Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Двоичные обобщенные функции, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 2, 67–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:41:11

УДК 517.982.4

*Посвящается памяти моего учителя П. Л. Ульянова***Б. И. Голубов**

Двоичные обобщенные функции

В работе на основе понятия точечной двоичной производной определяются двоичные обобщенные функции как линейные непрерывные функционалы на линейном пространстве $D_d(\mathbb{R}_+)$ бесконечно двоично-дифференцируемых функций, финитных на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ вместе со всеми своими двоичными производными. Доказывается полнота пространства $D'_d(\mathbb{R}_+)$ двоичных обобщенных функций. Устанавливается, что любая локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция порождает двоичную обобщенную функцию.

Кроме того, определено пространство $S_d(\mathbb{R}_+)$ быстро убывающих в окрестности $+\infty$ бесконечно двоично-дифференцируемых на $\mathbb{R}_+$ функций. Пространство $S'_d(\mathbb{R}_+)$ двоичных обобщенных функций медленного роста вводится как пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве $S_d(\mathbb{R}_+)$. Устанавливается полнота пространства $S'_d(\mathbb{R}_+)$. Доказывается, что любая локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция, имеющая полиномиальный рост в окрестности $+\infty$, порождает двоичную обобщенную функцию медленного роста.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Теория обобщенных функций берет начало в работах С. Л. Соболева [1], [2] и Л. Шварца [3]–[5], хотя первые обобщенные функции, например знаменитая дельта-функция Дирака, появились еще раньше в работах П. Дирака по квантовой механике. В настоящее время теория обобщенных функций получила большое развитие и ей посвящено много монографий (см., например, И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилев [6], И. Н. Векуа [7], П. Антосик, Я. Микусинский и Р. Сикорский [8], А. Земанян [9] и др.). Обобщенные функции нашли широкое применение в математической физике, физике, квантовой механике и других естественных науках (см., например, В. С. Владимиров [10] или Л. Шварц [3]). С помощью теории обобщенных функций доказываются некоторые факты гармонического анализа (см., например, И. Стейн [11; гл. 3], Ж. Гарсия-Куэрва и Ж. Л. Рубио де Франсиа [12; гл. 3] или Эдвардс [13; гл. 12]), теории функций комплексного переменного [7] и других разделов математики. Элементы теории обобщенных функций излагаются в некоторых учебниках по математическому анализу (см., например, Г. Е. Шилев [14], Л. Д. Кудрявцев [15] или С. М. Никольский [16]).

Теория обобщенных функций обычно излагается на основе функционального анализа. При этом обобщенные функции определяются как линейные функционалы на пространстве бесконечно дифференцируемых функций (финитных или быстро убывающих в окрестности ∞). Однако есть и другой, так называемый секвенциальный подход в изложении теории обобщенных функций (см.,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00206).

например, [8]). При этом обобщенные функции определяются как пределы почти равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций.

В настоящей статье на основе понятия точечной двоичной производной определяются двоичные обобщенные функции как линейные непрерывные функционалы на пространстве $D_d(\mathbb{R}_+)$ бесконечно двоично-дифференцируемых функций, финитных на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ вместе со всеми своими двоичными производными. Доказывается полнота пространства $D'_d(\mathbb{R})$ двоичных обобщенных функций и некоторые другие свойства. Например, доказывается, что любая локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция порождает двоичную обобщенную функцию.

Кроме того, определяется пространство $S_d(\mathbb{R}_+)$ быстро убывающих бесконечно двоично-дифференцируемых на $\mathbb{R}_+$ функций. Двоичные обобщенные функции медленного роста вводятся как линейные непрерывные функционалы на пространстве $S_d(\mathbb{R}_+)$. Доказывается, что любая локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция, имеющая полиномиальный рост в окрестности $+\infty$, порождает двоичную обобщенную функцию медленного роста. Устанавливается полнота пространства $S'_d(\mathbb{R}_+)$ двоичных обобщенных функций медленного роста.

Отметим, что в книге “Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах” (см. [17; п. 1.2.3, неравенство (1.2.20)]) Н. Я. Вилениным введено понятие обобщенной функции на нуль-мерной периодической локально компактной коммутативной группе. Кроме определения и трех конкретных примеров, в ней нет каких-либо результатов, связанных с введенным понятием обобщенных функций, в частности не введено понятие производной для этих функций. Приводимое в настоящей статье определение пространства $D'_d(\mathbb{R}_+)$ является развитием идеи из упомянутой книги для случая конкретной локально компактной группы $\mathbb{R}_+$ с так называемой двоичной топологией, порожденной операцией $\oplus$ поразрядного сложения по модулю 2 чисел, представленных в двоичной системе счисления.

