Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мирзоян, Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 3, 69–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:34:53

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян

Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности

В евклидовых пространствах дается полная локальная классификация и геометрическое описание нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с кратными главными векторами кривизны и интегрируемым распределением кодефектности.

Библиография: 30 названий.

§ 1. Формулировка результатов

Римановы Рис-полусимметрические пространства характеризуются условием полупараллельности тензора Риччи R_1 , $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$, и являются естественными обобщениями римановых полусимметрических пространств (характеризуемых условием $R(X, Y) \cdot R = 0$, где R – тензор кривизны), римановых пространств с параллельным тензором Риччи ($\nabla R_1 = 0$), эйнштейновых и симметрических пространств. В этой связи Рис-полусимметрические пространства и их изометрические погружения стали предметом исследования многих авторов (см. обзор [1] и цитированную там литературу).

В [2] автором было доказано, что риманово пространство M удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полуэйнштейновым, либо прямым произведением таких пространств.

Полуэйнштейновы пространства определяются следующим образом. Пусть $T_x^{(0)}$ обозначает пространство дефектности тензора кривизны риманова пространства M в точке x , а $T_x^{(1)}$ – его ортогональное дополнение в касательном пространстве $T_x(M)$, называемое *пространством кодефектности* в этой точке. Соответствующие распределения $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ называются *распределениями дефектности и кодефектности*. Пространства $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ инвариантны относительно тензора Риччи R_1 , и справедливо следующее разложение в прямую сумму:

$$T_x(M) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)}.$$

Размерности

$$\mu_x = \dim T_x^{(0)}, \quad \dim T_x^{(1)} = \dim T_x(M) - \mu_x$$

называются соответственно *индексами дефектности и кодефектности* пространства M в точке x . В дальнейшем будем предполагать, что индекс μ_x является локально постоянным, т.е. $\mu_x = \mu$.

Риманово пространство M называется *полуэйнштейновым*, если в каждой точке x тензор Риччи R_1 имеет на $T_x^{(1)}$ только одно ненулевое собственное

значение (см. [2]). Примерами полуэйнштейновых пространств служат конусы над эйнштейновыми пространствами (см. [3], [4]) и римановы многообразия кодефектности два, которые всесторонне исследовались в [5]. В евклидовом пространстве E_n примеры полуэйнштейновых подмногообразий, имеющих вид конусов над эйнштейновыми пространствами, отличными от пространств постоянной кривизны, получены автором в [4] и [6] (в работе [6] в одном случае это сделано при неявном предположении интегрируемости распределения кодефектности подмногообразия) и Ф. Дефевером (см. [7]).

Настоящая работа посвящена классификации и геометрическому описанию одного класса нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности. Основной результат выражается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в евклидовом пространстве E_n t -мерное нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке $x \in M$ только $q \geq 2$ различных ненулевых главных векторов кривизны $p_1, \dots, p_q$ с кратностями $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно. Если распределение кодефектности $T^{(1)}$ подмногообразия M является интегрируемым с интегральным многообразием $M^{(1)}$, то M локально либо представляет собой цилиндр над $M^{(1)}$, т.е. $M = E_\mu \times M^{(1)}$, где E_μ – плоскость размерности μ , либо имеет вид прямого произведения $E_{\mu-1} \times \tilde{M}$, где $E_{\mu-1}$ – плоскость размерности $\mu - 1$, а $\tilde{M}$ является конусом над $M^{(1)}$, причем в последнем случае $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере пространства E_n и является минимальным в этой гиперсфере.

В обоих случаях $M^{(1)}$ несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из q сфер $S^{p_1}(R), \dots, S^{p_q}(R)$ и (как подмногообразие в E_n) имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым.

Более того, в случае цилиндра $M^{(1)}$ либо представляет собой скрученное произведение указанных сфер, либо является прямым произведением минимальных скрученных произведений различных групп этих сфер.

В случае конуса в зависимости от значения q подмногообразие $M^{(1)}$ характеризуется следующим образом:

(1) при $q = 2$ $M^{(1)}$ есть прямое произведение сфер $S^{p_1}(R), S^{p_2}(R)$ и, кроме того, $p_1 = p_2$;

(2) при $q \geq 3$ $M^{(1)}$ является либо (а) прямым произведением сфер $S^{p_1}(R), \dots, S^{p_q}(R)$, причем в этом случае $p_1 = \dots = p_q$, либо (б) скрученным произведением этих сфер, либо (в) прямым произведением вида $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_\tau$, где N_0 есть прямое произведение некоторых из этих сфер, а $N_1, \dots, N_\tau$ – скрученные произведения различных групп остальных сфер.

В теореме 1 под скрученным произведением сфер имеется в виду такое неприводимое подмногообразие M в E_n , которое локально несет ортогональную сопряженную систему из $q \geq 3$ сфер, вращающихся друг относительно друга при движении вдоль этого подмногообразия.

Отметим, что описываемое в теореме 1 подмногообразие $M^{(1)}$ представляет определенный интерес как эйнштейново подмногообразие коразмерности ≥ 2 . Тензор Риччи цилиндра $E_\mu \times M^{(1)}$ является параллельным. Тензор Риччи произведения $E_{\mu-1} \times \tilde{M}$ является полупараллельным и не удовлетворяет более

сильному условию. Скрученные произведения сфер специального вида ранее были получены в [8], [9] при описании полусимметрических подмногообразий. Скрученные произведения более общего вида рассматривались в [10], [11]. Отметим также, что в последнее время условия $R(X, Y) \cdot R = 0$ и $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ и некоторые их обобщения интенсивно исследуются в полуримановой геометрии и в теории различных классов комплексных и контактных многообразий (см. работы [12]–[18] и цитированную в них литературу).

На протяжении всей статьи мы будем использовать различные понятия, известные результаты и стандартные формулы римановой геометрии, которые можно найти в [19]–[24]. С теорией минимальных подмногообразий можно ознакомиться в известных монографиях [25], [26].

§ 2. Аппарат исследования и редукция некоторых условий

Пусть $O(E_n)$ является главным расслоением ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . отождествляя точку x с ее радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, \quad de_A = \omega_A^B e_B, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \quad A, B, \dots = 1, \dots, n.$$

Отсюда внешним дифференцированием получаются следующие структурные уравнения:

$$d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B.$$

Пусть M является m -мерным подмногообразием в E_n . Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных к M ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $x \in M$, векторы $e_i, i, j, \dots = 1, \dots, m$, принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а векторы $e_\alpha, \alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$, принадлежат нормальному пространству $T_x^\perp(M)$. В силу этого по известной схеме, приведенной, например, в [8], [22], [24], можем прийти к следующим соотношениям:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad (2.1)$$

$$dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha. \quad (2.2)$$

Здесь функции $h_{ij}^\alpha, h_{ijk}^\alpha$, симметричные по нижним индексам, являются компонентами второй и третьей фундаментальных форм α_2 и α_3 соответственно. Действие формы α_2 определяется следующим образом: если $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j$ – произвольные касательные к подмногообразию M векторы, то $\alpha_2(X, Y) = h_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha$. Аналогично определяется действие формы α_3 .

Если $\alpha_2 = 0$, т.е. $h_{ij}^\alpha = 0$, то подмногообразие называется *вполне геодезическим*. Если $h_{ij}^\alpha = \lambda^\alpha \delta_{ij}$ для любого значения α , то подмногообразие называется *вполне омбилическим*. Инвариантно определенный нормальный вектор $H = H^\alpha e_\alpha$, где $H^\alpha = \sum_i h_{ii}^\alpha$ (в целях удобства коэффициент $1/m$ опускаем), называется *вектором средней кривизны* подмногообразия. Если $H = 0$, то подмногообразие называется *минимальным*. *Индексом относительной дефектности* подмногообразия M в точке x называется размерность подпространства T'_x касательного пространства $T_x(M)$, определяемого равенством

$$T'_x = \{X \in T_x(M); \alpha_2(X, Y) = 0 \forall Y \in T_x(M)\}$$

(см. [27]).

В соотношении (2.2) 1-формы ω_j^i определяют на подмногообразии M риманову связность ∇ , а 1-формы ω_β^α определяют связность в нормальном расслоении $T^\perp(M)$, которая называется *нормальной связностью* и обозначается через $\nabla^\perp$. Формы кривизны этих связностей определяются равенствами

$$\begin{aligned}\Omega_i^j &= d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l, \\ \Omega_\alpha^\beta &= d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l,\end{aligned}$$

а их коэффициенты

$$R_{ikl}^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta$$

представляют собой компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно. Действие тензора R определяется следующим образом: если

$$X = X^i e_i, \quad Y = Y^j e_j, \quad Z = Z^k e_k,$$

то

$$R(X, Y)Z = R_{ijk}^l X^i Y^j Z^k e_l.$$

Напомним, что пространство дефектности $T_x^{(0)}$ в точке $x \in M$ определяется следующим равенством:

$$T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M); R(X, Y) = 0 \ \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Справедливо включение $T'_x \subset T_x^{(0)}$ (см. [27]). Отметим также, что $T_x^{(0)}$ всегда содержится в собственном подпространстве тензора Риччи R_1 , отвечающем нулевому собственному значению (см., например, [2]). Если $R = 0$, то подмногообразие называется *локально евклидовым*. При $R^\perp = 0$ нормальная связность называется *плоской*, а само подмногообразие – *нормально плоским*. Компоненты R_{ik} тензора Риччи R_1 определяются по формуле

$$R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha),$$

где H^α – компоненты вектора средней кривизны H .

