Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Морозов, Вычисление инвариантов Фоменко–
Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи,
Матем. сб., 2007, том 198, номер 8, 59–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:40:11

УДК 517.938.5+514.762

П. В. Морозов**Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга
в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи**

В работе вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга для случая интегрируемости Ковалевской–Яхьи задачи о движении тяжелого гиростата в поле тяжести, получена топологическая классификация невырожденных положений равновесия системы, а также вычислены все круговые молекулы особенностей.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, построенная А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым и Х. Цишангом [1], [2], [3; т. 1, гл. 3, 4], дает полный инвариант топологической эквивалентности лиувиллевых слоений систем с двумя степенями свободы на трехмерных изоэнергетических поверхностях, называемый меченой молекулой или инвариантом Фоменко–Цишанга. Тем самым задача описания лиувиллевых слоений, возникающих на изоэнергетических поверхностях той или иной интегрируемой гамильтоновой системы, сводится к вычислению меченых молекул.

В настоящей работе, отталкиваясь от результатов по структуре бифуркационного множества интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи из механики твердого тела, ранее полученных М. П. Харламовым и П. Е. Рябовым [4], вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга этой системы при $g = 0$ (теорема 4). Всего обнаружено 10 типов слоений, соответствующих различным уровням энергии и значениям гиросtatического параметра λ . Также получено описание всех круговых слоений (теорема 1) и дана классификация невырожденных положений равновесия системы (теорема 2).

Основной аппарат, использованный при вычислении меток, – метод круговых молекул – был впервые предложен А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым и П. Рихтером в [5] и успешно применен ими для получения лиувиллевой классификации классического волчка Ковалевской. В работах [6], [7] метод круговых молекул позволил вычислить инварианты Фоменко–Цишанга для известных случаев интегрируемости Клебша и Стеклова движения твердого тела в жидкости, а также недавно открытого случая Соколова. Активное применение в данном исследовании также получила формула Топалова [8], устанавливающая связь между метками молекулы и топологией несущего многообразия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648-а), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4578.2006.1) и Программы министерства образования и науки “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № РНП 2.1.1.7988).

Полученные здесь результаты могут быть использованы для установления эквивалентностей с другими случаями интегрируемости, при изучении особенностей гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, а также при исследовании систем, близких к данной.

§ 2. Постановка задачи

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Приведем конкретный вид уравнений и первых интегралов этой системы.

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли–Пуассона двух произвольных гладких функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в алгебре Ли $e(3)$.

В канонических координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ на линейном пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad (1)$$

где

$$1 \leq i, j, k \leq 3, \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i).$$

Пусть на $e(3)^*$ задана некоторая функция Гамильтона $H(s, r)$. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}. \quad (2)$$

Функции $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ лежат в ядре скобки Ли–Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (2). На совместных четырехмерных поверхностях уровня функций f_1 и f_2 :

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = g\},$$

ограничение системы (2) представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности M_g^4 являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2 . Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли–Пуассона из объемлющего пространства $e(3)^*$. Система будет интегрируемой на поверхности M_g^4 , если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $F(s, r)$ такая, что $\{H, F\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(3)^*$, то на каждом M_g^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы. Параметр g имеет физический смысл постоянной площадей.

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана Ковалевской:

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1 r_1 + a_2 r_2.$$

Как впервые указал Х. М. Яхья [9], [10], для него существует дополнительный интеграл четвертой степени

$$F = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2 r_2 - a_1 r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1 s_2}{A} - a_1 r_2 - a_2 r_1 \right)^2 - \frac{2\lambda}{A^2} (s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + \frac{4\lambda r_3}{A} (a_1 s_1 + a_2 s_2).$$

Здесь $(2A, 2A, A)$ – главные моменты инерции твердого тела, параметры a_1 и a_2 задают положение точки подвеса волчка в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, а λ – величину постоянного гиросtatического момента, направленного по условию вдоль оси динамической симметрии волчка. При $\lambda = 0$ получаем классический случай Ковалевской.

Линейной заменой координат на $e(3)^*$

$$\begin{cases} s_1 = \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \left(-\frac{a_1}{\zeta} \tilde{s}_1 + \frac{a_2}{\zeta} \tilde{s}_2 \right), \\ s_2 = \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \left(-\frac{a_2}{\zeta} \tilde{s}_1 - \frac{a_1}{\zeta} \tilde{s}_2 \right), \\ s_3 = \sqrt{\frac{\zeta}{A}} \tilde{s}_3, \\ r_1 = -\frac{a_1}{\zeta} \tilde{r}_1 + \frac{a_2}{\zeta} \tilde{r}_2, \\ r_2 = -\frac{a_2}{\zeta} \tilde{r}_1 - \frac{a_1}{\zeta} \tilde{r}_2, \\ r_3 = \tilde{r}_3, \end{cases}$$

где $\zeta = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, добавляются исключения параметров A , a_1 и a_2 . Скобка Ли–Пуассона, задаваемая в новых координатах $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3)$ соотношениями (1), будет пропорциональна исходной, а гамильтониан и дополнительный интеграл Ковалевской–Яхьи принимают вид

$$H = \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{2} - r_1, \\ F = \left(\frac{s_1^2 - s_2^2}{4} + r_1 \right)^2 + \left(\frac{s_1 s_2}{2} + r_2 \right)^2 - \frac{\lambda}{2} (s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + 2\lambda s_1 r_3.$$

Здесь и далее мы для простоты используем старые обозначения для новых переменных. Через новый параметр λ обозначена исходная величина $\sqrt{\zeta A} \lambda$.

