \leq k''$ вещественные части собственных значений отрицательны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Самосопряженность оператора $T^+(k)$ при $k'k'' = 0$ ввиду его комплексной симметрии видна из (4.16), отрицательность собственных значений при чисто мнимом k – из (4.15), утверждение о диссипативности следует из (4.16).

Утверждение о том, что собственные значения при $k'' = 0$ отрицательны, начиная с некоторого номера, вытекает из следующего утверждения, которое мы проверим немного ниже: *разность $T^+(k_1) - T^+(k_2)$ при любых k_1 и k_2 есть компактный оператор из $H^0(S)$ в $H^1(S)$.* Действительно, отсюда следует, что при всех k и, в частности, при вещественных ненулевых k оператор $T^+(k)$ можно рассматривать как слабое возмущение самосопряженного оператора $T^+(i)$ с отрицательными собственными значениями:

$$T^+(k) = T^+(i)[I + C_1(k)], \quad (4.17)$$

где $C_1(k)$ – компактный оператор в $H^0(S)$.

Далее, как видно из (2.28), равенство $T^+(k)\varphi = 0$ эквивалентно включению $\varphi \in \operatorname{Ker} A(k)$.

Проверим выделенное в начале доказательства утверждение, используя формулу (2.25). Мы имеем

$$\begin{aligned} T^+(k_1) - T^+(k_2) &= A(k_1) \left\{ \left[\frac{1}{2}I - B'(k_1) \right]^{-1} - \left[\frac{1}{2}I - B'(k_2) \right]^{-1} \right\} \\ &\quad + [A(k_1) - A(k_2)] \left[\frac{1}{2}I - B'(k_2) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь $A(k_1) - A(k_2)$ — компактный оператор из $H^0(S)$ в $H^1(S)$, а $[\frac{1}{2}I - B'(k_2)]^{-1}$ — ограниченный оператор в $H^0(S)$. Остается заметить, что разность в фигурных скобках можно записать в виде

$$\left[\frac{1}{2}I - B'(k_1) \right]^{-1} [B'(k_1) - B'(k_2)] \left[\frac{1}{2}I - B'(k_2) \right]^{-1},$$

и здесь $B'(k_1) - B'(k_2)$ — компактный оператор в $H^0(S)$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Все утверждения теоремы 4.2 останутся в силе, если оператор $A(k)$ заменить оператором $T^+(k)$ (но с удвоением постоянной c в асимптотике собственных значений).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2. Ссылка на [9] по поводу асимптотики собственных значений самосопряженного оператора корректна с учетом того обстоятельства, что наряду с (2.28) оператор $T^+(k)$ допускает второе представление $A(k)[\frac{1}{2}I - B'(k)]^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4.6. *Все утверждения теоремы 4.3 останутся в силе, если оператор $A(k)$ заменить оператором $T^+(k)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3.

4.5. Оператор $T^-(k)$. Здесь мы предполагаем, что k не исключительно относительно задачи D^+ .

Снова начнем с формул Грина. Формула (4.6) после предельного перехода при $R \rightarrow \infty$ дает при $k'' > 0$:

$$\operatorname{Re}(T^-(k)\varphi, \varphi)_S = [(k')^2 - (k'')^2] \int_{G^-} |u|^2 dx - \int_{G^-} |\nabla u|^2 dx, \quad (4.19)$$

$$\operatorname{Im}(T^-(k)\varphi, \varphi)_S = -2k'k'' \int_{G^-} |u|^2 dx, \quad (4.20)$$

где u — решение задачи $N^-(k)$ с $\partial_\nu u^- = \varphi$. Если же $k'' = 0$, $k' \neq 0$, то

$$\operatorname{Im}(T^-(k)\varphi, \varphi)_S = -k' \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |u|^2 dS, \quad (4.21)$$

и здесь предел существует, так как левая часть не зависит от R .

Из этих формул, как в предыдущих пунктах, делаем следующие выводы.

ТЕОРЕМА 4.7. При $k' = 0$ и только в этом случае оператор $T^-(k)$ является самосопряженным. Его собственные значения отрицательны.

При $k' \neq 0$ собственные значения не вещественны. При $k' < 0$ оператор $T^-(k)$ диссипативен, при $k' > 0$ диссипативен оператор $-T^-(k)$. Поэтому знаки мнимых частей собственных значений противоположны знаку k' .

При $|k'| \leq k''$ вещественные части собственных значений отрицательны.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 4.5. В частности, мы пользуемся тем, что при любом k оператор $T^-(k)$ можно рассматривать как слабое возмущение оператора $T^-(i)$.

ТЕОРЕМА 4.8. Все утверждения теоремы 4.2 останутся в силе, если заменить оператор $A(k)$ оператором $T^-(k)$ (с удвоением постоянной c в асимптотике собственных значений).

Наконец, аналогично теореме 4.6 проверяется

ТЕОРЕМА 4.9. Корневые функции оператора $T^-(k)$ принадлежат $H^1(S)$. Если поверхность S почти гладкая, то все корневые функции принадлежат C^∞ вне сингулярного множества S_0 .

