Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Книжнерман, Квадратура Гаусса–Арнольди для функции $\langle (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi \rangle$ и Паде-подобная рациональная аппроксимация функций марковского типа, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 2, 27–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:34:10

УДК 519.644+519.651+517.538.52

Л. А. Книжнерман

Квадратура Гаусса–Арнольди для функции $\langle (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi \rangle$ и Паде-подобная рациональная аппроксимация функций марковского типа

Исследована эффективность применения квадратуры Гаусса–Арнольди для вычисления величины $\langle (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi \rangle$, где A – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве, а φ – ненулевой вектор из этого пространства. Установлены необходимое и достаточное условия эффективности квадратуры в случае нормального оператора. Приведен пример ненормального оператора, в применении к которому обсуждаемая квадратура неэффективна.

Показано, что в определенных случаях квадратура Гаусса–Арнольди связана с Паде-подобной рациональной аппроксимацией (с полюсами в числах Ритца) функций марковского типа и, в частности, может использоваться как средство локализации полюсов рационального возмущения. Даны оценки погрешности, применимые и в тех случаях, когда классическая аппроксимация Паде не работает или ее работоспособность не гарантирована.

Теоретические утверждения и гипотезы проиллюстрированы результатами численных экспериментов.

Библиография: 44 названия.

§ 1. Введение

1.1. Метод Арнольди. Метод Арнольди вычисления собственных пар неэрмитовых матриц и несамосопряженных операторов (см. [1], [2; § 16]) был после некоторого периода забвения возвращен в практику в 1980-х годах благодаря работам Ю. Саада. В наше время метод Арнольди применяется во многих задачах: собственно для вычисления спектра (см. [3], [4]); как средство решения систем линейных алгебраических уравнений (см. [5], [6]); для локализации спектра в итерационных методах решения линейных систем (см. [7], [8]); при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [9], [10]); для вычисления матричной экспоненты (см. [11]–[14]).

Пусть A – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, вектор φ принадлежит $\mathcal{H}$, $\|\varphi\| = 1$. Процесс Арнольди в $\mathcal{H}$ с A и φ – это фактически процесс ортогонализации по Граму–Шмидту степенного базиса бесконечномерного подпространства Крылова¹

$$\mathcal{K}^\infty(A, \varphi) = \text{span}\{A^0\varphi, A^1\varphi, \dots\}.$$

¹В дальнейшем мы без ограничения общности предполагаем, что процесс Арнольди не обрывается, т.е. $\dim \mathcal{K}^\infty(A, \varphi) = \infty$, а также что $\mathcal{K}^\infty(A, \varphi)$ всюду плотно в $\mathcal{H}$.

Первые m шагов процесса Арнольди можно выразить соотношением

$$AQ = QH + h_{m+1,m} q_{m+1} e_m^*, \quad (1)$$

где $Q = (q_1, \dots, q_m)$ – набор первых m ортонормированных векторов Арнольди, а верхняя хессенбергова $(m \times m)$ -матрица $H = (h_{ij})$ содержит коэффициенты рекурсии. В ходе процесса векторы q_i и компоненты матриц H накапливаются (вычисленные на предыдущих шагах величины не пересчитываются).

Из (1) и ортонормированности² $Q^*Q = I$ следует, что $H = Q^*AQ$ и что если (θ_i, s_i) – собственные пары H , $i = 1, \dots, m$, то (θ_i, Qs_i) – пары Ритца для A на $\mathcal{K}^m(A, \varphi) = \text{span}\{A^0\varphi, \dots, A^{m-1}\varphi\}$, т.е.

$$AQs_i - \theta_i Qs_i \perp \mathcal{K}^m(A, \varphi), \quad i = 1, \dots, m.$$

Многочлены Q_i , $i \in \mathbb{N}$, такие, что $Q_i(A)\varphi = q_{i+1}$, ортонормированы относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \langle f(A)\varphi, g(A)\varphi \rangle, \quad f, g \in \mathbb{C}[t].$$

Подчеркнем, что в отличие от знаменателей диагональных аппроксимант Паде (в общем случае) к функциям марковского типа многочлены Q_i эрмитово ортогональны, а не квазиортогональны.

Отметим, что числа Ритца не обязаны лежать в спектре S оператора A ; они находятся в так называемом “поле значений” (множестве значений отношения Рэлея)³ $\{\langle A\psi, \psi \rangle \mid \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1\}$. Замыкание “поля значений” будем обозначать K .

В [15], [16; § 4], [17; §§ 2, 3], [18; § 5] автором получены оценки погрешности метода спектрального разложения Арнольди (МСРА), т.е. варианта метода Арнольди, предназначенного для вычисления произведения матричной (операторной) функции на вектор (см. также [12]). Если функция f аналитична в окрестности S и окрестности $\text{Sp}(H)$ – спектра H , то МСРА в качестве приближения к $f(A)\varphi$ выдает вектор $Qf(H)e_1$. Хорошо известно (следует из рекурсии (1)), что МСРА точен для многочленов степени не выше $m - 1$, т.е.

$$f(A)\varphi = Qf(H)e_1, \quad f \in \mathbb{C}[t], \quad \deg f \leq m - 1. \quad (2)$$

В [16; § 2], [17; § 4], [18; § 3] также были получены оценки для вычисления собственных пар. Первое, что приходит в голову сделать для оценки качества выделения собственной пары $(\lambda, \mathbf{z})$, – воспользоваться формулой (2) и взять многочлен f степени не выше $m - 1$, равный 1 в точке λ и принимающий как можно меньшие значения на остальной части спектра или на “поле значений” ограничения A на подходящее инвариантное подпространство (“дополнительное” к $\mathbb{C}\mathbf{z}$). В сущности так и делается, но ситуация осложняется ненормальностью оператора A и ненормальностью H . Оценки получаются

²Для краткости обозначений мы будем использовать матрицы с операторными компонентами и работать с ними по обычным матричным правилам. Например, при $h \in \mathcal{H}$ символ h^* будет обозначать линейный функционал $h^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \langle g, h \rangle$. Оператор A будет действовать на матрицы покомпонентным образом, скажем, $A(z_1, \dots, z_s) = (Az_1, \dots, Az_s)$. Положим также $(g_{ij})^* = (g_{ji}^*)$, $g_{ij} \in \mathcal{H}$.

