Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Геометрия выпуклых многоугольников и затягивающих их локально минимальных бинарных деревьев, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 1, 69–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:12:56

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Геометрия выпуклых многоугольников и затягивающих их локально минимальных бинарных деревьев

В предыдущих работах авторами получена эффективная классификация плоских локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей. Цель настоящей работы состоит в получении более тонких ограничений на возможную структуру таких деревьев в терминах геометрии данного граничного множества. Особое внимание уделяется случаям квазиправильных (неформально, не сильно отличающихся от правильных) границ. В частности, построена серия примеров квазиправильных многоугольников, которые нельзя затянуть ни одним локально минимальным бинарным деревом.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена изучению локально минимальных плоских бинарных деревьев, затягивающих вершины выпуклых многоугольников. Минимальные деревья возникают при решении знаменитой проблемы Штейнера: *среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество точек плоскости, найти сеть наименьшей длины*. Как было отмечено в историческом обзоре из [1], простейший вариант этой проблемы возник еще в работах Ферма, а в современном виде она была сформулирована Ярником и Кесслером [2]. Название “проблема Штейнера” укоренилось благодаря популярности замечательной книги Куранта и Роббинса “Что такое математика?”, в которой эта проблема была названа в честь Якоба Штейнера, занимавшегося, вообще говоря, близкой, но другой задачей. Тем не менее, подавляющее большинство специалистов пользуется терминологией, связанной с именем Штейнера, поэтому нам придется подчиниться традиции, чтобы не вносить путаницу.

В предыдущих статьях [3]–[7] авторы построили полное описание локально минимальных бинарных деревьев с выпуклыми границами. Однако при рассмотрении выпуклых границ, обладающих дополнительными свойствами, возникают новые ограничения на возможную структуру минимальных сетей. Эти ограничения и составляют основной предмет изучения в настоящей работе. Построенная теория работает особенно эффективно в случае, когда граница есть множество вершин правильного многоугольника или близка к этому множеству.

Работа выполнена авторами в Институте математики Боннского университета, где они работали по приглашению профессора С. Гильдебрандта в октябре–декабре 1996 года (грант SFB № 256). Авторы также пользовались частичной поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 95-01-01604, № 96-15-96142) и фонда INTAS (грант № 94-3666). Мы очень признательны профессору С. Гильдебрандту и всем этим организациям.

Чтобы сформулировать основные результаты настоящей работы, дадим следующие определения. Связное подмножество евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, представимое в виде плоского графа, ребра которого – гладкие регулярные кривые, называется *сетью*. Пусть M – произвольное конечное подмножество точек плоскости. Мы говорим, что сеть Γ *затягивает* M , или M является *границей сети* Γ , если M – подмножество множества вершин из Γ (для некоторого представления сети Γ в виде плоского графа). Границу сети Γ будем обозначать через $\partial\Gamma$. *Длиной сети* называется сумма длин всех ребер этой сети. Ясно, что длина сети не зависит от ее представления плоским графом.

Сеть, имеющая наименьшую длину среди всех сетей, затягивающих фиксированное множество M , называется *абсолютно минимальной*, а сеть, каждый малый фрагмент которой – абсолютно минимальная сеть, называется *локально минимальной*. Более точно, сеть Γ называется *локально минимальной сетью с границей* $\partial\Gamma = M$, если каждая точка P из Γ обладает такой замкнутой окрестностью U , что пересечение $U \cap \Gamma$ является абсолютно минимальной сетью с границей $(U \cap \partial\Gamma) \cup (\partial U \cap \Gamma)$. Ясно, что абсолютно минимальные сети являются также и локально минимальными.

Легко описать локальную структуру локально минимальных сетей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Сеть Γ с границей M локально минимальна, если и только если для одного из ее представлений в виде плоского графа имеют место следующие свойства:*

- 1) *все ребра сети – прямолинейные отрезки;*
- 2) *угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше 120° ;*
- 3) *все вершины степени 1 и 2 являются граничными.*

Из предложения 1.1 вытекает, что степень каждой вершины минимальной сети не превосходит 3. В частности, если Γ – минимальная сеть с границей M , содержащая вершину v степени 3 из Γ , то сеть Γ также является минимальной сетью с границей $M \setminus \{v\}$. Это свойство часто позволяет ограничиться рассмотрением лишь тех минимальных сетей, границы которых состоят в точности из всех вершин степени 1 и 2.

Предложение 1.1 позволяет также доказать следующее замечательное свойство минимальных сетей, имеющее место и в случае минимальных поверхностей [7]–[9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Каждая минимальная сеть Γ с границей M содержится в выпуклой оболочке $\text{conv}(M)$ множества M . Каждая вершина степени 3 сети Γ является внутренней точкой в $\text{conv}(M)$.*

В настоящей работе рассматриваются только минимальные сети, являющиеся деревьями и не имеющие вершин степени 2. Из предложения 1.1 следует, что степени вершин таких сетей равны 1 или 3, т.е. эти сети являются *плоскими бинарными деревьями* или, как их еще называют, *плоскими 2-деревьями*. Более того, все ребра таких сетей суть прямолинейные отрезки, встречающиеся в вершинах степени 3 под равными углами величины 120° .

Кроме того, нас будут интересовать лишь минимальные 2-деревья, имеющие выпуклую границу (напомним, что граница сети называется *выпуклой*, если она лежит на границе своей выпуклой оболочки). Предложение 1.2 влечет следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Если Γ – минимальная сеть с выпуклой границей, то ее вершины степени 3 – не граничные.*

Из предложения 1.3 вытекает, что в случае, когда граница минимальной сети выпукла, эта граница состоит в точности из всех вершин степени 1 и 2, в частности, у минимальных 2-деревьев, затягивающих вершины выпуклых многоугольников, граница – это множество всех вершин степени 1.

В соответствии со сделанными замечаниями для любого 2-дерева Γ (плоского или минимального) вершины степени 1 будем называть *граничными*, а вершины степени 3 – *внутренними*. Кроме того, если 2-дерево Γ локально минимально, то внутренние вершины традиционно называют *точками Штейнера*, что мы иногда также будем делать. Далее, ребро из Γ , инцидентное граничной вершине, будем также называть *граничным*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, – *внутренним*.

В [6], [7], [10] изучались локально минимальные сети, затягивающие вершины правильных многоугольников. В частности, было показано, что *вершины каждого правильного n -угольника, $n \geq 3$, можно затянуть некоторым локально минимальным бинарным деревом.*

В настоящей работе будут построены новые ограничения на топологии локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей в терминах геометрии этой границы.

Полученные в статье общие результаты применены к классу многоугольников, близких к правильным. Множество M точек на окружности S^1 называется *квазиправильным многоугольником*, если существует правильный многоугольник, вписанный в окружность S^1 , такой, что на каждой открытой дуге окружности S^1 , ограниченной двумя соседними вершинами этого правильного многоугольника, лежит ровно одна вершина из M .

Будем говорить, что сеть Γ имеет *минимальную реализацию*, если Γ планарно эквивалентна некоторой локально минимальной сети Γ_m . Если при этом можно подобрать такую Γ_m , чтобы граница $\partial\Gamma_m$ была выпуклым (правильным, квазиправильным) многоугольником, то скажем, что Γ имеет *выпуклую (правильную, квазиправильную) минимальную реализацию*.

Следующая теорема, вытекающая из разработанной общей теории, демонстрирует отличия случая квазиправильных границ от случая правильных.

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует бесконечная по k серия квазиправильных $10k$ -угольников, $k \geq 8$, каждый из которых не может быть затянут ни одним локально минимальным бинарным деревом.*

Авторы благодарны академику РАН, профессору А. Т. Фоменко за постоянное внимание к их работе, а также профессору С. Гильдебрандту за предоставленную возможность плодотворно поработать в Боннском университете в октябре–декабре 1996 года.

§ 2. Предварительные результаты

Приведем основные результаты, полученные в [3]–[7]. Для этого напомним необходимые определения.

2.1. Диагональные триангуляции и паркеты; классификация минимальных 2-деревьев с выпуклой границей. Напомним, что плоские 2-дере-

вья могут быть описаны на двойственном языке, а именно, на языке диагональных триангуляций плоских многоугольников. Пусть W – плоский n -угольник и $T = \{t_i\}$ – некоторая его диагональная триангуляция, т.е. t_i , $i = 1, \dots, n-2$, – треугольники, каждый из которых образован некоторой тройкой из сторон и диагоналей n -угольника W , причем $W = \bigcup_i t_i$ и внутренности разных треугольников t_i не пересекаются; в частности, каждый треугольник t_i принадлежит W (вообще говоря, мы не предполагаем, что n -угольник W – выпуклый). Треугольники триангуляции T будем называть *ячейками*, причем ячейка, у которой не менее чем две стороны являются сторонами из W , называется *крайней*, а ячейка, ни одна сторона которой не совпадает со стороной из W , – *внутренней*. Две ячейки называются *смежными* или *соседними*, если они пересекаются по стороне. При этом говорят, что одна из этих ячеек *примыкает* ко второй. Сторона ячейки t_i называется *граничной стороной триангуляции T* , если она является стороной многоугольника W , в противном случае эта сторона называется *внутренней стороной триангуляции T* . Количество ячеек триангуляции T назовем *длиной* этой триангуляции.

По каждой диагональной триангуляции T многоугольника W можно построить плоское 2-дерево Γ_T , называемое *двойственной сетью* этой триангуляции. Выберем в качестве *вершин сети Γ_T* по одной точке внутри каждой ячейки из T и по одной точке внутри каждой стороны многоугольника W . Две вершины сети Γ_T соединим *ребром* (вложенной гладкой регулярной кривой) тогда и только тогда, когда или обе они принадлежат одной ячейке t_i , или лежат внутри смежных ячеек t_i и t_j ; при этом в первом случае ребро целиком лежит в t_i , а во втором – содержится внутри $t_i \cup t_j$. Естественно, ребра проведем таким образом, чтобы их внутренности не пересекались. Легко видеть, что двойственные сети планарно эквивалентных триангуляций также планарно эквивалентны. Кроме того, несложно проделать обратную операцию, т.е. по каждому плоскому 2-дереву Γ построить диагональную триангуляцию T , двойственная сеть которой планарно эквивалентна Γ .

Вершину двойственной сети Γ_T будем называть *граничной*, если она лежит на граничной стороне триангуляции T , и *внутренней* в противном случае. Таким образом, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между сторонами многоугольника W (для которого рассматривается диагональная триангуляция T) и граничными вершинами двойственной сети Γ_T . Кроме того, также имеется естественное взаимно однозначное соответствие между внутренними вершинами двойственной сети Γ_T и ячейками триангуляции T .

Ребро двойственной сети Γ_T будем называть *граничным*, если оно инцидентно граничной вершине этой сети, и *внутренним* в противном случае. Опять же имеется естественное взаимно однозначное соответствие между граничными ребрами двойственной сети Γ_T и сторонами многоугольника W . Также имеется естественное взаимно однозначное соответствие между внутренними ребрами двойственной сети Γ_T и диагоналями многоугольника W , порождающими триангуляцию T , т.е. внутренними ребрами триангуляции.

Именно описанные только что соответствия и будут иметься в виду в дальнейшем.

Если двойственная сеть диагональной триангуляции T обладает некоторым свойством, то мы будем говорить, что сама триангуляция T обладает этим свойством. Так, например, совокупность ячеек из T называется *связной*, если пересе-

чение двойственной сети Γ_T с этими ячейками связно. Также будем говорить, что диагональная триангуляция T имеет *минимальную реализацию* (соответственно *выпуклую минимальную реализацию*, *правильную минимальную реализацию*, *квазиправильную минимальную реализацию*), если такой реализацией обладает ее двойственная сеть.

В работах [3]–[6] полностью описаны диагональные триангуляции, имеющие выпуклую минимальную реализацию. Класс таких триангуляций обозначается через $\mathcal{WP}_5$. Напомним это описание.

Пусть T – произвольная диагональная триангуляция и Δ – некоторая крайняя ее ячейка. Ясно, что Δ смежна не более чем с одной ячейкой из T . Ячейку Δ назовем *наростом*, если смежная с Δ ячейка является внутренней. Диагональная триангуляция без наростов называется *скелетом*. Если для каждой внутренней ячейки Δ диагональной триангуляции T из всех наростов, примыкающих к Δ (если они есть), выбросить ровно один, то полученная диагональная триангуляция, как легко убедиться, является скелетом, который называется *скелетом триангуляции T* . Отметим, что такое *представление диагональной триангуляции в виде скелета и наростов* в общем случае неоднозначно. Эта неоднозначность возникает при наличии *концевых наростов* – пары наростов, примыкающих к одной и той же внутренней ячейке. Отметим также (см. [3]–[6]), что скелет любой триангуляции из $\mathcal{WP}_5$ снова принадлежит $\mathcal{WP}_5$.

Оказывается, для триангуляций из $\mathcal{WP}_5$ скелеты устроены достаточно просто. В [3] сначала описываются все скелеты из $\mathcal{WP}_5$, а затем то, как можно к ним прикреплять наросты, не выходя при этом из класса $\mathcal{WP}_5$. Первый шаг в описании скелетов – это разложение их на линейные участки и узлы ветвления.

Пусть S – произвольный скелет (не обязательно из $\mathcal{WP}_5$). Связные компоненты множества внутренних ячеек скелета S называются *узлами ветвления*, а связные компоненты скелета S , из которого выброшены все внутренние ячейки, называются *линейными участками*. Линейный участок, содержащий крайнюю ячейку, называется *концом*, а не содержащий – *перегородкой*.