Уравнения (2) в координатах записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\frac{s_2}{2}(s_3 + 2\lambda), & \dot{r}_1 &= \frac{s_2 r_3}{2} - r_2(s_3 + \lambda), \\ \dot{s}_2 &= \frac{s_1}{2}(s_3 + 2\lambda) + r_3, & \dot{r}_2 &= -\frac{s_1 r_3}{2} + r_1(s_3 + \lambda), \\ \dot{s}_3 &= -r_2, & \dot{r}_3 &= \frac{s_1 r_2}{2} - \frac{s_2 r_1}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак, на всяком четырехмерном симплектическом многообразии M_g^4 для заданного значения λ мы получаем интегрируемую гамильтонову систему с двумя

степенями свободы, задаваемую парой (H_λ, F_λ) . По теореме Лиувилля, которая подробно обсуждается, например, в [3; т. 1, гл. 1], всякая неособая компактная совместная поверхность уровня интегралов является объединением некоторого числа двумерных торов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов H и F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две интегрируемые гамильтоновы системы на M^4 и M'^4 называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\Phi: M \rightarrow M'$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.

Аналогичным образом определяется лиувиллева эквивалентность на отдельных изоэнергетических поверхностях $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$ системы. Как уже отмечалось, полным его инвариантом является меченая молекула $W^*(Q_h^3)$. Вычисление этих инвариантов для системы Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ будет дано в последующих параграфах. В результате этого процесса будут также получены описание круговых молекул и классификация невырожденных положений равновесия исследуемого случая интегрируемости.

§ 3. Бифуркационные диаграммы, семейства торов и их перестройки

В этом параграфе мы излагаем результаты М. П. Харламова и П. Е. Рябова [4], которые будут использованы нами в дальнейшем, а также вводим некоторые необходимые понятия и обозначения.

Рассмотрим отображение момента $\mathfrak{F}$, которое определяется следующим образом:

$$\mathfrak{F}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(f, h), \quad \mathfrak{F}: x \rightarrow (F(x), H(x)).$$

Образ критических точек при отображении момента называется *бифуркационной диаграммой*. Обычно бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата.

В случае Ковалевской–Яхьи бифуркационная диаграмма будет зависеть от параметров g и λ . В [4] найден явный вид кривых бифуркационных диаграмм при всех значениях параметров, а также указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм. В рассматриваемом нами случае $g = 0$ следует различать пять типов диаграмм (см. рис. 1):

- (a) $\lambda = 0$,
- (b) $0 < \lambda^2 < 1$,
- (c) $1 < \lambda^2 < \frac{8}{3\sqrt{3}}$,
- (d) $\frac{8}{3\sqrt{3}} < \lambda^2 < 2$,
- (e) $\lambda^2 > 2$.

Рис. 1

Гладкие дуги бифуркационных диаграмм мы обозначили малыми греческими буквами с индексами. В их прообразах лежат боттовские (т.е. общего положения) перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами [3; т. 1, гл. 3]. Типы 3-атомов, соответствующих кривым, указаны ниже:

$$\begin{aligned} A &: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \\ 2A &: \alpha_3, \alpha_7, \alpha_8, \\ A^* &: \delta_1, \delta_2, \\ B &: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \\ 2B &: \beta_4, \\ C_2 &: \gamma. \end{aligned}$$

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(f, h)$ являются образами некоторого количества несвязных торов Лиувилля. Их число для каждой области также вычислено в [4]. Эти торы естественным образом разбиваются на семейства. В одно семейство будем относить торы, которые испытывают одинаковые бифуркации на границах области регулярности. Семейства торов Лиувилля мы обозначили римскими цифрами I–VII (см. таблицу 1).

ТАБЛИЦА 1

Семейство	Число торов Лиувилля
I	1
II	2
III	1
IV	1
V	1
VI	1
VII	2

Интересующие нас изоэнергетические поверхности Q_h^3 лежат в прообразах сечений бифуркационных диаграмм горизонтальными прямыми $A, \dots, J$. Установлено, что они имеют следующие топологические типы (см. таблицу 2).

ТАБЛИЦА 2

A, B, C, F	$\mathbb{S}^3$
D, E, G	$\mathbb{R}P^3$
H	$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$
I, J	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Несложно заметить, что представленной в этом параграфе информации достаточно для того, чтобы найти так называемые грубые инварианты слоений

Лиувилля на этих поверхностях, т.е. базу слоения – граф – с указанными типами перестроек торов. После этого для получения инвариантов Фоменко–Цишанга нам остается вычислить числовые метки этих молекул.

§ 4. Классификация круговых слоений Лиувилля

Точки M, N, P, Q, R, L и z_i на рис. 1 являются особыми точками бифуркационной диаграммы. Они образованы точками пересечения, касания и возврата гладких кривых.