§ 2. Вспомогательные результаты

Через $\mathbb{N}$ (соответственно $\mathbb{Z}_+$) обозначим множество всех натуральных (соответственно целых неотрицательных) чисел. Для чисел $x \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (2.1)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Легко видеть, что справедливо равенство

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{i-1} x_{-i} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i}. \quad (2.2)$$

При этом

$$[x] = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{i-1} x_{-i}, \quad \{x\} = x - [x] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, \quad (2.3)$$

где $[x]$ – целая, а $\{x\}$ – дробная часть числа x . Отметим, что $x_{-i} = 0$ для $i \geq i(x)$. Если же число $x \in \mathbb{R}_+$ двоично-рационально, то и $x_i = 0$ для $i \geq i_0(x)$, т.е. в этом случае второй ряд в правой части (2.2) и (2.3) является конечной суммой.

Введем теперь операцию двоичного сложения $\oplus$ на множестве $\mathbb{R}_+$ следующим образом. Если числа $x, y \in \mathbb{R}_+$ представлены в виде (2.2) и последовательность $\{|x_n - y_n|\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ не заканчивается единицей, т.е. не существует такого $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|x_n - y_n| = 1$ для всех $n \geq n_0$, то положим

$$x \oplus y = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{i-1} |x_{-i} - y_{-i}| + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}. \quad (2.4)$$

Таким образом, при фиксированном $x \in \mathbb{R}_+$ операция двоичного сложения $x \oplus y$ определена для всех $y \in \mathbb{R}_+$, за исключением, быть может, счетного множества. Если же $y \in \mathbb{R}_+$ двоично-рационально, то $x \oplus y$ определено для всех $x \in \mathbb{R}_+$. При этом $x \oplus y = y \oplus x$, т.е. если определена одна из частей этого равенства, то определена и другая, причем они совпадают.

Поскольку $x_{-i} = 0$ для $i \geq i(x) \in \mathbb{N}$, то для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Обобщенные функции Уолша $\psi_y, y \in \mathbb{R}_+$, определяются на $\mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi_y(x) \equiv \psi(x, y) = (-1)^{t(x, y)}. \quad (2.5)$$

Они были введены в статье Н. Дж. Файна [18]. Так как $t(x, y) = t(y, x) \in \mathbb{Z}_+$ и $t(x, 0) = t(0, x) = 0$, то

$$\psi(x, y) = \psi(y, x), \quad \psi(x, y) = \pm 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad (2.6)$$

причем $\psi(x, 0) = \psi(0, x) = 1$ для $x \in \mathbb{R}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$\psi(x, y) = \psi(x, [y])\psi([x], y). \quad (2.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ и $x \otimes y$ двоично-иррационально, то

$$\psi(x, z)\psi(y, z) = \psi(x \otimes y, z). \quad (2.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Справедливо равенство

$$D(x, 2^k) \equiv \int_0^{2^k} \psi(x, t) dt = 2^k X_{[0, 2^{-k})}(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где X_E – характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\psi(x, n) = w_n(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $\{w_k\}_{k=0}^{+\infty}$ – система функций Уолша в нумерации Пэли.

Доказательства предложений 2.1–2.4 можно найти, например, в [19; гл. 1] или [20; гл. 9].

Введем теперь на $\mathbb{R}_+$ расстояние $\rho^*(x, y)$ между числами $x, y \in \mathbb{R}_+$, положив

$$\rho^*(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{i-1} |x_{-i} - y_{-i}| + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}. \quad (2.9)$$

Легко проверить, что все аксиомы расстояния при этом выполняются. Кроме того, справедливо неравенство

$$\rho(x, y) \equiv |y - x| \leq \rho^*(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}_+ \quad (2.10)$$

(см. [19; п. 1.2.5]).