Построенное разбиение скелета S позволяет определить *код* этого скелета как плоский граф, вершины которого соответствуют крайним и внутренним ячейкам из S , а ребра – линейным участкам и внутренним ребрам скелета S , по которым пересекаются смежные внутренние ячейки. Как показано в [3]–[6], код скелета из $\mathcal{WP}_5$ устроен достаточно просто.

Кроме того, используя код, мы будем переносить терминологию из теории графов на линейные участки и внутренние ячейки. Так, например, выражение “два конца смежны” означает, что соответствующие им ребра кода смежны. В качестве другого примера такого использования кода дадим определение ребра крепления: внутреннее ребро скелета S , являющееся пересечением линейного участка и инцидентной ему внутренней ячейки, называется *ребром крепления* этого линейного участка. Ясно, что если скелет содержит внутренние ячейки, то каждый конец имеет ровно одно ребро крепления, а каждая перегородка – ровно два.

Диагональная триангуляция, все ячейки которой – правильные (конгруэнтные) треугольники, называется *паркетом*. Следующее предложение показывает, что при изучении минимальных 2-деревьев с выпуклой границей можно ограничиться паркетами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Каждое плоское 2-дерево, имеющее выпуклую минимальную реализацию, планарно эквивалентно двойственной сети некоторого паркета.*

Итак, в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые диагональные триангуляции являются паркетами. Кроме того, для паркетов двойственную сеть удобно выбрать специальным образом: в качестве вершин такой двойственной сети возьмем центры ячеек и середины граничных сторон, а все ребра будем считать прямолинейными отрезками, соединяющими соответствующие вершины. Именно такие 2-дерева мы и будем иметь в виду, говоря о двойственных сетях паркетов. Отметим, что двойственная сеть каждого паркета является минимальной сетью с границей, состоящей из всех ее вершин степени 1.

Пусть S – скелет и L – его линейный участок. Сейчас мы определим позвоночник линейного участка L , что позволит нам полностью описать линейные участки скелетов из $\mathcal{WP}_5$.

Если S состоит из одной ячейки, то проведем в этой ячейке произвольную среднюю линию. Если S состоит из двух ячеек, то проведем в них одним из двух возможных способов параллельные средние линии, пересекающиеся с единственным внутренним ребром скелета S . Пусть теперь S состоит по крайней мере из трех ячеек. Проведем во всех некрайних ячейках скелета S их средние линии, соединяющие внутренние стороны этих ячеек. В крайних ячейках проведем средние линии, параллельные уже построенным в смежных ячейках. Все проведенные средние линии называются *позвонками*. На объединении всех позвонков введем структуру графа, объявив ребрами максимальные связные прямолинейные совокупности позвонков из невнутренних ячеек, а также все позвонки из внутренних ячеек. Полученный плоский граф называется *позвоночником скелета S* . Далее, пересечение позвоночника скелета S с каждым его линейным участком L называется *позвоночником линейного участка L* .

Следующее предложение [6] описывает все линейные участки скелетов из $\mathcal{WP}_5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Позвоночник каждого линейного участка L скелета из $\mathcal{WP}_5$ однозначно проектируется на прямую, параллельную некоторой стороне произвольной ячейки.*

Прямая из предложения 2.2 называется *направляющей линейного участка L* . Отметим, что с точностью до параллельности существует ровно три прямые, каждая из которых параллельна какой-нибудь стороне произвольной ячейки. В дальнейшем, говоря о направляющих, будем отождествлять параллельные прямые, поэтому, например, имеет смысл говорить, что линейный участок обладает одной направляющей (т.е. все направляющие линейного участка параллельны). Принимая во внимание сделанные замечания, отметим, что существует не более трех направляющих. Если линейный участок обладает тремя направляющими, то он называется *змеей*, если двумя – то *лестницей*, и наконец, если одной – то *ломаной змеей*. Таким образом, описаны основные *структурные элементы* паркетов из $\mathcal{WP}_5$: наросты, узлы ветвления и линейные участки.

Опишем, как эти элементы крепятся друг к другу. Оказывается, каждый скелет из $\mathcal{WP}_5$ можно получить из скелетов специального канонического вида, выбрасывая из последних некоторое количество ячеек. Операция “выбрасывания” называется *редукцией*. Различаются редукции I и II типа. Пусть D – некоторый паркет.

Редукция I типа состоит в разрезании паркета D вдоль внутреннего ребра некоторой ячейки и отбрасывании одной из двух компонент. Редукция II типа может быть описана так: выберем два внутренних параллельных ребра паркета D ; разрежем паркет D вдоль этих ребер; выбросим ту из трех образованных компонент, которая пересекается с обеими оставшимися компонентами; с помощью параллельного переноса склеим оставшиеся две компоненты по ребрам разреза. Можно показать, что если $D \in \mathcal{WP}_5$, то описанные операции корректно определены и результирующий паркет по-прежнему принадлежит $\mathcal{WP}_5$.

Теперь мы можем сформулировать теорему из [3], классифицирующую скелеты из $\mathcal{WP}_5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Скелет принадлежит $\mathcal{WP}_5$ тогда и только тогда, когда он получается кратным применением редукции к скелету одного из трех канонических типов, схемы которых приведены на рис. 1, где три параллельные черточки обозначают ломаную змею, направляющая которой параллельна черточкам; две черточки, пересекающиеся под углом в 60° , обозначают лестницу с направляющими, параллельными черточкам; одна черточка соответствует змее, позвоночник которой параллелен черточке; наконец, кружок соответствует узлу ветвления, состоящему из одной ячейки.*

Рис. 1. Схема классифицирующих скелетов

Отметим, что из предложения 2.3 вытекает интересное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Коды скелетов из $\mathcal{WP}_5$ — это всевозможные плоские 2-деревья, каждое из которых имеет не более шести вершин степени 1. В частности, скелет из $\mathcal{WP}_5$ содержит не более шести концов, не более трех перегородок и не более четырех внутренних ячеек (а значит, не более четырех узлов ветвления).*

Ориентируем позвоночник каждого конца L скелета $S \in \mathcal{WP}_5$ в сторону крайней ячейки, принадлежащей этому концу (для скелета S , не содержащего внутренних ячеек, существует две таких ориентации). Тогда направления ребер так ориентированного позвоночника назовем *направлениями конца L* . Ясно, что всего существует не более шести различных направлений, образующих правильный шестиугольник, вписанный в единичную окружность направлений. Такой шестиугольник назовем *шестиугольником направлений*.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Каждый конец скелета S из $\mathcal{WP}_5$ имеет не более трех различных направлений, причем эти направления — последовательные на*

шестиугольнике направлений. Множества направлений, соответствующие любым двум различным концам из S , не пересекаются.

Если ориентировать границу скелета S для определенности против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на множестве концов, а также ориентировать шестиугольник направлений против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на семействе множеств направлений концов, то оба возникших порядка будут согласованы: последовательные концы будут иметь последовательные множества направлений.

Теорему, описывающую возможные расположения наростов на скелетах паркетов из $\mathcal{WP}_5$, мы приводить не будем, а заинтересованного читателя вновь отсылаем к [3]–[7].

Для дальнейшего нам понадобится обобщить понятия конца, направления конца и т. п., определенные для скелетов, на случай произвольных паркетов. Пусть T – произвольный паркет и S – некоторый его скелет. Выбросим из паркета T все узлы ветвления скелета S . Связные компоненты оставшихся множеств назовем *линейными участками паркета T* . *Концом паркета T* назовем линейный участок из T , содержащий конец скелета S . Если паркет T содержит узлы ветвления, то каждый его конец E содержит ровно одну крайнюю ячейку скелета S . Если же паркет T не содержит узлов ветвления, т. е. является *линейным паркетом*, и состоит больше чем из одной ячейки, то он содержит две крайние ячейки своего скелета. Такие ячейки в каждом из двух описанных случаев будем называть *концевыми ячейками конца E паркета T* (по отношению к данному разложению на скелет и наросты). Если фиксирована концевая ячейка Δ конца E паркета T , то этот конец будем называть *Δ -концом*. Конец скелета S паркета T , содержащийся в E , в этом случае будем называть *Δ -концом скелета S* .

Пусть E – произвольный Δ -конец паркета T из $\mathcal{WP}_5$ и E_S – Δ -конец скелета S . Рассмотрим позвоночник L конца E_S , и пусть l – ребро из L , пересекающееся с Δ . Связное множество ячеек из E_S , внутренности которых пересекают l , называется *Δ -змеей*. Максимальная Δ -змея называется *концевой Δ -змеей*. Будем говорить, что концы E и E_S *имеют излом*, если L состоит более чем из одного ребра. Концевую Δ -змею Z , объединенную со всеми наростами из T , смежными с ячейками этой змеи, назовем *Δ -хвостом паркета T* , а максимальную связную содержащую Δ совокупность ячеек из Z такую, что ни к одной из этих ячеек не примыкает нарост из T , назовем *Δ -жалом паркета T* .

Пусть фиксировано некоторое разложение паркета T на скелет S и наросты. Назовем граничную сторону паркета T *концевой*, если она пересекается с позвоночником скелета S . Граничное ребро двойственной сети паркета, приходящее на концевую сторону, и соответствующее ребро произвольной минимальной реализации этого паркета также назовем *концевыми*. Также *концевой* будем называть граничную вершину, инцидентную концевому ребру. Остальные граничные ребра двойственной сети и соответствующей минимальной реализации назовем *отростками*.

Далее, выбросим из границы паркета T два его концевых ребра, соответствующих концам E и E' . Рассмотрим незамкнутые ломаные, являющиеся замыканиями связных компонент полученного множества. Та из этих двух ломаных, движение по которой от E к E' по границе паркета T происходит против часовой стрелки, называется *супербоковиной паркета T от E к E'* . Количество ребер паркета T , входящих в супербоковину, называется *длиной* этой супербоковины. Супербо-

ковина, не содержащая концевых ребер, называется *боковиной*. Если T' – это некоторый паркет, содержащийся в T , то каждое непустое пересечение паркета T' с любой боковиной паркета T называется *боковиной паркета T'* . В частности, имеет смысл говорить о *боковинах конца*, и т. д.

Направления конца паркета определяются в терминах его боковин по аналогии с [4].

2.2. Дожди и змеи. В данном разделе мы определим некоторые технические понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Эта техника была разработана авторами в [6] и [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *дождем* конечную совокупность взаимно параллельных различных прямых на плоскости. Прямые дождя, в полосе между которыми лежат все остальные прямые этого дождя, называются *крайними*, а прямые дождя, в полосе между которыми нет других прямых этого дождя, называются *соседними*.

Пусть M – конечное множество точек плоскости и e – произвольный ненулевой вектор. Через каждую точку множества M проведем прямую, параллельную вектору e . Полученное семейство прямых называется *дождем, проходящим через M параллельно e* . Если мы дополнительно предположим, что каждая прямая из построенного дождя ориентирована в направлении e , то мы получим *ориентированный в направлении e дождь, проходящий через M* . Следующее предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть R – произвольный дождь, проходящий через множество M . Тогда в открытой полосе между любыми двумя соседними прямыми дождя R нет точек из M .

В терминах дождя естественно описываются некоторые важные для нас геометрические свойства правильных многоугольников. Пусть M – множество вершин правильного многоугольника, вписанного в окружность S^1 . Проведем через M произвольный дождь R так, чтобы на каждой прямой дождя лежала ровно одна вершина из M . Обозначим через t и t' те точки из M , через которые проходят крайние прямые дождя R , а через δ и δ' – открытые дуги окружности S^1 , на которые ее разбивают точки t и t' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. В сделанных предположениях на любых двух соседних некрайних прямых дождя R лежат точки из M , принадлежащие разным дугам δ и δ' . Более того, в открытой полосе между любыми двумя некрайними прямыми дождя R , проходящими через соседние вершины многоугольника M , расположена ровно одна прямая дождя R . Далее, пусть $r \in R$ – некрайняя прямая, проходящая через точку $\hat{t} \in M$, и Π – открытая полуплоскость, ограниченная прямой r и содержащая t . Предположим для определенности, что прямая из R , соседняя с крайней прямой, проходящей через t , содержит вершину многоугольника M , лежащую на δ . Тогда если $\hat{t} \in \delta$, то множества $M \cap \Pi \cap \delta$ и $M \cap \Pi \cap \delta'$ состоят из одинакового числа точек, а если $\hat{t} \in \delta'$, то множество $M \cap \Pi \cap \delta$ содержит на одну точку больше, чем множество $M \cap \Pi \cap \delta'$.

Пусть Γ – минимальная сеть, планарно эквивалентная двойственной сети некоторой змеи. В дальнейшем мы будем говорить, что такая сеть Γ сама является *змеей*. Проведем прямые через все отростки минимальной сети Γ . Полученный

дождь называется *дождем, соответствующим змее* Γ . Пусть t – одна из концевых вершин змеи Γ и e – отросток из Γ , смежный с концевым ребром, инцидентным t . Ориентируем отросток e в сторону его граничной вершины. Таким образом, будем рассматривать отросток e как вектор. Ориентируем дождь, соответствующий змее Γ , в направлении e . Полученный ориентированный дождь назовем *ориентированным дождем, соответствующим паре* (Γ, t) .

Далее, рассмотрим все ребра из Γ , не являющиеся отростками. Очевидно, эти ребра образуют ломаную L , одной из концевых вершин которой является точка t . Ориентируем L от точки t и назовем полученную ориентированную ломаную *соответствующим змее* Γ *ручейком с началом в* t . Этот ручеек мы будем обозначать через $\text{br}(t, \Gamma)$.