Пусть нормальная связность подмногообразия M является плоской, т.е. $R_{\alpha kl}^\beta = 0$. В этом случае все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой, и в силу этого в некотором ортонормированном репере они могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Подставляя в формулу для компонент R_{ik} тензора Риччи R_1 , получим

$$R_{ik} = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha] \delta_{ik}.$$

Отсюда следует, что матрица $\|R_{ik}\|$ имеет диагональный вид с диагональными элементами

$$\rho_i = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha]. \quad (2.3)$$

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются *главными векторами кривизны* нормально плюского подмногообразия. Легко видеть, что $H = n_1 + \dots + n_m$. Если $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E_n , то

$$\sum_{\alpha} (\lambda_j^{\alpha})^2 = \langle n_j, n_j \rangle = |n_j|^2, \quad \sum_{\alpha} \lambda_j^{\alpha} \lambda_k^{\alpha} = \langle n_j, n_k \rangle,$$

где вторая сумма есть секционная кривизна в направлении $e_j \wedge e_k$.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским и минимальным, т.е. $H = 0$. Тогда из (2.3) следует, что $\rho_i = |n_j|^2$. На основании этого равенства можем сформулировать следующие утверждения:

а) в евклидовом пространстве E_n нормально плоское минимальное подмногообразие M является полуэйнштейновым тогда и только тогда, когда его ненулевые главные векторы кривизны имеют равные модули;

б) в евклидовом пространстве E_n индекс дефектности нормально плоского минимального подмногообразия в каждой точке равен индексу его относительной дефектности (подробности доказательства см. в [28]).

Итак, пусть M является m -мерным нормально плоским минимальным полуэйнштейновым подмногообразием индекса дефектности μ в E_n , и пусть M имеет q ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ соответственно, $p_1 + \dots + p_q = m - \mu$. Условия минимальности и полуэйнштейновости равносильны соответственно следующим условиям:

$$p_1 n_1 + \cdots + p_q n_q = 0, \quad |n_1|^2 = \cdots = |n_q|^2 = \rho \neq 0. \quad (2.4)$$

Из первого равенства в (2.4) следует, что векторы $n_1, \dots, n_q$ линейно зависимы. Если $\text{rang}(n_1, \dots, n_q) = \delta$, то $\delta \leq n - m$ или $\mu + p_1 + \dots + p_q + \delta \leq n$. Если δ достигает своего наибольшего значения $q - 1$, то $\mu + p_1 + \dots + p_q + q \leq n + 1$. Из условий (2.4) следует также, что при $q \geq 3$ кратности $p_1, \dots, p_q$ “составляют” q -угольник с целочисленными сторонами, который расположен в δ -мерной плоскости. Следовательно, система чисел $p_1, \dots, p_q$ обладает таким свойством: сумма любых $q - 1$ чисел этой системы больше оставшегося q -го числа (это доказано ниже также аналитически).

Пусть $\theta_{\varphi\psi}$, $\varphi, \psi = 1, \dots, q$ обозначает угол между векторами n_φ и n_ψ . Умножая последовательно первое из равенств (2.4) скалярно на $n_1, \dots, n_q$ и сокращая на ρ , получим следующую систему:

[illegible]

Если, например, из первых $q-1$ уравнений этой системы определить $\cos \theta_{1q}, \cos \theta_{2q}, \dots, \cos \theta_{(q-1)q}$ и подставить в последнее уравнение, то получим

$$p_1^2 + \cdots + p_{q-1}^2 + 2p_1p_2 \cos \theta_{12} + \cdots + 2p_{q-2}p_{q-1} \cos \theta_{(q-2)(q-1)} = p_q^2.$$

Тогда

$$p_1^2 + \cdots + p_{q-1}^2 + 2p_1p_2 + \cdots + 2p_{q-2}p_{q-1} > p_q^2$$

Поскольку вектор n_φ имеет кратность p_φ , то будем считать, что $n_{i_\varphi} = n_{j_\varphi} = n_\varphi$ при $i_\varphi \neq j_\varphi$. Тогда $\lambda_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{j_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha$ при $i_\varphi \neq j_\varphi$, хотя в дальнейшем в случае необходимости наряду с записью $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ мы будем использовать также запись λ_a^α . Так как в наших обозначениях главные векторы кривизны n_r нулевые, то $\lambda_r^\alpha = 0$. Условия минимальности и полуэйнштейновости подмногообразия M равносильны соответственно следующим условиям:

$$\sum_{\varphi} p_{\varphi} \lambda_{(\varphi)}^{\alpha} + \sum_u \lambda_u^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} (\lambda_{(\varphi)}^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} (\lambda_u^{\alpha})^2 = \rho. \quad (3.1)$$

В принятых обозначениях матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M принимают следующий вид:

$$\|h_{ij}^{\alpha}\| = \begin{vmatrix} \lambda_{(1)}^{\alpha} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_{(1)}^{\alpha} & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \lambda_{(q)}^{\alpha} & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \lambda_{(q)}^{\alpha} & & & \\ & & & & & & & \lambda_{p+1}^{\alpha} & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_{p+q_1}^{\alpha} \\ & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

В этих матрицах $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha}$ имеет кратность $p_{\varphi} \geq 2$, λ_u^{α} имеет кратность 1, а 0 – кратность $\mu \geq 1$. Остальные элементы этих матриц равны нулю.

Поскольку векторы $n_1, \dots, n_{q+q_1}$ являются ненулевыми, то $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \neq 0$, $\lambda_u^{\beta} \neq 0$ при некоторых значениях индексов α и β . Более того, так как все эти векторы различны, то

$$\lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \neq \lambda_{(\psi)}^{\alpha} \quad (\varphi \neq \psi), \quad \lambda_{(\varphi)}^{\beta} \neq \lambda_u^{\beta}, \quad \lambda_u^{\gamma} \neq \lambda_v^{\gamma} \quad (u \neq v)$$

при некоторых значениях индексов α, β, γ .

Обратно, пусть в некотором поле адаптированного ортонормированного репера к m -мерному подмногообразию M в евклидовом пространстве E_n матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы одновременно приводятся к указанному виду, а их диагональные элементы обладают вышеуказанными свойствами и выполняются условия (3.1). Тогда M является нормально плоским минимальным полуэйнштейновым подмногообразием индекса дефектности $\mu \geq 1$ с q различными ненулевыми главными векторами кривизны кратностей $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно и q_1 ненулевыми однократными главными векторами кривизны.

Пусть $T_x^{(0)}$ – пространство дефектности подмногообразия M в точке x , и пусть $T_x^{(1,\varphi)}$ обозначает p_{φ} -мерное подпространство касательного пространства

$T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет собственное значение $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ кратности p_φ . Через $T_x^{(1,\varphi_1)}$ обозначим одномерное подпространство в $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет собственное значение $\lambda_{p+\varphi_1-q}^\alpha$. Именно в этом смысле будем говорить, что $T_x^{(1,\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим вектору n_φ , а $T_x^{(1,\varphi_1)}$ – собственным подпространством, соответствующим вектору n_{φ_1} . Отметим, что по построению подпространства $T_x^{(1,\varphi)}$ и $T_x^{(1,\varphi_1)}$ имеют максимально возможную размерность, т.е. не допускают расширений, которые обладали бы таким же свойствами, что и $T_x^{(1,\varphi)}$ и $T_x^{(1,\varphi_1)}$. Справедливо следующее разложение в прямую сумму:

$$T_x(M) = T_x^{(1)} + T_x^{(0)} = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + T_x^{(1,q+1)} + \dots + T_x^{(1,q+q_1)} + T_x^{(0)}.$$

В дальнейшем будем считать, что адаптированный ортонормированный репер выбран так, что

$$e_{i_\varphi} \in T_x^{(1,\varphi)}, \quad e_{p+\varphi_1-q} \in T_x^{(1,\varphi_1)}, \quad e_r \in T_x^{(0)}.$$

Далее, поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении, что равносильно условию $\omega_\beta^\alpha = 0$ (см. [23]). В дальнейшем мы будем предполагать, что e_α так и выбраны. Подставляя значения $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$ в (2.1) и (2.2), получим следующие равенства:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \quad (3.2)$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad (3.3)$$

где в левой части (3.3) нет суммирования по i .

ЛЕММА 1. В выбранном выше репере функции h_{ijk}^α удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha &= 0, \quad i_\varphi \neq j_\varphi, \quad h_{rsk}^\alpha = 0, \quad h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = 0, \quad h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha = 0, \quad \varphi \neq \psi, \\ h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha &= h_{j_\varphi j_\varphi u}^\alpha, \quad h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha, \quad i_\varphi \neq j_\varphi, \\ \sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha &= \sum_\alpha \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi u}^\alpha, \quad \sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = \sum_\alpha \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi r}^\alpha, \quad \varphi \neq \chi. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в (3.3)

$$i = i_\varphi, \quad j = j_\varphi, \quad i_\varphi \neq j_\varphi.$$

Тогда левая часть равна нулю, и в силу независимости форм ω^k имеем

$$h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0.$$

Если в (3.3) $i = r, j = s$, то $h_{rsk}^\alpha = 0$ в силу того, что $\lambda_r^\alpha = \lambda_s^\alpha = 0$. Пусть в (3.3) $i = i_\varphi, j = i_\varphi$. Тогда с учетом полученных равенств будем иметь

$$d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha \omega^u + h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r,$$

где в первом слагаемом правой части нет суммирования по индексу i_φ . Если в (3.3) $i = j_\varphi$, $j = j_\varphi$, $j_\varphi \neq i_\varphi$, то точно так же получим

$$d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi} + \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} h_{j_\varphi j_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + h_{j_\varphi j_\varphi u}^\alpha \omega^u + h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha \omega^r,$$