Если оператор $T^-(k)$ несамосопряженный, то совокупность его корневых функций полна в $H^0(S)$ и из них можно образовать минимальную полную систему, ряд Фурье по которой суммируется методом Абеля–Лидского порядка $2 + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Аналогичное утверждение справедливо для этой же системы в $H^1(S)$.

4.6. Оператор $T(k)$. Здесь мы предполагаем, что k не исключительно относительно обеих задач D^+ и N^+ .

Складывая формулы Грина (2.13) для G^+ и (4.6) для G_R^- с $v = \bar{u}$, с учетом равенства $\partial_\nu u^+ = \partial_\nu u^- = \varphi$ и формул (2.29), (2.28), (2.33) и (2.32) получаем

$$(T(k)\varphi, \varphi)_S = \bar{k}^2 \int_{B_R} |u|^2 dx - \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{S_R} u \partial_r \bar{u} dS. \quad (4.22)$$

Отсюда при $k'' > 0$

$$\operatorname{Re}(T(k)\varphi, \varphi)_S = [(k')^2 - (k'')^2] \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{Im}(T(k)\varphi, \varphi)_S = -2k'k'' \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx, \quad (4.24)$$

а при $k'' = 0, k' \neq 0$

$$\operatorname{Im}(T(k)\varphi, \varphi)_S = -k' \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |u|^2 dS, \quad (4.25)$$

где u – решение внутренней и внешней задач Неймана с $\partial_\nu u^\pm = \varphi$.

ТЕОРЕМА 4.10. Все утверждения теоремы 4.7 останутся в силе, если заменить оператор $T^-(k)$ оператором $T(k)$.

ТЕОРЕМА 4.11. *Все утверждения теоремы 4.8 останутся в силе, если заменить оператор $T^-(k)$ оператором $T(k)$ и удвоить (еще раз) постоянную c в асимптотике собственных значений.*

ТЕОРЕМА 4.12. *Все утверждения теоремы 4.9 останутся в силе, если заменить оператор $T^-(k)$ оператором $T(k)$.*

4.7. Пример. В п. 4.2 мы видели, что принадлежность к $H^1(S)$ удастся установить только для тех собственных функций оператора $A(k)$, которые отвечают ненулевым собственным значениям. Сейчас мы приведем пример ситуации, в которой собственные функции этого оператора, отвечающие собственному значению 0, определено не принадлежат $H^1(S)$.

Сначала мы построим такой пример в двумерной области. Для этого рассмотрим на плоскости круговой сектор⁶

$$G(R, \omega) = \{(r, \phi) : 0 < r < R, 0 < \phi < \omega\}; \quad (4.26)$$

здесь и дальше (r, ϕ) – полярные координаты и $0 < \omega < 2\pi$. Положительное R выберем произвольно и зафиксируем. Уравнение Гельмгольца в полярных координатах записывается в виде

$$\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 u + k^2 u = 0. \quad (4.27)$$

Построим решение $u(r, \phi) = v(r)w(\phi)$, где $w(\phi) = \sin(\pi\phi/\omega)$. Для v получится уравнение

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) + \left(k^2 - \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{r^2}\right) v(r) = 0.$$

Оно имеет решение $J_{\pi/\omega}(kr)$ (см., например, [43]), где $J_\nu(r)$ – функция Бесселя порядка ν . Таким образом, мы имеем решение

$$u = J_{\pi/\omega}(kr) \sin \frac{\pi\phi}{\omega}. \quad (4.28)$$

Положительное k выберем так, что $J_{\pi/\omega}(kR) = 0$. Теперь решение (4.28) имеет нулевые данные Дирихле. Подсчитаем его нормальную производную на горизонтальном участке границы. Вблизи него в декартовых координатах

$$u = J_{\pi/\omega}(k(x^2 + y^2)^{1/2}) \sin \left[\frac{\pi}{\omega} \arctg \frac{y}{x} \right].$$

Дифференцируя по y и полагая $y = 0$, получаем $\partial_\nu u = J_{\pi/\omega}(kx) \frac{\pi}{\omega} x^{-1}$. Эта функция при $x \rightarrow 0$ ведет себя как $\text{const} \cdot x^{\pi/\omega-1}$, и если ω близко к 2π , то показатель здесь можно записать в виде $-\frac{1}{2} + \varepsilon$, где ε – малое положительное число. Таким образом, функция $\partial_\nu u$ принадлежит $L_2[0, R]$, но ее производная по x уже не принадлежит $L_2[0, R]$, если ε достаточно мало.

⁶ Угол раствора, близкого к 2π , неоднократно использовался в литературе по негладким задачам для уравнения Лапласа, см., например, [42].

Нетрудно проверить, что для функции $w = r^{\pi/\omega-1}$ справедливо включение $w_*^+ \in L_2(S)$. Отсюда следует, что такое же включение справедливо для градиента функции (4.28). Поэтому $u \in W^+(k)$.

Таким образом, мы построили функцию из ядра оператора $A(k)$ на плоскости (см. (3.12)), не принадлежащую $H^1(S)$ на границе области. Эта функция принадлежит также ядру оператора $T^+(k)$ (см. (2.28)).