Рассмотрим произвольную особую точку. Опишем вокруг нее малую окружность. В ее прообразе имеется некоторое трехмерное многообразие, оснащенное слоением Лиувилля. Инвариант Фоменко–Цишанга этого слоения называют круговой молекулой данной особенности. Оказывается, что, с одной стороны, круговые молекулы много “знают” о глобальном слоении системы, а с другой – их несложно вычислить, так как они целиком определяются локальной структурой особенности.

ТЕОРЕМА 1. Круговые молекулы всех особых точек случая Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ приведены в таблице 3.

Доказательство этой теоремы будет получено в двух следующих параграфах.

ТАБЛИЦА 3. Круговые молекулы случая Ковалевской–Яхьи при $g = 0$

M	$A_{\boxed{\alpha_1}} \xrightarrow[r=0]{\text{I}} A_{\boxed{\alpha_2}}$	R	$A_{\boxed{\alpha_8}} \xrightarrow[r=0]{\text{VII}} A_{\boxed{\alpha_7}} \quad (\times 2)$
Q	$A_{\boxed{\alpha_2}} \xrightarrow{\text{I}} B_{\boxed{\beta_3}} \begin{cases} \xrightarrow{\text{III}} A_{\boxed{\alpha_9}} \\ \xrightarrow{\text{IV}} A_{\boxed{\alpha_{10}}} \end{cases}$ все $r = \infty$	L	$A_{\boxed{\alpha_3}} \xrightarrow{\text{II}} B_{\boxed{\beta_4}} \begin{cases} \xrightarrow{\text{II}} A_{\boxed{\alpha_3}} \\ \xrightarrow{\text{VII}} A_{\boxed{\alpha_8}} \end{cases}$ все $r = \infty$
N		P	

Таблица 3. Круговые молекулы случая Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ (продолжение)

z_1		z_7	
z_2		z_5	
z_3		z_3	
z_4		z_4	
z_6		z_6	

§ 5. Классификация невырожденных положений равновесия

В прообразах точек M, N, P, Q, R, L бифуркационной диаграммы лежат точки, в которых ранг отображения момента падает до нуля. Это – образы точек положения равновесия динамической системы. Дадим определение невырожденности положения равновесия для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

Пусть на (M^4, ω) задана интегрируемая система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F , а точка $x \in M^4$ такая, что $dH(x) = dF(x) = 0$. Тогда на $T_x M$ корректно определены два симплектических оператора $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_F = \Omega^{-1} d^2 F$, порождающие в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $K(H, F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Положение равновесия x называется *невырожденным*, если подалгебра $K(H, F)$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Теперь укажем эффективный способ проверки картановости подалгебры $K(H, F)$.

Для начала заметим, что операторы A_H и A_F совпадают с линейаризациями векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$ соответственно, что позволяет легко вычислять матрицы, которыми они задаются в локальных координатах. Действительно,

$$\frac{\partial(\text{sgrad } H)^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k} \right) = \omega^{ik} \frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^k} = (\Omega^{-1} d^2 H)^i_j.$$

Коммутативная подалгебра в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ является картановской, если и только если она двумерна и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. Итак, сначала нужно убедиться, что операторы A_H и A_F линейно независимы, и затем проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_F$ имеет попарно различные собственные значения.

Невырожденные положения равновесия обладают многими замечательными свойствами. В частности, их окрестности в M^4 представимы в виде почти прямого произведения 2-атомов. Это, а также другие важные свойства этого класса особенностей подробно обсуждаются в [3; т. 1, гл. 9].

Вернемся к случаю Ковалевской–Яхьи.

ТЕОРЕМА 2. В случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ и некритических значениях $\lambda^2 \neq 0, 1, 8/(3\sqrt{3})$, 2 точки бифуркационной диаграммы M, N, P, Q, R и L соответствуют невырожденным положениям равновесия. Их типы и представления в виде почти прямого произведения указаны ниже (см. таблицу 4). Круговые молекулы этих особенностей приведены в таблице 3. Других критических точек у гамильтониана нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале необходимо найти координаты точек положений равновесия на фазовом пространстве системы. Будем искать их из условия $dH|_{M^4}(x) = 0$. Тогда $\text{sgrad } H(x) = 0$, а значит, правая часть уравнений (3) обнуляется.

Из третьего уравнения системы имеем $r_2 = 0$. Тогда если предположить, что $s_2 \neq 0$, то из четвертого уравнения (на $\dot{r}_1$) следует, что $r_3 = 0$, а из шестого – что $r_1 = 0$. Но это невозможно в силу соотношения $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$. Итак с необходимостью $s_2 = r_2 = 0$.

Таблица 4

Точка	Тип	Почти прямое произведение
М	центр-центр	$A \times A$
R	центр-центр	$2(A \times A)$
Q	седло-центр	$A \times B$
L	седло-центр	$2(A \times B)$
N	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
P	седло-седло	$B \times B$

После этого правые части первого, третьего, четвертого и шестого уравнений системы (3) обнуляются автоматически, и мы получаем следующие условия на точки положения равновесия:

$$\begin{cases} f_1 = r_1^2 + r_3^2 = 1, \\ f_2 = r_1 s_1 + r_3 s_3 = 0, \\ \frac{s_1 s_3}{2} + \lambda s_1 + r_3 = 0, \\ -\frac{s_1 r_3}{2} + \lambda r_1 + s_3 r_1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $s_1 = x$, $s_3 = y$, тогда из первых двух уравнений (4) следует, что координаты искомым точек имеют вид

$$\left(x, 0, y, \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0, \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Подставляя их в третье и четвертое уравнение системы (4), получаем

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \lambda x = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ 2y^2 + x^2 + 2\lambda y = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Если $x = 0$, то с необходимостью $y = -\lambda$, и мы получаем два решения: $(0, 0, -\lambda, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, -\lambda, -1, 0, 0)$. Проверка показывает, что первое соответствует точке M бифуркационной диаграммы, а второе – точкам N , P и Q в зависимости от значения λ .