Пусть R – произвольный дождь, ориентированный в направлении некоторого единичного вектора e . Рассмотрим произвольную точку t , не лежащую ни в одной полосе между прямыми дождя R . Проведем через t прямую l , перпендикулярную прямым дождя, и ориентируем ее от точки t в сторону прямых дождя. Обозначим через f единичный направляющий вектор прямой l . Ориентация прямой l задает порядок на множестве R . Пусть $r_1, \dots, r_n$ – последовательные прямые дождя R . Рассмотрим на плоскости орторепер (f, e) . Рассмотрим на прямой r_1 точку s_1 такую, что аргумент вектора ts_1 равен $\pi/6$. Если для всех k , $1 \leq k < p \leq n$, точка $s_k \in r_k$ уже построена, то определим точку s_p на прямой r_p из следующего условия: аргумент вектора $s_{p-1}s_p$ равен $(-1)^{p+1}\pi/6$. Таким образом, на каждой прямой r_k дождя R определена точка s_k . Выпустим из точки s_n луч a в направлении некоторого ненулевого вектора, аргумент которого равен $(-1)^n\pi/6$. Объединение ломаной $ts_1 \dots s_n$ с лучом a называется *ручейком ориентированного дождя* R *с началом в* t и обозначается через $\text{br}(t, R)$. Если из каждой прямой r_k дождя R выбросить открытый луч с вершиной в s_k , идущий в направлении вектора $(-1)^k e$, то объединение полученного множества с ручейком $\text{br}(t, R)$ называется *бесконечной змеей с началом в* t , *соответствующей ориентированному дождю* R . Пересечение такой бесконечной змеи с каждой прямой дождя R называется *отростком*, а луч a называется *бесконечным концевым ребром* этой змеи.

§ 3. Концевые наросты

Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$ и Δ – его нарост. Нарост Δ называется *концевым*, если единственная внутренняя ячейка паркета D , на которую крепится Δ , смежна еще с одним наростом, отличным от Δ , который мы обозначим через Δ' . Отметим, что Δ' тоже является концевым наростом. Таким образом, всегда можно говорить о *паре концевых наростов*.

Предположим теперь, что паркет D имеет минимальную реализацию Γ на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Тогда, очевидно, граничные ребра сети Γ , соответствующие паре концевых наростов Δ и Δ' , приходят в четыре последовательные вершины многоугольника M . Две средние соседние вершины из этих четырех назовем *концевой парой* вершин из M , соответствующей паре концевых наростов Δ и Δ' сети Γ .

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть паркет D имеет минимальную реализацию на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Пусть t и t' – концевая пара вершин из M , соответствующая паре концевых наростов Δ и Δ' паркета D . Тогда сумма внутренних углов многоугольника M в вершинах t и t' больше π и меньше $5\pi/3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбросим из многоугольника $\text{conv } M$ сеть Γ и рассмотрим замыкания полученных связных компонент, содержащие одну из точек m и m' . Ясно, что имеется ровно три таких компоненты: один пятиугольник, углы которого в вершинах m и m' в сумме равны π , и два треугольника, углы которых в вершинах m и m' строго меньше $\pi/3$, рис. 2. Доказательство закончено.

Рис. 2. Пара концевых наростов

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Предположим, что паркет D из $\mathcal{WP}_5$ имеет минимальную реализацию Γ на множестве M вершин выпуклого многоугольника такого, что сумма любых его двух последовательных внутренних углов или не меньше $5\pi/3$, или не больше π . Тогда D не имеет концевых наростов.*

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть D – паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на множестве M вершин выпуклого многоугольника W , вписанного в окружность. Предположим, что угловые величины α_1, α_2 и α_3 любых трех последовательных сторон многоугольника W удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\alpha_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{или} \quad \alpha_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \geq \pi.$$

Тогда D не имеет концевых наростов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A и B – две последовательные вершины многоугольника W , α_2 – угловая величина стороны AB , а α_1 и α_3 – угловые величины сторон многоугольника W , отличных от AB и пересекающихся с AB . Обозначим через Σ сумму угловых величин всех остальных сторон многоугольника W , а через α и β – внутренние углы в W при вершинах A и B соответственно. Имеем:

$$\alpha + \beta = \frac{\alpha_3 + \Sigma}{2} + \frac{\alpha_1 + \Sigma}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 2\pi - \alpha_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}.$$

Поэтому $\alpha + \beta \geq 5\pi/3$ или $\alpha + \beta \leq \pi$. Теперь утверждение вытекает из теоремы 3.1.

Лежащее на окружности S^1 множество M , состоящее из n точек, назовем *квазиправильным*, если существует вписанный в S^1 правильный n -угольник такой, что внутри каждой высекаемой им дуги окружности S^1 лежит ровно одна точка из M .

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Пусть M – квазиправильный n -угольник и D – паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий на M минимальную реализацию. Тогда если $n \geq 18$, то D не имеет концевых наростов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следствием 3.2. Пусть $\alpha = \pi/n$. Тогда в обозначениях следствия 3.2 имеем:

$$4\alpha < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 8\alpha, \quad 0 < \alpha_2 < 4\alpha.$$

Поэтому так как $\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)/2 = \alpha_2/2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)/2$, получаем

$$2\alpha < \alpha_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} < 6\alpha,$$

и так как при $n \geq 18$ выполнено неравенство $6\alpha \leq \pi/3$, то концевые наросты в этом случае отсутствуют. Следствие доказано.

§ 4. О концевых вершинах

Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$, не имеющий концевых наростов, а Γ – некоторая минимальная реализация паркета D на множестве M вершин выпуклого многоугольника W . Обозначим через k концевую вершину сети Γ , соответствующую некоторому концу Z из D , а через t и t' – соседние с k вершины многоугольника W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *В сделанных выше предположениях внутренний угол многоугольника W при вершине k меньше π . Более того, углы треугольника ktm' при вершинах t и t' меньше $2\pi/3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ – концевая ячейка паркета D , соответствующая концевой вершине k сети Γ , и Δ' – единственная ячейка из D , смежная с Δ . Обозначим через s и s' точки Штейнера сети Γ , соответствующие Δ и Δ' , см. рис. 3. Для определенности будем считать, что вершина s – соседняя с t , а вершина s' – соседняя с t' . Так как в треугольнике kst угол при вершине s равен $2\pi/3$, то угол mts меньше $\pi/3$. Так как в четырехугольнике $ks's'm'$ углы при вершинах s и s' равны $2\pi/3$, то угол skm' меньше $2\pi/3$. Поэтому $mtm' = mks + skm' < \pi$, что и доказывает первое утверждение предложения.

Рис. 3. Концевая вершина

Докажем теперь второе утверждение. Ясно, что отрезки ss' и tt' пересекаются в некоторой точке p . Рассмотрим два четырехугольника: $kspm$ и $kspm'$. Так как в первом из них угол при вершине s равен $4\pi/3$, то сумма оставшихся его углов равна $2\pi/3$, поэтому угол ktm' меньше чем $2\pi/3$. Во втором четырехугольнике угол при вершине s равен $2\pi/3$, а при вершине p – больше чем $2\pi/3$. Поэтому угол $tm'tk$ меньше чем $2\pi/3$. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на множестве M вершин выпуклого многоугольника W , и пусть $k \in M$ – некоторая концевая вершина сети Γ . Тогда если угол в концевой вершине k равен π , то на конце Z имеется концевой нарост.

§ 5. Геометрия концов

Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$ и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ – некоторое его разложение на скелет и наросты. Пусть Δ – произвольная концевая ячейка паркета D . Напомним, что Δ -змеей называется (связный) подпаркет в S , содержащий Δ и такой, что его пересечение с позвоночником скелета S является отрезком прямой. Максимальная Δ -змея называется *концевой Δ -змеей паркета D* , а подпаркет в D , состоящий из концевой Δ -змеи и всех наростов из D , которые к ней крепятся, называется *Δ -хвостом паркета D* . Максимальная Δ -змея, к которой не крепится ни одного нароста паркета D , называется *Δ -жалом*. Ясно, что у паркета без концевых наростов длина каждого жала не меньше 2, а у паркета с парой концевых наростов Δ и Δ' длина Δ -жала равна длине Δ' -жала и равна 1.

Пусть E – конец из D , содержащий Δ , и E_S – соответствующий E конец скелета S . Если конец E_S не является змеей (как линейный участок), то будем говорить, что конец E имеет излом или поворачивает, и ячейку конца E_S , смежную с концевой Δ -змеей и не принадлежащую этой змее, назовем *ячейкой поворота*. Если Γ – минимальная реализация паркета D и s – точка Штейнера из Γ , соответствующая ячейке поворота конца E , то отросток скелета S (рассматриваемого как подсеть в Γ), инцидентный вершине s , а также соответствующее граничное ребро скелета S назовем *ребром поворота конца E сети Γ и паркета D* соответственно.

В настоящем параграфе мы оценим наименьшую возможную длину каждого Δ -жала и Δ -хвоста паркета D , имеющего минимальную реализацию на некотором выпуклом многоугольнике, исходя из геометрии этого многоугольника. Кроме того, мы изучим взаимное расположение двух различных концов. Так как для рассматриваемого нами приложения – для квазиправильных n -угольников – начиная с $n = 18$ концевых наростов быть не может, мы *всюду ниже будем предполагать, что паркет D не имеет концевых наростов*.

Итак, пусть концевых наростов нет. Мы начнем с оценки длины жала концевой змеей в предположении, что либо на концевой змее имеются наросты, либо на концевой змее наростов нет, но соответствующий конец имеет излом.

5.1. Длина жала: на концевой змее есть наросты. Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$ и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ – некоторое его разложение на скелет и наросты. Пусть Δ – концевая ячейка скелета S , и предположим, что на Δ -конце E нет концевых наростов, а на концевой Δ -змее наросты есть. Обозначим через Δ' ближайший к Δ нарост из Δ -хвоста паркета D . Пусть k – концевое ребро ячейки Δ , а e – отличное от k граничное ребро из Δ . Ориентируем оба отрезка e и k от их общей вершины. Пара (e, k) образует некоторый репер на плоскости. Определим *тип Δ -хвоста* равным 1, 2, 3 или 4 в соответствии с номером одной из следующих четырех возможностей, см. также рис. 4.

1. Репер (e, k) ориентирован положительно, и нарост Δ' расположен на боковой концевой Δ -змее Z , не содержащей ребро e .

2. Репер (e, k) ориентирован положительно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , содержащей ребро e .
3. Репер (e, k) ориентирован отрицательно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , не содержащей ребро e .
4. Репер (e, k) ориентирован отрицательно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , содержащей ребро e .

Рис. 4. Типы хвостов

Пусть M — произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ — последовательные его вершины при обходе M , скажем, против часовой стрелки. Для удобства будем считать, что индексы i вершин m_i — это элементы из циклической группы порядка n , т.е. из $\mathbb{Z}_n$. Рассмотрим произвольную вершину m_k многоугольника M . Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M такую, что точка $m_k \in M$ является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ из D . Так как по предположению на конце E паркета D , содержащем ячейку Δ , нет концевых наростов, из предложения 4.1 вытекает, что внутренний угол многоугольника M в вершине m_k меньше π .

Обозначим через $\alpha_{k\pm 1}$ величину угла $m_k m_{k\pm 1} m_{k\mp 1}$. Для каждого целого p , $1 \leq p \leq n$, определим β_p равным величине положительного угла между направлениями векторов $m_{k-1}m_{k+1}$ и $m_{k+p-1}m_{k+p}$ и для целого q , $1 \leq q \leq n$, положим γ_q равным величине отрицательного угла между направлениями векторов $m_{k+1}m_{k-1}$ и $m_{k-q+1}m_{k-q}$.¹ Ясно, что β_1 и γ_1 не равны нулю, так как угол при вершине m_k меньше π . Кроме того, обе последовательности $\{\beta_p\}$ и $\{\gamma_q\}$ монотонно возрастают (не обязательно строго). При этом так как $\beta_n = 2\pi - \alpha_{k-1}$, $\gamma_n = 2\pi - \alpha_{k+1}$ и по предложению 4.1 углы $\alpha_{k\pm 1}$ меньше $2\pi/3$, имеем: $\beta_n > 4\pi/3$ и $\gamma_n > 4\pi/3$.

Определим теперь четверку чисел, отвечающих за возможную длину Δ -жала в зависимости от типа Δ -хвоста.

1. Пусть q_0 — это такое наименьшее q , что $\pi/3 - \alpha_{k+1} < \gamma_q < 2\pi/3$. Положим $g_o^+(m_k) = 2q_0 - 3$.
2. Пусть p_0 — это такое наименьшее p , что $\pi/3 < \beta_p < 2\pi/3 + \alpha_{k+1}$. Положим $g_e^-(m_k) = 2p_0 - 4$.
3. Пусть p_0 — это такое наименьшее p , что $\pi/3 - \alpha_{k-1} < \beta_p < 2\pi/3$. Положим $g_o^-(m_k) = 2p_0 - 3$.

¹ Положительным (отрицательным) углом от a до b называется величина дуги единичной окружности направлений, проходимой при движении в положительную (отрицательную) сторону от направления вектора a к направлению вектора b . Эти углы меняются в пределах $[0, 2\pi)$.

4. Пусть q_0 – это такое наименьшее q , что $\pi/3 < \gamma_q < 2\pi/3 + \alpha_{k-1}$. Положим $g_e^+(m_k) = 2q_0 - 4$.

Наконец, определим *наростовый вектор* $g(m_k)$ точки m_k как вектор $(g_o^+(m_k), g_e^-(m_k), g_o^-(m_k), g_e^+(m_k))$. Отметим, что если какого-нибудь p_0 или q_0 не существует, то по определению соответствующая компонента вектора $g(m_k)$ равна бесконечности. Обозначим через $g(m_k)[i]$ компоненту вектора $g(m_k)$ с номером i . Подчеркнем, что наростовый вектор $g(m_k)$ зависит только от геометрии самого множества M и выбора точки m_k .