³Этот исторически сложившийся матрично-алгебраический термин не имеет отношения к полю как целостному кольцу с делением.

копи–адамаровского типа: оценивается верхний или нижний предел m -го корня ошибки в терминах функции Грина (с полюсом в бесконечности) “поля значений” или спектра. Нижним пределом приходится довольствоваться, когда “поле значений” (по которому “гуляют” числа Ритца) ограничения A на инвариантное подпространство “налезает” на искомое собственное значение.

Техника работы в этой области в основном вычислительно-линейно-алгебраическая. Из математического анализа используются оценки экстремальных многочленов через функцию Грина (см. [19; гл. 5]), т.е. готовые результаты из теории потенциала, а также теорема 2.11 [20; гл. 5] о сходимости ньютоновского процесса решения системы нелинейных уравнений.

1.2. Аппроксимация Паде функций марковского типа. Выделение полюсов. Для марковской функции

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z - t},$$

где μ – положительная мера с компактным бесконечным носителем $S = \text{Supp } \mu$, лежащим в $\mathbb{R}$, сходимость диагональных аппроксимант Паде гарантируется теоремой Маркова и ее уточнениями (см. [19; гл. 2, § 6], [21], [22; § 6.1]; а также [23; § 4] по поводу сходимости в лакунах спектра S по меньшей мере на каждом втором шаге).

В работе [24] (см. также [25], [26]) исследована сходимость диагональных аппроксимант Паде к функции $\hat{\mu} + r$, где $r \in \mathbb{C}(t)$, $r(\infty) = 0$, – “рациональное возмущение” $\hat{\mu}$, при условии $\mu'(t) > 0$ почти всюду на выпуклом замыкании S (из чего следует, что S – отрезок); даны оценки сходимости полюсов аппроксимант к полюсам r . В [27] рассмотрен случай носителя меры – объединения нескольких отрезков вещественной прямой и вещественного рационального возмущения $r \in \mathbb{R}(t)$. В [28] получены аналогичные результаты для комплекснозначных мер некоторых типов на вещественной прямой.

В [29; п. 3 введения] отмечено, что если S не лежит на прямой, то предельные точки полюсов диагональных аппроксимант Паде могут быть всюду плотны в $\overline{\mathbb{C}}$.

Подчеркнем, что эта и родственные трудности в теории аппроксимации Паде возникают из-за квази-, а не эрмитовой ортогональности знаменателей аппроксимант. Тот факт, что соответствующие квазиортогональные многочлены “хорошо себя ведут”, приходится выводить из алгебраической специфики случая (см. [30], [31]).

1.3. Связь квадратуры Гаусса–Арнольди и аппроксимации типа Паде с полюсами в числах Ритца. Разложение Лорана функции

$$f(z) = \langle (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi \rangle, \quad z \notin S,$$

есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle A^k \varphi, \varphi \rangle}{z^{k+1}}, \quad |z| > \|A\|.$$

Аналогично, разложение Лорана функции

$$f_m(z) = \langle (zI - H)^{-1}e_1, e_1 \rangle, \quad z \notin \text{Sp}(H),$$

есть

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle H^k \varphi, \varphi \rangle}{z^{k+1}}, \quad |z| > \|H\|.$$

Разложение H по сопутствующим матрицам (см. [32; § 2.5]) показывает, что f_m – рациональная функция типа $[(m-1)/m]$.

Функция f_m является диагональной аппроксимантой типа Паде с полюсами в точках θ_i , $1 \leq i \leq m$. Другими словами,

$$f(z) - f_m(z) = O(z^{-m}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Равенство нужных моментов сразу следует из (2).

Аппроксимация $f(z) \approx f_m(z)$ обсуждается в работах [33], [34]. Она является частным случаем квадратуры Гаусса–Арнольди. Термин “квадратура” связан с тем обстоятельством, что функция f представляется в виде интеграла по спектральной мере, когда оператор A обладает спектральным разложением.

1.4. Структура оставшейся части статьи. В § 2 оценена область нетривиальности квадратуры Гаусса–Арнольди в предположении нормальности оператора. Мы считаем квадратуру нетривиальной, если с ростом m ее ошибка уменьшается существенно быстрее, чем величина $\|(zI - A)^{-1}\varphi - Q(zI - H)^{-1}e_1\|$, т.е. ошибка решения соответствующего линейного уравнения. Грубо говоря, мы покажем, что квадратура нетривиальна лишь при спектре, лежащем на незамкнутой аналитической кривой.

В § 3 продемонстрировано, что замена нормального оператора с нетривиальной квадратурой на подобный ему в алгебраическом смысле с помощью ограниченного и непрерывно обратимого оператора может привести к потере нетривиальности.

В § 4 рациональное возмущение с простыми полюсами представлено в виде, удобном для проведения процесса Арнольди. На рациональное возмущение налагается условие вещественности суммарного вычета и его положительности. По числу “отбираемых степеней свободы” это ограничение слабее ограничения вещественности рационального возмущения в целом.

В § 5 приведены оценки погрешности выделения (локализации) простых полюсов рационального возмущения функции марковского типа. Доказанные там оценки сильнее общей оценки выделения крайних собственных значений ограниченного оператора с помощью метода Арнольди.

В § 6 показаны результаты численного эксперимента по выделению геометрически кратного полюса рационального возмущения.

Наконец, в § 7 перечислены оставшиеся нерешенными задачи.

Все количественные результаты и гипотезы проиллюстрированы результатами численных экспериментов. Соответствующие вычислительные программы были написаны на Фортране и запускались на IBM-совместимых персональных компьютерах, работающих под управлением Windows XP. При необходимости использовался фортранный пакет повышенной точности [35].