Назовем отрезок вида $\Delta_i^{(n)} = [i/2^n, (i+1)/2^n)$, $i, n \in \mathbb{Z}_+$, двоичным отрезком ранга n . Известно (см. [19; п. 1.2.5]), что два различных двоичных отрезка одного и того же ранга находятся на положительном ρ^* -расстоянии друг от друга, т.е.

$$\rho^*(\Delta_i^{(n)}, \Delta_j^{(n)}) \equiv \inf\{\rho^*(x, y) : x \in \Delta_i^{(n)}, y \in \Delta_j^{(n)}\} > 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.11)$$

Функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем ρ^* -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ при $\rho^*(x, y) < \delta$. Функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем ρ^* -непрерывной на $\mathbb{R}_+$, если она ρ^* -непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Множество всех ρ^* -непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций обозначим через $C^*(\mathbb{R}_+)$.

С учетом этого обозначения на основании предложений 2.1 и 2.4 следует, что при фиксированном аргументе x или y функция $\psi(x, y)$ как функция другого аргумента принадлежит классу $C^*(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, на основании предложения 2.3 функция $X_{[0, 2^k)}$ также принадлежит классу $C^*(\mathbb{R}_+)$.

В силу неравенства (2.10) всякая ρ^* -непрерывная в точке $x \in \mathbb{R}_+$ функция непрерывна в этой точке в обычном смысле. При этом обратное утверждение неверно. Действительно, функции Уолша $w_n(x)$ являются 1-периодическими ступенчатыми функциями, причем все они ρ^* -непрерывны всюду на $\mathbb{R}_+$, однако для $n \geq 1$ они разрывны в обычном смысле в некоторых двоично-рациональных точках (см. [19; гл. 1]).

Функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем равномерно ρ^* -непрерывной на $\mathbb{R}_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при условии $\rho^*(x, y) < \delta$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, справедливо неравенство $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Как обычно, через $L(\mathbb{R}_+)$ обозначим пространство измеримых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ по мере Лебега функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} |f(x)| dx,$$

а через $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ – пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций с нормой

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Напомним определение двоичной свертки $f * g$ двух функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ или $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)g(x \oplus y) dy. \quad (2.12)$$

В случае $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ двоичная свертка $f * g$ определена п.в. на $\mathbb{R}_+$ и $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$. Если же $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, то двоичная свертка $(f * g)(x)$ определена во всех точках $x \in \mathbb{R}_+$, а ее значения не изменяются при изменении каждой из функций f или g на множестве нулевой меры Лебега. Отметим, что $f * g = g * f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если функция φ ограничена и равномерно ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$, а функция $g \in L(\mathbb{R}_+)$, то двоичная свертка $(\varphi * g)(x) \equiv f(x)$ равномерно ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция φ ограничена на $\mathbb{R}_+$, то двоичная свертка $(\varphi * g)(x)$, очевидно, существует в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Поэтому

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}_+} \{\varphi(y \oplus t) - \varphi(x \oplus t)\} g(t) dt \right|. \quad (2.13)$$

А так как функция φ равномерно ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|\varphi(u) - \varphi(v)| < \varepsilon$, если $\rho^*(u, v) < \delta$. Но если $t \in \mathbb{R}_+$ таково, что $x \oplus t$ и $y \oplus t$ определены, то $\rho^*(x \oplus t, y \oplus t) = \rho^*(x, y)$ (см. [19; п. 1.2.3, равенство (1.2.21)]). Следовательно, всюду на $\mathbb{R}_+$, за исключением счетного множества, справедливо равенство $\rho^*(x \oplus t, y \oplus t) = \rho^*(x, y)$. Поэтому если $\rho^*(x, y) < \delta$, то из (2.13) имеем $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \|g\|_{L(\mathbb{R}_+)}$.

Преобразование Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) f(y) dy. \quad (2.14)$$

Оно впервые было определено в работе Н. Дж. Файна [18]. Так как $f \in L(\mathbb{R}_+)$, а $|\psi(x, y)| \equiv 1$, то интеграл в правой части равенства (2.14) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}_+$.

Преобразование Уолша имеет свойства, аналогичные свойствам обычного преобразования Фурье. Очевидно, для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Уолша ограничено и $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$. Поэтому из сходимости последовательности функций f_n к функции f в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ вытекает, что $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ равномерно на $\mathbb{R}_+$.

Легко видеть, что в случае $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство $\widetilde{f * g} = \tilde{f} \tilde{g}$ п.в. на $\mathbb{R}_+$.