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что к концевой Δ -змеи паркета D крепится по крайней мере один нарост и что Δ -хвост имеет тип i . Тогда i -я компонента $g(m_k)[i]$ наростового вектора $g(m_k)$ вершины m_k конечна и длина Δ -жала не меньше чем $g(m_k)[i]$. Более того, для каждого $g_0 \geq 2$ среди рассматриваемых множеств M и паркетов D с Δ -хвостом типа i существуют такие, что $g(m_k)[i] = g_0$ и длина Δ -жала в точности равна $g(m_k)[i]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ' – нарост на концевой Δ -змеи, ближайший к концевой ячейке Δ , и e – не концевое граничное ребро ячейки Δ . Имеются две возможности: ребро e и нарост Δ' пересекают или разные, или одну и ту же боковину концевой Δ -змеи. Боковину концевой Δ -змеи, пересекающуюся с отростком сети, инцидентным вершине m_{k+1} , назовем *нижней*, а другую боковину этой змеи – *верхней*.

Для определенности будем предполагать, что отросток сети Γ , соответствующий ребру e , инцидент вершине m_{k+1} , т.е. пересекает нижнюю боковину концевой Δ -змеи. Этот отросток мы также обозначим через e и ориентируем его от точки m_{k+1} .

Рассмотрим первый случай (тип Δ -хвоста равен 1): ребро e и нарост Δ' пересекают разные боковины концевой Δ -змеи, нарост Δ' расположен на верхней боковине концевой Δ -змеи, см. рис. 5. Так как мы предполагаем, что концевых наростов нет, отросток e лежит в угле $m_k m_{k+1} m_{k-1}$. Пусть m_{k-q+1} и m_{k-q} – вершины из M , инцидентные граничным ребрам нароста Δ' . Построим на этих вершинах правильный треугольник $m_{k-q+1} m_{k-q} m_{k-q+1}$, лежащий вне многоугольника M . Рассмотрим прямую, проходящую через единственное внутреннее ребро сети Γ , инцидентное точке Штейнера из нароста Δ' . Ясно, что эта прямая, во-первых, параллельна e и, во-вторых, проходит через точку m_- . Более того, эта прямая пересекает сторону $m_{k-q+1} m_{k-q}$ построенного правильного треугольника.

Рис. 5. Первый случай

Рассмотрим два положительных угла: первый – от вектора $m_{k+1}m_{k-1}$ к вектору $m_{k+1}m_k$, второй – от вектора $m_{k-q+1}m_-$ к вектору $m_{k-q}m_-$. Из вышесказанного вытекает, что внутренности этих углов пересекаются, что приводит к следующей системе неравенств:

$$0 < -\gamma_q + 2\pi/3 \quad \text{и} \quad \alpha_{k+1} > -\gamma_q + \pi/3,$$

откуда $\pi/3 - \alpha_{k+1} < \gamma_q < 2\pi/3$.

С другой стороны, длина Δ -жала в этом случае, очевидно, равна $2q - 3$, см. рис. 4. Поэтому

$$g(m_k)[1] = g_o^+(m_k) \leq 2q - 3,$$

т.е. длина Δ -жала больше или равна $g(m_k)[1]$.

Если тип Δ -хвоста равен 3, т.е. отросток $e \in \Gamma$ приходит в точку m_{k-1} , а соответствующее ребро e из D и нарост Δ' пересекают разные боковины концевой Δ -змеи (нарост Δ' расположен на нижней боковине концевой Δ -змеи), то аналогично $\pi/3 - \alpha_{k-1} < \beta_p < 2\pi/3$. Так как длина Δ -жала в этом случае равна $2p - 3$, то

$$g(m_k)[3] = g_o^-(m_k) \leq 2p - 3,$$

т.е. длина Δ -жала больше или равна $g(m_k)[3]$.

Теперь рассмотрим второй случай (тип Δ -хвоста равен 2): ребро e и нарост Δ' пересекают одну и ту же боковину концевой Δ -змеи (нарост Δ' расположен на нижней боковине концевой Δ -змеи), см. рис. 6. Так как мы предполагаем, что концевых наростов нет, отросток e лежит в угле $m_k m_{k+1} m_{k-1}$. Пусть m_{k+p-1} и m_{k+p} – вершины из M , инцидентные граничным ребрам нароста Δ' . Построим на этих вершинах правильный треугольник $m_{k+p-1} m_+ m_{k+p}$, лежащий вне многоугольника M . Рассмотрим прямую, проходящую через единственное внутреннее ребро сети Γ , инцидентное точке Штейнера из нароста Δ' . Ясно, что эта прямая, во-первых, параллельна e и, во-вторых, проходит через точку m_+ . Более того, эта прямая пересекает сторону $m_{k+p-1} m_{k+p}$ построенного правильного треугольника.

Рис. 6. Второй случай

Рассмотрим два положительных угла: первый – от вектора $m_{k-1}m_{k+1}$ к вектору $m_k m_{k+1}$ и второй – от вектора $m_{k+p} m_+$ к вектору $m_{k+p-1} m_+$. Из вышесказанного вытекает, что внутренности этих углов пересекаются, что приводит к следующей системе неравенств:

$$0 < \beta_p - \pi/3 \quad \text{и} \quad \alpha_{k+1} > \beta_p - 2\pi/3,$$

откуда $\pi/3 < \beta_p < 2\pi/3 + \alpha_{k+1}$. Так как длина Δ -жала в этом случае равна $2p-4$,
то

$$g(m_k)[2] = g_e^-(m_k) \leq 2p - 4,$$

т.е. длина Δ -жала больше или равна $g(m_k)[2]$.

Наконец, если тип Δ -хвоста равен 4, т.е. отросток $e \in \Gamma$ приходит в точку m_{k-1} , а соответствующее ребро e из D и нарост Δ' пересекают одну и ту же боковину концевой Δ -змеи (нарост Δ' расположен на верхней боковине концевой Δ -змеи), то, аналогично, $\pi/3 < \gamma_q < 2\pi/3 + \alpha_{k-1}$. Так как длина Δ -жала в этом случае равна $2q - 4$, то

$$q(m_k)[4] = q_e^+(m_k) \leq 2q - 4,$$

т.е. длина Δ -жала больше или равна $g(m_k)[4]$.

Таким образом, первое утверждение теоремы полностью доказано.

Пример, доказывающий второе утверждение теоремы, может быть построен так, как показано на рис. 7. Здесь мы разберем подробно только случай хвостов типа 2. Для остальных типов конструкция аналогична.

Рис. 7. Длина жала равна компоненте наростового вектора

Пусть $g_0 \geq 2$ – произвольное четное число. Рассмотрим произвольный ориентированный дождь R , состоящий из $z = g_0 + 1$ прямых, и пусть m – некоторая точка на плоскости, лежащая вне полосы, ограниченной крайними прямыми дождя. Пусть Z – бесконечная змея с началом в m , соответствующая дождю R . Рассмотрим ручеек $\text{br}(m, R)$ с началом в m , и пусть r_i обозначает i -й отросток змеи Z вдоль ручейка $\text{br}(m, R)$. Построим два луча l_1 и l_2 , выходящие из m и такие, что луч l_i пересекает внутренность луча r_i , $i = 1, 2$, в точке m_i под углом, меньшим чем $\pi/6$. Ясно, что угол φ между лучами l_1 и l_2 больше чем $2\pi/3$ и содержит ручеек $\text{br}(m, R)$.

Обозначим через m_i точку пересечения отрезка r_i с границей угла φ . Выпустим из точки m_z луч l_3 так, чтобы часть отрезка r_z , попавшая в угол между лучами l_3 и $m_z m$, принадлежала биссектрисе этого угла. Из сказанного выше вытекает, что луч l_3 пересекает бесконечное концевое ребро змеи Z в некоторой внутренней точке m' .

Проведем в окрестности вершины m_z перпендикуляр ℓ к отрезку r_z так, чтобы точки m , m' и все точки m_i , $i \neq z$, лежали в одной открытой полуплоскости относительно ℓ , а точка m_z — в другой. Более того, потребуем, чтобы точка m'_z , симметричная m_z относительно ℓ , попала внутрь отрезка r_z . Точки пересечения

прямой ℓ с лучами $m_z t$ и l_3 обозначим через n_1 и n_2 . Определим множество M' равным $\{m, m', n_1, n_2, m_1, \dots, m_{z-1}\}$. Ясно, что M' – это множество вершин некоторого выпуклого многоугольника.

Обозначим через Γ' пересечение змеи Z с выпуклой оболочкой $\text{conv } M'$ множества M' , и пусть r'_z – часть отрезка r_z , попавшая в Γ' . Обозначим через s единственную точку Штейнера из Γ' , инцидентную r'_z . Перестроим сеть Γ' , заменив ребро r'_z на единственную минимальную сеть, затягивающую вершины треугольника $n_1 n_2 s$. Очевидно, эта сеть состоит из трех ребер. Перестроенную сеть Γ' снова обозначим через Γ' . Далее, на граничном ребре sm' сети Γ' выберем точку s' и выпустим из нее два различных луча l_4 и l_5 под углами в $\pi/3$ по отношению к лучу $s'm'$. Ясно, что один из этих лучей, скажем l_5 , параллелен отрезку r_2 . Перестроим сеть Γ' , заменив ребро sm' на три ребра, одно из которых – это ss' , другое – пересечение луча l_4 с выпуклой оболочкой $\text{conv } M'$, а третье – пересечение луча l_5 с углом φ . Перестроенную таким образом сеть Γ' обозначим через Γ . Множество всех вершин степени 1 сети Γ обозначим через M . Ясно, что M – это множество вершин некоторого выпуклого многоугольника.

Сеть Γ представляет собой змею с наростом. Если обозначить через Δ ту концевую ячейку паркета, соответствующую сети Γ , которая отвечает вершине m , то длина Δ -жала будет равна g_0 . С другой стороны, число $g(m)$ [2], вычисленное для вершины m множества M , тоже равно g_0 . Доказательство теоремы закончено.

Отметим, что если множество M симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через вершину m_k , то $g_e^-(m_k) = g_e^+(m_k)$ и $g_o^-(m_k) = g_o^+(m_k)$. Поэтому в таком случае под наростовым вектором удобно понимать вектор $g_s(m_k)$, состоящий из двух компонент, соответствующих первому и второму типам Δ -хвоста:

$$g_s(m_k) = (g_o^+(m_k), g_e^-(m_k)).$$

Обозначим через $G(m_k)$ наименьшую из компонент наростового вектора $g(m_k)$ и назовем ее *наростовым числом точки m_k* .

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Предположим, что к концевой Δ -змее паркета D крепится по крайней мере один нарост. Тогда длина Δ -жала не меньше наростового числа $G(m_k)$.*

Рассмотрим один интересный частный случай. Пусть M – произвольное конечное подмножество окружности и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ – последовательные его вершины при обходе M , скажем, против часовой стрелки. Как и выше, будем считать, что индексы i вершин m_i – это элементы из $\mathbb{Z}_n$. Рассмотрим произвольную вершину m_k , и пусть $\delta_{\pm}$ обозначает угловую величину стороны $m_k m_{k\pm 1}$, см. рис. 8. Опустим на каждую сторону $m_{k\pm(i-1)} m_{k\pm i}$ многоугольника M перпендикуляр $r_i^{\pm}$ из центра окружности и ориентируем его от центра окружности. Обозначим через φ_i^+ величину положительного угла от r_1^+ до r_i^+ . Аналогично, через φ_i^- обозначим величину отрицательного угла от r_1^- до r_i^- .

1. Пусть q_0 – это такое наименьшее q , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2}.$$

2. Пусть p_0 – это такое наименьшее p , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3}.$$

Рис. 8. Точки на окружности

3. Пусть p'_0 — это такое наименьшее p , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2}.$$

4. Пусть q'_0 — это такое наименьшее q , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. В сделанных предположениях наростовый вектор $g(m_k)$ вершины m_k множества $M \subset S^1$ равен

$$(2q_0 - 3, 2p_0 - 4, 2p'_0 - 3, 2q'_0 - 4).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть M — множество вершин квазиправильного n -угольника и $n \geq 18$. Тогда все компоненты наростового вектора любой вершины $m \in M$ конечны и наростовый вектор вершины m покомпонентно больше или равен следующему вектору

$$\left(2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3, 2 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - 4, 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 3, 2 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - 4 \right),$$

а наростовое число $G(m)$ больше или равно $\lfloor n/3 \rfloor - 4$. Поэтому если D — произвольный паркет, имеющий минимальную реализацию на квазиправильном n -угольнике, то любое его Δ -жало, не совпадающее с Δ -хвостом (т.е. на концевой Δ -звезде имеются наросты), содержит по крайней мере $\lfloor n/3 \rfloor - 4$ ячеек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечность компонент наростового вектора вытекает из того, что разность между верхними и нижними границами, в которых должны лежать величины углов $\varphi_i^\pm$, больше чем $\pi/3$. С другой стороны, разность между $\varphi_{i+1}^\pm$ и $\varphi_i^\pm$ не превосходит угловой величины двух сторон правильного n -угольника P из определения квазиправильного многоугольника M , т.е. $4\pi/n$. Так как $n \geq 18$, указанная разность меньше чем $\pi/3$, поэтому одно из $\varphi_i^\pm$ попадает в нужный интервал для каждой из четырех компонент наростового вектора.

Для завершения доказательства достаточно оценить компоненты наростового вектора произвольной вершины m_k квазиправильного многоугольника M . Прежде всего отметим, что в силу симметричности правильного многоугольника достаточно оценить только две компоненты наростового вектора, скажем первую и вторую.