где в первом слагаемом правой части нет суммирования по индексу j_φ . Сравнивая полученные равенства, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha &= 0, & h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha &= h_{j_\varphi j_\varphi u}^\alpha, & h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha &= h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha, & i_\varphi &\neq j_\varphi, \\ h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha &= h_{j_\varphi j_\varphi j_\psi}^\alpha, & i_\varphi &\neq j_\varphi, & \psi &\neq \varphi, \\ d\lambda_{(\varphi)}^\alpha &= \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha \omega^u + h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Умножая равенство (3.4) на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , получим (см. (3.1))

$$\frac{1}{2} d\rho = \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha \right) \omega^{j_\psi} + \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha \omega^u + \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r. \quad (3.5)$$

Из этого равенства следует, что фактически его правая часть не зависит ни от субиндекса φ , ни от индекса i_φ , т.е.

$$\frac{1}{2} d\rho = \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \chi)}} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi j_\psi}^\alpha \right) \omega^{j_\psi} + \sum_{\alpha} \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi u}^\alpha \omega^u + \sum_{\alpha} \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi r}^\alpha \omega^r,$$

где $\chi \neq \varphi$. Сравнивая это равенство с (3.5), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi u}^\alpha &= \sum_{\alpha} \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi u}^\alpha, & \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha &= \sum_{\alpha} \lambda_{(\chi)}^\alpha h_{j_\chi j_\chi r}^\alpha, \\ \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha &= 0, & \psi &\neq \varphi. \end{aligned} \quad (*)$$

Если в (3.3) положить $i = i_\varphi$, $j = j_\psi$, $\varphi \neq \psi$, то будем иметь

$$(\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + h_{i_\varphi j_\psi k}^\alpha \omega^k, \quad (3.6)$$

где в правой части нет суммирования по индексу i_φ , а индекс k не принимает значений j_φ . Умножая это равенство на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , а также учитывая (*), получим

$$\rho(\cos \theta_{\varphi\psi} - 1) \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi j_\psi k}^\alpha \omega^k,$$

где $k \neq j_\varphi$. Поскольку $n_\varphi \neq n_\psi$, то выражение в круглых скобках отлично от нуля, и мы приходим к выводу, что форма $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi}$ не зависит от ω^{i_φ} . Аналогично доказывается, что $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi}$ не зависит также от ω^{j_ψ} . Отсюда следует, что $h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Справедлива следующая система соотношений:*

$$(\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j\psi}^{i\varphi} = \sum_{\substack{\chi \\ (\chi \neq \varphi, \chi \neq \psi)}} h_{i\varphi j\psi k\chi}^\alpha \omega^{k\chi} + h_{i\varphi j\psi u}^\alpha \omega^u + h_{i\varphi j\psi r}^\alpha \omega^r, \quad \varphi \neq \psi, \quad (3.7)$$

$$(\lambda_u^\alpha - \lambda_v^\alpha) \omega_u^v = h_{uvk}^\alpha \omega^k, \quad (3.8)$$

$$(\lambda_{(\varphi)}^\alpha - \lambda_u^\alpha) \omega_{j\varphi}^u = h_{uj\varphi k}^\alpha \omega^k, \quad (3.9)$$

$$\lambda_u^\alpha \omega_u^r = h_{ura}^\alpha \omega^a + h_{urv}^\alpha \omega^v \quad (3.10)$$

$$\lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega_{j\varphi}^r = h_{rj\varphi a}^\alpha \omega^a + h_{rj\varphi u}^\alpha \omega^u, \quad (3.11)$$

$$d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{i\varphi i\varphi u}^\alpha \omega^u + h_{i\varphi i\varphi r}^\alpha \omega^r, \quad (3.12)$$

$$d\lambda_u^\alpha = h_{uuk}^\alpha \omega^k, \quad (3.13)$$

где в левых частях (3.8) и (3.9) нет суммирования по индексам v и u соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (3.7) и (3.12) следуют соответственно из (3.6) и (3.4) с учетом того, что $h_{i\varphi i\varphi j\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Равенства (3.8)–(3.11) и (3.13) получаются из (3.3) при соответствующих значениях индексов i и j . Например, если в (3.3) $i = r$, $j = u$, то получаем (3.10), где учтено, что $h_{rsk}^\alpha = 0$. Лемма доказана.

Умножая (3.11) на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , получим

$$\omega_{j\varphi}^r = F_r \omega^{j\varphi} + \frac{1}{\rho} \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{rj\varphi j\psi}^\alpha \right) \omega^{j\psi} + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{rj\varphi u}^\alpha \right) \omega^u, \quad (3.14)$$

где

$$F_r = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{j\varphi j\varphi r}^\alpha.$$

Из последнего равенства в формулировке леммы 1 следует, что функции F_r не зависят ни от значения субиндекса φ , ни от значения индекса $j\varphi$.

Далее, если умножить (3.12) на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и просуммировать по α , а затем разделить на ρ , то получим

$$\frac{1}{2} d \ln \rho = G_u \omega^u + F_r \omega^r, \quad (3.15)$$

где

$$G_u = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i\varphi i\varphi u}^\alpha.$$

Из предпоследнего равенства в формулировке леммы 1 следует, что функции G_u также не зависят ни от значения субиндекса φ , ни от значения индекса $i\varphi$.

Если (3.9) умножить на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и просуммировать по α , а затем разделить на ρ , то получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta_{\varphi\psi_u}) \omega_{j\varphi}^u &= G_u \omega^{j\varphi} + \frac{1}{\rho} \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{uj\varphi j\psi}^\alpha \right) \omega^{j\psi} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{uj\varphi v}^\alpha \right) \omega^v + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{uj\varphi r}^\alpha \right) \omega^r, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\psi_u = u - p + q$, $\theta_{\varphi\psi_u} = n_{\varphi} \wedge n_{u-p+q}$ и в левой части нет суммирования по u .

ЛЕММА 3. *Распределение $T^{(1,\varphi)}$ является интегрируемым, а его интегральное многообразие представляет собой p_φ -мерную сферу $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$. Если подмногообразие M не имеет однократных главных векторов кривизны, то все сферы имеют один и тот же радиус R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распределение $T^{(1,\varphi)}$ задается следующей пфафовой системой:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^{i\psi} = 0, \quad \psi \neq \varphi, \quad \omega^u = 0, \quad \omega^r = 0. \quad (3.17)$$

При выполнении этих условий (3.7), (3.14), (3.16) принимают соответственно следующий вид:

$$\omega_{i\varphi}^{j\psi} = 0, \quad \omega_{j\varphi}^r = F_r \omega^{j\varphi}, \quad \omega_{j\varphi}^u = \frac{G_u}{1 - \cos \theta_{\varphi\psi_u}} \omega^{j\varphi},$$

где первое равенство получено из (3.7) на основании того, что $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq \lambda_{(\psi)}^\alpha$ хотя бы при одном значении индекса α . Так как, кроме того, $\omega_{j\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{j\varphi}$, то непосредственно проверяется, что

$$d\omega^\alpha = 0, \quad d\omega^{i\psi} = 0, \quad d\omega^u = 0, \quad d\omega^r = 0.$$

Отсюда следует, что система (3.17) вполне интегрируема. Из выражений для $\omega_{i\varphi}^{j\psi}$, $\omega_{j\varphi}^r$, $\omega_{j\varphi}^u$, $\omega_{j\varphi}^\alpha$ следует, что интегральное многообразие системы (3.17) является вполне омбилическим в E_n (но не вполне геодезическим, так как $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$ при некотором значении индекса α), т.е. локально представляет собой p_φ -мерную сферу $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$. Поскольку вектор средней кривизны H_φ этой сферы определяется равенством

$$H_\varphi = \lambda_{(\varphi)}^\alpha e_\alpha + G_\varphi^u e_u + \sum_r F_r e_r,$$

где

$$G_\varphi^u = G_u \cdot (1 - \cos \theta_{\varphi\psi_u})^{-1},$$

то для радиуса R_φ получаем следующую формулу:

$$R_\varphi^2 = \frac{1}{|H_\varphi|^2} = \left(\rho + \sum_u (G_\varphi^u)^2 + \sum_r F_r^2 \right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что значение радиуса R_φ зависит от φ . Если подмногообразие M не имеет однократных главных векторов кривизны, то множество значений индекса u является пустым, и последнее равенство будет иметь следующий вид:

$$R_\varphi^2 = \left(\rho + \sum_r F_r^2 \right)^{-1}.$$

Поскольку правая часть не зависит от φ , то $R_1 = R_2 = \dots = R_q = R$, т.е. все сферы имеют один и тот же радиус. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Распределение $T^{(0)}$ является интегрируемым, а его интегральное многообразие $M^{(0)}$ представляет собой μ -мерную плоскость.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распределение $T^{(0)}$ задается пфафовой системой

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^a = 0, \quad \omega^u = 0. \quad (3.18)$$

Из (3.10) и (3.14) следует, что в этом случае $\omega_r^u = 0$ (так как $\lambda_u^\alpha \neq 0$ при некотором значении индекса α) и $\omega_a^r = 0$. Поскольку, кроме того, $\omega_r^\alpha = 0$, то легко проверяется, что $d\omega^\alpha = 0$, $d\omega^a = 0$, $d\omega^u = 0$, и система (3.18) вполне интегрируема. Из этих же равенств следует, что вторая фундаментальная форма интегрального многообразия $M^{(0)}$ распределения $T^{(0)}$ нулевая. Это значит, что $M^{(0)}$ является вполне геодезическим подмногообразием в E_n , т.е. представляет собой μ -мерную плоскость. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. На подмногообразии M распределение

$$\tilde{T}^{(1)} = T^{(1,1)} + \dots + T^{(1,q)},$$

сопоставляющее каждой точке $x \in M$ прямую сумму

$$\tilde{T}_x^{(1)} = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)},$$

является интегрируемым тогда и только тогда, когда распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны друг относительно друга в направлении подпространства

$$P_x = T_x^{(1,q+1)} + \dots + T_x^{(1,q+q_1)} + T_x^{(0)}.$$

Если $q = 2$ и $\tilde{T}^{(1)}$ интегрируемо, то распределения $T^{(1,1)}$ и $T^{(1,2)}$ параллельны на всем M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распределение $\tilde{T}^{(1)}$ задается пфафовой системой