Чтобы получить аналогичный пример в $\mathbb{R}^3$, следует рассмотреть цилиндрическую область $G^+ = G(R, \omega) \times (-\pi, \pi)$ и в ней функцию

$$u = J_{\pi/\omega}((k^2 + 1)^{1/2}r) \sin \frac{\pi\phi}{\omega} \sin z \quad (4.29)$$

в цилиндрических координатах. Здесь k подбирается так, что $J_{\pi/\omega}(k_1 R) = 0$, где $k_1 = (k^2 + 1)^{1/2}$. Функция (4.29) – решение уравнения (1.1), и $\partial_\nu u$ – собственная функция оператора $A(k)$, которая на участке границы с уравнением $y = 0$ не принадлежит H^1 .

§ 5. Задачи I–IV при исключительных k

Напомним, что исключительные k вещественны.

5.1. Задача I. Эта задача пока рассмотрена при k , не исключительных относительно задачи N^+ . Если это условие нарушено, то задача I имеет “собственное значение ∞ ” в следующем смысле: если положить $\lambda = 1/\mu$ и переписать граничное условие в виде $\partial_\nu u^+ + \mu u^+ = 0$, то $\mu = 0$ будет собственным значением. Примем сначала, что при этом k не исключительно относительно задачи D^+ , так что у задачи I нет собственного значения 0. Тогда эту задачу можно привести к уравнению

$$\Theta^+(k)\psi = \mu\psi, \quad (5.1)$$

где

$$\Theta^+(k) = \left[\frac{1}{2}I - B'(k) \right] A^{-1}(k), \quad \psi = u^+, \quad \mu = \lambda^{-1}. \quad (5.2)$$

Это неограниченный оператор в $H^0(S)$ с областью определения $H^1(S)$. Пространство $H^1(S)$ компактно вложено в $H^0(S)$. При $k'k'' = 0$ из формул Грина следует, что он является самосопряженным оператором. Следовательно, при любом k это оператор с дискретным спектром. Его можно рассматривать как слабое возмущение оператора $\Theta^+(i)$: $\Theta^+(k) - \Theta^+(i) = K\Theta^+(i)$, где K – компактный оператор в $H^0(S)$. Действительно, это видно из представления

$$\begin{aligned} K &= [\Theta^+(k) - \Theta^+(i)]T^+(i) \\ &= \left[\frac{1}{2}I - B'(k) \right] [A^{-1}(k) - A^{-1}(i)]A(i) \left[\frac{1}{2}I - B'(i) \right]^{-1} \\ &\quad - [B'(k) - B'(i)]A^{-1}(i)A(i) \left[\frac{1}{2}I - B'(i) \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{1}{2}I - B'(k) \right] A^{-1}(k)[A(i) - A(k)]A^{-1}(i)A(i) \cdot \left[\frac{1}{2}I - B'(i) \right]^{-1} \\ &\quad - [B'(k) - B'(i)] \left[\frac{1}{2}I - B'(i) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $\Theta(i) = [T^+(i)]^{-1}$, то получаются результаты, аналогичные изложенным в п. 4.4.

Однако мы должны рассмотреть также случай, когда k исключительно относительно обеих задач D^+ и N^+ . В этом случае мы преобразуем задачу I. Для этого снова перепишем граничное условие (1.2) в виде $\partial_\nu u^+ + \mu u^+ = 0$ и положим $\mu = \tilde{\mu} + h$, $\tilde{\lambda} = 1/\tilde{\mu}$. Оно примет вид

$$\tilde{\lambda}(\partial_\nu u^+ + hu^+) + u^+ = 0, \quad \text{где } \tilde{\lambda} = \lambda[1 - \lambda h]^{-1}.$$

Значению $\lambda = 0$ отвечает $\tilde{\lambda} = 0$, но “значению” $\lambda = \infty$ теперь отвечает конечное значение $\tilde{\lambda} = -h^{-1}$. Вместо $\tilde{\lambda}$ снова будем писать λ , так что новое граничное условие окончательно запишется в виде

$$\lambda(\partial_\nu u^+ + hu^+) + u^+ = 0. \quad (5.3)$$

По существу мы лишь сдвинули спектральный параметр. Перепишем соотношение (2.17⁺) в виде

$$\left[\frac{1}{2}I - B(k) - hA(k)\right]u^+ = -A(k)(\partial_\nu u^+ + hu^+). \quad (5.4)$$

Теперь нужно выбрать такое h , что оператор слева в (5.4) аннулируется только в нуле: так как это фредгольмов оператор с нулевым индексом, то при таком h он обратим. Положив

$$\tilde{T}^+(k) = \tilde{T}^+(k, h) = -\left[\frac{1}{2}I - B(k) - hA(k)\right]^{-1}A(k), \quad \varphi = \partial_\nu u^+ + hu^+, \quad (5.5)$$

мы сможем свести преобразованную задачу I к уравнению

$$\tilde{T}^+(k)\varphi = \lambda\varphi. \quad (5.6)$$

Известно, что нужное h существует в случае достаточно гладкой S (см. [32; п. 3.6]). При липшицевой S это проверяется аналогично. Действительно, допустим, что

$$\left[-\frac{1}{2}I + B(k) + hA(k)\right]\varphi = 0,$$

где $\varphi \in H^0(S)$. Подействовав на это равенство оператором $[-\frac{1}{2}I + B(i)]^{-1}$, легко проверить, что $\varphi \in H^1(S)$. Рассмотрим функцию $u = [\mathcal{B}(k) + h\mathcal{A}(k)]\varphi$. Она принадлежит $W^\pm(k)$. В силу (2.6) и (2.8), $u^- = 0$, так что $u = 0$ в G^- и $\partial_\nu u^- = 0$. Кроме того, в силу (2.6)–(2.9), $u^+ = \varphi$, $\partial_\nu u^+ = -h\varphi$. Теперь запишем первую формулу Грина (2.13) с $v = \bar{u}$ и отделим мнимые части: $0 = \operatorname{Im} h \int_S |\varphi|^2 dS$. Мы видим, что если h невещественно, то $\varphi = 0$.