ТЕОРЕМА А. *Для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Уолша $\tilde{f}$ является равномерно ρ^* -непрерывной функцией на $\mathbb{R}_+$, причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = 0$.*

ТЕОРЕМА В. *Если точка $x \in \mathbb{R}_+$ является точкой ρ^* -непрерывности функции f и $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то справедливо равенство*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) \tilde{f}(y) dy.$$

Доказательство этих теорем можно найти в [20; гл. 9], а теорема В доказана также в [19; гл. 6].

Введем понятие двоичной точки Лебега функции. Точку $x \in \mathbb{R}_+$ назовем двоичной точкой Лебега локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f , если f определена в точке x и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \int_0^{2^{-n}} |f(x \oplus t) - f(x)| dt = 0.$$

Почти все точки локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f являются ее двоичными точками Лебега. Очевидно, что точка ρ^* -непрерывности функции является ее двоичной точкой Лебега.

Введем так называемый обобщенный интеграл Дирихле–Уолша функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$:

$$S_y(f)(x) = \int_0^y \tilde{f}(t) \psi(x, t) dt.$$

ТЕОРЕМА С. Если точка $x \in \mathbb{R}_+$ является двоичной точкой Лебега функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2^n}(f)(x) = f(x).$$

Если при этом $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) \tilde{f}(y) dy.$$

Утверждение теоремы С доказано в [20; с. 430] для точки ρ^* -непрерывности функции, но доказательство остается справедливым и для двоичной точки Лебега.

Из теоремы С вытекает

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При условиях $f, \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) \tilde{f}(y) dy$$

п.в. на $\mathbb{R}_+$.

Определим функцию $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ равенствами

$$h(x) = 2^{-n}, \quad 2^n \leq x < 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.15)$$

Если $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$, и одновременно $g(x) = O(f(x))$, $x \rightarrow a$, то будем писать $f(x) \approx g(x)$, $x \rightarrow a$.

Легко видеть, что $h(x) \approx 1/x$ при $x \rightarrow +0$ и при $x \rightarrow +\infty$, так как $h(x)/2 < 1/x \leq h(x)$.

Для $\alpha > 0$ положим

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2.1. Если $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то:

- а) $\Lambda_n^\alpha(x) = 2^{n(\alpha+1)}/(2^{\alpha+1} - 1)$ для $0 \leq x < 2^{-n}$;
 б) $\Lambda_n^\alpha(x) = C_n^\alpha 2^{-i(\alpha+1)}$ для $2^{-n+i} \leq x < 2^{-n+i+1}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, где

$$C_n^\alpha = -\frac{1 - 2^{-\alpha}}{1 - 2^{-\alpha-1}} 2^{(n-1)(\alpha+1)}. \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из определения (2.15) функции $h(x)$ и равенства (2.16) получим

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-(k+1)\alpha} [D(x, 2^{-k}) - D(x, 2^{-k-1})],$$

где согласно предложению 2.3

$$D(x, 2^k) \equiv \int_0^{2^k} \psi(x, t) dt = 2^k X_{[0, 2^{-k})}(x). \quad (2.18)$$

Поэтому

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-(k+1)\alpha} [2^{-k} X_{[0, 2^k)}(x) - 2^{-k-1} X_{[0, 2^{k+1})}(x)].$$

Отсюда, применяя преобразование Абеля, приходим к равенству

$$\Lambda_n^\alpha(x) = 2^{(n-1)\alpha} 2^n X_{[0, 2^{-n})}(x) + (2^{-\alpha} - 1) \sum_{k=-n+1}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} X_{[0, 2^k)}(x). \quad (2.19)$$

Следовательно,

$$\Lambda_n^\alpha(x) = 2^{(n-1)\alpha} 2^n + (2^{-\alpha} - 1) \sum_{k=-n+1}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} = \frac{2^{n(\alpha+1)}}{2^{\alpha+1} - 1}$$

для $x \in [0, 2^{-n})$ и утверждение п. а) леммы 2.1 доказано.

б) Если же $2^{-n+i} \leq x < 2^{-n+i+1}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, то из (2.19) получим

$$\Lambda_n^\alpha(x) = (2^{-\alpha} - 1) \sum_{k=-n+1+i}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} = C_n^\alpha 2^{-i(\alpha+1)},$$

где C_n^α определяется равенством (2.17). Утверждение п. б) леммы 2.1 также доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ функция Λ_n^α ограничена на $\mathbb{R}_+$ и $\Lambda_n^\alpha(x) \approx x^{-\alpha-1}$, $x \rightarrow +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо включение $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$.