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^u = 0, \quad \omega^r = 0. \quad (3.19)$$

Предположим, что эта система вполне интегрируема, и через $M^{(1)}$ обозначим ее интегральное многообразие. Поскольку $\omega_r^\alpha = 0$ и $\omega_u^\alpha = \lambda_u^\alpha \omega^u$ (нет суммирования), то в силу (3.19) $\omega_u^\alpha = 0$ и, следовательно, $T^\perp(M)$ и $T^{(1,q+1)} + \dots + T^{(1,q+q_1)} + T^{(0)}$ как подрасслоения нормального расслоения подмногообразия $M^{(1)}$ параллельны в нормальном расслоении; кроме того, связность в $T^\perp(M)$, как мы знаем, плоская. Так как векторные поля e_α в силу их выбора являются параллельными в нормальном расслоении на M , то они будут параллельными и в нормальном расслоении на $M^{(1)}$. Тогда они будут коммутируемыми в смысле работы [29]. Это значит, что матрицы $\|\bar{h}_{ab}^\alpha\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$, соответствующие векторам e_α , коммутируют со всеми остальными матрицами второй фундаментальной формы этого подмногообразия и, в частности, со всеми матрицами $\|\bar{h}_{ab}^u\|$ и $\|\bar{h}_{ab}^r\|$, которые соответствуют нормальным к $M^{(1)}$ векторам e_u и e_r соответственно. Из (3.11) следует, что если $\lambda_{(\varphi)}^\alpha = 0$, то $h_{rj_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\psi \neq \varphi$. Если же $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$, то из (3.11) получаем

$$\omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi} + \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^{-1} h_{rj_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi},$$

где правая часть фактически не зависит от α . Из этого равенства следует, что каждая матрица $\|\bar{h}_{ab}^r\|$ имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \boxed{\begin{matrix} F_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_r \end{matrix}} & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} F_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_r \end{matrix}} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} F_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_r \end{matrix}} & & & & \end{array} \right\|, \quad (3.20)$$

где на остальных местах стоят элементы вида $(\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^{-1} h_{rj_\varphi j_\psi}^\alpha$. Поскольку $\omega_a^\alpha = \lambda_a^\alpha \omega^a$ (нет суммирования), то матрицы $\|\bar{h}_{ab}^\alpha\|$ имеют диагональный вид с диагональными элементами λ_a^α соответствующей кратности. Подпространства $T_x^{(1,\varphi)}$ являются инвариантными подпространствами этих матриц, причем каждая матрица $\|\bar{h}_{ab}^\alpha\|$ имеет на $T_x^{(1,\varphi)}$ только одно собственное значение $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$. Так как матрицы $\|\bar{h}_{ab}^r\|$ коммутируют со всеми матрицами $\|\bar{h}_{ab}^\alpha\|$, то подпространства $T_x^{(1,\varphi)}$ будут инвариантными также и для матриц $\|\bar{h}_{ab}^r\|$. Отсюда следует, что в выбранном репере матрицы $\|\bar{h}_{ab}^r\|$ должны иметь блочно-диагональный вид. Следовательно, в матрице (3.20) указанные диагональные блоки остаются, а все остальные элементы равны нулю, т.е. $h_{rj_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Так как $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq \lambda_u^\alpha$ при некотором значении индекса α , то из (3.9) (с учетом условий (3.19)) получаем

$$\omega_{j_\varphi}^u = \tilde{G}_\varphi^u \omega^{j_\varphi} + (\lambda_{(\varphi)}^\alpha - \lambda_u^\alpha)^{-1} \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} h_{uj_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi},$$

где $\tilde{G}_\varphi^u = (\lambda_{(\varphi)}^\alpha - \lambda_u^\alpha)^{-1} h_{uj_\varphi j_\psi}^\alpha$. Отсюда следует, что матрицы $\|\bar{h}_{ab}^u\|$ имеют такой же вид, как и (3.20), но с диагональными элементами $\tilde{G}_\varphi^u$ в соответствующих блоках. На остальных местах стоят элементы вида $(\lambda_{(\varphi)}^\alpha - \lambda_u^\alpha)^{-1} h_{uj_\varphi j_\psi}^\alpha$. Поскольку матрицы $\|\bar{h}_{ab}^u\|$ коммутируют с матрицами $\|\bar{h}_{ab}^r\|$, то, рассуждая, как и выше, получим, что $h_{uj_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Тогда из (3.7) следует, что

$$(\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_\varphi^\alpha) \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = \sum_{\substack{\chi \\ (\chi \neq \varphi, \chi \neq \psi)}} h_{i_\varphi j_\psi k_\chi}^\alpha \omega^{k_\chi}, \quad \varphi \neq \psi. \quad (3.21)$$

Поскольку $\lambda_\varphi^\alpha \neq \lambda_{(\psi)}^\alpha$ при некотором значении α , то из этого равенства получаем, что $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0$ при $\omega^{k_\chi} = 0$. Это и значит, что распределения $T^{(1,\varphi)}$, $T^{(1,\psi)}$ при $\varphi \neq \psi$ параллельны друг относительно друга в направлении подпространства P_x . Если $q = 2$, то множество значений индекса k_χ пусто и, следовательно,

$\omega_{j_2}^{i_1} = 0$. Это и значит, что распределения $T^{(1,1)}$, $T^{(1,2)}$ параллельны друг относительно друга на всем подмногообразии M . Обратно, если $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0$ при $\omega^{k_x} = 0$, $\varphi \neq \psi$, то из (3.7) следует, что $h_{ui_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$, $h_{ri_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Если $q = 2$, то при $\omega_{j_2}^{i_1} = 0$ имеем $h_{ui_1 j_2}^\alpha = 0$, $h_{ri_1 j_2}^\alpha = 0$. Покажем, что при выполнении этих условий система (3.19) вполне интегрируема. Действительно, поскольку $\omega_a^\alpha = \lambda_a^\alpha \omega^a$ (нет суммирования), то легко проверяется, что $d\omega^\alpha = 0$. Далее, в силу условий (3.19) и условия $h_{ui_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$, $\varphi \neq \psi$, из (3.16) следует, что $\omega_{j_\varphi}^u = G_\varphi^u \omega^{j_\varphi}$. Следовательно,

$$d\omega^u = \sum_\varphi \omega^{j_\varphi} \wedge \omega_{j_\varphi}^u = 0.$$

Точно так же с использованием условий (3.19), (3.14) и условия $h_{ri_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$, $\varphi \neq \psi$, легко показать, что $d\omega^r = 0$. Следовательно, система (3.19) вполне интегрируема. Лемма доказана.

В ходе доказательства леммы 5 фактически было доказано, что в выбранном на подмногообразии M репере равенства $h_{ui_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$, $h_{ri_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$ являются необходимыми и достаточными условиями как интегрируемости распределения $\tilde{T}^{(1)}$, так и параллельности распределений $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ друг относительно друга в направлении подпространства P_x .

ЛЕММА 6. Пусть распределение $\tilde{T}^{(1)}$, определенное на подмногообразии M , как в лемме 5, является интегрируемым. Тогда его интегральное многообразие $M^{(1)}$ имеет плоскую нормальную связность. Если подмногообразие M не имеет однократных главных векторов кривизны, то $M^{(1)}$ является эйнштейновым подмногообразием в E_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку распределение $\tilde{T}^{(1)}$ задается системой (3.19) и, кроме того, $h_{ui_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$, $h_{ri_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$, то $\omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi}$, $\omega_{j_\varphi}^u = G_\varphi^u \omega^{j_\varphi}$ и, как мы знаем, $\omega_{j_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{j_\varphi}$. Следовательно, все матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$ одновременно приведены к диагональному виду. Согласно теореме Картана (см. [23]) подмногообразие $M^{(1)}$ имеет плоскую нормальную связность. Тензор Риччи подмногообразия $M^{(1)}$ также имеет диагональный вид (см. § 2) с диагональными элементами $\tilde{\rho}_a$, которые можно вычислить следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{n}_a &= \lambda_a^\alpha e_\alpha + G_a^u e_u + F^r e_r, \\ \tilde{H} &= \left(\sum_b \lambda_b^\alpha \right) e_\alpha + \left(\sum_c G_c^u \right) e_u + (p_1 + \dots + p_q) F^r e_r, \end{aligned} \quad (3.22)$$

(где $F^r = F_r$), обозначают соответственно главные векторы кривизны и вектор средней кривизны подмногообразия $M^{(1)}$, где $G_a^u = G_\varphi^u$ при $a = i_\varphi$ (функции G_φ^u определены при доказательстве леммы 3). Тогда, проводя вычисления по общей формуле (2.3), получим

$$\tilde{\rho}_a = \sum_\alpha \left\{ (\lambda_a^\alpha)^2 - \sum_b \lambda_a^\alpha \lambda_b^\alpha \right\} + \sum_u \left\{ (G_a^u)^2 - \sum_c G_a^u G_c^u \right\} - (p_1 + \dots + p_q - 1) \sum_r (F^r)^2.$$

Так как в этой формуле правая часть существенно зависит от индекса a , то подмногообразие $M^{(1)}$, вообще говоря, не является эйнштейновым. Если подмногообразие M не имеет однократных главных векторов кривизны, то $\lambda_u^\alpha = 0$, $\sum_a \lambda_a^\alpha = 0$ (см. (3.1)) и $G_a^u = 0$. Тогда

$$\tilde{\rho}_a = \rho - (p_1 + \dots + p_q - 1) \sum_r (F^r)^2 \quad (3.23)$$

для любого значения a , и подмногообразие $M^{(1)}$ является эйнштейновым. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в формуле (3.23) случай $\tilde{\rho}_a = 0$ не исключается. В этом случае $M^{(1)}$ является риччи-плоским. Если в (3.23) $F^r = 0$, то $M^{(1)}$ – эйнштейново подмногообразие с ненулевой эйнштейновой константой ρ .