Таким образом, можно положить, например, $h = i$. Однако заметим, что если h_1 не является характеристическим числом соответствующего оператора $\tilde{T}^+(k, i)$, то из

$$-h_1 A(k)\varphi = \left[\frac{1}{2}I - B(k) - iA(k)\right]\varphi$$

следует $\varphi = 0$. Тогда оператор $\frac{1}{2}I - B(k) - (i - h_1)A(k)$ тоже обратим. Поэтому h можно выбрать и вещественным. По существу мы можем выбрать любое такое h , что задача

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в } G^+, \quad \partial_\nu u^+ + hu^+ = 0 \quad \text{на } S \quad (5.7)$$

имеет только тривиальное решение в $W^+(k)$, и заменить $\partial_\nu u^+$ в постановке задачи I на $\partial_\nu u^+ + hu^+$.

5.2. Задача II. Эта задача пока рассмотрена при условии, что k не исключительно относительно задачи D^+ . Пусть теперь оно не выполнено, и пусть для определенности k *положительно*. Оператор $T^-(k)$, переводящий внешние данные Неймана во внешние данные Дирихле, существует при всех k , но потенциалы, которыми мы до сих пор пользовались, в данном случае не позволяют получить явное выражение для $T^-(k)$.

Воспользуемся известным методом модификации потенциалов для решения внешних задач при исключительных k (см. [32; п. 3.6] и приведенные там ссылки). Этот метод состоит в замене фундаментального решения (2.1) функцией Грина внешней задачи, которая строится следующим образом.

Пусть G_r^+ – шар малого радиуса r , лежащий внутри G^+ вместе со своей границей S_r . Если r достаточно мало, то заданное k не исключительно относительно задачи D^+ в G_r^+ . Действительно, не ограничивая общности, можно принять, что $0 \in G^+$ и 0 есть центр этого шара. Если теперь $v(x)$ – решение уравнения (1.1) в G_r^+ , то $w(x) = v(rx)$ – решение уравнения $\Delta w + (kr)^2 w = 0$ в единичном шаре $G_1^+ = \{x : |x| < 1\}$, и достаточно выбрать r так, чтобы $(kr)^2$ было меньше первого собственного значения оператора $-\Delta_D$ в единичном шаре.

Дополнение к замыканию шара G_r^+ обозначим через G_r^- . Рассмотрим задачу

$$\Delta u + k^2 u = f \quad \text{в } G_r^-, \quad \beta \partial_\nu u - u = 0 \quad \text{на } S_r \quad (5.8)$$

с финитной f и условием излучения на бесконечности, где ν – нормаль, направленная в дополнение к шару. При $f = 0$ это задача типа II со спектральным параметром $\lambda = \beta$, и мы уже знаем, что при $\text{Im } \beta > 0$ имеет место единственность (так как знаки мнимых частей собственных значений противоположны знаку k). Функция Грина этой задачи имеет вид

$$\Psi(x, y, k) = \Phi(x - y, k) + \psi(x, y, k), \quad (5.9)$$

где функция ψ подбирается так, что $\Psi(x, y, k)$ как функция от x удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1) в G_r^- и граничному условию в (5.8) при $y \neq x$, $y \in G_r^-$. При $x, y \notin S_r$ функция ψ является бесконечно гладкой.

Составим потенциалы $\mathcal{A}_r(k)$ и $\mathcal{B}_r(k)$ по формулам вида (2.2) и (2.3) и определим операторы $A_r(k)$ и $B_r(k)$ формулами вида (2.4) и (2.5), но с функцией $\Psi(x, y, k)$ вместо $\Phi(x - y, k)$. Для решений из $W^-(k)$ в G^- верна формула вида (2.17⁻):

$$\left[\frac{1}{2} I + B_r(k) \right] u^- = A_r(k) \partial_\nu u^-. \quad (5.10)$$

Но здесь оба оператора, слева и справа, обратимы, так как аналог внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в } G^+ \setminus \overline{G_r^+}, \quad u^+ = 0 \quad \text{на } S, \quad \beta \partial_\nu u - u = 0 \quad \text{на } S_r \quad (5.11)$$

не имеет нетривиальных решений. Это проверяется при помощи первой формулы Грина в $G^+ \setminus \overline{G_r^+}$ с $v = \bar{u}$. Действительно, отделяя мнимые части в этой формуле, мы получаем, что $\partial_\nu u = 0$ на S_r , но отсюда в силу граничного условия следует, что

и $u = 0$ на S_r . Теперь можно воспользоваться, например, теоремой единственности Хольмгрена (см., например, [44; гл. 5]).