Отметим, что равенство (2.16) можно записать в виде

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \tilde{\psi}_n^\alpha(x), \quad (2.20)$$

где

$$\psi_n^\alpha(x) = (h(x))^{-\alpha} X_{[0, 2^n)}(x), \quad x > 0, \quad \psi_n^\alpha(0) = 0. \quad (2.21)$$

Функция $\psi_n^\alpha(x)$ при $\alpha > 0$ интегрируема и ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Поэтому из (2.16) и (2.20) на основании леммы 2.1 и теоремы В следует, что $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(x) = \psi_n^\alpha(x)$ на $\mathbb{R}_+$. В частности, $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(0) = 0$.

Отметим, что для ядер Λ_n^α справедливо включение $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$ (см. следствия 2.1 и 2.2). Поэтому свертка $(f * \Lambda_n^\alpha)(x)$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+)$ имеет смысл в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$, а ее значения не изменяются при изменении значений функции f на множестве нулевой меры Лебега. Этот факт позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+)$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел $d^{(\alpha)}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * \Lambda_n^\alpha)(x)$, то число $d^{(\alpha)}(f)(x)$ назовем *двоичной производной* (ДП) порядка α функции f в точке x .

Отметим, что для случая $\alpha = 1$ подобное определение вводилось С. У. Онневиром [21].

Ниже мы будем пользоваться другим обозначением двоичной производной порядка α , положив $d^{(\alpha)}(\varphi)(x) \equiv \varphi^{(\alpha)}(x)$. Это обозначение совпадает с привычным обозначением классической производной порядка α . Но мы надеемся избежать недоразумений, поскольку в этой статье классическая производная использоваться не будет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $g \in L(\mathbb{R}_+)$, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - (f * \Lambda_n^\alpha)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$, то функцию $g \equiv D^{(\alpha)}(f)$ назовем *модифицированной сильной двоичной производной* (МСДП) порядка α функции f .

Подобное определение вводилось С. У. Онневиром [22], который рассматривал сильные двоичные производные дробного порядка на локальных полях.

Рассмотрим систему функций

$$\varphi_{m,n}(x) \equiv \psi(x, m2^{-n})X_{[0,2^n)}(x), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.22)$$

ЛЕММА 2.2. При $m, n \in \mathbb{Z}_+$ каждая функция системы (2.22) равномерно ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании предложений 2.1 и 2.4 справедливо равенство

$$\psi(x, m2^n) = w_{[m2^{-n}]}(x)w_{[x]}(m2^{-n}). \quad (2.23)$$

Поэтому

$$\varphi_{m,n}(x) = w_{[m2^{-n}]}(x)w_{[x]}(m2^{-n})X_{[0,2^n)}(x). \quad (2.24)$$

Если $x \in [0, 2^n)$, то на основании (2.11) существует такое $\delta_n > 0$, что при условии $\rho^*(x, y) < \delta_n$ имеем $y \in [0, 2^n)$. Поэтому при $x \in [0, 2^n)$ и $\rho^*(x, y) < \delta_n$ из (2.23) вытекает

$$\begin{aligned} |\varphi_{m,n}(x) - \varphi_{m,n}(y)| &= |\psi(x, m2^{-n}) - \psi(y, m2^{-n})| \\ &= |w_{[m2^{-n}]}(x)w_{[x]}(m2^{-n}) - w_{[m2^{-n}]}(y)w_{[y]}(m2^{-n})|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Если $[x] = k$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, то на основании (2.11) существует такое $\delta'_n > 0$, что при условии $\rho^*(x, y) < \delta'_n$ имеем $[y] = k$. Считая, что $\delta'_n \leq \delta_n$ и $\rho^*(x, y) < \delta'_n$, из (2.25) получим

$$|\varphi_{m,n}(x) - \varphi_{m,n}(y)| = |w_{[m2^{-n}]}(x) - w_{[m2^{-n}]}(y)|. \quad (2.26)$$