Настоящая статья посвящается памяти В. В. Воеводина, проявлявшего интерес к работам автора по теории методов Ланцоша и Арнольди.

§ 2. Квадратура Гаусса–Арнольди: случай нормального оператора

Дополнительно введем следующие обозначения: Ω – неограниченная связная компонента $\mathbb{C} \setminus S$, $E = \mathbb{C} \setminus \Omega \supseteq S$, $\text{Co}(\cdot)$ – выпуклое замыкание множества.

Предположим, что оператор A нормален. В этом случае A обладает спектральным разложением (см. [36; гл. 12]), а пара (A, φ) – спектральной мерой μ с носителем S ; имеем

$$f(z) = \int_S \frac{d\mu(t)}{z - t}.$$

Поскольку в терминах обобщенной функции Грина g области Ω мы имеем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \text{dist}[(zI - A)^{-1}\varphi, \mathcal{K}^m(A, \varphi)]^{1/m} \leq e^{-g(z)}, \quad z \in \Omega,$$

где dist обозначает расстояние, то теоремы этого параграфа являются критериями нетривиальности квадратуры Гаусса–Арнольди.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор A нормален, а его спектральная мера μ регулярна⁴ (см. [22; гл. 3, 4]). Если существует такая точка $z \in \Omega$, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |f(z) - f_m(z)|^{1/m} < e^{-g(z)},$$

где g – обобщенная функция Грина для Ω (см. [19]), то у множества E и, следовательно, у спектра S нет внутренних точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |f(z) - f_m(z)|^{1/m} = e^{-(1+\varepsilon)g(z)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Ошибка аппроксимации выражается формулой Эрмита

$$f(z) - f_m(z) = \frac{1}{Q_m(z)} \int_S Q_m(t) \frac{d\mu(t)}{z - t} \quad (4)$$

(см. [37; формула (11)]). Регулярность меры μ влечет (см. [22; гл. 3, формула (2.1)])

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |Q_m(w)|^{1/m} \leq e^{g(w)} \quad \text{локально равномерно в } \mathbb{C}. \quad (5)$$

В частности,

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |Q_m(z)|^{1/m} \leq e^{g(z)},$$

что в сочетании с (3) и (4) дает

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left| \int_S Q_m(t) \frac{d\mu(t)}{z - t} \right|^{1/m} \leq e^{-\varepsilon g(z)}. \quad (6)$$

Фактически формула (6) оценивает коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{\bar{z} - \bar{t}} \quad (7)$$

⁴Это интуитивно значит, что μ достаточно плотна на ее носителе S .

переменной t по ортонормированным многочленам Q_m . Из (5) следует оценка

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in E} |Q_m(t)|^{1/m} \leq 1,$$

которая в комбинации с (6) доказывает, что разложение функции (7) в ряд по Q_m равномерно сходится на E .

Если бы E содержало открытый круг D , то функция (7) была бы аналитической в D . В результате $\bar{t}$ оказалась бы аналитической в D , что невозможно в силу условий Коши–Римана.

ТЕОРЕМА 2. *Если спектр S нормального оператора A является частью аналитической кривой без самопересечений и не разделяет комплексную плоскость, то справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |f(z) - f_m(z)|^{1/m} &< e^{-g(z)}, & z \in \mathbb{C} \setminus \text{Co}(S), \\ \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |f(z) - f_m(z)|^{1/m} &< e^{-g(z)}, & z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus E. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание ортонормированность Q_k и нормированность φ , из (4) для любого $p \in \mathbb{C}[t]$ с $\deg p \leq m-1$ выводим:

$$\begin{aligned} |f(z) - f_m(z)| &= \frac{1}{|Q_m(z)|} \left| \int_S Q_m(t) \left[\frac{1}{z-t} - \overline{p(t)} \right] d\mu(t) \right| \\ &= \frac{1}{|Q_m(z)|} \left| \int_S \overline{Q_m(t)} \left[\frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} - p(t) \right] d\mu(t) \right| \leq \frac{\mu(S)}{|Q_m(z)|} \max_{t \in S} \left| \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} - p(t) \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с [38; предложение 1.1] существует функция h , аналитическая на S и такая, что

$$h(t) = \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}}, \quad t \in S.$$

Поскольку S не разделяет комплексную плоскость, то h аналитична внутри некоторого канонического контура

$$\Gamma_\rho = \{w \in \Omega \mid g(w) = \log \rho\}, \quad \rho = \rho(z) > 1,$$

причем значение ρ можно считать максимально возможным. Известно (см. [39; гл. 2, § 3, теорема 1]), что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left[\min_{p \in \mathbb{C}[t], \deg p \leq m-1} \max_{t \in S} |h(t) - p(t)| \right]^{1/m} = \frac{1}{\rho}.$$

Теперь для случая $z \notin \text{Co}(S)$ достаточно вспомнить (8) и использовать оценку (см. [22; (1.7)])

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |Q_m(z)|^{1/m} \geq e^{g(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{Co}(S), \quad (9)$$

чтобы получить неравенство

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |f(z) - f_m(z)|^{1/m} \leq \frac{e^{-g(z)}}{\rho}. \quad (10)$$

А в ситуации, когда $z \in \Omega$, надо вместо (9) использовать формулу (см. [40; теорема 1])

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |Q_m(z)|^{1/m} \geq e^{g(z)}, \quad z \in \Omega.$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ 1: $S \subset \mathbb{R}$ (оператор A самосопряженный). Так как $\bar{t} = t$ на S , то функция $h(t) = 1/(\bar{z} - t)$ имеет единственный полюс $t = \bar{z}$, так что благодаря симметрии

$$\rho = e^{g(\bar{z})} = e^{g(z)}.$$

Мы получаем известную оценку для классической марковской функции с правой частью $e^{-2g(z)}$.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ 2: S – собственное подмножество единичной окружности (оператор A унитарный). На S справедливо тождество $\bar{t} = 1/t$, и функция

$$h(t) = \frac{1}{\bar{z} - t^{-1}} = \frac{t}{\bar{z}t - 1}$$

Рис. 1. Пример 1: S – верхняя единичная полуокружность, плотность меры на которой постоянна. Приведена ошибка квадратуры Гаусса–Арнольди для двух значений z

имеет полюс $t = 1/\bar{z}$. Правая часть оценки (10) равна

$$e^{-g(z)-g(1/\bar{z})}, \quad (11)$$

где предполагается, что $g(\infty) = +\infty$.