Таким образом, задача II снова сводится к уравнению (2.35), но при рассматриваемом k

$$T^-(k) = \left[\frac{1}{2}I + B_r(k) \right]^{-1} A_r(k). \quad (5.12)$$

Оператор $T^-(k)$ допускает исследование, аналогичное проведенному выше. Все выводы, которые можно сделать при помощи формулы Грина, остаются в силе. Так как $\psi(x, y, k)$ – бесконечно гладкая функция при $x, y \in S$, то этот оператор остается слабым возмущением самосопряженного оператора $T^-(i)$.

5.3. Задача IV. Здесь мы ограничимся следующим замечанием. При неискл. k вместо $T(k)$ можно воспользоваться обратным к $T(k)$ оператором

$$\Theta(k) = \left[\frac{1}{4}I - B'(k)^2 \right] A^{-1}(k) \quad (5.13)$$

и, полагая

$$\psi = u^- - u^+, \quad \mu = 1/\lambda, \quad (5.14)$$

свести задачу IV к уравнению

$$\Theta(k)\psi = \mu\psi. \quad (5.15)$$

Эта возможность сохраняется, если k исключительно только относительно задачи N^+ . (Мы действуем на обе части в (2.17 $^\pm$) оператором $[\frac{1}{2}I \pm B'(k)]A^{-1}(k)$, затем используем (2.26) и складываем получающиеся равенства.)

5.4. Случай оператора Лапласа. В этом случае, т.е. при $k = 0$, внутренняя задача Дирихле однозначно разрешима, а внутренняя задача Неймана – нет. В частности, оператор A обратим, и мы сводим задачи I–IV к уравнениям на S соответственно с операторами⁷

$$\Theta^+ = \left(\frac{1}{2}I - B' \right) A^{-1}, \quad (5.16)$$

$$T^- = \left(\frac{1}{2}I + B \right)^{-1} A \quad \text{или} \quad \Theta^- = \left(\frac{1}{2}I + B' \right) A^{-1}, \quad (5.17)$$

$$A \quad \text{или} \quad A^{-1}, \quad (5.18)$$

$$\Theta = \left[\frac{1}{4}I - (B')^2 \right] A^{-1}. \quad (5.19)$$

При помощи первой формулы Грина для G^+ или для G^+ и G_R^- с переходом к пределу при $R \rightarrow \infty$ проверяется, что операторы Θ^+ , Θ^- , A^{-1} и Θ являются самосопряженными и их собственные значения (стремящиеся к бесконечности) неположительны в случаях задач I и IV и отрицательны в случаях задач II и III. Операторы Θ^+ и Θ имеют нулевое собственное значение, так как однородная внутренняя задача Неймана имеет нетривиальное решение; это собственное значение однократно, и соответствующая собственная функция равна постоянной. Модули собственных значений, упорядоченные в порядке неубывания с учетом кратности, оцениваются

⁷ В (5.16) исправляется недосмотр, допущенный в [9] в отношении задачи I.

снизу величиной $\text{const} \cdot j^{1/2}$ с положительной постоянной, а если поверхность почти гладкая, то они имеют асимптотику $c_1 j^{1/2} + o(j^{1/2})$, $c_1 < 0$, в случае задачи III и аналогичную асимптотику с постоянными $c_1/2$, $c_1/2$ и $c_1/4$ в случаях задач I, II и IV соответственно.

§ 6. Некоторые обобщения и дополнительные замечания

6.1. Более общие граничные условия и условия сопряжения. Заменяем в постановках задач I–IV λ на $\lambda/\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ – положительная функция на S , удовлетворяющая условию Липшица. Если поверхность S – почти гладкая, то дополнительно предположим, что она принадлежит C^∞ вне сингулярного множества S_0 . Например, граничное условие в задаче I примет вид

$$\lambda \partial_\nu u^+(x) + \sigma(x) u^+(x) = 0 \quad \text{на } S. \quad (6.1)$$

В этом случае достаточно сделать следующие изменения в наших построениях. Во-первых, скалярное произведение на S определим формулой

$$(u, v)_{S, \sigma} = \int_S u \bar{v} \sigma^{-1} dS. \quad (6.2)$$

Соответствующая норма в $H^0(S)$ эквивалентна обычной норме. Во-вторых, ограничиваясь для простоты неисключительными k , введем операторы

$$A_\sigma(k) = \sigma A(k), \quad T_\sigma^\pm(k) = \sigma T^\pm(k), \quad T_\sigma(k) = \sigma T(k). \quad (6.3)$$

Как легко видеть, задача I на собственные функции сведется к уравнению

$$T_\sigma^+(k) \varphi = \lambda \varphi, \quad (6.4)$$

где, как и раньше, $\varphi = \partial_\nu u^+$. Аналогично, видоизмененные задачи II–IV сведутся к уравнениям вида (2.35), (2.37) и (2.39), где операторы $T^-(k)$, $A(k)$ и $T(k)$ надо заменить соответственно на $T_\sigma^-(k)$, $A_\sigma(k)$ и $T_\sigma(k)$. Заметим, что в тех случаях, когда прежние операторы были самосопряженными относительно прежнего скалярного произведения, новые операторы будут самосопряженными относительно нового скалярного произведения. Действительно, если L – любой ограниченный оператор в $H^0(S)$, то сопряженный к σL относительно нового скалярного произведения оператор есть σL^* , где L^* – оператор, сопряженный к L относительно старого скалярного произведения.