Но так как функция Уолша w_r , $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq r < 2^{l+1}$, имеет период 1 и постоянна на двоичных отрезках вида $\Delta_s^{(l+1)} = [s/2^{l+1}, (s+1)/2^{l+1}]$, где $s \in \mathbb{Z}_+$, то на основании (2.11) существует такое $\delta''_{n,m} > 0$, что при $\rho^*(x, y) < \delta''_{n,m}$ точки x и y принадлежат одному и тому же двоичному отрезку вида $\Delta_s^{(l+1)}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta''_{n,m} \leq \delta'_n \leq \delta_n$. Тогда при $x \in [0, 2^n]$ и $\rho^*(x, y) < \delta''_{n,m}$ из (2.26) следует, что

$$|\varphi_{m,n}(x) - \varphi_{m,n}(y)| = 0. \quad (2.27)$$

Если же $x > 2^n$, то $x \in [s2^n, (s+1)2^{n+1}]$, $s \in \mathbb{N}$. Поэтому при $\rho^*(x, y) < \delta_n$ будет справедливо включение $y \in [s2^n, (s+1)2^{n+1}]$. Следовательно, при $x > 2^n$ и $\rho^*(x, y) < \delta_n$ имеем $\varphi_{m,n}(x) = \varphi_{m,n}(y) = 0$. Итак, доказано, что для заданных $m, n \in \mathbb{Z}_+$ существует такое число $\delta''_{n,m} > 0$, что при $\rho^*(x, y) < \delta''_{n,m}$ справедливо равенство (2.27), т.е. функция $\varphi_{m,n}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 2.3. При любом $\alpha > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x) = 2^{r\alpha} \varphi_{m,n}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (2.28)$$

если $k \in \mathbb{Z}_+$ и $k \geq \max\{r, \log_2[(m+1)2^{-n}]\}$, а целое число r таково, что $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1}]$. В частности, в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ у функций системы (2.22) существует двоичная производная порядка α и справедливо равенство $\varphi_{m,n}^{(\alpha)}(x) = 2^{r\alpha} \varphi_{m,n}(x)$. Кроме того, у функций системы (2.22) существует МСДП $D^{(\alpha)}$ порядка α и $D^{(\alpha)}(\varphi_{m,n}) = 2^{r\alpha} \varphi_{m,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя равенство $\widetilde{f * g} = \widetilde{f} \widetilde{g}$, на основании теоремы В получим

$$(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \widetilde{\varphi}_{m,n}(t) \widetilde{\Lambda}_k^\alpha(t) \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

(Это равенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}_+$, так как функция $(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x)$ является ρ^* -непрерывной на $\mathbb{R}_+$ согласно предложению 2.5.) Так как $\widetilde{\varphi}_{m,n}(t) = 2^n X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]}(t)$ (см. [23; лемма 1]) и $\widetilde{\Lambda}_k^\alpha(t) = (h(t))^{-\alpha} X_{[0, 2^k]}(t)$, то

$$(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x) = 2^n \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]}(t) (h(t))^{-\alpha} X_{[0, 2^k]}(t) \psi(x, t) dt.$$

Если $2^k \geq (m+1)2^{-n}$, т.е. $k \geq \log_2[(m+1)2^{-n}]$, то $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [0, 2^k]$. Поэтому из предыдущего равенства имеем

$$(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x) = 2^n \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]}(t) (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.29)$$

Если целое число r таково, что $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1}]$, то из равенства (2.29) на основании (2.15) получаем

$$(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x) = 2^{r\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} 2^n X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]}(t) \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, при $k \geq \max\{r, \log_2[(m+1)2^{-n}]\}$ справедливо равенство

$$(\varphi_{m,n} * \Lambda_k^\alpha)(x) = 2^{r\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} \widetilde{\varphi}_{m,n}(t) \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

так как функция $\tilde{\varphi}_{m,n}(t) = 2^n X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(t)$. Из предыдущего равенства на основании теоремы B и леммы 2.2 вытекает равенство (2.28) для $k \geq \max\{r, \log_2[(m+1)2^{-n}]\}$.

Существование двоичной производной $\varphi_{m,n}^{(\alpha)}(x)$ и равенство

$$\varphi_{m,n}^{(\alpha)}(x) = 2^{r\alpha} \varphi_{m,n}(x)$$

вытекают из равенства (2.28) переходом к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Наконец, существование МСДП $D^{(\alpha)}(\varphi_{m,n})$ и равенство $D^{(\alpha)}(\varphi_{m,n}) = 2^{r\alpha} \varphi_{m,n}$ также вытекают из равенства (2.28), если в нем перейти к пределу при $k \rightarrow +\infty$ в метрике пространства $L(\mathbb{R}_+)$.