ЛЕММА 7. Если на подмногообразии M распределение $\tilde{T}^{(1)}$ интегрируемо и $q \geq 3$, то его интегральное многообразие $M^{(1)}$ является либо прямым произведением сфер $S^{p_1}(R_1), \dots, S^{p_q}(R_q)$, либо скрученным произведением этих сфер, либо прямым произведением вида $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_\tau$, где N_0 есть прямое произведение некоторых из этих сфер, а $N_1, \dots, N_\tau$ представляют собой скрученные произведения различных групп остальных сфер. При $q = 2$ $M^{(1)}$ всегда является прямым произведением сфер $S^{p_1}(R_1), S^{p_2}(R_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0$ при $\varphi \neq \psi$, то распределения $T^{(1,\varphi)}$ параллельны на $M^{(1)}$. Поскольку все матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(1)}$ имеют диагональный вид (лемма 6), то распределения $T^{(1,\varphi)}$ сопряжены относительно этой формы. Следовательно (см. [30]), $M^{(1)}$ является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. сфер $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$. Далее, из (3.21) следует, что если $q \geq 3$, то, вообще говоря, $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi} \neq 0$ при $\varphi \neq \psi$. Геометрически это означает, что подпространства $T_x^{(1,\varphi)}$, а следовательно, и сферы $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$ вращаются друг относительно друга при движении вдоль подмногообразия $M^{(1)}$. В этом случае говорят, что $M^{(1)}$ является скрученным произведением сфер $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$. Если из распределений $T^{(1,\varphi)}$ можно составить попарно непересекающиеся суммы, которые параллельны на $M^{(1)}$ друг относительно друга, то $M^{(1)}$ будет иметь вид прямого произведения, указанного в формулировке леммы. Последнее утверждение леммы следует из того, что при $q = 2$ распределения $T^{(1,1)}$ и $T^{(1,2)}$ всегда параллельны на $M^{(1)}$ (лемма 5). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку две сферы не могут образовать скрученного произведения, то, говоря о скрученном произведении сфер, мы будем предполагать, что оно образовано не менее чем тремя сферами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [28] рассматривался частный случай теоремы 1, когда распределение $\tilde{T}^{(1)}$ совпадает с распределением кодефектности $T^{(1)}$, а распределения $T^{(1,\varphi)}$ параллельны друг относительно друга, но не относительно $T^{(0)}$. Было доказано, что в этом случае главные векторы кривизны $n_1, \dots, n_q$ образуют между собой попарно равные углы и, как следствие, имеют равные кратности, т.е. $p_1 = \dots = p_q$ (см. § 2).

На основании доказанных выше лемм приходим к следующему важному заключению: если в евклидовом пространстве E_n нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет $q \geq 2$ различных ненулевых главных векторов кривизны кратностей $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ и распределение $\tilde{T}^{(1)}$, определенное в лемме 5, интегрируемо, то M локально допускает $(p_1 + \dots + p_q)$ -мерное слоение, слои которого описываются леммой 7. Если M не имеет ненулевых однократных главных векторов кривизны, то распределение $\tilde{T}^{(1)}$ совпадает с распределением кодефектности $T^{(1)}$. Отметим, что в последнем случае равенство $q = 1$ невозможно (так как подмногообразие M не будет минимальным), и потому мы рассматриваем случай $q \geq 2$.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Ряд утверждений теоремы 1 доказан фактически в леммах 3–7. Здесь мы докажем остальные утверждения теоремы и при одном дополнительном условии (см. (4.3)) обсудим вопрос существования такого подмногообразия.

Пусть подмногообразие M не имеет ненулевых однократных главных векторов кривизны, т.е. $q_1 = 0$. В этом случае распределение $\tilde{T}^{(1)}$, определенное в лемме 5, совпадает с распределением кодефектности $T^{(1)}$, а его интегральное многообразие $M^{(1)}$ фактически является интегральным многообразием для $T^{(1)}$.

Поскольку при $q_1 = 0$ множество значений индексов $u, v, \dots, \varphi_1, \psi_1, \dots$ пусто и $h_{rj\varphi j\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$, то из (3.12), (3.14) и (3.7) получаем соответственно следующие равенства:

$$d \ln |\lambda_{(\varphi)}^\alpha| = F_r \omega^r, \quad (4.1)$$

$$\omega_{j\varphi}^r = F_r \omega^{j\varphi}, \quad (4.2)$$

$$(\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j\psi}^{i\varphi} = \sum_{\substack{\chi \\ (\chi \neq \varphi, \chi \neq \psi)}} h_{i\varphi j\psi k\chi}^\alpha \omega^{k\chi}, \quad \varphi \neq \psi. \quad (4.3)$$

Здесь равенство (4.1) получено следующим образом. Если в (3.11) $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$, то, разделив (3.11) на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и сравнивая полученное равенство с (3.14), получим, что

$$F_r = (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^{-1} h_{rj\varphi j\varphi}^\alpha,$$

где правая часть фактически не зависит от φ . Если теперь (3.12) разделить на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$, то получим (4.1).

Из (4.1) следует, что собственные значения $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ при всевозможных значениях индексов α и φ различаются между собой на постоянные множители.

Из (4.2) следует, что $M^{(1)}$ является вполне омбилическим подмногообразием в M . Как мы знаем (лемма 6), $M^{(1)}$ как подмногообразие в E_n имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым. Поскольку $\omega_r^\alpha = 0$, то $T^{(0)}$ как подрасслоение нормального расслоения для $M^{(1)}$ является параллельным, и, следовательно, в нем индуцируется плоская нормальная связность. Тогда нормальные к $M^{(1)}$ векторные поля e_r в $T^{(0)}$ можно выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении подмногообразия $M^{(1)}$. При

таком выборе полей e_r получим $\omega_r^s = 0$ (при $\omega_r = 0$). Поскольку в общем случае $\omega_r^s = \Gamma_{rk}^s \omega^k$, то $\Gamma_{ra}^s = 0$ и, следовательно, $\omega_r^s = \Gamma_{rt}^s \omega^t$.

Дифференцируя внешним образом (4.1) и (4.2) и применяя лемму Картана, получим

$$\begin{aligned} dF_r - F_s \omega_r^s &= A_{rs} \omega^s, & A_{rs} &= A_{sr} \\ dF_r - F_s \omega_r^s - F_r F_s \omega^s &= B_r \omega^{j\varphi}. \end{aligned}$$

Поскольку левая часть второго равенства не зависит ни от φ , ни от $j\varphi$, то $B_r = 0$ и, следовательно, $A_{rs} = F_r F_s$. Подставляя значение ω_r^s , окончательно получим

$$dF_r = (F_s \Gamma_{rt}^s + F_r F_t) \omega^t. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что функции F_r постоянны на $M^{(1)}$. Так как e_r параллельны в нормальном расслоении на $M^{(1)}$, то нормальное к $M^{(1)}$ векторное поле $\xi = F^r e_r$, где $F^r = F_r$, также параллельно в нормальном расслоении на $M^{(1)}$. Поэтому, выбирая e_m так, что $\xi = \eta e_m$, получим $F_t = 0$ при $t \neq m$ и $F_m = \eta$.

Пусть $\eta = 0$. Тогда $F_t = 0$ для любого значения индекса t , а из (4.2) следует, что $\omega_{j\varphi}^r = 0$. Последнее условие означает параллельность распределений $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ на подмногообразии M . В силу сопряженности этих распределений относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M заключаем, что M локально является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. $M = E_\mu \times M^{(1)}$, где E_μ – интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$, которое является μ -мерной плоскостью (лемма 4). Следовательно, в этом случае подмногообразие M представляет собой цилиндр над эйнштейновым подмногообразием $M^{(1)}$ (см. замечание 1) с μ -мерными плоскими образующими и является минимальным тогда и только тогда, когда $M^{(1)}$ является минимальным. Вектор средней кривизны $\tilde{H}$ подмногообразия $M^{(1)}$ определяется, как мы знаем, по формуле (3.22). Так как множество значений индекса i пусто, то, учитывая (3.1), получим

$$\tilde{H} = (p_1 + \dots + p_q) F^r e_r = (p_1 + \dots + p_q) \eta e_m = 0.$$

Следовательно, $M^{(1)}$ является минимальным. Локальная структура $M^{(1)}$ описывается леммой 7. Поскольку прямое произведение подмногообразий является минимальным тогда и только тогда, когда каждое из подмногообразий минимально, а сферы не являются минимальными подмногообразиями, то $M^{(1)}$ либо представляет собой скрученное произведение сфер одного и того же радиуса (см. лемму 3), либо является прямым произведением минимальных скрученных произведений сфер (одного и того же радиуса). Из (4.1) следует, что при $\eta = 0$ собственные значения $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ являются постоянными, кроме того, они удовлетворяют следующим условиям (см. (3.1)):

$$\sum_{\varphi} p_{\varphi} \lambda_{(\varphi)}^\alpha = 0, \quad \sum_{\varphi} (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^2 = \rho. \quad (4.5)$$

Первое из этих условий равносильно, как мы знаем, условию минимальности M , а второе – условию его полуэйнштейновости. Подмногообразие M , которое в настоящем случае является цилиндром над $M^{(1)}$, определяется следующей пфаффовской системой:

$$\begin{aligned} \omega^\alpha &= 0, & \omega_\beta^\alpha &= 0, & \omega_r^\alpha &= 0, & \omega_s^r &= 0, & \omega_{j\varphi}^r &= 0, \\ \omega_{i\varphi}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(Ниже, при условии (4.3), мы докажем интегрируемость более общей пфаффово-вой системы (4.12), из которой система (4.6) получается при $\eta = 0$.) Отметим, что, вообще говоря, система (4.6) определяет цилиндр над скрученным произведением сфер (при $p_\varphi \geq 2$). Условия (4.5) на постоянные $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ являются необходимыми и достаточными условиями, чтобы этот цилиндр был минимальным и полуэйнштейновым.