Будем искать остальные решения. Пусть $x \neq 0$. Второе уравнение (5) переписывается в виде $x^2 = -2y(y + \lambda) \implies y \in (-\lambda, 0)$. Подставляя выражение для x^2 в первое уравнение, получаем

$$\begin{aligned} y + 2\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{-y^2 - 2\lambda y}} &\iff (y + 2\lambda)^2(-y^2 - 2\lambda y) = 4 \\ &\iff -y(y + 2\lambda)^3 = 4. \end{aligned}$$

Исследуем вопрос: когда последнее уравнение имеет корень из интервала $(-\lambda, 0)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(y) = -y(y + 2\lambda)^3 &\implies f'(y) = -2(y + 2\lambda)^2(2y + \lambda) \\ &\implies y_{\max} = -\frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Необходимым условием наличия корней является:

$$f(y_{\max}) = \frac{27}{16} \lambda^4 \geq 4 \iff \lambda^2 \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Оно же является достаточным условием для существования корня y_R (см. рис. 2). Для существования корня y_L дополнительно необходимо потребовать: $f(-\lambda) \leq 4 \iff \lambda^2 \leq 2$.

Рис. 2

Найденные решения соответствуют точкам R и L бифуркационной диаграммы. Отметим, что в отличие от первого случая здесь в прообразе лежит по два положения равновесия, соответствующие разным знакам x .

Итоги поиска точек положения равновесия подведены в таблице 5.

Теперь при помощи метода, описанного в начале параграфа, проверим невырожденность найденных точек положений равновесия. Рассмотрим линеаризацию векторного потока (3) на $e(3)^*$ в координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$. Дифференцируя правые части уравнений (3), получаем матрицу оператора $2A_H$:

$$2A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(s_3 + 2\lambda) & -s_2 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 + 2\lambda & 0 & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3 + \lambda) & s_2 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3 + \lambda) & 0 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 5

Точка	Условия существования	Количество	Координаты
M	$\lambda \in \mathbb{R}$	1	$(0, 0, -\lambda, 1, 0, 0)$
N, P, Q	$\lambda \in \mathbb{R}$	1	$(0, 0, -\lambda, -1, 0, 0)$
R	$\lambda^2 > \frac{8}{3\sqrt{3}}$	2	$\left(x, 0, y, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$ где $-y(y + 2\lambda)^3 = 4$, $y^2 \in \left(0, \frac{\lambda^2}{4}\right),$ $x = \pm\sqrt{-2y(y + \lambda)}$
L	$\frac{8}{3\sqrt{3}} < \lambda^2 < 2$	2	$\left(x, 0, y, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$ где $-y(y + 2\lambda)^3 = 4$, $y^2 \in \left(\frac{\lambda^2}{4}, \lambda^2\right),$ $x = \pm\sqrt{-2y(y + \lambda)}$

Рассмотрим положение равновесия в прообразе точки M . В качестве базиса касательного пространства к M^4 в этой точке можно взять векторы

$$TM^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Под действием оператора $2A_H$ они переходят в векторы

$$2A_H \cdot TM^4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 + \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, матрица искомого оператора $2A_H$ в выбранном базисе на TM^4 имеет вид

$$2A_H|_{TM^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его собственные значения $\pm 2i, \pm(\sqrt{\lambda^2 + 2})i$ попарно различные при $\lambda^2 \neq 2$ и чисто мнимые, следовательно, исследуемая точка положения равновесия невырождена и имеет тип центр-центр. Здесь остается только убедиться в линейной

независимости операторов $A_H|_{M^4}$ и $A_F|_{M^4}$. Последнее предоставляется читателю.

Аналогично для точек N , P и Q имеем

$$TM^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A_H \cdot TM^4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A_H|_{TM^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda^2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $\pm 2, \pm\sqrt{2 - \lambda^2}$ попарно различны при $\lambda^2 \neq 2$, следовательно, положение равновесия невырождено. При $\lambda^2 < 2$ все собственные значения действительны, и мы получаем тип седло-седло – случай точек N и P . При $\lambda^2 > 2$ два собственных значения действительны, а два других – чисто мнимые, и мы имеем тип седло-центр – случай точки Q .

Случай точек R и L рассматривается аналогично.

Существует полная классификация слоений Лиувилля вблизи особых слоев, содержащих невырожденные положения равновесия. В частности, в [3; т. 1, гл. 9] приведены таблицы особенностей малой сложности, т.е. с малым количеством точек невырожденного положения равновесия на критическом слое. Зная типы 3-атомов, несложно найти, какие из них наблюдаются в нашей системе. Так мы находим представления в виде почти прямого произведения и круговые молекулы.

Теорема 2 доказана.