Для оценки первой компоненты необходимо оценить снизу такое наименьшее q , для которого выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2}.$$

Перепишем первое из них в виде

$$\varphi_q^- + \frac{\delta_- + \delta_+}{2} > \frac{\pi}{3}. \quad (1)$$

Ясно, что величина, стоящая в левой части, — это величина отрицательного угла от срединного перпендикуляра r_1^+ до срединного перпендикуляра r_q^- . Легко видеть, что этот угол меньше отрицательного угла от срединного перпендикуляра, опущенного на сторону правильного многоугольника P , соответствующую m_{k+1} , до срединного перпендикуляра, опущенного на сторону из P , соответствующую m_{k-q} . Поэтому

$$\varphi_q^- + \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < (q+1) \frac{2\pi}{n}.$$

Пусть q_0 — наименьшее q такое, что выполняется неравенство (1). Тогда

$$\frac{\pi}{3} < (q_0 + 1) \frac{2\pi}{n},$$

откуда

$$q_0 > \frac{n}{6} - 1$$

и, значит, $q_0 \geq [n/6]$. Поэтому $g_o^+(m_k) \geq 2[n/6] - 3$.

Для оценки второй компоненты наростового вектора нужно оценить снизу такое наименьшее p , для которого выполнены неравенства

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3}.$$

Перепишем первое из них в виде

$$\varphi_p^+ + \frac{\delta_-}{2} > \frac{\pi}{3}. \quad (2)$$

Ясно, что величина, стоящая в левой части, — это величина положительного угла от радиус-вектора вершины m_k до срединного перпендикуляра r_p^+ . Легко видеть, что этот угол меньше, чем положительный угол от радиус-вектора вершины правильного многоугольника P , лежащей на дуге $m_k m_{k-1}$, до срединного перпендикуляра к стороне из P , соответствующей вершине m_{k+p} . Поэтому

$$\varphi_p^+ + \frac{\delta_-}{2} < \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{n}.$$

Пусть p_0 – наименьшее p такое, что выполняется неравенство (2). Тогда

$$\frac{\pi}{3} < \left(p_0 + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{n},$$

откуда

$$p_0 > \frac{n}{6} - \frac{1}{2}$$

и, значит, $p_0 \geq [(n-3)/6] + 1$. Поэтому $g_e^-(m_k) \geq 2[(n-3)/6] - 2 = 2[(n+3)/6] - 4$.

Итак, наростовый вектор произвольной вершины m_k покомпонентно больше или равен следующему вектору

$$\left(2\left[\frac{n}{6}\right] - 3, 2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 4, 2\left[\frac{n}{6}\right] - 3, 2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 4\right).$$

Поэтому, как нетрудно проверить, наростовое число $G(m_k)$ больше или равно $[n/3] - 4$. Доказательство закончено.

5.2. Длина жала: на концевой змее наростов нет, конец имеет излом. Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$ и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ – некоторое его разложение на скелет и наросты; Δ – концевая ячейка скелета S и E – Δ -конец паркета D . Обозначим через E_S соответствующий E конец скелета S , т.е. $E_S = E \cap S$. Пусть Z – концевая Δ -змея. Предположим, что на Z наростов нет (в этом случае Z совпадает с Δ -жалом). Предположим, что Δ -конец E имеет излом. Обозначим через e единственное граничное неконцевое ребро ячейки Δ и через t ребро поворота конца E паркета D .

Далее, пусть, как и выше, M – произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ – последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки. Снова будем считать, что индексы i вершин m_i – это элементы из $\mathbb{Z}_n$. Рассмотрим произвольную вершину m_k многоугольника M . Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M такую, что точка $m_k \in M$ является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ из D .

Мы оценим длину концевой змеи Z , рассмотрев для этого четыре возможных случая в зависимости от того, на одной или разных боковинах конца E_S скелета S расположены ребра e и t , а также в зависимости от того, крепится к ребру e нарост или нет. С формальной точки зрения мы должны различать также, в какую из вершин m_{k+1} или m_{k-1} приходит отросток сети Γ , соответствующий ребру e . Однако так как эти случаи полностью аналогичны, мы предположим, что этот отросток приходит в точку m_{k+1} , а для случая m_{k-1} приведем только ответы.

Мы начнем с определения так называемых характеристических полуплоскостей и соответствующих им t -множеств и t -чисел. Отметим, что эти определения не зависят от того, есть ли на концевой змее Z наросты, отличные от концевых.

5.2.1. Характеристические полуплоскости. Мы определим сначала характеристические полуплоскости первого типа и проиллюстрируем, как работает это понятие. Затем, поступая по аналогии, мы определим характеристические полуплоскости остальных трех типов.

Пусть сначала ребра e и t лежат на разных боковинах конца E_S . Рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой $m_k m_{k+1}$ и содержащую многоугольник M . Повернем эту полуплоскость вокруг точки m_k в положительном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью первого типа для точки m_k* и обозначается

$\Pi_o^+(m_k)$. Положим $T_o^+(m_k) = \Pi_o^+(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$ и пусть

$$t_o^+(m_k) = 2 \# T_o^+(m_k),$$

где через $\#T_o^+(m_k)$ обозначено количество элементов множества $T_o^+(m_k)$. Множество $T_o^+(m_k)$ называется *t-множеством первого типа для точки m_k* , а число $t_o^+(m_k)$ — *t-числом первого типа для точки m_k* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *В сделанных предположениях если к ребру t не крепится нарост, то все точки из t -множества первого типа точки m_k затягиваются отростками концевой змеи Z , причем длина змеи Z не меньше чем $t_o^+(m_k)$. Если же к ребру t крепится нарост, то отростки концевой змеи Z затягивают все точки из множества $T_o^+(m_k)$, кроме, быть может, одной. Длина концевой змеи Z в этом случае не меньше чем $t_o^+(m_k) - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что ребро поворота конца E сети Γ лежит вне характеристической полуплоскости $\Pi_o^+(m_k)$ первого типа точки m_k . Прямая $m_k m_{k+1}$ разбивает полуплоскость $\Pi_o^+(m_k)$ на два замкнутых угла: угол A_1 в 60° и угол A_2 в 120° . Так как множество M целиком лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой $m_k m_{k+1}$ и содержащей угол A_1 , и так как в силу следствия 4.1 угол многоугольника M в точке m_k меньше 180° , то в угле A_2 не содержится точек из M , отличных от m_k . Поэтому все точки из множества $T_o^+(m_k)$ лежат в угле A_1 .

Если на ребре t нароста нет, то все точки из $T_o^+(m_k)$ затягиваются отростками с верхней боковины концевой змеи Z . Так как в рассматриваемом случае боковины концевой змеи Z равны, количество ячеек в змее Z не меньше удвоенного числа точек из $T_o^+(m_k)$, т.е. не меньше чем $t_o^+(m_k)$.

Если же на ребре t есть нарост, то не более чем одна из точек множества $T_o^+(m_k)$ может быть затянута граничным ребром этого нароста, а все остальные точки из $T_o^+(m_k)$ вновь затягиваются отростками с верхней боковины концевой змеи Z . Поэтому теперь количество ячеек в змее Z не меньше чем $t_o^+(m_k) - 2$. Доказательство закончено.

Определим теперь характеристические полуплоскости и соответствующие им t -множества и t -числа всех остальных типов. Третий тип получается из первого типа простой “заменой знака”. А именно, рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой $m_k m_{k-1}$ и содержащую многоугольник M . Повернем эту полуплоскость вокруг точки m_k в отрицательном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью третьего типа для точки m_k* и обозначается $\Pi_o^-(m_k)$. Положим $T_o^-(m_k) = \Pi_o^-(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_o^-(m_k) = 2 \# T_o^-(m_k).$$

Множество $T_o^-(m_k)$ называется *t-множеством третьего типа для точки m_k* , а число $t_o^-(m_k)$ — *t-числом третьего типа для точки m_k* .

Перейдем теперь ко второму и четвертому типам. Проведем через m_k прямую l , параллельную прямой $m_{k-1} m_{k+1}$; рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую M ; повернем эту полуплоскость вокруг точки m_k в отрицательном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью второго типа для*

точки m_k и обозначается $\Pi_e^-(m_k)$. Положим $T_e^-(m_k) = \Pi_e^-(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_e^-(m_k) = 2 \#T_e^-(m_k) - 1.$$

Множество $T_e^-(m_k)$ называется *t-множеством второго типа для точки m_k* , а число $t_e^-(m_k)$ — *t-числом второго типа для точки m_k* .

Наконец, проведем через m_k прямую l , параллельную прямой $m_{k-1}m_{k+1}$, рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую M , и повернем ее вокруг точки m_k в положительном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью четвертого типа для точки m_k* и обозначается $\Pi_e^+(m_k)$. Положим $T_e^+(m_k) = \Pi_e^+(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_e^+(m_k) = 2 \#T_e^+(m_k) - 1.$$

Множество $T_e^+(m_k)$ называется *t-множеством четвертого типа для точки m_k* , а число $t_e^+(m_k)$ — *t-числом четвертого типа для точки m_k* .

5.2.2. *Оценки на длину жала.* Чтобы сформулировать общую теорему для всех рассмотренных случаев, удобно ввести еще функцию $d(E)$, равную единице, если на ребре t есть нарост, и равную нулю в противном случае. Кроме того, мы отнесем каждый из рассматриваемых случаев взаимного расположения ребер e и t и расположения отростка e по отношению к вершинам m_{k-1} и m_{k+1} к одному из четырех *классов излома*. Это соответствие показано на рис. 9.

Рис. 9. Четыре класса поворачивающих концов E

Наконец, определим *вектор поворота $t(m_k)$ для точки m_k* , положив

$$t(m_k) = (t_o^+(m_k), t_o^-(m_k), t_e^-(m_k), t_e^+(m_k)),$$

а также *число поворота $T(m_k)$ точки m_k* как

$$T(m_k) = \min\{t_o^+(m_k), t_o^-(m_k), t_e^-(m_k), t_e^+(m_k)\} = \min_i t(m_k)[i].$$

Имеет место следующий результат, доказательство которого полностью аналогично доказательству предложения 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть D — парк из $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике M . Пусть для некоторого разложения парка D на скелет и наросты ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом и к концевой Δ -змеи Z наросты не крепятся. Обозначим через t ребро поворота конца E , а через $m_k \in M$ — концевую вершину, соответствующую ячейке Δ . Тогда если конец E относится к i -му классу излома, то концевая змея Z содержит не менее $t(m_k)[i] - 2d(E)$ ячеек.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. В предположениях теоремы 5.2 независимо от класса излома концевая змея Z содержит не менее $T(m_k) - 2$ ячеек.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. В предположениях теоремы 5.2 если паркет D является скелетом, то независимо от класса излома концевая змея Z содержит не менее $T(m_k)$ ячеек.

Отметим, что если множество M симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через точку m_k , то первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты вектора поворота для точки m_k совпадают. Поэтому в таком случае удобно понимать под вектором поворота для m_k вектор

$$t_s(m_k) = (t_o^+(m_k), t_o^-(m_k)).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть M – квазиравильный n -угольник. Тогда вектор поворота для произвольной его вершины m_k покомпонентно не меньше чем вектор

$$\left(2\left[\frac{n}{3}\right] - 4, 2\left[\frac{n}{3}\right] - 5, 2\left[\frac{n}{3}\right] - 4, 2\left[\frac{n}{3}\right] - 5\right),$$

поэтому число поворота $T(m_k)$ вершины m_k не меньше чем $2[n/3] - 5$. Таким образом, в сделанных предположениях при $n \geq 18$ если D – скелет, то длина концевой змеи не меньше чем $2[n/3] - 5$, а в общем случае – не меньше чем $2[n/3] - 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в силу симметричности правильного многоугольника достаточно оценить только две компоненты вектора поворота, скажем первую и вторую.

Обозначим через m' отличную от m_k точку пересечения прямой l , ограничивающей характеристическую полуплоскость, с окружностью S^1 . Предположим, что вершины p_k правильного многоугольника P занумерованы элементами из $\mathbb{Z}_n$ так, что на дуге $p_{k-1}p_k$ окружности S^1 лежит точка m_k из M .

Оценим первую компоненту. Рассмотрим предельное положение Π характеристической полуплоскости $\Pi_o^+(m_k)$, соответствующее случаю, когда $m_{k+1} = p_{k+1}$ и $m_k = p_{k-1}$. Ясно, что для любого возможного расположения вершин из M по отношению к P полуплоскость $\Pi_o^+(m_k)$ содержит $\Pi \cap S^1$. Поэтому $\#T_o^+(m_k)$ не меньше чем $\#(\Pi \cap M)$. С другой стороны, $\#(\Pi \cap M)$ не меньше чем количество сторон многоугольника P , попавших в Π . Это число равно

$$\left[\left(\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) / \frac{2\pi}{n}\right] = \left[\frac{n}{3}\right] - 2,$$

поэтому $t_o^+(m_k) \geq 2[n/3] - 4$.

Оценим теперь вторую компоненту. Рассмотрим предельное положение Π характеристической полуплоскости $\Pi_e^-(m_k)$, соответствующее случаю $m_{k-1} = p_{k-2}$ и $m_k = m_{k+1} = p_k$. Ясно, что для любого возможного расположения вершин из M по отношению к P полуплоскость $\Pi_e^-(m_k)$ содержит $\Pi \cap S^1$. Поэтому $\#T_e^-(m_k)$ не меньше чем $\#(\Pi \cap M)$. С другой стороны, $\#(\Pi \cap M)$ не меньше чем количество сторон многоугольника P , попавших в Π . Это число равно

$$\left[\left(\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) / \frac{2\pi}{n}\right] = \left[\frac{n}{3}\right] - 2,$$

поэтому $t_e^-(m_k) \geq 2[n/3] - 5$. Следствие доказано.