Покажем, что постоянные, удовлетворяющие условиям (4.5), всегда существуют. Действительно, пусть в $(n-m)$ -мерном евклидовом пространстве q -угольник имеет целочисленные стороны $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$, где $q \leq n - m + 1$, и определенную ориентацию. Если последовательно на каждой стороне q -угольника отложить по одному единичному вектору, то получим систему векторов $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_q$, которые удовлетворяют условию $p_1 \tilde{n}_1 + \dots + p_q \tilde{n}_q = 0$. Умножая это равенство на постоянную $\sqrt{\rho}$, где $\rho > 0$, получим систему векторов $\sqrt{\rho} \tilde{n}_1, \dots, \sqrt{\rho} \tilde{n}_q$, координаты $\tilde{\lambda}_{(\varphi)}^\alpha$ которых удовлетворяют условиям (4.5).

Теперь рассмотрим случай, когда $M^{(1)}$ является прямым произведением минимальных скрученных произведений сфер одного и того же радиуса. В целях ясности, но не умаляя общности, можем предположить, что $q = 6$. Пусть рас-пределения

$$T_1 = T^{(1,1)} + T^{(1,2)} + T^{(1,3)}, \quad T_2 = T^{(1,4)} + T^{(1,5)} + T^{(1,6)}$$

параллельны на $M^{(1)}$ (см. доказательство леммы 7). Тогда $M^{(1)}$ является прямым произведением их интегральных многообразий M_1 и M_2 , которые являются минимальными скрученными произведениями трех сфер каждое. Параллельность T_1 и T_2 аналитически выражается равенством $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0$ при $\varphi = 1, 2, 3$ и $\psi = 4, 5, 6$. Для задания подмногообразия M это уравнение необходимо добавить к системе (4.6). Условие его интегрируемости, как легко показать, имеет следующий вид:

$$\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha = 0 \quad (**)$$

для тех же значений индексов φ и ψ . Это условие имеет двоякий геометрический смысл: (а) равенство нулю секционных кривизн между скрученными произведениями M_1 и M_2 ; (б) ортогональность главных векторов кривизны n_1, n_2, n_3 к главным векторам кривизны n_4, n_5, n_6 . Из последнего следует, что $n_1 + n_2 + n_3 = 0, n_4 + n_5 + n_6 = 0$. Постоянные, удовлетворяющие условиям (4.5) и (**), всегда существуют. Действительно, чтобы найти такие постоянные, достаточно во взаимно ортогональных подпространствах (размерностей ≥ 2) $(n-m)$ -мерного евклидова пространства построить многоугольники с целочисленными сторонами и векторы, как это было описано выше. Координаты этих векторов и будут удовлетворять указанным условиям.

Пусть $\eta \neq 0$. отождествляя точку $x \in M^{(1)}$ с радиус-вектором, будем иметь

$$d\left(x + \frac{1}{\eta} e_m\right) = \omega^a e_a + \frac{1}{\eta} \omega_m^a e_a = \omega^a e_a + \frac{1}{\eta} (-\eta \omega^a e_a) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x + \frac{1}{\eta} e_m = \text{const},$$

и, следовательно, подмногообразие $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере $S^{n-1}(\tilde{R})$ пространства E_n , для которой вектор e_m является нормальным.

Поскольку ηe_m представляет собой вектор средней кривизны для $M^{(1)}$, то $M^{(1)}$ минимально в $S^{n-1}(\tilde{R})$ (но не минимально в E_n). Далее, так как $F_m = \eta > 0$ и $F_r = 0$ при $r \neq m$, то из (4.4) следует, что $\Gamma_{rt}^m = 0$. Следовательно, $\omega_r^m = 0$, и так как $\omega_{j\varphi}^r = 0$ при $r \neq m$ (что следует из (4.2)), то распределение K , сопоставляющее каждой точке подмногообразия M линейную оболочку $\mu - 1$ векторов e_r , $r \neq m$, является параллельным на M и вполне интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой $(\mu - 1)$ -мерную плоскость, которую обозначим через $E_{\mu-1}$. Ортогональное дополнение к K_x в касательном пространстве $T_x(M)$ имеет вид

$$T_x^{(1)} + L_x = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + L_x,$$

где L_x – прямая с направляющим вектором e_m . Соответствующее распределение $T^{(1)} + L$ также параллельно на M и вполне интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через $\tilde{M}$. В силу сопряженности распределений K и $T^{(1)} + L$ относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M заключаем, что M локально является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. $M = E_{\mu-1} \times \tilde{M}$. Здесь $\tilde{M}$ представляет собой $(p_1 + \dots + p_q + 1)$ -мерное полуэйнштейново подмногообразие некоторого $(n - \mu + 1)$ -мерного евклидова пространства.

Покажем, что $\tilde{M}$ является конусом над $M^{(1)}$. Действительно, поскольку $de_m = -\eta\omega^a e_a$, то $e_m = \text{const}$ при $\omega^a = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{M}$ является либо конусом (с исключенной точечной вершиной, ибо в ней теряется регулярность), либо цилиндром над подмногообразием $M^{(1)}$ с образующей L_x в каждой точке. Поскольку $\eta \neq 0$, то $\tilde{M}$ может быть только конусом. Далее, так как $E_{\mu-1}$ является плоскостью, то в качестве локальных координат на $E_{\mu-1}$ можем взять декартовы прямоугольные координаты. Тогда $\omega_s^r = 0$ для всех значений индексов i , следовательно, $\Gamma_{st}^r = 0$ для любых значений индексов r, s, t . На подмногообразии $\tilde{M}$ интегральное многообразие распределения L есть прямая с направляющим вектором e_m . Обозначим через x^m координату на этой прямой. Так как $d\omega^m = 0$ (что легко проверить), то можем считать, что $\omega^m = dx^m$. Если в (4.4) $r = m$, то получается уравнение $d\eta = \eta^2 dx^m$. Интегрируя его, находим

$$\eta = \frac{1}{C - x^m}, \quad (4.7)$$

где C – постоянная интегрирования. Подстановка в (4.1) приводит к формуле

$$\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \frac{C_\varphi^\alpha}{C - x^m}, \quad (4.8)$$

где C_φ^α – постоянные интегрирования. На основании (3.15) и (3.1) получаем следующие соотношения:

$$\rho = \frac{\sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2}{(C - x^m)^2}, \quad (4.9)$$

$$\sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2 = \sum_\alpha (C_\psi^\alpha)^2, \quad \varphi \neq \psi, \quad (4.10)$$

$$\sum_\varphi p_\varphi C_\varphi^\alpha = 0. \quad (4.11)$$

Постоянные C_φ^α , удовлетворяющие условиям (4.10) и (4.11), можно выбирать так же, как и постоянные, удовлетворяющие условиям (4.5), как это было описано выше. Вычисляя эйнштейнову константу подмногообразия $M^{(1)}$ по формуле (3.23), получим

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_a = \rho - (p_1 + \dots + p_q - 1)\eta^2 = \frac{\sum_\alpha (C_{(\varphi)}^\alpha)^2 - (p_1 + \dots + p_q - 1)}{(C - x^m)^2}.$$

Из этой формулы следует, что путем выбора постоянных C_φ^α величину $\tilde{\rho}$ можно сделать как равной нулю, так и отличной от нуля. Так как x^m является координатой на образующей конуса, то вдоль образующей $\tilde{\rho}$ изменяется, а на $M^{(1)}$, когда x^m фиксировано, $\tilde{\rho}$ действительно является постоянной. Из формул (4.7)–(4.9) следует, что η , $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$, ρ также изменяются вдоль образующей конуса.