§ 6. Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Точки возврата и касания $z_i, i = 1, \dots, 7$, бифуркационной диаграммы представляют другой распространенный класс особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В прообразе некоторой их окрестности гамильтониан H не имеет критических точек, а гамильтонов поток $v = \text{sgrad } H$ не обращается в нуль. Возьмем это за определение вырожденных одномерных орбит. Полной классификации этих особенностей на сегодняшний день не существует, однако некоторые их общие свойства позволяют нам полностью описать их круговые слоения для исследуемой системы.

В предположении, что все объекты вещественно аналитические, верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (П.В. Морозов [7]). *На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, метки r равны ∞ . На ребрах, соединяющих атом A с седловым, метки r конечны. Все метки ε равны $+1$.*

ТЕОРЕМА 3. *Круговые молекулы особых точек $z_i, i = 1, \dots, 7$, а также топологические типы соответствующих круговых многообразий приведены в таблице 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предложения 1 нам остается вычислить метки r на ребрах, ведущих в атомы A . Будем через $r(*-**)$ обозначать r -метку ребра, которое соединяет бифуркации $*$ и $**$.

Напомним *правило сложения меток* [3; т. 2, гл. 1]. Пусть для ребер, относящихся к некоторому семейству торов, известны метки $r(*-**) = r_0$ и $r(**-***) = \infty$, тогда $r(*-***) = r_0$ в том же семействе.

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки z_1 , относящееся к семейству I. Оно соединяет бифуркации β_1 и α_2 . Из круговой молекулы точки P имеем $r(\beta_1-\beta_3) = 0$, точки Q : $r(\beta_3-\alpha_2) = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r(\beta_1-\alpha_2) = 0$. Аналогично получаем:

- точка z_1 :
семейство II: $r(\beta_1-\beta_4) = 0, r(\beta_4-\alpha_3) = \infty \implies r(\beta_1-\alpha_3) = 0$;
- точка z_5 :
семейство VII: $r(\alpha_7-\alpha_8) = 0, r(\alpha_8-\beta_4) = \infty \implies r(\beta_4-\alpha_7) = 0$;
- точка z_6 :
семейство II: $r(\beta_6-\beta_4) = 0, r(\beta_4-\alpha_3) = \infty \implies r(\beta_6-\alpha_3) = 0$,
семейство III: $r(\beta_3-\beta_5) = 0, r(\beta_3-\alpha_9) = \infty \implies r(\beta_5-\alpha_9) = 0$,
семейство IV: $r(\beta_3-\beta_6) = 0, r(\beta_3-\alpha_{10}) = \infty \implies r(\beta_6-\alpha_{10}) = 0$,
семейство VII: $r(\beta_5-\beta_4) = 0, r(\beta_4-\alpha_8) = \infty \implies r(\beta_5-\alpha_8) = 0$.

Точка z_7 наблюдается только при $\lambda = 0$ и относится к классическому случаю Ковалевской. Ее круговая молекула указана в [5].

Несложно видеть, что недостающие метки молекул точек z_2 , z_3 и z_4 нельзя вычислить таким элементарным способом. Окончательный ответ будет получен в последующих параграфах. Здесь мы приводим его для полноты.

Определим также топологические типы круговых многообразий вырожденных одномерных орбит.

Рис. 3

Рассмотрим точку z_3 . Во-первых, заметим, что в действительности ей отвечают две несвязные особенности, которые спроецированы в одну точку бифуркационной диаграммы отображением момента. Этим объясняется наличие для нее двух круговых молекул. Рассмотрим особенность, отвечающую молекуле $A-A^*-A$. Ее бифуркационная диаграмма изображена на рис. 3. Произведем деформацию контура ABC_0D_0 в ABC_1D_1 . При этом топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится: прообраз отрезка CD определяется в M^4 уравнением $H = \text{const}$, а из теоремы 2 нам известно, что критических точек H в окрестности z_3 нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Контур ABC_0D_0 определяет круговую молекулу неособой точки бифуркационной диаграммы, более

точно – круговую молекулу 3-атома A кривой α_6 . Такие круговые молекулы полностью описаны в [3; т. 2, гл. 1]. В таблице 6 приведены топологические типы круговых многообразий для основных 3-атомов.

Таблица 6

3-атом	Тип кругового многообразия
регулярная точка	$\mathbb{T}^3$
A	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
A^*	H^3
B	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
C_2	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 3g)$

Здесь $(\mathbb{S}^2 + Ng)$ – сфера с N ручками; через H^3 обозначено расслоение Зейферта со слоем окружность и базой $\mathbb{T}^2$ с двумя особыми точками типа $(2, 1)$.

Таким образом, круговое многообразие рассмотренной особенности точки z_3 , лежащее в прообразе контура ABC_1D_1 , топологически является $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

Проводя аналогичные рассуждения для других вырожденных одномерных орбит и используя приведенную выше таблицу, получаем топологические типы остальных круговых многообразий точек z_i .

Теорема 3 доказана.

§ 7. Построение допустимых систем координат

Рассмотрим малый отрезок, трансверсально пересекающий дугу бифуркационной диаграммы. В его прообразе лежит многообразие с краем – 3-атом. Его край состоит из некоторого числа граничных торов. Нам предстоит выбрать на каждом таком торе базис в его фундаментальной группе, при этом он должен удовлетворять условиям *допустимости* (см. [3; т. 1, гл. 4]).

