Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Малютин, Н. Садык, Представление субгармонических функций в полуплоскости, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 12, 47–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:06:47

УДК 517.574

К. Г. Малютин, Н. Садык

Представление субгармонических функций в полуплоскости

Теория субгармонических функций конечного порядка в значительной мере опирается на интегральные формулы. В настоящей статье получены представления для субгармонических функций в верхней полуплоскости более общего роста $\gamma(r)$, чем конечный порядок. Основной результат работы можно сформулировать следующим образом. Пусть функция роста $\gamma(r)$ такова, что либо функция $\ln \gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$, либо нижний порядок функции $\gamma(r)$ равен бесконечности. Тогда для любой истинно субгармонической функции v роста $\gamma(r)$ существуют неограниченное множество $\mathbf{R}$ положительных чисел и семейство $\{u_R : R \in \mathbf{R}\}$ функций, истинно субгармонических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, такие, что

- 1) полные меры функций u_R в круге $|z| \leq R$ совпадают с полной мерой функции v ;
- 2) $v - u_R \Rightarrow 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$, когда $R \rightarrow \infty$, $R \in \mathbf{R}$;
- 3) семейство функций $\{u_R : R \in \mathbf{R}\}$ равномерно по R удовлетворяет ограничениям на рост, т.е. $T(r, u_R) \leq A\gamma(Br)/r$, где A и B – константы, а $T(r, \cdot)$ – характеристика роста.

Библиография: 16 названий.

Введение

В теории субгармонических функций многие важные результаты получают с помощью различных представлений этих функций. Наиболее известная из них – формула Пуассона–Йенсена, на которую опирается значительная часть теории субгармонических функций. Сюда же относятся формулы Неванлинны, Симидзу–Альфorsa, Карлемана, Левина, которые приведены в [1]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным (см. [2]), в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Из представления Гришина ясно видно, что субгармоническая функция конечного порядка в верхней полуплоскости определяется своей полной мерой с точностью до гармонического полинома, обращающегося в нуль на вещественной оси, аналогично тому, как целая функция конечного порядка определяется своими корнями с точностью до функции вида $\exp\{P(z)\}$, где $P(z)$ – полином. Аналогичные формулы при различных ограничениях получали другие авторы (см. [3]–[5]).

Целью настоящей статьи является получение аналога таких формул для субгармонических функций в полуплоскости более общего роста $\gamma(r)$, чем конечный порядок. Методом, которым доказываются эти формулы, является метод

Работа второго автора выполнена при поддержке научно-исследовательского фонда Стамбульского университета (грант № UDP-766/28032007).

рядов Фурье суб- и дельта-субгармонических функций. Этот метод, основанный на использовании ряда Фурье для $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ , систематически стал применяться для изучения асимптотических свойств целых и мероморфных функций в работах Л. Рубела и Б. Тейлора [6], [7]. Затем к ним присоединились Д. Майлз, Д. Шиа и др. Следует заметить, что еще в 1927 г. Н. И. Ахиезер применил соотношения между коэффициентами Фурье и нулями целой функции для доказательства теоремы Линделёфа о типе целой функции. Позже ими пользовались М. Картрайт и А. Пфлюгер. Но это были изолированные работы без особых приложений. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратьюком (см. [8]–[10]), обобщившим теорию Левина–Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ -типа. В начале века метод рядов Фурье одним из авторов этой статьи был перенесен на функции в полуплоскости (см. [11]).

В теории целых функций важную роль играют их канонические произведения. Для целых функций конечного порядка таким представлением является представление Адамара. Для целых функций произвольного γ -типа аналог этого факта был установлен Л. Рубелом (см. [12]). В настоящей работе понятие обобщенного канонического произведения Вейерштрасса из статей [7], [12] переносится на функции, субгармонические в полуплоскости. Основной результат можно сформулировать следующим образом. Пусть функция роста $\gamma(r)$ такова, что либо функция $\ln \gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$, либо нижний порядок функции $\gamma(r)$ равен бесконечности. Тогда для любой истинно субгармонической функции v роста $\gamma(r)$ существуют неограниченное множество $\mathbf{R}$ положительных чисел и семейство $\{u_R : R \in \mathbf{R}\}$ функций, истинно субгармонических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, положительные постоянные A и B такие, что

- 1) полные меры функций u_R в круге $C(0, R)$ совпадают с полной мерой функции v ;
- 2) $v - u_R \Rightarrow 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$ когда $R \rightarrow \infty$, $R \in \mathbf{R}$;
- 3) $T(r, u_R) \leq A\gamma(Br)/r$, где A и B – постоянные, не зависящие от R .

Вышеупомянутое представление Гришина получается как частный случай при $\gamma(r) = r^\rho$, где $\rho > 0$ – фиксированное число. Заметим, что по духу, а отчасти и по доказательствам наша работа близка к [7], [12]. Мы будем также пользоваться терминологией из этих работ и работ [2], [11].

§ 1. Классы функций в верхней полуплоскости

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z . Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a ; через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ означает замыкание множества G . Если $0 < r_1 < r_2$, то

$$D_+(r_1, r_2) = \overline{C_+(0, r_2)} \setminus C_+(0, r_1)$$

означает замкнутое полукольцо.