5.3. Длина хвоста: конец имеет излом и на концевой змее есть наросты. Пусть D – произвольный паркетирующий $\mathcal{WP}_5$ и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ – некоторое его разложение на скелет S и наросты; Δ – концевая ячейка скелета S и E – Δ -конец паркетирующей D . Обозначим через E_S соответствующий E конец скелета S , т.е. $E_S = E \cap S$. Пусть Z – концевая Δ -змея. Предположим, что на Z нет концевых наростов, но другие наросты имеются. Предположим, что Δ -конец E имеет излом. Обозначим через e единственное граничное неконцевое ребро ячейки Δ и через t ребро поворота конца E паркетирующей D . Напомним, что *боковиной поворота конца E* называется та из двух его боковин, которая пересекается (возможно, по двум точкам) с ребром поворота t . Противоположная боковина конца E называется *подчиненной боковиной*.

Далее, пусть, как и выше, M – произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ – последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки, занумерованные элементами из $\mathbb{Z}_n$. Рассмотрим произвольную вершину m_k многоугольника M . Пусть паркетирующий D имеет минимальную реализацию Γ на M такую, что точка $m_k \in M$ является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ из D .

Мы оценим длину концевой Δ -змеи Z и Δ -хвоста X , рассмотрев для этого те же четыре возможных случая, что и выше, в зависимости от того, на одной или разных боковинах конца E_S скелета S расположены ребра e и t , а также в зависимости от того, крепится к ребру e нарост или нет. С формальной точки зрения мы должны различать также, в какую из вершин m_{k+1} или m_{k-1} приходит отросток сети Γ , соответствующий ребру e . Однако, так как эти случаи полностью аналогичны, мы предположим, что этот отросток приходит в точку m_{k+1} , а для случая m_{k-1} приведем только ответы. Кроме того, нам придется в каждом случае различать, на какой боковине концевой змеи Z расположен первый, считая от концевой ячейки Δ , нарост Δ' . Наконец, мы будем учитывать, крепится или нет нарост к ребру поворота t , используя для этого определенную выше функцию $d(E)$.

Мы воспользуемся определением характеристических полуплоскостей, данным в предыдущем разделе, и соответствующих им t -множеств и t -чисел. Отметим еще раз, что эти определения не зависят от того, есть ли на концевой змее Z наросты, отличные от концевых. Следующее предложение доказывается точно так же, как теорема 5.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть D – паркетирующий $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике M . Пусть для некоторого разложения паркетирующей D на скелет и наросты ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом и на концевой Δ -змее Z нет концевых наростов, но другие наросты есть. Обозначим через t ребро поворота конца E , а через $m_k \in M$ – концевую вершину, соответствующую ячейке Δ . Пусть конец E относится к i -му классу излома. Если на ребре поворота t нароста нет, то все точки из соответствующего t -множества затягиваются граничными ребрами Δ -хвоста из боковины поворота, а если на ребре t нарост есть, то граничные ребра Δ -хвоста из боковины поворота затягивают все точки из соответствующего t -множества, кроме, быть может, одной.

Пусть излом конца E относится к первому классу. Предположим сначала, что нарост Δ' расположен на боковине поворота конца E . Тогда Δ -жало имеет тип 1 и его длина в силу теоремы 5.1 не меньше чем $g_o^+(m_k)$. Пусть x – длина боковины поворота Δ -хвоста, y – длина боковины поворота Δ -жала и z – такое, что $y + z$ равно длине боковины поворота концевой Δ -змеи Z . Тогда в силу определения

Δ -жала первого типа и предложения 5.2 имеют место следующие неравенства

$$x \geq \frac{t_o^+(m_k)}{2} - d(E), \quad y \geq \frac{g_o^+(m_k) - 1}{2}.$$

С другой стороны, длина концевой Δ -змеи Z равна, очевидно, $2(y + z)$, а длина Δ -хвоста не меньше чем $x + y + z$. Чтобы оценить z снизу, заметим, что z принимает наименьшее значение, если на боковине поворота концевой Δ -змеи Z расположено наибольшее возможное число наростов. Ясно, что таких наростов не больше чем $(x - y)/2$. Таким образом, если $x - y$ четно, то $z \geq (x - y)/2$, а если $x - y$ нечетно, то $z \geq [(x - y)/2] + 1$. Иными словами,

$$z \geq x - y - \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor,$$

откуда

$$z + y \geq x - \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor.$$

Пусть $e(k)$ равно единице, если k нечетно, и нулю в противном случае. Представим x и y в виде $x = 2a + e(x)$ и $y = 2b + e(y)$. Тогда, как легко видеть,

$$x - \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor = a + b + e(x) - \left\lfloor \frac{e(x) - e(y)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + y + 1}{2} \right\rfloor.$$

Итак,

$$z + y \geq \left\lfloor \frac{x + y + 1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor,$$

а

$$x + y + z \geq \left\lfloor \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *В сделанных предположениях длина концевой Δ -змеи не меньше чем*

$$2 \left\lfloor \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor,$$

а длина Δ -хвоста не меньше чем

$$\left\lfloor \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Предположим теперь, что нарост Δ' расположен на подчиненной боковине B концевой змеи Z . Тогда Δ - жало имеет тип 2 и его длина в силу теоремы 5.1 не меньше чем $g_e^-(m_k)$. Пусть x — длина боковины поворота Δ -хвоста, y — длина боковины поворота Δ -жала и z — такое, что $y + z$ равно длине боковины поворота концевой Δ -змеи Z . Тогда в силу определения Δ -жала второго типа и предложения 5.2 имеют место следующие неравенства

$$x \geq \frac{t_o^+(m_k)}{2} - d(E), \quad y \geq \frac{g_e^-(m_k)}{2}.$$

С другой стороны, длина концевой Δ -змеи Z равна, очевидно, $2(y + z)$, а длина Δ -хвоста — не меньше чем $x + y + z + 1$, где единица соответствует наросту Δ' .

Чтобы оценить z снизу, заметим, что z принимает наименьшее значение, если на боковине поворота концевой Δ -змеи Z расположено наибольшее возможное число наростов. Ясно, что таких наростов не больше чем $(x - y)/2$. Таким образом,

$$z \geq x - y - \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor,$$

откуда

$$z + y \geq x - \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + y + 1}{2} \right\rfloor.$$

Итак,

$$z + y \geq \left\lfloor \frac{x + y + 1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor,$$

а

$$x + y + z + 1 \geq \left\lfloor \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *В сделанных предположениях длина концевой Δ -змеи не меньше чем*

$$2 \left\lfloor \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor,$$

а длина Δ -хвоста не меньше чем

$$\left\lfloor \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Первый случай полностью разобран. Аналогично разбираются все остальные возможные комбинации классов поворота и расположения наростов на концевой змее. Представим полученные результаты в виде следующих таблиц.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть D – паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике M . Пусть для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом и на концевой Δ -змее Z нет концевых наростов, а другие наросты имеются. Пусть Δ' – ближайший к Δ нарост на концевой Δ -змее. Обозначим через $m_k \in M$ концевую вершину, соответствующую ячейке Δ . Тогда длины концевой Δ -змеи и Δ -хвоста, а также длины боковин Δ -хвоста оцениваются снизу величинами, приведенными в таблицах 1–4.*

СЛЕДСТВИЕ 5.7. *Пусть в предположениях теоремы 5.3 множество M – это квазиправильный n -угольник и $n \geq 18$. Тогда оценки длины концевой змеи, хвоста и боковин хвоста приведены в таблицах 5–8.*

СЛЕДСТВИЕ 5.8. *В предположениях следствия 5.7 независимо от класса поворота и расположения первого нароста Δ' длина концевой Δ -змеи не меньше чем*

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n + 15 + 6d(E)}{12} \right\rfloor - 3 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n + 9}{12} \right\rfloor - 5,$$

а длина Δ -хвоста не меньше чем

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 15 + 18d(E)}{12} \right\rfloor - 4 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 9}{12} \right\rfloor - 6.$$

ТАБЛИЦА 1

Оценки на длину концевой змеи		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1	$2 \left\lceil \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rceil$	$2 \left\lceil \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rceil$
2	$2 \left\lceil \frac{t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$	$2 \left\lceil \frac{t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$
3	$2 \left\lceil \frac{t_o^-(m_k) + g_o^-(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rceil$	$2 \left\lceil \frac{t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rceil$
4	$2 \left\lceil \frac{t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$	$2 \left\lceil \frac{t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$

ТАБЛИЦА 2

Оценки на длину хвоста		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1	$\left\lceil \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$
2	$\left\lceil \frac{3t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$
3	$\left\lceil \frac{3t_o^-(m_k) + g_o^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$
4	$\left\lceil \frac{3t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$

ТАБЛИЦА 3

Оценки на длину боковины поворота Δ -хвоста	
Тип излома	Оценка
1	$t_o^+(m_k)/2 - d(E)$
2	$(t_e^-(m_k) + 1)/2 - d(E)$
3	$t_o^-(m_k)/2 - d(E)$
4	$(t_e^+(m_k) + 1)/2 - d(E)$

СЛЕДСТВИЕ 5.9. Пусть D – паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на квазиправильном n -угольнике, $n \geq 18$. Пусть для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом. Тогда боковина поворота Δ -хвоста не меньше чем $\lceil n/3 \rceil - 2 - d(E)$, а подчиненная боковина Δ -хвоста не меньше чем

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n + 6d(E)}{12} \right\rceil - 3.$$

ТАБЛИЦА 4

Оценки на длину подчиненной боковины Δ -хвоста поворота; здесь в обозначениях опущены указания на точку m_k	
Тип излома	Оценка
1	$\min \left\{ \left\lceil \frac{t_o^+ + g_o^+ + 1 - 2d(E)}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{t_e^+ + g_e^- + 2 - 2d(E)}{4} \right\rceil + 1 \right\}$
2	$\min \left\{ \left\lceil \frac{t_e^- + g_e^- + 3 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{t_e^- + g_o^+ + 4 - 2d(E)}{4} \right\rceil \right\}$
3	$\min \left\{ \left\lceil \frac{t_o^- + g_o^- + 1 - 2d(E)}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{t_o^- + g_e^+ + 2 - 2d(E)}{4} \right\rceil + 1 \right\}$
4	$\min \left\{ \left\lceil \frac{t_e^+ + g_e^+ + 3 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{t_e^+ + g_o^- + 4 - 2d(E)}{4} \right\rceil \right\}$

ТАБЛИЦА 5

Оценки на длину концевой змеи для квазиправильного n -угольника		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1, 3	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 \left\lceil \frac{n + 15 + 6d(E)}{12} \right\rceil - 2$	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 \left\lceil \frac{n + 15 + 6d(E)}{12} \right\rceil - 2$
2, 4	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 \left\lceil \frac{n + 15 + 6d(E)}{12} \right\rceil - 3$	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 \left\lceil \frac{n + 9 + 6d(E)}{12} \right\rceil - 3$

ТАБЛИЦА 6

Оценки на длину хвоста для квазиправильного n -угольника		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1, 3	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n + 3 + 18d(E)}{12} \right\rceil - 4$	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n - 9 + 18d(E)}{12} \right\rceil - 4$
2, 4	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n + 15 + 18d(E)}{12} \right\rceil - 4$	$2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n - 3 + 18d(E)}{12} \right\rceil - 4$

ТАБЛИЦА 7

Оценки на длину боковины поворота Δ -хвоста в случае квазиправильного n -угольника	
Тип излома	Оценка
1, 2, 3, 4	$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 - d(E)$

ТАБЛИЦА 8

Оценки на длину подчиненной боковины Δ -хвоста в случае квазиправильного n -угольника	
Тип излома	Оценка
1, 3	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 1 \right\}$ $= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2$
2, 4	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2 \right\}$ $= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3$

5.4. Взаимное расположение концов. Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$ и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ – некоторое его разложение на скелет и наросты; Δ_1 и Δ_2 – концевые ячейки скелета S и E_i , $i = 1, 2$, $-\Delta_i$ – конец паркета D . Предположим, что на концах E_1 и E_2 нет концевых наростов. Обозначим через Z_i концевые змеи концов E_i и назовем положительный угол от направления концевой змеи Z_1 к направлению концевой змеи Z_2 (напомним, что концевые змеи ориентируются к своим концевым ячейкам) *углом от конца E_1 к концу E_2* . Отметим, что угол φ принимает лишь значения вида $q\pi/3$, $q = 1, \dots, 5$.

Далее, пусть, как и выше, M – произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ – последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки, занумерованные элементами из $\mathbb{Z}_n$. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M такую, что точки m_k и m_r из M являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам Δ_1 и Δ_2 .

Пусть Δ – концевая ячейка скелета S , и предположим, что на Δ -конце E нет концевых наростов. Пусть e_1 – концевое ребро ячейки Δ , а e_2 – отличное от e_1 граничное ребро из Δ . Ориентируем оба отрезка e_1 и e_2 от их общей вершины. Пара (e_2, e_1) образует некоторый репер на плоскости. Определим *индекс конца E* равным 1, если репер (e_2, e_1) положителен, и равным 2 в противном случае. Индекс конца E обозначим через $\text{ind } E$.