В примере, отраженном на рис. 1, из результатов вычислений можно извлечь множители сходимости, с высокой точностью согласуемые с (11).⁵ Явное выражение для g выводится из [41; формула (2.3)].

§ 3. Квадратура Гаусса–Арнольди: случай ненормального оператора

Рис. 2. Пример 2: сравнение погрешности квадратуры для эрмитова и ненормального операторов с одинаковым спектром

⁵При этом для значения z , выбранного в $\text{Co}(S)$, имеет место сходимость при $m \rightarrow \infty$, а не просто сходимость на подпоследовательности шагов, обещанная теоремой 2. Иными словами, данный случай не является “исключительным”. Аналогичные замечания справедливы еще для нескольких численных экспериментов.

Когда оператор не является нормальным, то оценку погрешности квадратуры Гаусса–Арнольди в терминах спектра дать нельзя. Рассмотрим пространство $L_{2, (1-\lambda^2)^{-1/2}}[-1, 1]$. Пусть B – оператор умножения на независимую переменную, оператор C в “базисе” из нормированных многочленов Чебышёва представлен бесконечной диагональной матрицей с диагональными компонентами, равномерно распределенными в прямоугольнике $\{0.5 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 1.5, 0.5 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 1.5\}$. Положим $A = CBC^{-1}$. Так как оператор C ограничен и имеет ограниченный обратный, то $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B = [-1, 1]$. В качестве начального вектора φ мы взяли вектор с компонентами (в том же базисе), убывающими, как $10^{-0.016k}$. На рис. 2 приведена ошибка квадратуры Гаусса–Арнольди в точке $z = 1.05$ для соответствующего процесса Арнольди и (в целях сравнения) для процесса Ланцоша с B и φ . Из рисунка видно, что в эрмитовом случае квадратура сходится со скоростью, соответствующей оценке для классической аппроксимации Паде, в то время как в ненормальном случае квадратура практически тривиальна (т.е. взятие скалярного произведения погрешность почти не улучшает).

Вероятно, возможен более тонкий анализ сходимости в случае $A = CBC^{-1}$ с нормальным оператором B и ограниченным непрерывно обратимым C , учитывающий степень неунитарности C и/или степень некоммутируемости C с B , но такой анализ выходит за рамки рассматриваемого здесь подхода.

§ 4. Представление суммы конечного числа простых полюсов с вещественным положительным суммарным вычетом в виде, соответствующем квадратуре Гаусса–Арнольди

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $s \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – попарно различные комплексные числа, $c_1, \dots, c_s$ – ненулевые комплексные числа, такие что $c_1 + \dots + c_s = 1$. Существует такая трехдиагональная матрица $T \in \mathbb{C}^{s \times s}$, что

$$\langle (zI - T)^{-1} e_1, e_1 \rangle = \sum_{j=1}^s \frac{c_j}{z - \lambda_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют числа $x_{11}, \dots, x_{1s} \in \mathbb{C}$, алгебраически независимые над полем $\mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, c_1, \dots, c_s)$ (см. [42; гл. 10]). Положим

$$y_{1i} = \frac{c_i}{x_{1i}} \quad (1 \leq i \leq s), \quad v_1 = (y_{11}, \dots, y_{1s})^T, \quad w_1 = (x_{11}, \dots, x_{1s})^T.$$

Теперь запустим процесс несимметричной ланцошевской трехдиагонализации (см. [43; п. 9.3.6]) с матрицей $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ и стартовыми векторами v_1 и w_1 .⁶ В результате получим трехдиагональную матрицу T и наборы векторов $V = (v_1, \dots, v_s)$ и $W = (w_1, \dots, w_s)$, ввиду симметричности $\Lambda = \Lambda^T$ удовлетворяющие соотношениям

$$\Lambda V = VT, \quad \Lambda W = WT^T, \quad W^T V = I,$$

из которых выводим $TW^T = W^T \Lambda$, $T^T V^T = V^T \Lambda$, а это значит, что наборы

$$X = (x_1, \dots, x_s) \equiv W^T, \quad Y = (y_1, \dots, y_s) \equiv V^T$$

⁶В [43] рассмотрен вещественный случай. Мы не меняем формулы из-за комплексности, т.е. не заменяем транспонирование на транспонирование с комплексным сопряжением.

состоят соответственно из правых и левых собственных векторов T , причем соблюдается условие квазибиортогональности $XY^T = I$. Из [32; § 2.5] следует, что

$$(zI - T)^{-1} = \sum_{j=1}^s \frac{x_j y_j^T}{z - \lambda_j},$$

откуда

$$\langle (zI - T)^{-1} e_1, e_1 \rangle = e_1^T \sum_{j=1}^s \frac{x_j y_j^T}{z - \lambda_j} e_1 = \sum_{j=1}^s \frac{x_{1j} y_{1j}}{z - \lambda_j} = \sum_{j=1}^s \frac{c_j}{z - \lambda_j}.$$

Процесс биортогонализации не прерывается досрочно благодаря алгебраической независимости, поскольку условия “обрыва” записываются в виде алгебраических уравнений, причем нетривиальных, так как в вещественном случае “обрыва” при максимальных размерностях обоих крыловских подпространств не бывает.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Конечно, выбирая подходящий множитель при e_1 , можно позволить сумме вычетов выделенных полюсов быть любым вещественным положительным числом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формальное представление функции

$$f(z) = \int_S \frac{c(t) d\mu(t)}{z - t}, \quad \int_S c(t) d\mu(t) = 1,$$

где μ – мера с компактным носителем $S \subset \mathbb{C}$ и $c \in L_{2,\mu}(S)$ – комплекснозначная функция, в виде, соответствующем квадратуре Гаусса–Арнольди, может быть осуществлено с помощью некоего процесса несимметричной ланцошевской трехдиагонализации в $L_{2,\mu}(S)$. Результатом является формула

$$f(z) = \langle (zI - T)^{-1} e_1, e_1 \rangle, \quad z \notin S,$$

где T – бесконечная трехдиагональная матрица. Ограниченность соответствующего T оператора в l_2 зависит от ограниченности элементов получаемой в ходе несимметричного процесса Ланцоша квазибиортогональной системы функций; априорные условия ограниченности мы не знаем.