В общем же случае новые операторы сохраняют комплексную симметрию.

Все наши спектральные результаты остаются в силе по крайней мере для k , не исключительных относительно соответствующих внутренних задач.

6.2. Другие размерности. Рассмотрим сначала аналоги задач I–IV в областях пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$. Условие излучения для решений уравнения Гельмгольца (1.1) записывается в виде

$$\partial_r u(x) - k u(x) = o(r^{-(n-1)/2}) \quad \text{при } r = |x| \rightarrow \infty. \quad (6.5)$$

Как и раньше, мы считаем, что $k'' \geq 0$, и можем указать следствия из условий излучения, аналогичные выписанным в п. 1.1. Если $k = 0$, то условие излучения заменяется условиями убывания

$$u(x) = O(r^{-(n-2)}), \quad \partial_r u(x) = O(r^{-(n-1)}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию излучения, имеет вид

$$\Phi_n(x, k) = c_n \frac{1}{|x|^{(n-2)/2}} H_{(n-2)/2}^{(1)}(k|x|) \quad (6.7)$$

(см. [33]), где $H_s^{(1)}$ — функция Ганкеля 1-го рода порядка s (см., например, [43]) и

$$c_n = \frac{1}{4i} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{(n-2)/2}. \quad (6.8)$$

При отрицательном k можно заменить k на $|k|$ с одновременной заменой $H^{(1)}$ на $-H^{(2)}$, см. [43]. При $k = 0$, т.е. в случае уравнения Лапласа, фундаментальное решение, удовлетворяющее условиям убывания, имеет вид

$$\Phi_n(x) = -\frac{1}{\omega_n(n-2)} |x|^{-(n-2)}, \quad (6.9)$$

где ω_n — площадь $((n-1)$ -мерная мера Лебега) единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Функция $\Phi_n(x)$ является главной частью функции $\Phi_n(x, k)$ вблизи $x = 0$: в силу известных формул для функции Ганкеля [43] при $n > 4$

$$\Phi_n(x, k) - \Phi_n(x) = c'_n |x|^{4-n} + \dots, \quad (6.10)$$

а при $n = 4$

$$\Phi_4(x, k) - \Phi_4(x) = c'_4 \log |x| + \dots, \quad (6.11)$$

где логарифм исчезает при дифференцировании. Поэтому остается в силе предложение 3.5.

Исследование задач I–IV проводится совершенно так же, как выше при $n = 3$, и мы остановимся лишь на тех изменениях в формулировках результатов, которые связаны с изменением размерности:

Квадраты k_j^2 исключительных k (см. п. 3.6) имеют асимптотику $c(n)j^{2/n}$ при $j \rightarrow \infty$.

Оценка s -чисел, например, оператора $A(k)$ (см. п. 4.3) имеет вид

$$s_j(A(k)) \leq C j^{-1/(n-1)}, \quad (6.12)$$

а асимптотика его собственных значений в случае почти гладкой поверхности — вид

$$\lambda_j(A(k)) = -C_n j^{-1/(n-1)} + o(j^{-1/(n-1)}). \quad (6.13)$$

Аналогично меняются другие спектральные оценки и асимптотики. В случае гладкой S оценка остаточного члена в (6.13) имеет вид $O(j^{-2/(n-1)})$.

Порядок метода Абеля–Лидского в теоремах типа 4.3 равен $n - 1 + \varepsilon$.

При $n = 2$ условие излучения сохраняется в форме (6.5), и фундаментальные решения уравнения Гельмгольца и Лапласа имеют соответственно вид

$$\Phi_2(x, k) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|x|) \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|. \quad (6.14)$$

Главный член разности этих ядер имеет вид $c|x|^2 \log |x|$. Особенность двумерного случая состоит в том, что потенциал $\mathcal{A}\varphi$ с $\varphi \in L_2(S)$, вообще говоря, не убывает на бесконечности. Но он убывает как $|x|^{-1}$, если φ имеет нулевое среднее по S :

$\int_S \varphi dS = 0$. Действительно, в этом случае

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S [\log |x - y| - \log |x|] \varphi(y) dS_y. \quad (6.15)$$

Производные от этой функции убывают как $|x|^{-2}$.

Основу для наших построений составляют результаты из [17], [18] и [7], [8], относящиеся к уравнению Лапласа при $n = 2$. Там показано, что в этом случае:

1) Внутренняя задача Дирихле (2.18⁺) с $k = 0$ имеет единственное решение в V^+ при любой $f \in H^0(S)$.

2) Операторы $\frac{1}{2}I + B$ и $\frac{1}{2}I + B'$ обратимы в $H^0(S)$, и оператор $\frac{1}{2}I + B$ обратим в $H^1(S)$. Отсюда получается обычная формула для решения внутренней задачи Дирихле: $u = \mathcal{B}[\frac{1}{2}I + B]^{-1}f$.