Оказывается, на граничных торах всякого 3-атома геометрия бифуркации однозначно выделяет некоторый цикл. Будем обозначать его λ_* для бифуркации $*$. В допустимых системах координат бифуркации $*$ он *всегда* берется за первый элемент базиса. За второй элемент берут цикл, дополняющий его до базиса в фундаментальной группе тора и удовлетворяющий ряду требований.

Помимо этого требуется согласованность ориентаций базисов, которая заключается в следующем: тройка $(\lambda_1, \lambda_2, \text{grad } F)$, где λ_1, λ_2 – соответственно первый и второй элементы базиса на торе, должна быть положительно ориентирована с точки зрения ориентации на 3-атоме, если тор относится к положительной границе атома (в смысле интеграла F), и отрицательно ориентирована в противном случае.

Поставим нашей целью выбрать для каждого 3-атома допустимые системы координат, составленные из циклов λ_* .

Допустимые системы координат на седловых атомах выберем исходя из представления в виде почти прямого произведения особенностей точек N и P типа седло-седло. Аналогичная процедура проделана в [5] для классического случая Ковалевской, где особенности типа седло-седло в точности такие же. Поэтому нам остается выписать ответ.

Рассматривая точку N с представлением $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2}, -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_2}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} B_{\boxed{\beta_2}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1}), \\
 & \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2}, -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_1}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(VI)} B_{\boxed{\beta_2}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1}), \\
 & \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1}, \frac{\lambda_{\delta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(VI)} A_{\boxed{\delta_1}}^* \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\delta_1}, -\lambda_{\gamma}), \\
 & \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_2}, \frac{\lambda_{\delta_2} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} A_{\boxed{\delta_2}}^* \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\delta_2}, -\lambda_{\gamma}), \\
 & \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma}, -\lambda_{\delta_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(V)} C_{2\boxed{\gamma}} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\gamma}, \lambda_{\beta_1}) \\
 & \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma}, -\lambda_{\delta_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(IV)} C_{2\boxed{\gamma}} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\gamma}, \lambda_{\beta_1}).
 \end{aligned}$$

Рассматривая точку P с представлением $B \times B$, получаем

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\beta_3}) \xrightarrow{(I)} B_{\boxed{\beta_1}} \begin{cases} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4}) \\ \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4}) \end{cases} \\
 & (\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(I)} B_{\boxed{\beta_3}} \begin{cases} \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_3}, -\lambda_{\beta_5}) \\ \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\beta_3}, -\lambda_{\beta_6}) \end{cases} \\
 & (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\beta_1}) \xrightarrow{(II)} B_{\boxed{\beta_4}} \begin{cases} \xrightarrow{(VII)} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\beta_5}) \\ \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\beta_6}) \end{cases} \\
 & (\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\beta_3}) \xrightarrow{(III)} B_{\boxed{\beta_5}} \begin{cases} \xrightarrow{(VII)} (\lambda_{\beta_5}, \lambda_{\beta_4}) \\ \xrightarrow{(VII)} (\lambda_{\beta_5}, \lambda_{\beta_4}) \end{cases} \\
 & (\lambda_{\beta_6}, -\lambda_{\beta_3}) \xrightarrow{(IV)} B_{\boxed{\beta_6}} \begin{cases} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\beta_4}) \\ \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\beta_4}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Теперь выберем допустимые системы координат на минимаксных атомах A . Вспомним важное утверждение. Здесь и далее будем рассматривать индексы пересечения циклов на торе с точностью до знака.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [5]). Метка $r(*-**) = \infty$ тогда и только тогда, когда индекс пересечения циклов λ_* и λ_{**} на торах этого семейства равен 0 (т.е. циклы гомологичны); $r(*-**) = 0$ равносильно тому, что индекс пересечения λ_* и λ_{**} равен 1; $r(*-**) = 1/2$ равносильно тому, что индекс пересечения λ_* и λ_{**} равен 2.

На ребре круговой молекулы точки z_7 , соответствующему семейству I, $r(\alpha_1 - \beta_2) = 0$. Следовательно, циклы λ_{α_1} и λ_{β_2} имеют индекс пересечения 1 и образуют базис. Поскольку второй цикл имеет ориентацию, заданную гамильтоновым потоком, базис является допустимым для рассматриваемого атома A_{α_1} . Рассуждая аналогично, получаем допустимые базисы для остальных бифуркаций. Исключением являются атомы A_{α_4} , A_{α_5} и A_{α_6} , для которых мы пока не можем указать вторые базисные циклы из-за того, что соответствующие r -метки круговых молекул нам пока неизвестны. Их мы найдем позже, а здесь приведем ответ для завершенности таблицы:

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha_1} &\xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2}), \\
 (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1}) &\xrightarrow{(I)} A_{\alpha_2}, \\
 (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_1}) &\xrightarrow{(II)} A_{\alpha_3}, \\
 (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2}) &\xrightarrow{(VI)} A_{\alpha_4}, \\
 (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_5}) &\xrightarrow{(III)} A_{\alpha_5}, \\
 A_{\alpha_6} &\xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_6}, \lambda_{\gamma}), \\
 (\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}) &\xrightarrow{(VII)} A_{\alpha_7}, \\
 (\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\beta_5}) &\xrightarrow{(VII)} A_{\alpha_8}, \\
 (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}) &\xrightarrow{(III)} A_{\alpha_9}, \\
 (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_6}) &\xrightarrow{(IV)} A_{\alpha_{10}}, \\
 A_{\alpha_{11}} &\xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_{11}}, \lambda_{\beta_2}), \\
 A_{\alpha_{12}} &\xrightarrow{(VI)} (\lambda_{\alpha_{12}}, \lambda_{\beta_2}).
 \end{aligned}$$

§ 8. Определение взаимного положения базисных циклов

Проанализируем информацию из круговых молекул и списка допустимых систем координат для определения взаимного положения циклов λ_* на каждом из семейств торов.