Итак, пусть числа C_φ^α удовлетворяют условиям (4.10) и (4.11), и пусть η и $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ определяются по формулам (4.7) и (4.8). В евклидовом пространстве E_n рассмотрим следующую дифференциальную систему:

$$\begin{cases} \omega^\alpha = 0, & \omega_\beta^\alpha = 0, & \omega_r^\alpha = 0, & \omega_s^r = 0, & \omega_{j_\varphi}^r = 0, & r \neq m, \\ \omega_{i_\varphi}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi} = 0, & d \ln |\lambda_{(\varphi)}^\alpha| - \eta \omega^m = 0, & d\eta - \eta^2 \omega^m = 0, & \omega_{j_\varphi}^m - \eta \omega^{j_\varphi} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Путем непосредственного вычисления внешних дифференциалов левых частей уравнений этой системы можем убедиться в том, что они обращаются в нуль в силу уравнений самой системы. Наиболее трудно проверить это для шестого уравнения, для которого вычисления проведем непосредственно. Во-первых, отметим, что по предположению выполняется равенство (4.3). Во-вторых, докажем, что имеет место равенство

$$\sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} (\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\psi} = 0 \quad (4.13)$$

для фиксированного субиндекса φ . Действительно, на основании (4.3) имеем

$$\sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \sum_{\substack{\chi \\ (\chi \neq \varphi, \chi \neq \psi)}} h_{i_\varphi j_\psi k_\chi}^\alpha \omega^{k_\chi} \wedge \omega^{j_\psi} = 0.$$

Здесь знак равенства написан на основании того, что $h_{i_\varphi j_\psi k_\chi}^\alpha$ симметричны по индексам j_ψ и k_χ , а выражение $\omega^{k_\chi} \wedge \omega^{j_\psi}$ кососимметрично по этим индексам, кроме того, можем считать, что субиндексы ψ и χ пробегают одно и то же множество значений, т.е. χ может принимать значение ψ , так как

$$h_{i_\varphi j_\psi j_\psi} = 0$$

при $\varphi \neq \psi$ (лемма 1). Из (4.13) следует, что

$$\sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \lambda_{(\psi)}^\alpha \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\psi} = \lambda_{(\varphi)}^\alpha \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\psi}. \quad (4.14)$$

Если теперь вычислить внешние дифференциалы выражений $\omega_{i_\varphi}^\alpha$ и $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi}$, то получим

$$\begin{aligned} d\omega_{i_\varphi}^\alpha &= -\lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega_{j_\varphi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\varphi} - \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \lambda_{(\psi)}^\alpha \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\psi}, \\ d(\lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi}) &= -\lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega_{j_\varphi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\varphi} - \lambda_{(\varphi)}^\alpha \sum_{\substack{\psi \\ (\psi \neq \varphi)}} \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} \wedge \omega^{j_\psi}. \end{aligned}$$

Теперь из (4.14) следует, что $d(\omega_{i_\varphi}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi}) = 0$.

Таким образом, система (4.12) вполне интегрируема. Она фактически и задает описанное выше нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие $M = E_{m-1} \times \tilde{M}$ с интегрируемым распределением кодефектности. Отметим, что при $\eta = 0$ система (4.12) обращается в систему (4.6) и определяет цилиндр $E_\mu \times M^{(1)}$. Теорема 1 доказана.

В случае, когда $\eta \neq 0$, радиусы сфер $S^{p_\varphi}(R)$ и гиперсферы $S^{n-1}(\tilde{R})$ определяются соответственно равенствами $R^2 = (\rho + \eta^2)^{-1}$, $\tilde{R}^2 = \eta^{-2}$. Следовательно,

$$R = \frac{c - x^m}{\sqrt{\sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2 + 1}}, \quad \tilde{R} = C - x^m$$

и радиусы R и $\tilde{R}$ являются линейными, но непостоянными функциями на L .

§ 5. О классификации Ric-полусимметрических гиперповерхностей

В теореме 1 одним из условий является условие интегрируемости распределения кодефектности подмногообразия. В настоящем параграфе в качестве примера, когда распределение кодефектности не предполагается интегрируемым, мы рассмотрим Ric-полусимметрические гиперповерхности в E_n .

Классификация Ric-полусимметрических гиперповерхностей в E_n была дана автором в [6] (под названием Ric-полупараллельных гиперповерхностей). Там была доказана следующая классификационная

ТЕОРЕМА 2. *В евклидовом пространстве E_{m+1} гиперповерхность M удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью одного из следующих объектов:*

- (1) гиперсферы S^m в E_{m+1} ,
- (2) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1} ,
- (3) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где S^n – гиперсфера в E_{n+1} , а E_{m-n} – $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 2, \dots, m-1$,
- (4) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где C^n – гиперконус вращения в E_{n+1} , а E_{m-n} – $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 2, \dots, m-1$,
- (5) гиперповерхности ранга ≤ 2 ,
- (6) полуэйнштейнковой гиперповерхности в E_{m+1} , $m \geq 5$, которая несет трехкомпонентную ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер, $S^p(r_1)$, $p \geq 2$, и $S^q(r_2)$, $q \geq 2$, и прямой L , и представляет собой конус с одномерными плоскими образующими (прямая L в качестве образующей в каждой точке) над прямым произведением $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$,

которое является эйнштейновым подмногообразием в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m(r) \subset E_{m+1}$, где радиусы r_1, r_2, r связаны условием $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ и являются линейными (не постоянными) функциями на L ,

(7) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n – полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1} , описываемая, как и K^m , в п. (6), а E_{m-n} – $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 5, \dots, m-1$.

В этой теореме полуэйнштейнова гиперповерхность (6) была получена фактически при неявном предположении интегрируемости распределения кодефектности гиперповерхности. Другие возможные случаи не были рассмотрены. Здесь мы покажем, что все остальные случаи приводят только к противоречию. Следовательно, формулировка классификационной теоремы 2 не меняется. Изложение будем вести с использованием обозначений, принятых в работе [6].

Поскольку M является гиперповерхностью, то имеется только одна матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ второй фундаментальной формы (в дальнейшем индекс $m+1$ будем опускать). Пусть матрица $\|h_{ij}\|$ имеет два ненулевых собственных значения λ и μ кратностей $p \geq 2$ и $q \geq 2$ соответственно и нулевое собственное значение кратности $m-p-q$. Тогда $\mu = a - \lambda = (p-1)\lambda/(1-q)$, где a – средняя кривизна (подробности см. в [6]). Обозначим через $T_x^{(\lambda)}$, $T_x^{(\mu)}$, $T_x^{(0)}$ подпространства собственных векторов матрицы $\|h_{ij}\|$ в касательном пространстве $T_x(M)$. Здесь $T_x^{(0)}$ фактически является пространством дефектности гиперповерхности в точке x . Через $T^{(\lambda)}$, $T^{(\mu)}$, $T^{(0)}$ будем обозначать соответствующие распределения. Индексы будут пробегать следующие значения:

$$b, c = 1, \dots, p, \quad u, v = p+1, \dots, p+q, \quad s, t = p+q+1, \dots, m.$$

Будем предполагать также, что адаптированный к M ортонормированный репер $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$ согласован со структурой подпространств $T_x^{(\lambda)}, T_x^{(\mu)}, T_x^{(0)}$. Это значит, что $e_b \in T_x^{(\lambda)}$, $e_u \in T_x^{(\mu)}$, $e_s \in T_x^{(0)}$. Тогда равенство (3.3) для настоящего случая будет иметь вид

$$(d\lambda_i)\delta_{ij} + (\lambda_j - \lambda_i)\omega_j^i = h_{ijk}\omega^k,$$

где в правой части нет суммирования по i . Придавая индексам различные значения, получим следующую систему:

$$\begin{cases} d\lambda = h_s\omega^s, \\ \mu\omega_u^s = h_{sub}\omega^b + \frac{p-1}{1-q}h_s\omega^u, \\ \lambda\omega_b^s = h_s\omega^b + h_{sbu}\omega^u, \\ (\mu - \lambda)\omega_b^u = h_{sbu}\omega^s, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $h_s = h_{bbs}$. (Эта система в [6] фигурирует под номером (4.5).) Дифференцируя первое равенство в (5.1) внешним образом, получим

$$(dh_s - h_r\omega_s^r) \wedge \omega^s + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)h_s h_{bu}^s \omega^b \wedge \omega^u = 0.$$

Отсюда легко получаются следующие соотношения:

$$dh_s - h_r\omega_s^r = A_{st}\omega^t, \quad A_{st} = A_{ts}, \quad (5.2)$$

$$\sum_s h_s h_{sub} = 0. \quad (5.3)$$

В плоскости $T_x^{(0)}$ рассмотрим векторы

$$F = \sum_s h_s e_s, \quad F_{bu} = \sum_s h_{bus} e_s.$$

Условие (5.3) фактически является условием ортогональности инвариантного вектора F к системе векторов (F_{bu}) . Очевидно, что $0 \leq \text{rang}(F_{bu}) \leq \dim T_x^{(0)}$. Рассмотрим все возможные случаи. Пусть $\text{rang}(F_{bu}) = 0$. Тогда $h_{bus} = 0$ для всех значений индексов. Этот случай подробно рассмотрен в [6]. Он приводит к гиперповерхностям из пунктов (6) и (7) теоремы 2. Пусть теперь $\text{rang}(F_{bu}) = \dim T_x^{(0)}$. Так как вектор F принадлежит $T_x^{(0)}$ по определению и ортогонален к $T_x^{(0)}$, то $F = 0$. Следовательно, $h_s = 0$ для любого значения индекса s . В этом случае система (5.1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda = \text{const}, & \mu = \frac{p-1}{1-q} \lambda = \text{const}, \\ \lambda \omega_b^s = h_{sbu} \omega_u^s, \\ \mu \omega_u^s = h_{sub} \omega^b, \\ (\mu - \lambda) \omega_u^b = h_{bus} \omega^s. \end{cases} \quad (5.4)$$

Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (5.4), придем к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} dh_{sbu} - h_{sbv} \omega_u^v - h_{tbu} \omega_s^t - h_{scu} \omega_b^c &= h_{sbuv} \omega^v, \\ h_{but} h_{sc}^u + h_{sbu} h_{tc}^u &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку последнее равенство имеет место для всех значений индексов, то, полагая в нем $c = b$, $t = s$, получим $h_{sbu} \cdot h_{sb}^u = 0$. Следовательно, $h_{bus} = 0$, и тогда $\omega_b^s = \omega_u^s = \omega_u^b = 0$. Получается прямое произведение двух сфер и плоскости, которое не может быть гиперповерхностью. Рассмотрим теперь случай, когда $0 < \text{rang}(F_{bu}) < \dim T_x^{(0)}$. В этом случае в плоскости $T_x^{(0)}$ можем провести дополнительную адаптацию векторов e_s . Именно, вектор e_m можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен инвариантному вектору F . Тогда $F = h_m e_m$ и, следовательно, $h_s = 0$ при $s \neq m$. Будем считать, что $h_m \neq 0$ (иначе получим второй случай). Условие (5.3) теперь принимает вид $h_m h_{mub} = 0$. Тогда $h_{mub} = 0$ и система (5.1) приводится к виду

$$\begin{cases} d\lambda = h_m \omega^m, \\ \mu \omega_b^m = \frac{p-1}{1-q} h_m \omega_u^m, \\ \lambda \omega_b^m = h_m \omega^b, \\ (\mu - \lambda) \omega_u^b = h_{ubs} \omega^s, \\ \mu \omega_u^s = h_{sub} \omega^b, & s \neq m, \\ \lambda \omega_b^s = h_{sbu} \omega^u, & s \neq m. \end{cases} \quad (5.5)$$

Рассмотрим теперь уравнение (5.2) и, полагая в нем $s = m$, получим

$$dh_m = A_{mt} \omega^t. \quad (5.6)$$

Если в (5.2) $s \neq m$, то будем иметь

$$\omega_s^m = -\frac{A_{st}}{h_m} \omega^t. \quad (5.7)$$

Далее, поскольку плоскость $T_x^{(0)}$ является евклидовым пространством, то, уменьшая общности, можем считать, что в $T_x^{(0)}$ в качестве локальных координат выбраны прямоугольные декартовы координаты. Тогда $\omega_s^t = 0$ при $\omega^{m+1} = 0$, $\omega^b = 0$, $\omega^u = 0$ (последняя система задает распределение $T^{(0)}$). Отсюда следует, что

$$\omega_s^t = \Gamma_{su}^t \omega^u + \Gamma_{sb}^t \omega^b.$$

Следовательно, в (5.7) $A_{st} = 0$, где $s \neq m$, а индекс t принимает все свои значения. Полагая $t = m$, получим $A_{ms} = 0$, $s \neq m$. С учетом (5.6) будем иметь

$$\omega_s^m = 0, \quad dh_m = A_{mm} \omega^m. \quad (5.8)$$

Подставляя во второе уравнение системы (5.5) $\mu = (p-1)\lambda/(1-q)$ и дифференцируя его внешним образом, а также учитывая остальные уравнения этой системы, получим соотношение

$$\left(dh_m + \frac{2}{\lambda} h_m^2 \omega^u \right) \wedge \omega^m + \left(\frac{\lambda}{\mu} h_{tuc} \omega_m^t - \frac{1}{\mu} h_m h_{uct} \omega^t \right) \wedge \omega^c = 0,$$

где $t \neq m$. Отсюда в силу (5.8) имеем

$$\frac{2}{\lambda} h_m^2 \omega^u \wedge \omega^m + \frac{1}{\mu} h_m h_{uct} \omega^c \wedge \omega^t = 0, \quad t \neq m.$$

Поскольку 2-формы $\omega^u \wedge \omega^m$, $\omega^c \wedge \omega^t$ независимы, то $h_m = 0$, что приводит к противоречию.

Итак, все возможные случаи рассмотрены. Только условие $h_{bus} = 0$, которое, как мы знаем, равносильно интегрируемости распределения кодефектности гиперповерхности, приводит к содержательным результатам.

В связи с проведенными в этом параграфе исследованиями возникает следующий вопрос: можно ли в теореме 1 освободиться от условия интегрируемости распределения кодефектности?

Список литературы

- [1] В. А. Мирзоян, “Ric-полусимметрические подмногообразия”, *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, **23**, ВИНТИ, М., 1991, 29–66; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Ric-semisymmetric submanifolds”, *J. Math. Sci.*, **70**:2 (1994), 1624–1646.
- [2] В. А. Мирзоян, “Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств”, *Изв. вузов. Матем.*, **6** (1992), 80–89; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Structure theorems for Riemannian Ricci semi-symmetric spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **36**:6 (1992), 75–83.
- [3] В. А. Мирзоян, “Конусы над эйнштейновыми пространствами”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **33**:5 (1998), 46–54; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Cones over Einstein spaces”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **33**:5 (1998), 40–46.

- [4] В. А. Мирзоян, “Скращенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 107–124; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Warped products, cones over Einstein spaces, and classification of Ric-semiparallel submanifolds of a certain class”, *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 955–973.
- [5] E. Boeckx, O. Kowalski, L. Vanhecke, *Riemannian manifolds of conullity two*, World Sci. Publ., Singapore–River Edge, NJ, 1996.
- [6] В. А. Мирзоян, “Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 65–80; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Classification of Ric-semiparallel hypersurfaces in Euclidean spaces”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1323–1338.
- [7] F. Defever, “Ricci-semisymmetric hypersurfaces”, *Balkan J. Geom. Appl.*, **5**:1 (2000), 81–91.
- [8] Ю. Г. Лумисте, “Полусимметрические подмногообразия”, *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, **23**, ВИНТИ, М., 1991, 3–28; англ. пер.: Yu. G. Lumiste, “Semisymmetric submanifolds”, *J. Math. Sci.*, **70**:2 (1994), 1609–1623.
- [9] F. Dillen, S. Nölker, “Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property”, *J. Reine Angew. Math.*, **435** (1993), 33–63.
- [10] S. Nölker, “Isometric immersions of warped products”, *Differential Geom. Appl.*, **6**:1 (1996), 1–30.
- [11] Ü. Lumiste, “Semi-parallel submanifolds as some immersed fibre bundles with flat connections”, *Geometry and topology of submanifolds*, VIII, Proceedings of the international meeting on geometry of submanifolds (Brussels, Belgium and Nordfjordeid, Norway, 1995), World Sci. Publ., Singapore–River Edge, NJ, 1996, 236–244.
- [12] D. Perrone, “Contact Riemannian manifolds satisfying $R(X, \xi) \cdot R = 0$ ”, *Yokohama Math. J.*, **39**:2 (1992), 141–149.
- [13] B. J. Papantoniou, “Contact Riemannian manifolds satisfying $R(X, \xi) \cdot R = 0$ and $\xi \in (k, \mu)$ -nullity distribution”, *Yokohama Math. J.*, **40**:2 (1993), 149–161.
- [14] F. Defever, R. Deszcz, L. Verstraelen, “On pseudosymmetric para-Kähler manifolds”, *Colloq. Math.*, **74**:2 (1997), 253–260.
- [15] M. Dąbrowska, F. Defever, R. Deszcz, D. Kowalczyk, “Semisymmetry and Ricci-semisymmetry for hypersurfaces of semi-Euclidean spaces”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **67** (2000), 103–111.
- [16] Ü. Lumiste, “Normally flat semiparallel submanifolds in space forms as immersed semisymmetric Riemannian manifolds”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **43**:2 (2002), 243–260.
- [17] Ü. Lumiste, “Semiparallel isometric immersions of 3-dimensional semisymmetric Riemannian manifolds”, *Czechoslovak Math. J.*, **53**:3 (2003), 707–734.
- [18] M. M. Tripathi, J.-S. Kim, “On the concircular curvature tensor of a (κ, μ) -manifold”, *Balkan J. Geom. Appl.*, **9**:1 (2004), 104–114.
- [19] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1964; нем. пер. 1-го изд.: P. K. Raschewski, *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*, VEB Deutscher, Berlin, 1959.
- [20] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [21] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия*, Факториал, М., 1998; англ. пер.: M. M. Postnikov, *Geometry VI. Riemannian geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **91**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [22] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. II, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. II, Intersci. Publ., New York–London–Sydney, 1969.
- [23] B. Chen, *Geometry of submanifolds*, Pure Appl. Math., **22**, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [24] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, *Lectures on differential geometry*, Ser. Univ. Math., **1**, World Sci. Publ., Singapore–River Edge, NJ, 1999.
- [25] А. Т. Фоменко, *Вариационные методы в топологии*, Наука, М., 1982.
- [26] Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко, *Минимальные поверхности и проблема Плато*, Наука, М., 1987; англ. пер.: Dào Trong Thi, A. T. Fomenko, *Minimal surfaces, stratified multivarifolds, and the Plateau problem*, Transl. Math. Monogr., **84**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [27] Sh.-Sh. Chern, N. H. Kuiper, “Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space”, *Ann. of Math.* (2), **56**:3 (1952), 422–430.
- [28] В. А. Мирзоян, “Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий”, *Матем. сб.*, **197**:7 (2006), 47–76; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Structure theorems for Ricci-semisymmetric submanifolds and geometric description of a class of minimal semi-Einstein submanifolds”, *Sb. Math.*, **197**:7 (2006), 997–1024.
- [29] В. А. Мирзоян, “Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем”, *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, **14**, ВИНТИ, М., 1983, 73–100; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Submanifolds with commuting normal vector field”, *J. Soviet Math.*, **28**:2 (1985), 192–207.
- [30] J. D. Moore, “Isometric immersions of Riemannian products”, *J. Differential Geometry*, **5** (1971), 159–168.

В. А. Мирзоян (V. A. Mirzoyan)

Государственный инженерный университет Армении,
г. Ереван;

Московский государственный университет сервиса,
Ереванский филиал

E-mail: mirzoyan_vanya@front.ru

Поступила в редакцию

16.10.2006 и 07.11.2007