Пусть SK – класс субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в $\mathbb{C}_+$. Функции $v(z)$ класса SK обладают следующими свойствами (см. [2]):

- а) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in L^1_{\text{loc}}(-\infty, \infty)$;
 б) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(t + iy) dt = \nu([a, b]) - \frac{1}{2} \nu(\{a\}) - \frac{1}{2} \nu(\{b\})$$

(мера ν называется *граничной мерой функции* v);

- с) $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$ определим, следуя [2], полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{\mathbb{C}_+ \cap K} \text{Im } \zeta d\mu(\zeta) - \nu(K),$$

где μ – риссовская мера функции v . Мера λ обладает следующими свойствами:

- 1) λ – конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$,
- 2) λ – положительная мера вне $\mathbb{R}$,
- 3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \text{Im } z < 0\}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1)–3), то существует функция $v \in SK$ с полной мерой, равной λ . Совокупность условий 1)–3) обозначим через $\{G\}$, если кроме того мера λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$, то через $\{G^+\}$.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется *истинно субгармонической*, если $\limsup_{z \rightarrow t} v(z) \leq 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS . Полная мера функции $v \in JS$ является положительной мерой, чем и обоснован термин “истинно субгармоническая функция”. Отметим также, что множество JS является конусом, т.е. если $v_1, v_2 \in JS$, $\alpha \geq 0$, то $v_1 + v_2 \in JS$, $\alpha v_1 \in JS$.

Класс истинно дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$. Заметим, что $J\delta$ есть наиболее широкий класс δ -субгармонических функций в полуплоскости, для которых можно определить неванлинновскую характеристику.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [2]). *Справедливо следующее: $JS \subset SK$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (см. [2]). *Справедливо следующее: $J\delta = SK - SK$.*

Из утверждения 2 следует, что $SK \subset J\delta$. Тем самым мы можем в дальнейшем при рассмотрении субгармонических функций ограничиться классом JS , так как функция класса SK представляется в виде разности двух истинно субгармонических функций.

Для функций $v \in J\delta$ справедливо представление в полукруге $z \in C_+(0, R)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, R)} \frac{G(z, \zeta)}{\text{Im } \zeta} d\lambda(\zeta) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad (1)$$

где $G(z, \zeta)$ – функция Грина полукруга, $\partial G / \partial n$ означает производную по внутренней нормали, ядро под знаком двойного интеграла продолжается на вещественную ось по непрерывности при $|t| \leq R$.

Отметим еще разложение в ряд Фурье (см. [3]):

$$\frac{\partial G(re^{i\theta}, Re^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{4}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{R^m} \sin m\theta \sin m\varphi. \quad (2)$$

В дальнейшем через $A, B, \dots$ мы будем обозначать постоянные, причем различные постоянные могут обозначаться одной буквой.

Для заданной меры λ введем обозначение $\lambda(t) = \lambda(\overline{C(0, t)})$. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – полная мера функции v , $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданово разложение меры λ . Введем следующие характеристики функции v :

$$m(r, v) := \frac{1}{r} \int_0^\pi v_+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi, \quad N(r, v, r_0) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt, \\ T(r, v, r_0) := m(r, v) + N(r, v, r_0) + m(r_0, -v), \quad r > r_0,$$

где r_0 – произвольное, как правило фиксированное, положительное число (при желании можно считать $r_0 = 1$), которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) мы будем опускать (например, вместо $T(r, v, r_0)$ писать $T(r, v)$ и т.д.).

Строго положительная непрерывная возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, называется *функцией роста*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция роста γ удовлетворяет условию

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{r} > 0. \quad (3)$$

Условие (3) выполняется для функции $\gamma(r) = r^\rho$ при $\rho \geq 1$. Однако оно не выполняется для r^ρ при $0 < \rho < 1$. Если (3) не выполняется, то считаем $N(r, v) := N(r, v, r/2)$, $T(r, v) := T(r, v, r/2)$ и все дальнейшие утверждения при этом имеют место.

Функция $v \in J\delta$ называется *функцией конечного γ -типа*, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$T(r, v) \leq \frac{A\gamma(Br)}{r}$$

для всех $r > r_0$.

Класс данных δ -субгармонических функций конечного γ -типа обозначим через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим класс истинно субгармонических функций конечного γ -типа.

Говорят (см. [11]), что положительная мера λ имеет конечную γ -плотность, если при некоторых положительных A и B выполняется неравенство

$$N(r, \lambda) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \leq \frac{A\gamma(Br)}{r} \quad (4)$$

для всех $r > r_0$ (если условие (3) не выполняется, то полагаем $r_0 = r/2$). Из (4) следует (см. [11; лемма 2]), что

$$\lambda(r) \leq rA\gamma(Br), \quad r \geq r_0, \quad (5)$$

т.е. λ является мерой конечного γ -типа.

§ 2. Коэффициенты Фурье дельта-субгармонических функций

Коэффициенты Фурье функции $v \in J\delta$ определяются формулой (см. [13]):

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть λ – полная мера функции $v \in J\delta$,

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} \tau^{k-1} d\lambda(\tau e^{i\varphi})$$

(функция $\sin k\varphi / \sin \varphi$ при $\varphi = 0, \pi$ определяется по непрерывности). Положим $\lambda_k(r) = \lambda_k(\overline{C}(0, r))$, тогда (см. [11])

$$c_k(r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0, v)$, а также

$$\begin{aligned} c_k(r, v) = & \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C}_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) \\ & - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{\overline{C}_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$.