Пусть m_p – произвольная вершина из M . Рассмотрим вертикальный угол, порожденный прямыми $m_p m_{p+1}$ и $m_{p-1} m_{p+1}$ и содержащий угол $m_p m_{p+1} m_{p-1}$, и перенесем его сдвигом на вектор $m_{p+1} m_p$ в вершину m_p . Полученный в результате вертикальный угол назовем *углом направлений первого типа в точке m_p* и обозначим через $A^1(m_p)$. Далее, рассмотрим вертикальный угол, порожденный прямыми $m_p m_{p-1}$ и $m_{p-1} m_{p+1}$ и содержащий угол $m_p m_{p-1} m_{p+1}$, и перенесем его сдвигом на вектор $m_{p-1} m_p$ в вершину m_p . Полученный в результате вертикальный угол назовем *углом направлений второго типа в точке m_p* и обозначим через $A^2(m_p)$.

Будем говорить, что прямая *лежит внутри вертикального угла A* , если она целиком лежит в A и пересекается с границей угла A в точности по вершине этого угла.

Пусть $A^i(m_p)$ – угол направлений i -го типа точки m_p . Заметим, что произвольная прямая ℓ , лежащая внутри угла $A^i(m_p)$, является опорной прямой для мно-

гоугольника M , поэтому корректно определен вектор нормали $N(\ell)$ к прямой ℓ , направленный в ту открытую полуплоскость, ограниченную ℓ , которая не содержит вершин из M . Ориентируем все прямые ℓ , лежащие в $A^i(m_p)$, задав на каждой из них направление l так, чтобы пара $(N(\ell), l)$ образовывала положительный репер. В дальнейшем всегда будем предполагать, что все прямые из каждого $A^i(m_p)$ ориентированы таким образом.

Имеют место следующие очевидные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M такую, что точка m_p из M является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ конца E , на котором нет концевых наростов. Тогда если конец E имеет индекс i , то прямая, проходящая через отросток сети Γ , соответствующий ячейке Δ , параллельна некоторой прямой, лежащей внутри угла направлений $A^i(m_p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M такую, что точки m_k и m_r из M являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам Δ_1 и Δ_2 концов E_1 и E_2 . Пусть ℓ_i — прямая, проходящая через отросток сети Γ , соответствующий ячейке Δ_i . Обозначим через N_i направления концевых Δ_i -змей из Γ . Ориентируем прямую ℓ_i , выбрав на ней направление l_i так, чтобы пара (N_i, l_i) образовывала положительный репер. Пусть φ — угол от конца E_1 к концу E_2 . Тогда ориентированная прямая ℓ_1 может быть переведена с сохранением ориентации в ориентированную прямую ℓ_2 композицией поворота в положительном направлении на угол φ и некоторого сдвига.

СЛЕДСТВИЕ 5.10. В условиях предложения 5.6 пусть i_1 и i_2 — индексы концов E_1 и E_2 соответственно. Пусть ξ — движение плоскости, переводящее точку m_k в точку m_r и являющееся композицией поворота на угол φ в положительном направлении и некоторого сдвига. Тогда вертикальные углы $\xi(A^{i_1}(m_k))$ и $A^{i_2}(m_r)$ с общей вершиной $\xi(m_k) = m_r$ пересекаются по внутренности. Более того, существуют такие прямые ℓ_1 из $A^{i_1}(m_k)$ и ℓ_2 из $A^{i_2}(m_r)$, что отображение ξ переводит ориентированную прямую ℓ_1 в ориентированную прямую ℓ_2 с сохранением ориентации.

Обозначим через $\alpha_k^\pm$ величину угла $m_k m_{k\pm 1} m_{k\mp 1}$. Для каждого целого p , $1 \leq p \leq n$, определим β_p равным величине положительного угла от вектора $m_{k-1} m_{k+1}$ к вектору $m_{k+p} m_{k+p+1}$.

Определим теперь четверку множеств, отвечающих за возможное расположение конца E_2 по отношению к концу E_1 .

1. К множеству $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi < \beta_p < \varphi + \alpha_k^+ + \alpha_{k+p}^+.$$

2. К множеству $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi + \alpha_k^+.$$

3. К множеству $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi - \alpha_k^- < \beta_p < \varphi + \alpha_{k+p}^+.$$

4. К множеству $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi - \alpha_k^- - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi.$$

Определенные только что множества назовем Ω -множествами. Отметим, что Ω -множества определяются только геометрией множества M и величиной угла φ .

ТЕОРЕМА 5.4. *В сделанных выше предположениях если φ — это угол от конца E_1 к концу E_2 , на концах нет концевых наростов и паркет D имеет минимальную реализацию на M такую, что точки m_k и m_r из M являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам Δ_1 и Δ_2 , а $i = \text{ind } E_1$ и $j = \text{ind } E_2$, то m_r принадлежит множеству $\Omega_{i,j}(m_k, \varphi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается абсолютно аналогично теореме 5.1.

Далее, пусть $\varphi = q\pi/3$ и m_k — произвольная вершина из M . В каждом Ω -множестве $\Omega_{i,j}(m_k, \varphi)$ выберем самую близкую к m_k точку A и самую далекую от m_k точку B при движении от m_k в положительном направлении. Количество пройденных при таком движении точек из M в первом и во втором случаях обозначим через $a_{i,j}(m_k, \varphi)$ и $b_{i,j}(m_k, \varphi)$ соответственно. Положим:

$$a_{i,j}(\varphi) = \min_{m_k} a_{i,j}(m_k, \varphi), \quad b_{i,j}(\varphi) = \max_{m_k} b_{i,j}(m_k, \varphi)$$

и назовем $a_{i,j}(\varphi)$ и $b_{i,j}(\varphi)$ нижним и верхним боковыми числами типа (i, j) множества M , соответствующими углу φ . Из теоремы 5.4 немедленно вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.11. *В сделанных выше предположениях если φ — это угол от конца E_1 к концу E_2 , на концах нет концевых наростов, паркет D имеет минимальную реализацию на M такую, что точка m_k из M является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ_1 конца E_1 , а $i = \text{ind } E_1$ и $j = \text{ind } E_2$, то длина l супербоковины паркета D от конца E_1 к концу E_2 лежит в пределах*

$$a_{i,j}(m_k, \varphi) \leq l \leq b_{i,j}(m_k, \varphi).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.12. *В сделанных выше предположениях если φ — это угол от конца E_1 к концу E_2 , на концах нет концевых наростов, паркет D имеет минимальную реализацию на M и $i = \text{ind } E_1$, $j = \text{ind } E_2$, то длина l супербоковины паркета D от конца E_1 к концу E_2 лежит в пределах*

$$a_{i,j}(\varphi) \leq l \leq b_{i,j}(\varphi).$$

Применим теорему 5.4 к случаю квазиправильного n -угольника.

СЛЕДСТВИЕ 5.13. *В предположениях теоремы 5.4 пусть M — это квазиправильный n -угольник, $n \geq 18$. Пусть $\varphi = q\pi/3$ и $l_{i,j}(\varphi)$ — длина супербоковины паркета D от конца E_1 к концу E_2 . Пусть R — остаток от деления числа nq на 6.*

1) *Если $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 1$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$, то*

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины $l_{1,1}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{1,1}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 3, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor + 1 & \text{при } R = 4, 5. \end{cases}$$

- 2) Если $\text{ind } E_1 = 1$, а $\text{ind } E_2 = 2$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p + \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины $l_{1,2}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{1,2}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 0, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor + 1 & \text{при } R = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

- 3) Если $\text{ind } E_1 = 2$, а $\text{ind } E_2 = 1$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины $l_{2,1}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{2,1}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1 & \text{при } R = 0, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

- 4) Если $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 2$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины $l_{2,2}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{2,2}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 3, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor + 1 & \text{при } R = 4, 5. \end{cases}$$

В частности, каждое из Ω -множеств состоит не более чем из трех элементов.

Более того, независимо от индексов концов E_1 и E_2 длина супербоковины от E_1 к E_2 не меньше чем $\lfloor nq/6 \rfloor - 2$ и не больше чем $\lfloor nq/6 \rfloor + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \{q_i\}$ – правильный n -угольник из определения квазиправильного многоугольника M , причем вершины его занумерованы так, что на дуге окружности S^1 от m_k до m_{k+1} лежит вершина q_{k+1} . Обозначим через β_p положительный угол от $m_{k-1}m_{k+1}$ до $m_{k+p}m_{k+p+1}$, а через $\bar{\beta}_p$ – положительный угол от $q_{k-1}q_{k+1}$ до $q_{k+p}q_{k+p+1}$. Легко видеть, что $\bar{\beta}_p = (2p+1)\alpha$, где $\alpha = \pi/n$. Обозначим, как и выше, через $\alpha_s^\pm$ угол $m_s m_{s\pm 1} m_{s\mp 1}$. Ясно, что величины этих углов лежат в интервале $(0, 2\alpha)$.

Пусть $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 1$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$. Обозначим через α' положительный угол от вектора $q_{k-1}q_{k+1}$ до вектора $m_{k-1}m_{k+1}$, а через α'' – положительный угол от вектора $m_{k+p}m_{k+p+1}$ до вектора $q_{k+p+1}q_{k+p+2}$. Ясно, что углы α' и α'' принимают значения из интервала $(0, 2\alpha)$ и

$$\beta_p = \bar{\beta}_{p+1} - \alpha' - \alpha'' = (2p+3)\alpha - \alpha' - \alpha''.$$

Так как точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$, то

$$\varphi < \beta_p < \varphi + \alpha_k^+ + \alpha_{k+p}^+,$$

откуда

$$\varphi + \alpha' + \alpha'' < (2p+3)\alpha < \varphi + (\alpha_k^+ + \alpha') + (\alpha_{k+p}^+ + \alpha'').$$

Рассмотрим сумму углов $\alpha_k^+ + \alpha'$. Легко видеть, что эта сумма равна величине положительного угла от $q_{k+1}q_{k-1}$ до $m_{k+1}m_k$. Величина этого угла лежит в интервале $(0, 3\alpha)$. Далее, рассмотрим сумму углов $\alpha_{k+p}^+ + \alpha''$. Эта сумма равна величине положительного угла от $m_{k+p-1}m_{k+p+1}$ до $q_{k+p+1}q_{k+p+2}$. Величина этого угла также лежит в интервале $(0, 3\alpha)$. Поэтому

$$\varphi + 0 + 0 < (2p+3)\alpha < \varphi + 3\alpha + 3\alpha,$$

откуда

$$|2p\alpha - \varphi| < 3\alpha.$$

Подставляя в полученное неравенство значения для α и φ , получаем требуемое. Первый случай доказан.

Аналогично разбираются оставшиеся случаи. Доказательство закончено.

§ 6. Примеры квазиправильных многоугольников, которые не затягиваются минимальными бинарными деревьями

В настоящем разделе мы построим серию примеров квазиправильных n -угольников, вершины которых нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом. Первые результаты в этом направлении были получены авторами совместно с С. А. Точиловым. Авторами была высказана гипотеза о том, как такие множества должны быть устроены, и С. А. Точилов проделал обширный вычислительный эксперимент, подтвердивший существование множеств, описанных авторами. Однако теорема о том, что найденные множества действительно не затягиваются ни одним минимальным бинарным деревом, не была доказана. Доказательству этой теоремы и посвящен настоящий раздел.

Схема доказательства состоит в следующем. Мы определим *жаловый модуль* $\xi(M)$ множества M как минимум по всем возможным паркетам D , имеющим минимальную реализацию на M , длины максимального жала паркета D . Исходя из разработанной выше техники, мы получим для жалового модуля множества

M вершин выпуклого многоугольника оценку снизу. Затем мы предъявим квази-правильные n -угольники с жаловым модулем, большим или равным 10, такие, что каждый паркет, имеющий на этих многоугольниках минимальную реализацию, не может содержать жала, длина которого больше или равна 10, что и завершит доказательство теоремы.

6.1. Жаловый модуль. Пусть D – произвольный паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Обозначим через $\xi(D)$ длину наибольшего жала паркета D . Положим

$$\xi(M) = \min_D \xi(D).$$

Если ни один такой паркет не имеет минимальной реализации на множестве M , то положим $\xi(M) = \infty$. Определенное так $\xi(M)$ называется *жаловым модулем множества M* .

Пусть теперь ни один паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий концевые наросты, не обладает минимальной реализацией на множестве M . Пусть $G(t)$ – наростовое число вершины $t \in M$. Определим *наростовое число $G(M)$ множества M* как минимум наростовых чисел $G(t)$ всех вершин t из M . Далее, пусть $T(t)$ – число поворота вершины $t \in M$. Определим *число поворота $T(M)$ множества M* как минимум чисел поворота $T(t)$ по всем вершинам $t \in M$. Наконец, пусть $a_{i,j}(\varphi)$ – нижнее боковинное число типа (i, j) множества M , соответствующее углу φ . Положим

$$a(M) = \min_{(i,j)} a_{i,j}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Назовем число $a(M)$ *главным боковинным числом множества M* . Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть M – множество вершин произвольного выпуклого n -угольника такого, что ни один паркет из $\mathcal{WP}_5$ с концевыми наростами не имеет минимальной реализации на M . Тогда жаловый модуль $\xi(M)$ множества M оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq \min \left\{ G(M), T(M) - 2, n - 2, 2 \left[\frac{a(M) + 1}{2} \right] - 1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – паркет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий минимальную реализацию на M , такой, что $\xi(D) = \xi(M)$. По условию теоремы паркет D не имеет концевых наростов. Пусть T – жало из D , длина которого равна $\xi(D)$. Обозначим через Z и E соответственно концевую змею и конец паркета D , содержащие T . Наконец, обозначим через μ правую часть доказываемого неравенства.

Предположим, что на концевой змее Z имеется нарост. Тогда в силу следствия 5.1 длина жала T больше или равна $G(M)$. Поэтому в таком случае $\xi(M) \geq G(M) \geq \mu$.