§ 5. Комплексное рациональное возмущение функции марковского типа: выделение простых полюсов с помощью метода Арнольди

Теоремы настоящего параграфа показывают, с какой скоростью метод Арнольди локализует полюсы рационального возмущения

$$d^2 \sum_{j=1}^s \frac{c_j}{z - \lambda_j}, \quad \sum_{j=1}^s c_j = 1, \quad d > 0,$$

функции марковского типа $\int_S \frac{d\mu(t)}{z - t}$.

Матрицу A_1 из условия теоремы 3 можно найти с помощью предложения 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть μ – положительная мера с компактным носителем $S \subset \mathbb{C}$, A_2 – оператор умножения на независимую переменную в $L_{2,\mu}(S)$, $K = \text{Co}(S)$ – замыкание “поля значений” A_2 , $s \geq 1$, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \Omega$ попарно различны, $c_1, \dots, c_s$ – ненулевые комплексные числа, матрица $A_1 \in \mathbb{C}^{s \times s}$ такова, что

$$\langle (zI - A_1)^{-1} e_1, e_1 \rangle = \sum_{j=1}^s \frac{c_j}{z - \lambda_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\},$$

z_j – нормированный собственный вектор A_1 , отвечающий собственному значению λ_j , $\mathcal{H} = \mathbb{C}^s \oplus L_{2,\mu}(S)$, $A = A_1 \oplus A_2$ – ортогональная прямая сумма пространств и соответствующая прямая сумма операторов.

Процесс Арнольди с оператором A в $\mathcal{H}$ и начальным вектором

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{d^2 + \mu(S)}} (de_1, \mathbf{1})^T \in \mathcal{H},$$

где $\mathbf{1}$ – постоянная функция “единица” из $L_{2,\mu}(S)$, за $m > s$ шагов выработает такие пары Рунца (θ_j, r_j) , $j = 1, \dots, m$, что при подходящей их нумерации верны следующие оценки.

Если при данном j ($1 \leq j \leq s$) $\lambda_j \notin K$, то

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |\lambda_j - \theta_j|^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j) - \min_{1 \leq k \leq s} g(\lambda_k)}, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |z_j - r_j|^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j)}.$$

В общем случае ($\lambda_j \notin E$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\lambda_j - \theta_j|^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j) - \min_{1 \leq k \leq s} g(\lambda_k)}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |z_j - r_j|^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j)}. \quad (12)$$

Здесь g – обобщенная функция Грина области Ω с полюсом в бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем доказательства теоремы 1 из [18] и вспомогательных утверждений к ней, внося в них упрощения и уточнения, вызванные ортогональностью прямой суммы пространств.

Пусть

$$\xi = \prod_{j=1}^s (A - \lambda_j I) \varphi,$$

$\mathcal{G}$ – замыкание $\mathcal{H}^\infty(A, \xi) \subseteq \{0\} \oplus L_{2,\mu}(S)$. Это инвариантное подпространство, так что можно определить ограничение $B = A|_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $\text{Sp}(B) = S$. В нашей ситуации

$$z_j \perp \mathcal{G}, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (13)$$

Из доказательства леммы 2 и следствия 1 из [18] можно извлечь формулу

$$\mathcal{H}^m(A, \varphi) = \text{span}\{z_1 + \Delta_1, \dots, z_s + \Delta_s\} + \mathcal{H}^{m-s}(B, \xi), \quad (14)$$

где

$$\Delta_j \in \mathcal{G}, \quad \Delta_j \perp \mathcal{H}^{m-s}(B, \xi), \quad (15)$$

причем $\|\Delta_j\| \lesssim \delta_j$ (знак $\lesssim$ значит то же, что O), где

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \delta_j^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (16)$$

Пользуясь (14), построим специальный ортонормированный базис подпространства $\mathcal{H}^m(A, \varphi)$. Нормируя векторы $z_j + \Delta_j$, мы с учетом (13), (15) построим набор

$$\tilde{z}_j = z_j + O(\delta_j^2)z_j + [1 + O(\delta_j^2)]\Delta_j, \quad \|\tilde{z}_j\| = 1, \quad j = 1, \dots, s.$$

Пусть $(p_1, \dots, p_{m-s})$ – ортонормированный базис $\mathcal{H}^{m-s}(B, \xi)$, полученный, например, методом Арнольди с парой (B, ξ) .

Рассмотрим собственную пару (λ_1, z_1) , причем, не уменьшая общности, положим $\lambda_1 = 0$. Положим также

$$\begin{aligned} Z &= (z_2, \dots, z_s), & Z_m &= (\tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_s), \\ P_m &= (p_1, \dots, p_{m-s}), & \Lambda &= \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_s). \end{aligned}$$

Ортогонализация по Граму–Шмидту дает нам равенство $Q_m = Z_m R_m$, где $Q_m = (\tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_s)$ состоит из $s - 1$ ортонормированного вектора, R_m – верхняя треугольная $((s - 1) \times (s - 1))$ -матрица и $Q_m^* P_m = 0$.