Отметим еще неравенство (см. [11]), которое будет полезно в дальнейшем:

$$|\lambda_k(r)| \leq k r^{k-1} |\lambda|(r). \quad (8)$$

Заметим также (см. [11]), что если $v \in J\delta(\gamma(r))$, то

$$|c_k(r, v)| \leq A \gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

при некоторых $A, B > 0$ и всех $r > 0$, а мера $|\lambda|$ имеет конечную γ -плотность.

Пусть λ – мера, удовлетворяющая условиям $\{G^+\}$, γ – некоторая функция роста. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{\overline{C}_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta),$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, $r_0 > 0$ – фиксированное число,

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) = S_+(r_2; k, \lambda) - S_+(r_1; k, \lambda), \quad r_1 \leq r_2,$$

$$S'_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k r^k} \iint_{\overline{C}_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta),$$

при этом символ λ , если это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Мера λ называется γ -сбалансированной, если существуют положительные постоянные A, B , при которых

$$|S_+(r_1, r_2; k, \lambda)| \leq \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^k} \quad (10)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$ и $k = 2, 3, \dots$.

Мера λ называется γ -допустимой, если она γ -сбалансирована и имеет конечную γ -плотность.

Мера λ называется γ -взвешенной, если существуют последовательность вещественных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}$ и положительные постоянные A, B , при которых для всех $r > 0, k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)| \leq \frac{A\gamma(Br)}{r^k}. \quad (11)$$

Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ – некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r; \lambda, \alpha) = r^k (\alpha_k + S_+(r; k)) - S'_+(r; k), \quad k \in \mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье пары* (λ, α) .

Пара (λ, α) называется γ -допустимой, если мера λ имеет конечную γ -плотность и существуют положительные постоянные A, B , при которых

$$|c_k(r; \lambda, \alpha)| \leq A\gamma(Br), \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

§ 3. Остатки

Пусть λ – мера, $R > 0$ – фиксированное число. R -остатком меры λ называется мера λ_R такая, что λ_R равна нулю в круге $C(0, R)$ и $\lambda_R(\Omega) = \lambda(\Omega \setminus C(0, R))$.

Пусть $\mathbf{R}$ – непустое множество положительных чисел. Будем называть множество $\mathbf{R}$ *полным*, если оно не ограничено. Семейство остатков $\{\lambda_R : R \in \mathbf{R}\}$ называется *полным*, если множество $\mathbf{R}$ полное.

Пусть γ – функция роста, а мера λ удовлетворяет условиям $\{G^+\}$. Семейство остатков $\{\lambda_R\}$ называется *равномерно γ -сбалансированным*, если неравенство (10) выполняется для всех λ_R из этого семейства при одних и тех же постоянных A и B .

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины

$$\beta[\gamma] = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r}, \quad \alpha[\gamma] = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(r)}{\ln r}.$$

Порядком и нижним порядком функции $v \in J\delta$ называются соответственно величины $\beta[rT(r, v)]$ и $\alpha[rT(r, v)]$.

В некоторых случаях структура полного множества чисел зависит от заданной функции роста. В следующей лемме, которая будет использоваться ниже, мы приводим частный случай такой взаимосвязи.

ЛЕММА 1. Пусть нижний порядок функции роста γ равен бесконечности и $B > 0$ – фиксированное число. Обозначим

$$R_\sigma = \max \left\{ R : \frac{\gamma(BR)}{R^\sigma} = \inf_{r > 0} \frac{\gamma(Br)}{r^\sigma} \right\}, \quad \sigma > 0.$$

Тогда множество $\mathbf{R} = \{R_\sigma : \sigma > 0\}$ полное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы заимствовано из доказательства теоремы 5.1 в [14], однако для полноты изложения мы приводим его. Не ограничивая общности, будем считать, что $\gamma(0) > 0$. Так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(Br)}{r^\sigma} = \infty$$

для каждого $\sigma > 0$ и функция γ непрерывна, то числа R_σ определены и $R_\sigma > 0$.

При $\sigma' > \sigma$ и $R \leq R_\sigma$ имеем

$$\frac{\gamma(BR)}{R^{\sigma'}} = \frac{\gamma(BR)}{R^\sigma} \frac{1}{R^{\sigma'-\sigma}} \geq \frac{\gamma(BR_\sigma)}{R_\sigma^\sigma} \frac{1}{R_\sigma^{\sigma'-\sigma}} = \frac{\gamma(BR_\sigma)}{R_\sigma^{\sigma'}}.$$

Откуда получаем, что R_σ – неубывающая функция от σ . Далее из определения R_σ следует, что

$$\frac{\gamma(2BR_\sigma)}{(2R_\sigma)^\sigma} \geq \frac{\gamma(BR_\sigma)}{R_\sigma^\sigma}.$$

Откуда $\gamma(2BR_\sigma) \geq \gamma(BR_\sigma)2^\sigma$. Поэтому R_σ – неограниченная функция от σ и множество чисел $\{R_\sigma : \sigma > 0\}$ является, таким образом, полным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет одному из условий:

- 1) функция $\ln \gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$;
- 2) $\alpha[\gamma] = \infty$.