Пусть теперь на концевой змее Z наростов нет. Предположим сначала, что конец E имеет излом. Тогда в силу следствия 5.4 длина концевой змеи Z , совпадающая в этом случае с длиной жала T , больше или равна $T(M) - 2$. Значит, в этом случае $\xi(M) \geq T(M) - 2 \geq \mu$.

Пусть теперь конец E не имеет излома. Если D – линейный паркет, то в силу сделанных предположений D является змеей, поэтому длина жала T совпадает

с количеством ячеек в D и равна $n - 2$. Таким образом, в этом случае $\xi(M) \geq n - 2 \geq \mu$.

Пусть теперь D – нелинейный паркет. В сделанных предположениях конец E не имеет излома и не содержит наростов, т.е. совпадает со своим жалом. Если какой-нибудь другой конец паркета D не является змеей как линейный участок, то к нему применимы предыдущие рассуждения и длина его жала оценивается, как и выше. Так как жало конца E по предположению самое длинное, мы снова получаем для него одну из предыдущих оценок. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что все концы паркета D в рассматриваемом случае являются змеями как линейные участки.

Обозначим через E' и E'' такие концы паркета D , которые примыкают к одной и той же ячейке ветвления (очевидно, что такие всегда есть). Обозначим через B их общую боковину. Тогда в силу следствия 5.12 длина b боковины B не меньше чем $a(M)$. Без ограничения общности предположим, что длина боковины B' конца E' , содержащейся в B , не меньше чем длина боковины конца E'' , содержащейся в B . Тогда, очевидно, длина b' боковины B' больше или равна $[(b+1)/2]$, поэтому длина конца E' больше или равна $2[(b+1)/2] - 1$. Так как жало конца E по предположению самое длинное, то его длина больше или равна

$$2\left[\frac{b+1}{2}\right] - 1 \geq 2\left[\frac{a(M)+1}{2}\right] - 1.$$

Теорема доказана.

Из полученных выше оценок на наростовые числа, числа поворота и длины боковин в случае квазиравильных n -угольников с помощью чуть более деликатных рассуждений вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть M – множество вершин квазиравильного n -угольника, $n \geq 18$. Тогда жаловый модуль $\xi(M)$ множества M оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq 2\left[\frac{n-6}{12}\right].$$

Пусть M – произвольный выпуклый n -угольник, $t_k \in M$ – некоторая его вершина, p – неотрицательное целое число, не превосходящее $[(n-1)/2]$, и пусть σ равно -1 или 1 , а δ равно 0 или 1 . Обозначим через $S(t_k, p, \sigma, \delta)$ множество вершин из M вида $\{t_{k-p}, \dots, t_{k+p}\} \cup \{t_{k+\sigma\delta(p+1)}\}$. Будем говорить, что множество $S(t_k, p, \sigma, \delta)$ *затягивается ростком змеи с началом в t_k* , если существует такая точка $t \in \text{conv } M$, что множество $S(t_k, p, \sigma, \delta) \cup \{t\}$ затягивается некоторой минимальной змеей Z , одно из концевых ребер которой, скажем e , приходит в точку t_k , другое – в точку t , а последовательные отростки, начиная с отростка, смежного с ребром e , – в точки $t_{k+\sigma}, t_{k-\sigma}, t_{k+2\sigma}, t_{k-2\sigma}, \dots$. Ясно, что длина минимальной змеи Z в этом случае равна $2p + \delta$. Далее, будем говорить, что из точки $t_k \in M$ *можно выпустить росток змеи длины z* , если существует множество $S(t_k, p, \sigma, \delta)$ такое, что $z = 2p + \delta$ и $S(t_k, p, \sigma, \delta)$ затягивается ростком змеи с началом в t_k . Минимальное z , для которого из точки $t_k \in M$ можно выпустить росток змеи длины z , называется жаловым субмодулем точки t_k и обозначается через $\xi_s(t_k)$. Наконец, жаловым субмодулем $\xi_s(M)$ множества M называется минимум жаловых субмодулей $\xi_s(t_k)$ по всем $t_k \in M$. Следующее предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть M – множество вершин выпуклого многоугольника. Тогда $\xi(M) \geq \xi_s(M)$.

6.2. ε -квазиправильные n -угольники. Пусть $P = \{p_i\}$ – правильный n -угольник и ε – положительное число, меньшее чем $\alpha/2$, где $\alpha = \pi/n$. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ – произвольная последовательность из ± 1 . Обозначим через m_i точку, полученную из p_i поворотом на угол $s_i 2\varepsilon$, и пусть $M = \{m_i\}$. Пусть P' – правильный n -угольник, составленный из середин дуг окружности S^1 , на которые многоугольник P ее делит. Легко доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 6.1. Множество M , построенное выше, является квазиравильным n -угольником, соответствующим правильному n -угольнику P' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квазиравильный многоугольник M , построенный выше, называется ε -квазиравильным многоугольником типа s .

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть s – периодическая последовательность длины $n = 10k$ с периодом $(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1)$ и ε – произвольное положительное число такое, что $\alpha/4 \leq \varepsilon < \alpha/2$. Тогда при $k \geq 8$ множество M вершин ε -квазиравильного n -угольника типа s не затягивается ни одним минимальным бинарным деревом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 6.1 вытекает, что при $n \geq 80$ жаловый модуль произвольного квазиравильного n -угольника больше 10. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, см. предложение 6.1, что из произвольной точки $m_k \in M$ нельзя выпустить росток змеи длины 10. Покажем это.

Как обычно, будем предполагать, что вершины многоугольника M занумерованы элементами из $\mathbb{Z}_n$. Пусть $\sigma = \pm 1$. Определим ломаную $L_\sigma(m_k)$ набором ее последовательных вершин так:

$$L_\sigma(m_k) = \{m_k, m_{k+\sigma}, m_{k-\sigma}, m_{k+2\sigma}, m_{k-2\sigma}, \dots\}.$$

Пусть из точки m_k можно выпустить росток змеи длины 10. Пусть первый отросток этой змеи, считая от концевого ребра e , инцидентного точке m_k , приходит в вершину $m_{k+\sigma}$. Тогда, как легко видеть, для каждой внутренней вершины m' ломаной $L_\sigma(m_k)$ меньший угол, порожденный лучами, выходящими из m' и содержащими инцидентные m' звенья из $L_\sigma(m_k)$, содержит внутри себя отросток минимальной змеи, приходящий в вершину m' . Поэтому все соответствующие вертикальные углы после совмещения их вершин содержат внутри себя некоторую общую прямую ℓ .

Обозначим через α_i , $i = 1, \dots, 5$, величину угла $m_{k+i-1}m_{k-i}m_{k+i}$, а через β_i , $i = 1, \dots, 5$, – величину угла $m_{k-i+1}m_{k+i}m_{k-i}$. Пусть для определенности $\sigma = 1$. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ положительно ориентированную ортогональную систему координат с осью абсцисс, сонаправленной с вектором $m_{k+1}m_{k-1}$. Тогда угол от оси абсцисс до вектора $m_{k+1}m_k$ равен β_1 , углы от оси абсцисс до векторов $m_{k+i+1}m_{k-i}$, $i = 1, \dots, 4$, равны

$$\alpha_{i+1} + \sum_{j=2}^i (\alpha_j - \beta_j),$$

а углы от оси абсцисс до векторов $m_{k+i}m_{k-i}$, $i = 1, \dots, 5$, равны

$$\sum_{j=2}^i (\alpha_j - \beta_j).$$

Условие того, что все соответствующие вертикальные углы после совмещения их вершин содержат внутри себя некоторую общую прямую ℓ , состоит в том, что наименьший угол от оси абсцисс до векторов $m_{k+i+1}m_{k-i}$, $i = 0, \dots, 4$, больше чем наибольший угол от оси абсцисс до векторов $m_{k+i}m_{k-i}$, $i = 1, \dots, 5$. Поэтому если выполнено следующее неравенство

$$\begin{aligned} & \min\{\beta_1, \alpha_2, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4, \\ & \quad \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4 - \beta_4 + \alpha_5\} \\ & \leq \max\{0, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4 - \beta_4, \\ & \quad \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4 - \beta_4 + \alpha_5 - \beta_5\}, \end{aligned}$$

то из точки m_k нельзя выпустить росток змеи длины 10, первый отросток которого приходит в точку m_{k+1} .

Аналогично, рассматривая случай $\sigma = -1$, заключаем, что если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \min\{\alpha_1, \beta_2, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4, \\ & \quad \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_4 + \beta_5\} \\ & \leq \max\{0, \beta_2 - \alpha_2, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_4, \\ & \quad \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_4 + \beta_5 - \alpha_5\}, \end{aligned}$$

то из точки m_k нельзя выпустить росток змеи длины 10, первый отросток которого приходит в точку m_{k-1} .

Таким образом, доказательство теоремы будет завершено, если убедиться в том, что для предъявленных квазиправильных многоугольников приведенные выше неравенства выполнены для каждой вершины m_k . В силу периодической структуры наших многоугольников достаточно проверить выполнение неравенств для любых 10 последовательных вершин.

Обозначим через γ вектор

$$(\beta_5, \beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5).$$

Тогда для любых 10 последовательных вершин из M (с точностью до циклической перестановки) вектор γ принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} & (\alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha), \\ & (\alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon), \\ & (\alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha), \\ & (\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha), \\ & (\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon), \\ & (\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha), \\ & (\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon), \\ & (\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon), \\ & (\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon), \\ & (\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому оба неравенства в каждом из имеющихся 10 случаев имеют вид:

- 1) $\min\{\alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 2\varepsilon, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon,$
 $\min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, -2\varepsilon, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon;$
- 2) $\min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon\} = \alpha \leq \max\{0, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 4\varepsilon\} = 4\varepsilon,$
 $\min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 4\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} = \alpha - 4\varepsilon$
 $\leq \max\{0, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -4\varepsilon\} = 0;$
- 3) $\min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 4\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha\} = \alpha - 4\varepsilon \leq \max\{0, -4\varepsilon, -4\varepsilon, 0, 0\} = 0,$
 $\min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha\} = \alpha \leq \max\{0, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 0, 0\} = 4\varepsilon;$
- 4) $\min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 4\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} = \alpha \leq \max\{0, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 4\varepsilon\} = 4\varepsilon,$
 $\min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 4\varepsilon\} = \alpha - 4\varepsilon$
 $\leq \max\{0, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -4\varepsilon\} = 0;$
- 5) $\min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 2\varepsilon, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon,$
 $\min\{\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, -2\varepsilon, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon;$
- 6) $\min\{\alpha, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 2\varepsilon, 0, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon,$
 $\min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, -2\varepsilon, 0, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon;$
- 7) $\min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, -2\varepsilon, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon,$
 $\min\{\alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, 2\varepsilon, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon;$
- 8) $\min\{\alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 4\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} = \alpha - 4\varepsilon$
 $\leq \max\{0, -4\varepsilon, -4\varepsilon, 0, -4\varepsilon\} = 0,$
 $\min\{\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} = \alpha \leq \max\{0, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 0, 4\varepsilon\} = 4\varepsilon;$
- 9) $\min\{\alpha, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, -2\varepsilon, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon,$
 $\min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, 2\varepsilon, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon;$
- 10) $\min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 2\varepsilon, 0, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon,$
 $\min\{\alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha\} = \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, -2\varepsilon, 0, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon.$

Ясно, что все эти неравенства выполнены, если $\alpha \leq 4\varepsilon$. Теорема доказана.

Оказывается, найденные нами ε -квазиправильные многоугольники в некотором смысле оптимальны. А именно, оказывается, росток змеи длины $z \leq 9$ всегда можно выпустить из некоторой вершины любого ε -квазиправильного n -угольника, $n \geq z + 1$. Этот факт был обнаружен как результат вычислительного эксперимента, выполненного в пакете *Mathematica*[®]. Идея использованного алгоритма состоит в следующем. Сначала моделируются все возможные блоки $\gamma = (\beta_i, \beta_{i-1}, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i)$, где $i = [(z + 1)/2]$. Среди них отбираются те, для которых выполняются неравенства, аналогичные приведенным выше и гарантирующие невозможность выпустить змею длины z . Затем строится ориентированный граф, вершины которого – отобранные блоки, и вершина γ_p соединяется с вершиной γ_q ориентированной дугой с началом в γ_p , если и только если блок γ_p с выброшенным первым элементом совпадает с блоком γ_q с выброшенным последним элементом. Все замкнутые маршруты этого ориентированного графа соответствуют всем ε -квазиправильным n -угольникам, из каждой вершины которых нельзя выпустить росток змеи длины z . Оказалось, что при $z \leq 9$ полученные ориентированные графы ациклически. При $z = 10$ соответствующий граф имеет ровно два непересекающихся цикла, причем

ε -квазиправильные n -угольники, соответствующие этим циклам, получаются друг из друга движением плоскости, меняющим ориентацию.

Список литературы

1. *Hwang F. K., Richards D., Winter P.* The Steiners tree problem. Amsterdam: North-Holland, 1992.
2. *Jarník V., Kössler M.* Sur les graphes minima, contenant n points donnees // *Casopis Mat. Fys.* 1934. V. 63. P. 223–235.
3. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Решение задачи Штейнера для выпуклых границ // *УМН.* 1990. Т. 45. №2. С. 207–208.
4. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // *Матем. сб.* 1991. Т. 182. №12. С. 1813–1844.
5. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // *УМН.* 1992. Т. 47. №2. С. 53–115.
6. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The Steiner problem for convex boundaries // *Adv. Soviet Math.* 1993. V. 15. P. 15–131.
7. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994.
8. *Фоменко А. Т.* Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984.
9. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
10. *Тужилин А. А.* Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей. Случай скелетов // *Фундамент. и прикл. матем.* 1996. Т. 2. №2. С. 511–562.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
27.01.1998