3) Оператор $\frac{1}{2}I - B'$ обратим в подпространстве $L_{2,0}(S)$ функций с нулевым средним. Кроме того, $\text{Ker}(\frac{1}{2}I - B')$ одномерно и дополнительно к $L_{2,0}(S)$. Поэтому $\frac{1}{2}I - B'$ – фредгольмов оператор в $H^0(S)$ с нулевым индексом.

4) Оператор A из $H^0(S)$ в $H^1(S)$ либо обратим, либо имеет одномерное ядро, совпадающее с $\text{Ker}(\frac{1}{2}I - B')$. В последнем случае постоянные не входят в область значений оператора A . Но для любой функции $u \in W^+(0)$ мы имеем $\varphi = \partial_\nu u^+ \in L_{2,0}(S)$ и можем восстановить u по формуле $u = \mathcal{A}(-\frac{1}{2}I + B')^{-1}\varphi$ с точностью до прибавления постоянной, так что коядро оператора A тоже одномерно и он имеет нулевой индекс.

Опираясь на эти факты, можно распространить наши спектральные результаты на случай $n = 2$. Формулы (3.12) и (3.13) сохраняются при $k \neq 0$.

6.3. Разрешимость задач Дирихле и Неймана при исключительных k . В этом пункте мы приведем варианты нескольких утверждений из [32; п. 3.4] (ср. также ссылки в [32]) для случая липшицевой S . Доказательства по существу сохраняются и поэтому опущены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть k исключительно относительно задачи N^+ , и пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ – базис в $\text{Ker}[\frac{1}{2}I - B'(k)]$. Положим $u_j = \mathcal{A}(k)\varphi_j$, $\psi_j = u_j^\pm$. Тогда $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ – базис в $\text{Ker}[\frac{1}{2}I - B(k)]$ и матрица из скалярных произведений $(\psi_j, \varphi_l)_S$ ($j, l = 1, \dots, N$) невырождена.

В последней фразе можно заменить ψ_j на $\bar{\psi}_j$: $\text{Ker}(\frac{1}{2}I - B(k))$ инвариантно относительно перехода от ψ к $\bar{\psi}$ ввиду вещественности k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *При тех же k для разрешимости внутренней задачи Неймана (2.19⁺) необходимо и достаточно, чтобы $(g, v^+)_S = 0$ для всех решений v однородной задачи Неймана. Если это условие выполнено, то решение строится в виде $u = \mathcal{A}(k)\varphi$, $\varphi \in H^0(k)$.*

Решение, ортогональное в G^+ к решениям однородной задачи Неймана, единственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *При тех же k решение внешней задачи Дирихле (2.18⁻) с $f \in H^0(S)$ строится в виде*

$$u = \mathcal{B}(k)\psi - \sum \alpha_j u_j.$$

Действительно, подстановка этого выражения в граничное условие дает

$$\left[-\frac{1}{2}I + B(k)\right]\psi = \sum \alpha_j \psi_j + f,$$

и α_j определяются из условия ортогональности правой части к $\overline{\varphi}_l$. Функция ψ принадлежит H^0 , решение принадлежит $V^-(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Пусть k исключительно относительно задачи D^+ , и пусть $\{\phi_1, \dots, \phi_{N'}\}$ – базис в $\text{Ker}[\frac{1}{2}I + B(k)]$. Положим $v_j = \mathcal{B}(k)\phi_j$, $\chi_j = \partial_\nu v_j^\pm$. Тогда $\{\chi_1, \dots, \chi_{N'}\}$ – базис в $\text{Ker}[\frac{1}{2}I + B'(k)]$ и матрица из скалярных произведений $(\chi_j, \phi_l)_S$ ($j, l = 1, \dots, N'$) невырождена.*

Поясним, что $\phi_j \in H^1(S)$ (см. предложение 3.15). Далее, функции v_j принадлежат $W^\pm(k)$, так что мы вправе утверждать, что $\partial_\nu v_j^+ = \partial_\nu v_j^-$ и функции χ_j принадлежат $H^0(S)$. Функции χ_j в последней фразе формулировки предложения можно заменить на $\overline{\chi}_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. *Пусть $f \in H^1(S)$. При тех же k , что и в предложении 6.4, для разрешимости внутренней задачи Дирихле (2.18⁺) необходимо и достаточно, чтобы $(f, \partial_\nu w)_S = 0$ для всех решений w однородной внутренней задачи Дирихле. Если это условие выполнено, то решение строится в виде $u = \mathcal{B}(k)\psi$ и принадлежит $V^+(k)$ при $f \in H^0(S)$ и $W^+(k)$ при $f \in H^1(S)$.*

Решение, ортогональное в G^+ к решениям однородной задачи Дирихле, единственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. *При тех же k , что и в предложении 6.4, решение внешней задачи Неймана (2.19⁻) строится в виде*

$$u = \mathcal{A}(k)\phi - \sum \beta_j v_j.$$

Действительно, подстановка этого выражения в граничное условие приводит к уравнению

$$\left[\frac{1}{2}I + B'(k)\right]\phi = \sum \beta_j \chi_j + g,$$

и β_j определяются из условия ортогональности правой части к $\overline{\phi}_l$.