Тогда каждая γ -сбалансированная мера λ имеет полное семейство равномерно γ -сбалансированных остатков, причем в случае 1) можно взять $\{\lambda_R\} = \{\lambda_R : R \geq R_0 > 0\}$, где R_0 – фиксированное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1 из [14].

Случай 1. Пусть выполнено условие 1), а мера λ является γ -сбалансированной, т.е. удовлетворяет неравенству (10). По [14; лемма 5.1] существует число $R_0 > 0$ такое, что для каждого $R \geq R_0$ найдется $\sigma = \sigma(R) > 0$ такое, что

$$\frac{\gamma(BR)}{R^\sigma} = \inf \left\{ \frac{\gamma(Br)}{r^\sigma} : r > 0 \right\}. \quad (12)$$

Покажем, что неравенство (10) выполняется для всех λ_R при $R \geq R_0$. Если $r_1 \leq r_2 \leq R$, то $S_+(r_1, r_2; k, \lambda_R) = 0$, а если $R \leq r_1 \leq r_2$, то $S_+(r_1, r_2; k, \lambda_R) = S_+(r_1, r_2; k, \lambda)$ и (10) очевидно.

Если же $r_1 \leq R \leq r_2$, то $S_+(r_1, r_2; k, \lambda_R) = S_+(R, r_2; k, \lambda)$. По условию теоремы

$$|S_+(R, r_2; k, \lambda)| \leq \frac{A\gamma(BR)}{R^k} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^k}.$$

Если $k \geq \sigma = \sigma(R)$, то

$$\frac{\gamma(BR)}{R^k} = \frac{\gamma(BR)}{R^\sigma} \frac{1}{R^{k-\sigma}} \leq \frac{\gamma(Br_1)}{r_1^\sigma} \frac{1}{r_1^{k-\sigma}} = \frac{\gamma(Br_1)}{r_1^k}.$$

Если же $k < \sigma$, то

$$\frac{\gamma(BR)}{R^k} = \frac{\gamma(BR)}{R^\sigma} R^{\sigma-k} \leq \frac{\gamma(Br_2)}{r_2^\sigma} r_2^{\sigma-k} = \frac{\gamma(Br_2)}{r_2^k}.$$

Неравенство (10) доказано. Если взять в качестве полного семейства остатков $\{\lambda_R : R \geq R_0\}$, то теорема 1 в случае 1) доказана.

Случай 2. Пусть $\alpha[\gamma] = \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma(0) > 0$. Пусть B – константа из (10). Пусть полное множество $\mathbf{R}$ чисел построено, как и в лемме 1, по константе B . Тогда семейство остатков $\{\lambda_{R_\sigma} : \sigma > 0\}$ является полным.

Точно так же, как и в случае 1), доказывается, что оно равномерно γ -сбалансированно.

§ 4. Обобщенные представления субгармонических функций

ЛЕММА 2. Пусть λ – γ -допустимая мера, функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет одному из условий 1) или 2) теоремы 1. Тогда существуют полное равномерно γ -сбалансированное семейство остатков $\{\lambda_R : R \in \mathbf{R}\}$ меры λ , а также семейство $\{\alpha(R)\}$, $\alpha(R) = \{\alpha_k(R)\}_{k=1}^\infty$, последовательностей вещественных чисел такие, что

$$|c_k(r; \lambda_R, \alpha(R))| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

для всех $r > 0$ при некоторых положительных A и B . Кроме того

$$\lim_{R \ni R \rightarrow \infty} c_k(r; \lambda_R, \alpha(R)) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

для всех $r > 0$. Если функция $\ln \gamma(r)$ выпукла относительно $\ln r$, то можно взять $\mathbf{R} = \{R : R \geq R_0\}$ при некотором $R_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{R}$ и λ_R построены так же, как и при доказательстве теоремы 1 и леммы 1. Тогда при некоторых положительных A и B выполняются условия (4) и (10) для всех мер λ_R и меры λ .

Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{r^p} > 0,$$

и

$$p[\gamma] = \min \left\{ p : p \in \mathbb{N}, \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{r^p} = 0 \right\}$$

в противном случае.

Для $R \in \mathbf{R}$ построим последовательность $\alpha(R) = \{\alpha_k(R)\}_{k=1}^\infty$ следующим образом. Заметим, что для $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq k < p[\gamma]$

$$\inf \left\{ \frac{\gamma(Br)}{r^k} : r > 0 \right\} > 0.$$

Поэтому для таких k найдется число $r_k > 0$ такое, что неравенство

$$\frac{\gamma(Br_k)}{r_k^k} < 2 \frac{\gamma(Br)}{r^k}$$

выполняется для всех $r > 0$. Для этих k положим

$$\alpha_k = -S_+(r_k; k, \lambda_R). \quad (15)$$

Если $p[\gamma] < \infty$, то существует последовательность $\{r_j\}_{j=1}^\infty$, $r_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma(Br_j)}{r_j^{p[\gamma]}} = 0. \quad (16)$$