семейство I

семейство II

семейство III

семейство IV

семейство V

семейство VI

семейство VII

Рис. 4

Рассмотрим семейство I. На каждом торе этого семейства бифуркациями определены циклы λ_{α_1} , λ_{α_2} , $\lambda_{\alpha_{11}}$, λ_{β_1} , λ_{β_2} , λ_{β_3} и λ_{δ_2} . Из круговых молекул особых точек M , N , P , Q и z_1 , z_7 можно заключить, что

- индекс пересечения циклов λ_{α_1} и λ_{α_2} равен 1;
- индекс пересечения циклов λ_{α_1} и λ_{β_2} равен 1;
- индекс пересечения циклов λ_{α_2} и λ_{β_1} равен 1;
- индекс пересечения циклов λ_{α_2} и λ_{β_3} равен 0;
- индекс пересечения циклов $\lambda_{\alpha_{11}}$ и λ_{β_2} равен 1;
- индекс пересечения циклов λ_{β_1} и λ_{β_2} равен 1;
- индекс пересечения циклов λ_{β_1} и λ_{β_3} равен 1;
- индекс пересечения циклов λ_{β_2} и λ_{δ_2} равен 2.

С другой стороны, базисы на положительных и отрицательных границах 3-атомов должны иметь разную ориентацию. В силу чего из списка допустимых систем координат заключаем, что базисы $(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\alpha_{11}}, \lambda_{\beta_2})$ и $(\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1})$ должны иметь одинаковую ориентацию, а базисы $(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1})$, $(\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_1})$, $(\lambda_{\beta_1}, -\lambda_{\beta_3})$, $(\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_2})$, $(\lambda_{\delta_2}, (\lambda_{\delta_2} + \lambda_{\beta_2})/2)$ и $(\lambda_{\beta_2}, -(\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_2})/2)$ – противоположную им.

Эти условия определяют взаимное положение всех циклов, кроме $\lambda_{\alpha_{11}}$, однозначно. Последний цикл относится к классическому случаю Ковалевской и соотношение для него $\lambda_{\alpha_{11}} = (\lambda_{\beta_2} - \lambda_{\delta_2})/2$ мы получаем из [5].

Взаимное положение циклов для остальных семейств анализируется по аналогичной схеме. На рис. 4 фундаментальные группы торов изображены в виде целочисленных решеток на плоскости, а циклы – в виде векторов на них. Это позволяет наглядно отобразить собранную информацию.

Однако же положение циклов α_4 , α_5 , α_6 и α_7 в соответствующих семействах определить таким методом не удастся. Это связано с тем, что мы до настоящего момента не знаем некоторых меток круговых молекул. Данную неопределенность мы окончательно устраним в следующем параграфе, пока же ответ для этих циклов изображен пунктиром.

§ 9. Применение формулы Топалова

Напомним определение числовых меток. Пусть на ребре i стоит матрица склейки

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

тогда по определению

$$r_i = \begin{cases} \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \end{Bmatrix}, & \text{если } b_i \neq 0, \\ \infty, & \text{если } b_i = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } b_i, & \text{если } b_i \neq 0, \\ \text{sign } a_i, & \text{если } b_i = 0. \end{cases}$$

Разрежем молекулу по всем конечным ребрам, т.е. таким, что $r \neq \infty$. Куски, содержащие лишь седловые атомы, будем называть *семьями*. Метка n определяется для всякой семьи по формуле

$$n = \sum_{\text{выходные ребра}} \left[\frac{a_i}{b_i} \right] + \sum_{\text{входные ребра}} \left[-\frac{d_i}{b_i} \right] + \sum_{\text{внутренние ребра}} \left[-\frac{c_i}{a_i} \right].$$

Метки не зависят от выбора допустимых координат. При выбранных допустимых базисах матрицы склеек по меткам восстанавливаются однозначно.

Для дальнейших вычислений нам понадобится формула П. Й. Топалова [8], связывающая топологию многообразия с числовыми метками молекулы.

Пусть некоторая молекула W^* не содержит семей из более чем одного атома и после стирания внутренних ребер семей принимает вид дерева. Пусть также все атомы W^* имеют род 0. (Атомы A , A^* , B и C_2 относятся к этой категории.) Тогда энергия молекулы $N(W^*)$ определяется формулой

$$N(W^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{rank } H_1(Q^3) > 0, \\ |\text{Tor } H_1(Q^3)|, & \text{если } \text{rank } H_1(Q^3) = 0. \end{cases}$$

Определим для каждой семьи число $\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2$, где n – ее n -метка, r_i – метки r на ее внешних ребрах, а p – число звездочек данной семьи. П. Й. Топалов установил формулу, связывающую $N(W^*)$ с метками молекулы W^* . В простейшем случае, когда молекула содержит одну семью F и все ее ребра имеют вид $F-A$, формула Топалова записывается следующим образом:

$$N(W^*) = \pm 2^p \tilde{n} \prod_j b_j. \quad (6)$$

Теперь мы используем формулу Топалова для устранения оставшихся неопределенностей.