При $m \rightarrow \infty$ справедливо $Z_m \rightarrow Z$, Q_m стремится к ортонормированному набору $Q = (q_2, \dots, q_s)$, R_m стремится к невырожденной верхней треугольной матрице R . Имеем $Q = ZR$ и $AQ = Z\Lambda R$.

Мы решаем задачу Ритца для A и базиса $(\tilde{z}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_s, p_1, \dots, p_{m-s})$ подпространства $\mathcal{H}^m(A, \varphi)$. Ищем число Ритца λ и (ненормализованный) вектор Ритца $(1, y^T, x^T)^T$, $y \in \mathbb{C}^{s-1}$, $x \in \mathbb{C}^{m-s}$. Из [18] известно, что

$$|\lambda| \lesssim \delta_1, \quad \|x\| \lesssim \delta_1, \quad \|y\| \lesssim \delta_1$$

и (см. первое и третье уравнения в [18; (3.5)])

$$Q_m^* A Q_m y - Q_m^* \tilde{z}_1 \lambda = -Q_m^* A \Delta_1 - Q_m^* A P_m x + O(\delta_1^2) = O(\delta_1 \delta_{\max}), \quad (17)$$

$$\tilde{z}_1^* A Q_m y - \lambda = \tilde{z}_1^* A \Delta_1 - \tilde{z}_1^* A P_m x + O(\delta_1^2) = O(\delta_1^2) \quad (18)$$

(использованы (13), (15) и обозначение $\delta_{\max} = \max_{1 \leq j \leq s} \delta_j$), откуда

$$(Q_m^* - Q_m^* \tilde{z}_1 \tilde{z}_1^*) A Q_m y = O(\delta_1 \delta_{\max}),$$

или

$$[(Q^* Z - Q^* z_1 z_1^* Z) \Lambda R + o(1)] y = O(\delta_1 \delta_{\max}). \quad (19)$$

Поскольку матрица

$$Q^* Z - Q^* z_1 z_1^* Z = [I - (Q^* z_1)(Q^* z_1)^*] R^{-1}$$

невырождена, то из (19) следует $\|y\| \lesssim \delta_1 \delta_{\max}$, а из (17), (18) следует $|\lambda| \lesssim \delta_1 \delta_{\max}$.

Приведенные оценки справедливы для достаточно больших m из последовательности $s + 1, s + 2, \dots$, если $\lambda_1 = 0 \notin K$ (см. в [18] рассуждение между формулами (3.9) и (3.10)). Если же $0 \in K$, но все же $0 \notin E$, то благодаря лемме 1 из [17] (в журнальном варианте – [44; лемма 1]) оценки остаются справедливыми для некоторой подпоследовательности.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в условиях теоремы 3 $S \subset \mathbb{R}$ (т.е. оператор A_2 ассоциирован с собственно марковской функцией), а $\lambda_j \in K$ (т.е. λ_j лежит в лакуне спектра), то сходимость пар Ритца (с той же скоростью, что в теореме 3) имеет место по крайней мере на каждом втором шаге (т.е. формулу (12) с нижним пределом можно конкретизировать).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо леммы 1 из [17] нужно использовать лемму 2 из [23] (в журнальном варианте – [44; лемма 4]).

В нижеописанной серии численных экспериментов мы взяли

$$s = 2, \quad \lambda_1 = 0.2 + 0.15i, \quad \lambda_2 = -0.2 - 0.2i;$$

соответствующие вычеты были пропорциональны i и $1 - i$, причем вещественный положительный коэффициент пропорциональности выбирался так, чтобы сделать соизмеримым вклад по норме в начальный вектор φ выделенной и основной частей спектра. Плотность меры μ на носителе S была постоянной.

В примере 3 (рис. 3, 4) компакт S есть объединение двух отрезков вещественной оси, а в примере 4 (рис. 5, 6) – верхняя единичная полуокружность. Отметим, что при данном (невещественном) “рациональном возмущении” хорошее поведение классической аппроксимации Паде не гарантировано.

Рис. 3. Пример 3: $S = [-1, \cos(0.45\pi)] \cup [\cos(0.6\pi), 1]$ (объединение двух отрезков вещественной прямой), $\lambda_1 = 0.2 + 0.15i$, $\lambda_2 = -0.2 - 0.2i$. Ошибка вычисления полюсов (выделенных собственных значений) и норма невязок соответствующих собственных векторов

На рис. 3 и 5 приведены графики сходимости подходящих чисел Ритца к выделенным собственным значениям (полюсам), а также нормы невязки соответствующих собственных векторов. На рис. 4 и 6 видно, как числа Ритца при фиксированном номере шага процесса Арнольди аппроксимируют спектр.

В примере 4 для функции Грина g , как мы уже отмечали, имеется аналитическое выражение. В обоих примерах можно оценить значения g по скорости возрастания значений ортонормированных многочленов, поскольку мера μ в этих примерах регулярна. Фактическая скорость сходимости хорошо согласуется с оценками теоремы 3.

Следующая теорема применима в случае, когда все вычеты $d_1, \dots, d_s$ рационального возмущения вещественны и положительны. Можно взять

$$A_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s).$$

Рис. 4. Пример 3: $S = [-1, \cos(0.45\pi)] \cup [\cos(0.6\pi), 1]$ (объединение двух отрезков вещественной прямой), $\lambda_1 = 0.2 + 0.15i$, $\lambda_2 = -0.2 - 0.2i$. Числа Ритца при $m = 50$

ТЕОРЕМА 4. Пусть в условиях теоремы 3 матрица A_1 нормальна. Тогда процесс Арнольди с оператором A в $\mathcal{H}$ и начальным вектором

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{d_1 + \dots + d_s + \mu(S)}} ((\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_s})^T, \mathbf{1})^T \in \mathcal{H},$$

где $\mathbf{1}$ – постоянная функция “единица” из $L_{2,\mu}(S)$, за $m > s$ шагов выработает такие пары Рунца

$$(\theta_j, r_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

что при подходящей их нумерации верны следующие оценки.