По предположению выполняется неравенство

$$|S_+(r_m, r_j; k, \lambda_R)| \leq \frac{A\gamma(Br_m)}{r_m^k} + \frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k},$$

и из (16) следует фундаментальность последовательности $\{S_+(r_j; k, \lambda_R)\}_{j=1}^\infty$ для $k \geq p[\gamma]$. Для таких k положим

$$\alpha_k = - \lim_{j \rightarrow \infty} S_+(r_j; k, \lambda_R). \quad (17)$$

Таким образом, если $1 \leq k < p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r; k, \lambda_R)| = |S_+(r_k, r; k, \lambda_R)| \leq \frac{A\gamma(Br_k)}{r_k^k} + \frac{A\gamma(Br)}{r^k} \leq 3 \frac{A\gamma(Br)}{r^k}.$$

Если же $k \geq p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r; k, \lambda_R)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |S_+(r, r_j; k, \lambda_R)| \leq \frac{A\gamma(Br_k)}{r_k^k} + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k} = \frac{A\gamma(Br)}{r^k}.$$

Итак, получаем

$$|c_k(r; \lambda_R, \alpha(R))| \leq A\gamma(Br) + |S'_+(r; k, \lambda_R)|. \quad (18)$$

По условиям леммы мера λ является γ -допустимой и, в частности, является мерой конечного γ -типа, т.е. удовлетворяет неравенству (5). Тогда из (18) и из неравенства

$$|S'_+(r; k, \lambda_R)| \leq \frac{1}{\pi k r^k} \iint_{C_+(0, r)} \left| \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k \right| d\lambda(\zeta) \leq \frac{\lambda(r)}{\pi r}$$

получаем (13).

Чтобы получить неравенство (14), достаточно показать, что $\alpha_k(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, $R \in \mathbf{R}$, поскольку очевидно, что

$$\lim_{\mathbf{R} \ni R \rightarrow \infty} S'_+(r; k, \lambda_R) = \lim_{\mathbf{R} \ni R \rightarrow \infty} S_+(r; k, \lambda_R) = 0.$$

Из равенств (15) и (17), определяющих $\alpha_k(R)$, ясно, что $\alpha_k(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, $R \in \mathbf{R}$, когда $1 \leq k < p[\gamma]$. Если выполнено условие 2) теоремы, то $p[\gamma] = \alpha[\gamma] = \infty$.

Если же $p[\gamma] \leq k < \infty$, то из (13) следует, что для всех $r < R$ выполняется

$$|\alpha_k(R) r^k| \leq A\gamma(Br)$$

и, следовательно,

$$|\alpha_k(R)| \leq \frac{A\gamma(BR)}{R^k}.$$

Согласно построению семейства $\mathbf{R}$ при доказательстве теоремы 1 и леммы 1 для $k \geq p[\gamma]$ имеет место соотношение

$$\lim_{\mathbf{R} \ni R \rightarrow \infty} \frac{A\gamma(BR)}{R^k} = 0. \quad (19)$$

Действительно, если выполнено условие 1) теоремы 1, то из (12) и (16) следует, что $\sigma(R) = \sigma < p[\gamma]$ для всех $R > R_0$. По заданному $\varepsilon > 0$ выберем j в (16) так, чтобы $\gamma(Br_j) r_j^{-p[\gamma]} < \varepsilon$. Тогда при $R > r_j$ и $k \geq p[\gamma]$ имеем

$$\frac{\gamma(BR)}{R^k} = \frac{\gamma(BR)}{R^\sigma} \frac{1}{R^{k-\sigma}} \leq \frac{\gamma(Br_j)}{r_j^\sigma} \frac{1}{r_j^{k-\sigma}} = \frac{\gamma(Br_j)}{r_j^k} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim_{\mathbf{R} \ni R \rightarrow \infty} \alpha_k(R) = 0$, что и требовалось доказать.

Последнее утверждение леммы вытекает непосредственно из теоремы 1.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathbf{R}$ – неограниченное множество положительных чисел, а $\{v_R : R \in \mathbf{R}\}$ – семейство функций класса $J\delta$, полная мера которых в круге $C(0, R)$ равна нулю и

$$|c_k(r; v_R)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}, \quad R \in \mathbf{R},$$

для всех $r > 0$ при некоторых положительных A и B , а также

$$\lim_{R \ni R \rightarrow \infty} c_k(r; v_R) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 0.$$

Тогда

$$\lim_{R \ni R \rightarrow \infty} v_R = 0$$

равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем для фиксированного компакта $K \subset \mathbb{C}_+$ число R_0 так, чтобы для всех $z \in K$ выполнялось неравенство $|z| \leq R_0/2$. Из формулы (1) для $z \in K$ и $R > R_0$ получаем

$$v_R(z) = \frac{R_0}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_0 e^{i\varphi})}{\partial n} v_R(R_0 e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Используя формулу (2), имеем

$$v_R(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_0} \right)^k c_k(R_0, v_R) \sin k\theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Откуда

$$|v_R(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |c_k(R_0, v_R)| \leq A\gamma(BR_0) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{k_0} |c_k(R_0, v_R)|.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем номер k_0 так, чтобы первая сумма была меньше $\varepsilon/2$, а затем число R_1 так, чтобы при $R > R_1$, $R \in \mathbf{R}$, вторая сумма была меньше $\varepsilon/2$. Тогда для всех $z \in K$, $R > R_1$, $R \in \mathbf{R}$, имеем $|v_R(z)| < \varepsilon$. Откуда и следует доказываемое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет одному из условий 1) или 2) теоремы 1. Тогда для любой функции $v \in JS(\gamma(r))$ существуют неограниченное множество $\mathbf{R}$ положительных чисел и семейство $\{u_R : R \in \mathbf{R}\}$ функций, истинно субгармонических в $\mathbb{C}_+$, положительные постоянные A и B такие, что