Рассмотрим круговую молекулу точки z_2 . Найдем матрицу склейки на бесконечном ребре:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \lambda_{\beta_2} + \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим второе ребро круговой молекулы:

$$B \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} A.$$

Топологический тип кругового многообразия –

$$\mathbb{T}^3, \quad H_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3 \quad \implies \quad N(W^*) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= n + \sum r_i + \frac{p}{2} = \left(\left[\frac{a}{b} \right] + \left[-\frac{1}{1} \right] \right) + \left\{ \frac{a}{b} \right\} + 0 = \frac{a}{b} - 1, \\ (6) \quad \implies \quad \left(\frac{a}{b} - 1 \right) b &= 0 \quad \implies \quad a = b. \end{aligned}$$

Так как всякая матрица склеек является целочисленной матрицей с определителем -1 , а в силу предложения 1

$$\varepsilon = +1 \quad \implies \quad b > 0,$$

то заключаем, что $a = b = 1$.

Найденная матрица склейки дает следующее соотношение на допустимые системы координат атомов α_4 и β_2 :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_4} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k+1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ -\frac{\lambda_{\beta_2} + \lambda_{\delta_1}}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тем самым определено положение цикла λ_{α_4} относительно других циклов семейства VI и найдена недостающая метка r круговой молекулы точки z_2 . Второе уравнение задает множество для выбора второго элемента допустимого базиса. В списке допустимых систем координат мы для определенности зафиксировали вариант, соответствующий $k = 0$.

Далее рассмотрим круговую молекулу точки z_3 , имеющую вид $A-A^*-A$. Теперь мы можем вычислить матрицу склейки на ее ребре, относящемся к семейству VI:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_4} \\ \lambda_{\beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \frac{\lambda_{\delta_1} + \lambda_{\beta_2}}{2} \end{pmatrix} \implies r = 0.$$

Вторую матрицу склейки молекулы определим из уравнения Топалова. Топологический тип многообразия $-\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \implies N(W^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= n + \sum r_i + \frac{p}{2} = \left(\left[\frac{a}{b} \right] - 1 \right) + \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b} - \frac{1}{2}, \\ (6) \implies \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2} \right) b &= 0, \quad b > 0 \implies 2a = b \\ \implies a = 1, \quad b = 2 &\implies r = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Мы получили соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{α_6} в семействе V:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_6} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 2k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ -\lambda_{\gamma} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Полагая $k = 0$, получаем второй элемент базиса для α_6 .

Анализ круговых многообразий точек z_5 , а затем z_4 позволяет в точности аналогично определить положение циклов λ_{α_7} и λ_{α_5} и выбрать вторые базисные элементы соответствующих допустимых систем координат.

Тем самым завершены вычисление круговых молекул, выбор допустимых координат и определение взаимного положения базисных циклов.

Несложно видеть, что при наличии этой информации вычисление изоэнергетических молекул превращается в несложную алгоритмическую процедуру. Из списка допустимых систем координат и взаимного положения базисных циклов вычисляем все матрицы склеек изоэнергетических молекул. Результат приведен в таблице 7. Затем по матрицам склеек вычисляем числовые метки. Сформулируем итоговый результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Полный список инвариантов Фоменко–Цишанга для случая интегрируемости Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ приведен в таблице 8. В зависимости от значений гиростатического параметра λ и уровня энергии обнаруживается 10 неэквивалентных слоений Лиувилля.*

Таблица 8. Изоэнергетические молекулы случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$

A	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	B
C		D
E		F
G		H
I		J

Список литературы

- [1] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [2] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45**:2 (1990), 49–77; англ. пер.: A. V. Bolsinov, S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surveys*, **45**:2 (1990), 59–94.
- [3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, vol. 1, 2, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.
- [4] М. П. Харламов, П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхьи”, *РХД*, **2**:2 (1997), 25–40.
- [5] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [6] П. В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 113–138; англ. пер.: P. V. Morozov, “The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1507–1533.
- [7] П. В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа”, *Матем. сб.*, **195**:3 (2004), 69–114; англ. пер.: P. V. Morozov, “Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff’s equations”, *Sb. Math.*, **195**:3 (2004), 369–412.
- [8] П. И. Топалов, “Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела”, *Матем. сб.*, **187**:3 (1996), 143–160; англ. пер.: P. I. Topalov, “Computation of the fine Fomenko–Zieschang invariant for the main integrable cases of rigid body motion”, *Sb. Math.*, **187**:3 (1996), 451–468.
- [9] Н. Yehia, “New integrable cases in the dynamics of rigid bodies”, *Mech. Res. Comm.*, **13**:3 (1986), 169–172.
- [10] Х. М. Яхья, “Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **4** (1987), 88–90.

П. В. Морозов (P. V. Morozov)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: morozov_pv@rambler.ru

Поступила в редакцию
16.10.2006