Рис. 5. Пример 4: $S = \{e^{i\tau} \mid 0 \leq \tau \leq \pi\}$ (верхняя единичная полуокружность), $\lambda_1 = 0.2 + 0.15i$, $\lambda_2 = -0.2 - 0.2i$. Ошибка вычисления полюсов (выделенных собственных значений) и норма невязок соответствующих собственных векторов

Если при данном j ($1 \leq j \leq s$) $\lambda_j \notin K$, то

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |\lambda_j - \theta_j|^{1/m} \leq e^{-2g(\lambda_j)}, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |z_j - r_j|^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j)}.$$

В общем случае ($\lambda_j \notin E$)

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |\lambda_j - \theta_j|^{1/m} \leq e^{-2g(\lambda_j)}, \quad \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |z_j - r_j|^{1/m} \leq e^{-g(\lambda_j)}.$$

Здесь g – функция Грина области Ω с полюсом в бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку благодаря нормальности матрицы A_1 ее собственные векторы z_i ортогональны, нужная оценка для чисел Ритца следует из формулы (18).

Пример 5 (рис. 7) отличается от примера 4 тем, что вычеты в двух выделенных полюсах вещественны и положительны (относятся как 2:3). Результат хорошо согласуется с оценками теоремы 4.

Рис. 6. Пример 4: $S = \{e^{i\tau} \mid 0 \leq \tau \leq \pi\}$ (верхняя единичная полуокружность), $\lambda_1 = 0.2 + 0.15i$, $\lambda_2 = -0.2 - 0.2i$. Числа Ритца при $m = 50$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В доказательствах теорем 3 и 4 нормальность A_2 фактически не используется; это значит, что K не обязано совпадать с $\text{Co}(S)$. Также не используется конкретный вид начального вектора φ .

В теории метода Арнольди как метода вычисления внешней дискретной части спектра теоремы 3 и 4 по требованиям к оператору являются переходными между теоремой 1 из [18] и теоремой 1 из [16]. В [18] нет условий нормальности и ортогональности; в теореме 3 прямая сумма подпространств предполагается ортогональной; в теореме 4 дополнительно наложено условие нормальности A_1 ; в [16] предполагается нормальным оператор в целом. Отметим, что теоремы из данного параграфа учитывают адаптацию к спектру, т.е. их оценки сформулированы в терминах функции Грина спектра, а не “поля значений” A_2 .

Рис. 7. Пример 5: $S = \{e^{i\tau} \mid 0 \leq \tau \leq \pi\}$ (верхняя единичная полуокружность), $\lambda_1 = 0.2 + 0.15i$, $\lambda_2 = -0.2 - 0.2i$, вещественные положительные вычеты. Ошибка вычисления полюсов (выделенных собственных значений) и норма невязок соответствующих собственных векторов

§ 6. Численный пример с кратным полюсом

Насколько нам известно, оценок погрешности определения кратного полюса в методе Арнольди нет. Можно надеяться, что для получения таких оценок потребуется лишь техническое, а не идейное усложнение существующих теорем. Мы приведем здесь численный пример (см. рис. 8, 9).

Рисунки показывают, что ситуация с кратным полюсом в методе Арнольди качественно такая же, как в [28]: скорость сходимости ближайшего числа Ритца в данном примере примерно в пять (что совпадает с геометрической кратностью) раз ниже, чем была бы для простого полюса и нормального оператора, а количество аппроксимирующих чисел Ритца совпадает с кратностью, при этом они окружают искомый кратный полюс.

Рис. 8. Пример 6: $S = \{e^{i\tau} \mid 0 \leq \tau \leq \pi\}$ (верхняя единичная полуокружность), полюс геометрической кратности 5 в точке $\lambda_1 = 1.5 + 1.5i$. Ошибка вычисления полюса

Рис. 9. Пример 6: $S = \{e^{i\tau} \mid 0 \leq \tau \leq \pi\}$ (верхняя единичная полуокружность), полюс геометрической кратности 5 в точке $\lambda_1 = 1.5 + 1.5i$. Расположение чисел Ритца, приближающих пятикратный полюс, при $m = 20$

§ 7. Задачи и благодарности

Нам видятся следующие нерешенные задачи:

- 1) доказательство локальной равномерности сходимости аппроксимант по z (там, где имеет смысл о ней говорить);
- 2) получение теоретических результатов о сходимости чисел Ритца в случае рационального возмущения с геометрически кратными полюсами;
- 3) нахождение априорного условия представимости функции марковского типа, порожденной комплекснозначной мерой, в виде, удобном для применения метода Арнольди с ограниченным оператором (см. замечание 2); после решения этой задачи результаты теорем 3 и 4 автоматически распространятся на случай комплекснозначной меры (см. замечание 3);

- 4) выяснение того, что можно сделать в случае рационального возмущения с не вещественным или неположительным суммарным вычетом; очевидно, рассматриваемая в настоящей статье квадратура ограничение вещественности и положительности снять не позволяет;
- 5) объяснение видимой периодичности на рис. 3;
- 6) оптимизация выбора матрицы в § 4.

Автор выражает благодарность В. Л. Друскину, С. П. Суетину и участникам конференции SIAM-GAMM-2006 за полезные обсуждения и библиографическую поддержку, а Дэвиду Бейли – за публикацию пакета [35] в Интернете.