- 1) полные меры функций u_R в круге $C(0, R)$ совпадают с полной мерой функции v ;
- 2) $v - u_R \Rightarrow 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$, когда $R \rightarrow \infty$, $R \in \mathbf{R}$;
- 3)

$$T(r, F) \leq \frac{A\gamma(Br)}{r} \quad (20)$$

для всех $r > 0$, где F – любая из функций v , u_R или $v - u_R$.

Если $\gamma(r)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1, то можно взять $\mathbf{R} = \{R : R \geq R_0\}$ при некотором $R_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = \lambda(v)$ – полная мера функции v , а $\mathbf{R}$, $\alpha(R) = \{\alpha_k(R)\}_{k=1}^\infty$, $c_k(r; \lambda_R, \alpha(R))$ такие же, как в лемме 2. По [11; теорема 5] существует семейство субгармонических в $\mathbb{C}_+$ функций $\{v_R\}$, $R \in \mathbf{R}$, таких, что $c_k(r, v_R) = c_k(r; \lambda_R, \alpha(R))$ для всех $r > 0$, причем $\lambda(v_R) = \lambda_R$. По [11; теорема 2] $v_R \in JS(\gamma(r))$.

По лемме 2

$$\lim_{\mathbf{R} \ni R \rightarrow \infty} v_R(z) = 0$$

равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$. Положим $u_R = v - v_R$. Ясно, что условие 1) теоремы 2 справедливо и $v - u_R = v_R \Rightarrow 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}_+$ при $R \rightarrow \infty$, $R \in \mathbf{R}$, т.е. выполняется 2). Далее, так как $v \in JS(\gamma(r))$, то, используя [11; теорема 2] и лемму 2, получаем

$$|c_k(r, u_R)| = |c_k(r, v) - c_k(r, v_R)| \leq A\gamma(Br)$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$ и $R \in \mathbf{R}$ при некоторых A и $B > 0$. Отсюда и из [11; теорема 2] следует (20).

Последнее утверждение теоремы следует непосредственно из леммы 2. Теорема доказана.

Пусть $v \in JS(\gamma(r))$. Семейство функций $\{u_R : R \in \mathbf{R}\}$, фигурирующее в теореме 2, называется *обобщенным представлением функции* v .

§ 5. Функции конечного порядка

Представление субгармонических функций конечного порядка в полуплоскости получается здесь не самым простым и кратким путем по сравнению с известными [2], [3]. Однако оно указывает на то, что понятие обобщенного представления является обобщением классических понятий, в частности представления аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции конечного порядка в виде произведения канонических множителей и интеграла по вещественной оси (см. [3; теорема 3.2]).

Предварительно докажем одну лемму. Напомним (см. [15]), что целая функция $f(z)$ называется *вещественной*, если $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

ЛЕММА 4. Если $v \in Jd$ и $\lambda(v) \equiv 0$, то $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, где $f(z)$ – целая вещественная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как полная мера функции v равна нулю, то из (1) следует, что при любом $R > 0$

$$v(z) = \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi}) d\varphi, \quad z \in C_+(0, R).$$

В правой части стоит гармоническая в полукруге $C_+(0, R)$ функция, непрерывно продолжающаяся нулем на интервал $(-R, R)$. Поскольку R – произвольное положительное число, то функция $v(z)$ является гармонической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, непрерывно продолжающейся нулем на вещественную ось. По принципу симметрии эта функция продолжается как гармоническая в нижнюю полуплоскость. Таким образом, существует гармоническая во всей плоскости функция $h(z)$, обращающаяся в нуль на вещественной оси и такая, что $v(z) = h(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $-h_1(z)$ – функция, гармонически сопряженная

с функцией $h(z)$. Тогда $g(z) = h_1(z) + ih(z)$ есть целая функция, вещественная на вещественной оси, и $h(z) = \operatorname{Im} g(z)$.

Лемма доказана.

Пусть $\rho(r)$, $\rho \geq 0$, – уточненный порядок (см. [15]), $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0$. Если $v \in J\delta(r^{\rho(r)})$, то из (4) при $\gamma(r) = r^{\rho(r)}$, (8) и свойств уточненного порядка следует сходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt < \infty \quad (21)$$

для всех $k > [\rho]$. Из (6) следует тогда, что для всех $k > [\rho]$ справедливо равенство

$$c_k(r, v) = \left(\alpha_k + \frac{2}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt \right) r^k - \frac{2r^k}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt. \quad (22)$$

Если разделить равенство (22) на r^k и перейти к пределу при $r \rightarrow \infty$, то из (21) и (9) будет следовать

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{c_k(r, v)}{r^k} + \frac{2}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt \right] = 0,$$

а значит,

$$\alpha_k = -\frac{2}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k > [\rho].$$

Подставляя это значение α_k в (22), получаем

$$c_k(r, v) = -\frac{2r^k}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k > [\rho]. \quad (23)$$

Следующая теорема получена Гришиным.