Список литературы

1. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
2. *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции // Дополнение к [1]. С. 289–416.
3. *Голубева З. Н.* Некоторые скалярные задачи дифракции и соответствующие несамосопряженные операторы // Радиотехн. и электроника. 1976. Т. 21. №2. С. 219–227.
4. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 63. Уравнения в частных производных. VI. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–129.
5. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encyclopaedia Math. Sci. V. 79. Partial Differential Equations. IX. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 1–144.
6. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
7. *Verchota G.* Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation on Lipschitz domains. // Диссертация: Univ. of Minnesota, 1982.
8. *Verchota G.* Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1984. V. 59. P. 572–611.
9. *Агранович М. С., Амосов Б. А.* Оценки s -чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладкой поверхности // Функц. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. №2. С. 1–18.
10. *Torres R. H., Welland G. V.* The Helmholtz equation and transmission problems with Lipschitz interfaces // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. №4. P. 1457–1485.
11. *Mitrea M.* Boundary value problems and Hardy spaces associated to the Helmholtz equation in Lipschitz domains // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 202. P. 819–842.
12. *Brown R.* The method of layer potentials for the heat equation in Lipschitz cylinders // Amer. J. Math. 1989. V. 111. P. 339–379.
13. *Brown R., Shen Z.* The initial-Dirichlet problem for a fourth-order parabolic equation in Lipschitz cylinders // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39. P. 1313–1353.
14. *Calderón A. P.* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1977. V. 74. P. 1324–1327.
15. *Coifman R., McIntosh A., Meyer Y.* L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes // Ann. of Math. 1982. V. 116. P. 361–387.
16. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19. P. 613–626.
17. *Dahlberg B.* Estimates of harmonic measure // Arch. Rational Mech. Anal. 1977. V. 65. P. 272–288.
18. *Dahlberg B.* On the Poisson integral for Lipschitz and C^1 domains // Studia Math. 1979. V. 66. P. 13–24.
19. *Dahlberg B.* Weighted norm inequalities for the Lusin area integral and the nontangential maximal functions for functions harmonic in a Lipschitz domain // Studia Math. 1980. V. 67. P. 297–314.
20. *Dahlberg B., Verchota G.* Galerkin methods for the boundary integral equations of elliptic equations in nonsmooth domains // Contemp. Math. 1990. V. 107. P. 39–60.
21. *Ding Z.* A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. №2. P. 591–600.
22. *Fabes E., Jodeit M., Jr., Lewis J.* Double layer potentials for domains with corners and edges // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. P. 95–114.
23. *Fabes E., Jodeit M., Jr., Rivière N.* Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains // Acta Math. 1978. V. 141. P. 165–186.
24. *Jerison D., Kenig C.* An identity with applications to harmonic measure // Bull. Amer. Math. Soc. 1980. V. 2. P. 447–451.

25. *Jerison D., Kenig C.* The Neumann problem on Lipschitz domains // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4. P. 203–207.
26. *Jerison D., Kenig C.* The Dirichlet problem in non-smooth domains // Ann. of Math. (2). 1981. V. 113. P. 397–382.
27. *Jerison D., Kenig C.* Boundary value problems on Lipschitz domains // MAA Stud. Math. 1982. V. 23. P. 1–68.
28. *Jerison D., Kenig C.* The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1995. V. 113. P. 161–219.
29. *Kenig C.* Recent progress on boundary value problems on Lipschitz domains // Proc. Sympos. Pure Math. 1985. V. 43. P. 175–205.
30. *Kenig C.* Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains // Beijing lectures in harmonic analysis. Ann. of Math. Stud. V. 112. Princeton: Princeton Univ. Press, 1986. P. 131–183.
31. *Agranovich M. S., Amosov B. A., Levitin M.* Spectral problems for the Lamé system in smooth and nonsmooth domains with spectral parameter in boundary conditions // Preprint, 1998.
32. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
33. *Векуа И. Н.* О метагармонических функциях // Труды Тбилисского матем. ин-та. 1943. №12. С. 105–174.
34. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
35. *Grisvard P.* Boundary value problems in nonsmooth domains. London: Pittman, 1985.
36. *Mitrea A., Torres R.H., Welland G. V.* Regularity and approximation results for the Maxwell problem on C^1 and Lipschitz domains // Clifford Algebras in Analysis and Related Topics / ed. J. Ryan. Boca Raton: CRS Press, 1996. P. 297–308.
37. *Нечас И.* Об областях типа $\mathcal{N}$ // Чехосл. матем. журн. 1962. Т. 12 (87). С. 274–287.
38. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
39. *Бирман М. С., Соломяк М. З.* О главном члене в спектральной асимптотике для негладких эллиптических задач // Функц. анализ и его прилож. 1970. Т. 4. №4. С. 1–11.
40. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
41. *Лидский В. Б.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 3–35.
42. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
43. *Абрамовиц М., Стиган И. М. (ред.)* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
44. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

Московский государственный институт
электроники и математики;
Регенсбургский университет, Регенсбург, Германия
E-mail: msa.funcan@relcom.ru
Reinhard.Mennicken@mathematik.uni-regensburg.de

Поступила в редакцию
19.01.1998