Список литературы

- [1] W. E. Arnoldi, “The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem”, *Quart. Appl. Math.*, **9** (1951), 17–29.
- [2] Х. Д. Икрамов, *Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы*, Наука, М., 1991.
- [3] A. Ruhe, “The two-sided Arnoldi algorithm for nonsymmetric eigenvalue problems”, *Matrix pencils*, Proceedings of the Conference (Pite Havsbad, Sweden, 1982), Lect. Notes in Math., **973**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1982, 104–120.
- [4] Y. Saad, “Variations on Arnoldi’s method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **34** (1980), 269–295.
- [5] Y. Saad, “Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems”, *Math. Comp.*, **37**:155 (1981), 105–126.
- [6] Y. Saad, M. H. Schultz, “GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **7**:3 (1986), 856–869.
- [7] H. C. Elman, Y. Saad, P. E. Saylor, “A hybrid Chebyshev Krylov subspace algorithm for solving nonsymmetric systems of linear equations”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **7**:3 (1986), 840–855.
- [8] D. Ho, F. Chatelin, M. Bennani, “Arnoldi–Tchebychev procedure for large scale nonsymmetric matrices”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **24**:1 (1990), 53–65.
- [9] P. N. Brown, Y. Saad, “Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **11**:3 (1990), 450–481.
- [10] C. W. Gear, Y. Saad, “Iterative solution of linear equations in ODE codes”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **4**:4 (1983), 583–601.
- [11] E. Gallopoulos, Y. Saad, “Efficient solution of parabolic equations by Krylov approximation methods”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **13**:5 (1992), 1236–1264.
- [12] M. Hochbruck, Ch. Lubich, “On Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**:5 (1997), 1911–1925.
- [13] Y. Saad, “Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**:1 (1992), 209–228.
- [14] M. Hochbruck, Ch. Lubich, H. Selhofer, “Exponential integrators for large systems of differential equations”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **19**:5 (1998), 1552–1574.
- [15] Л. А. Книжнерман, “Вычисление функций от несимметричных матриц с помощью метода Арнольди”, *ЖВМ и МФ*, **31**:1 (1991), 5–16; англ. пер.: L. A. Knizhnerman, “Calculation of functions of unsymmetric matrices using Arnoldi’s method”, *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, **31**:1 (1991), 1–9.
- [16] Л. А. Книжнерман, “Оценки погрешности метода Арнольди: случай нормальной матрицы”, *ЖВМ и МФ*, **32**:9 (1992), 1347–1360; англ. пер.: L. A. Knizhnerman, “Error bounds in Arnoldi’s method: the case of a normal matrix”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **32**:9 (1992), 1199–1211.

- [17] L. Knizhnerman, *On adaptation of the Arnoldi method to the spectrum*, Technical report, Schlumberger-Doll Research Report #EMG-001-96-03, 1996.
- [18] L. Knizhnerman, “Error bounds for the Arnoldi method: a set of extreme eigenpairs”, *Linear Algebra Appl.*, **296**:1–3 (1999), 191–211.
- [19] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: Е. М. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [20] G. W. Stewart, J. G. Sun, *Matrix perturbation theory*, Comput. Sci. Sci. Comput., Academic Press, Boston, 1990.
- [21] A. Markoff, “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions”, *Acta Math.*, **19**:1 (1895), 93–104.
- [22] H. Stahl, V. Totik, *General orthogonal polynomials*, Encyclopedia Math. Appl., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [23] L. Knizhnerman, *On adaptation of the Lanczos method to the spectrum*, Technical report, Schlumberger-Doll Research, Res. Note EMG-001-95-12, 1995.
- [24] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
- [25] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 237–252; англ. пер.: E. A. Rahmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:2 (1977), 199–213.
- [26] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II”, *Матем. сб.*, **118(160)**:1(5) (1982), 104–117; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:1 (1983), 105–117.
- [27] Е. А. Рахманов, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **104(146)**:2(10) (1977), 271–291; англ. пер.: E. A. Rahmanov, “The convergence of diagonal Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **33**:2 (1977), 243–260.
- [28] А. А. Гончар, С. П. Суетин, “Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа”, *Совр. пробл. матем.*, **5** (2004), 3–67.
- [29] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [30] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1339–1373.
- [31] С. П. Суетин, “О сходимости чебышёвских непрерывных дробей для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **194**:12 (2003), 63–92; англ. пер.: S. P. Suetin, “Convergence of Chebyshëv continued fractions for elliptic functions”, *Sb. Math.*, **194**:12 (2003), 1807–1835.
- [32] П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, М., 1978; пер. с англ.: P. Lancaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York–London, 1969.
- [33] D. Calvetti, S.-M. Kim, L. Reichel, “Quadrature rules based on the Arnoldi process”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **26**:3 (2005), 765–781.
- [34] R. W. Freund, M. Hochbruck, “Gauss quadratures associated with the Arnoldi process and the Lanczos algorithm”, *Linear algebra for large scale and real-time applications*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (Leuven, Belgium, 1992), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. E Appl. Sci., **232**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, 377–380.

- [35] D. H. Bailey, “A Fortran 90-based multiprecision system”, *ACM Trans. Math. Software*, **21**:4 (1995), 379–387.
- [36] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
- [37] A. Ambroladze, H. Wallin, “Convergence rates of Padé and Padé-type approximants”, *J. Approx. Theory*, **86**:3 (1996), 310–319.
- [38] H. S. Shapiro, *The Schwarz function and its generalization to higher dimensions*, Univ. Arkansas Lecture Notes Math. Sci., **9**, Wiley, New York, 1992.
- [39] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1987; рус. пер. нем. изд.: Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, М., 1986.
- [40] A. Ambroladze, “On exceptional sets of asymptotic relations for general orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **82**:2 (1995), 257–273.
- [41] М. Не, “The Faber polynomials for circular arcs”, *Mathematics of computation*, 1943–1993: *a half-century of computational mathematics* (Vancouver, Canada, 1993), Proc. Sympos. Appl. Math., **48**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 301–304.
- [42] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.
- [43] G. H. Golub, Ch. F. van Loan, *Matrix computations*, Johns Hopkins Ser. Math. Sci., **3**, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.
- [44] L. A. Knizhnerman, “Adaptation of the Lanczos and Arnoldi methods to the spectrum, or why the two Krylov subspace methods are powerful”, *Чебышёвский сб.*, **3**:2 (2002), 141–164.

Л. А. Книжнерман (L. A. Knizhnerman)
ОАО “Центральная геофизическая экспедиция”,
г. Москва
E-mail: mmd@cge.ru

Поступила в редакцию
11.10.2006 и 05.07.2007