ТЕОРЕМА 3 (см. [16]). Пусть $v(z)$ – истинно субгармоническая функция конечного порядка $\beta > 0$, $p = [\beta]$. Пусть λ – полная мера функции $v(z)$, λ_1 – ограничение меры λ на круг $B(0, 1)$, $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. Тогда существуют вещественные числа $\{d_k\}_{k=1}^p$ такие, что справедливо равенство

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint K_p(z, \zeta) d\lambda_2(\zeta) + \sum_{k=1}^p d_k \operatorname{Im} z^k, \quad (24)$$

если $\beta \geq 1$, а при $\beta < 1$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + d_1 \operatorname{Im} z, \quad d_1 \leq 0, \quad (25)$$

где

$$K_p(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \operatorname{Re} \left[\ln \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} + \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar{\zeta}^k} \right) \right], \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|.$$

Здесь и ниже мы рассматриваем однозначную ветвь функции $\ln z$ в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\gamma(r) = r^\rho$, где $\rho > \beta$ и $[\rho] = p$. Тогда $v \in JS(r^\rho)$. Положим

$$v_1(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda_1(\zeta).$$

Функция $v_1(z)$ истинно субгармоническая в верхней полуплоскости с полной мерой λ_1 , причем $\lim_{z \rightarrow \infty} v_1(z) = 0$. Тогда функция $v^*(z) = v(z) - v_1(z)$ также принадлежит классу $JS(r^\rho)$ и имеет полную меру $\lambda_2(v^*) = \lambda - \lambda_1$.

Поскольку функция $\ln \gamma(r) = \rho \ln r$ выпуклая относительно $\ln r$, то к функции $v^*(z)$ мы можем применить теорему 2. Пусть λ_{2R} – сужение меры λ_2 на круг $C(0, R)$. Возьмем множество $\mathbf{R} = \{R : R > 2\}$. Функцию $u_R(z)$ запишем в виде

$$u_R(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda_{2R}(\zeta) + h_R(z) = u_{1R}(z) + h_R(z), \quad (26)$$

где $h_R(z) = \operatorname{Im} f_R(z)$, $f_R(z)$ – целая вещественная функция, что возможно благодаря свойству 1) теоремы 2 и лемме 3. Понятно, что $\lim_{z \rightarrow \infty} u_{1R}(z) = 0$ для каждого $R \in \mathbf{R}$. Тогда из утверждения 3) теоремы 2 следует, что $f_R(z)$ представляет собой полином степени не выше чем p . Обозначим

$$h_R(z) = \sum_{k=1}^p d_k(R) \operatorname{Im} z^k.$$

Из (23) имеем

$$c_k(r, u_R) = -\frac{2r^k}{\pi} \int_r^R \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k > p.$$

Поскольку при $|z| < |\zeta|$

$$\ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| = \operatorname{Re} \ln \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} = -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{\zeta^k} - \frac{1}{\bar{\zeta}^k} \right) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k\tau^k} \sin k\theta \sin k\varphi, \quad (27)$$

где $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, то из (26) получаем

$$\alpha_k(u_R) = d_k(R) - \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(1, R)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta).$$

Подставляя это значение $\alpha_k(u_R)$ в (7), имеем при $r < 1$ и $1 \leq k \leq p$

$$\begin{aligned} c_k(r, u_R) = & \left\{ d_k(R) - \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(1, R)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) \right\} r^k + \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(1, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) \\ & - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{D_+(1, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta). \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $u_R(z)$ равномерно на компактах стремится к $v^*(z)$ при $R \rightarrow \infty$, то, поскольку в равенстве (28) при $r < 1$ два последних слагаемых отсутствуют, мы должны иметь

$$d_k(R) - \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(1, R)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) \longrightarrow \alpha_k(v^*) = d_k, \quad 1 \leq k \leq p,$$

при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, при $1 \leq k \leq p$

$$\widehat{d}_k(R) := d_k + \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(1,R)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) = d_k(R) + o(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Пусть

$$\widehat{h}_R(z) = \sum_{k=1}^p \widehat{d}_k(R) \operatorname{Im} z^k, \quad \widehat{u}_R(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda_{2R}(\zeta) + \widehat{h}_R(z).$$

Очевидно, что

$$v^*(z) - \widehat{u}_R(z) = (v^*(z) - u_R(z)) + (u_R(z) - \widehat{u}_R(z)) \Rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

равномерно на компактах. Но

$$\widehat{u}_R(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_p(z, \zeta) d\lambda_{2R}(\zeta) + \sum_{k=1}^p d_k \operatorname{Im} z^k.$$

Таким образом, при $\beta \geq 1$ теорема доказана.

При $\beta < 1$ заметим, что из (4) следует, что функция

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda_2(\zeta)$$

имеет конечную меру λ_2 и является ограниченной субгармонической функцией. Тогда $v^*(z) = u(z) + d_1 y$. Откуда

$$d_1 = \frac{c_1(r, v^*)}{r} - \frac{1}{r\pi^2} \iint \left(\int_0^\pi K(re^{i\theta}, \zeta) \sin \theta d\theta \right) d\lambda_2(\zeta). \quad (29)$$

Воспользовавшись разложением в ряд (27) и

$$\ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{kr^k} \sin k\theta \sin k\varphi, \quad |z| > |\zeta|,$$

получим из (29)

$$d_1 = \frac{c_1(r, v^*)}{r} + \frac{1}{\pi} \iint_{\tau > r} \frac{d\lambda_2(\zeta)}{\tau^2} + \frac{1}{r^2\pi} \iint_{D_+(1,r)} d\lambda_2(\zeta). \quad (30)$$

Из неравенства (4) при $\gamma(r) = r^\rho$ получим, что $\lambda(r) \leq Ar^{\rho+1}$ при некотором $A > 0$. Отсюда и из (9) следует, что правая часть в (30) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, а значит, $d_1 \leq 0$.

Приведем теперь аналог теоремы 3 для дельта-субгармонических функций.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $v(z)$ – истинно дельта-субгармоническая функция конечного порядка $\beta > 0$, $p = [\beta]$. Пусть λ – полная мера функции $v(z)$, λ_1 – ограничение меры λ на круг $B(0, 1)$, $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$. Тогда существуют вещественные числа $\{d_k\}_{k=1}^p$ такие, что при $p \geq 1$ справедливо равенство (24), а при $p < 1$ – равенство (25) с d_1 необязательно неотрицательным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем нецелое $\rho > \beta$, $[\rho] = p$. Так как $N(r, v) \leq T(r, v) \leq Ar^{\rho-1}$, то по [11; теорема 6] существует истинно субгармоническая функция $u(z)$ порядка ρ такая, что $\lambda(u) = \lambda_-(v)$. По теореме 3 $u(z)$ представляется в виде (24) или (25). Функция $h(z) = v(z) + u(z)$ истинно субгармоническая, $\lambda(h) = \lambda_+(v)$ и порядок ее равен β . Снова применяя теорему 3, получаем, что ее можно представить в виде (24) или (25). Воспользовавшись равенством $v(z) = h(z) - u(z)$, завершаем доказательство.

Список литературы

- [1] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970.
- [2] А. Ф. Гришин, “Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **1:2** (1994), 193–215.
- [3] Н. В. Говоров, *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*, Наука, М., 1986; англ. пер.: N. V. Govorov, *Riemann’s boundary problem with infinite index*, Oper. Theory Adv. Appl., **67**, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [4] W. K. Hayman, “Questions of regularity connected with the Phragmen–Lindelöf principle”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **35** (1956), 115–126.
- [5] Jun-Iti Ito, “Subharmonic functions in the half-plane”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **129:3** (1967), 479–499.
- [6] L. A. Rubel, “A Fourier series method for entire functions”, *Duke Math. J.*, **30:3** (1963), 437–442.
- [7] L. A. Rubel, B. A. Taylor, “A Fourier series method for meromorphic and entire functions”, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 53–96.
- [8] А. А. Кондратюк, “Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста”, *Матем. сб.*, **106(148):3(7)** (1978), 386–408; англ. пер.: A. A. Kondratjuk, “The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth”, *Math. USSR-Sb.*, **35:1** (1979), 63–84.
- [9] А. А. Кондратюк, “Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II”, *Матем. сб.*, **113(155):1(9)** (1980), 118–132; англ. пер.: A. A. Kondratjuk, “The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth. II”, *Math. USSR-Sb.*, **41:1** (1982), 101–113.
- [10] А. А. Кондратюк, “Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III”, *Матем. сб.*, **120(162):3** (1983), 331–343; англ. пер.: A. A. Kondratyuk, “The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth. III”, *Math. USSR-Sb.*, **48:2** (1984), 327–338.
- [11] К. Г. Малютин, “Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости”, *Матем. сб.*, **192:6** (2001), 51–70; англ. пер.: K. G. Malyutin, “Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane”, *Sb. Math.*, **192:6** (2001), 843–861.
- [12] L. A. Rubel, “A generalized canonical product”, *Современные проблемы теории аналитических функций*, Международная конференция по теории аналитических функций (Ереван, 1965), Наука, М., 1966, 264–270.
- [13] К. Г. Малютин, “Ряды Фурье и δ -субгармонические функции”, *Теория приближения функций* (Донецк, 1998), Тр. Ин-та матем. и мех., **3**, Изд-во Ин-та прикл. матем. и мех., Донецк, 1998, 146–157.
- [14] А. А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функции*, Вища школа, Львов, 1988.

- [15] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956; англ. пер.: B. Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [16] A. F. Grishin, T. I. Malyutina, “General properties of subharmonic functions of finite order in a complex half-plane”, *Вестн. Харьк. нац. ун-та. Сер. матем., прикл. матем. и мех.*, **475** (2000), 20–44.

К. Г. Малютин (K. G. Malyutin)
Харьковский национальный университет
E-mail: malyutinkg@yahoo.com

Поступила в редакцию
13.10.2006 и 06.04.2007

Н. Садык (N. Sadik)
Istanbul University, Turkey
E-mail: sadnaz@mail.ru