ЛЕММА 2.4. *Функция $\varphi(x) = X_{[0,1)}(x)$ имеет двоичную производную любого положительного порядка α в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем*

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = (2^{\alpha+1} - 1)^{-1}, \quad x \in [0, 1), \quad (2.30)$$

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = -2^{-(n+1)(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha+1} - 1} \right), \quad 2^n \leq x < 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi(x) = X_{[0,1)}(x)$, то $\varphi(x) = \varphi_{0,0}(x)$ (см. равенство (2.22)). Легко убедиться, что начало доказательства леммы 2.3 вплоть до равенства (2.29) для $m = n = 0$ остается справедливым. Но в этом случае равенство (2.29) принимает вид

$$(\varphi * \Lambda_k^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} X_{[0,1)}(t) (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt = \int_0^1 (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt, \quad k \geq 0. \quad (2.32)$$

Переходя в (2.32) к пределу при $k \rightarrow +\infty$ согласно определению 2.1 и обозначению $d^{(\alpha)}(\varphi)(x) \equiv \varphi^{(\alpha)}(x)$, приходим к равенству

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = \int_0^1 (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда, учитывая равенство (2.15), получаем

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} \int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}} \psi(x, t) dt.$$

Следовательно, применяя равенство (2.18), имеем

$$\begin{aligned} \varphi^{(\alpha)}(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} [D(x, 2^{-i}) - D(x, 2^{-i-1})] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} [2^{-i} X_{[0, 2^i)} - 2^{-i-1} X_{[0, 2^{i+1})}(x)]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Если $x \in [0, 1)$, то из (2.33) получаем

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{(i+1)\alpha} 2^{-i-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)(\alpha+1)} = \frac{2^{-\alpha-1}}{1 - 2^{-\alpha-1}} = \frac{1}{2^{\alpha+1} - 1}.$$

Тем самым, равенство (2.30) для $x \in [0, 1)$ доказано.

Пусть теперь $x \geq 1$. Подберем $n \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы выполнялись неравенства $2^n \leq x < 2^{n+1}$. Тогда из (2.33) получим

$$\begin{aligned}\varphi^{(\alpha)}(x) &= \sum_{i=n}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} [2^{-i} X_{[0,2^i)} - 2^{-i-1} X_{[0,2^{i+1})}(x)] \\ &= -2^{-(n+1)\alpha} \cdot 2^{-n-1} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-(i+1)(\alpha+1)} \\ &= -2^{-(n+1)(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha+1} - 1} \right).\end{aligned}$$

Тем самым, и равенство (2.31) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Легко проверить, что функция $\varphi(x) = X_{[0,1)}(x)$ и все ее двоичные производные равномерно ρ^* -непрерывны. Отметим, что из леммы 2.3 вытекает существование финитных функций, все двоичные производные которых не являются финитными. Это объясняется тем, что при определении точечной двоичной производной порядка $\alpha > 0$ используются значения функции на всей положительной полуоси.

§ 3. Пространства двоичных основных и обобщенных функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функцию φ назовем *бесконечно двоично-гладкой* на $\mathbb{R}_+$, если она и все ее двоичные производные любого натурального порядка ограничены и равномерно ρ^* -непрерывны на $\mathbb{R}_+$. Множество всех таких функций обозначим символом $C_W^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$.

Через $\text{supp } \varphi$ будем обозначать носитель функции $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. замыкание в метрике ρ^* множества всех тех точек $x \in \mathbb{R}_+$, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Напомним, что полуинтервал Δ вида $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$, называется двоичным отрезком. Он является замкнутым множеством в метрике ρ^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Финитную функцию $\varphi \in C_W^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ назовем *двоично-финитной*, если:

- 1) носители функции φ и всех ее двоичных производных $\varphi^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, содержатся в некотором двоичном отрезке Δ ;
- 2) для любого $\alpha \in \mathbb{N}$ последовательность $(\varphi * \Lambda_n^\alpha)(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ равномерно сходится к $\varphi^{(\alpha)}(x)$ на $\mathbb{R}_+$.

Множество всех двоично-финитных функций из $C_W^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ обозначим символом $D_d(\mathbb{R}_+)$.

Очевидно, если $\varphi_1, \varphi_2 \in D_d(\mathbb{R}_+)$, то $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in D_d(\mathbb{R}_+)$ для любых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Поэтому множество $D_d(\mathbb{R}_+)$ является действительным линейным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения их на действительные числа.

Тривиальным примером функции из пространства $D_d(\mathbb{R}_+)$ является функция, равная нулю на $\mathbb{R}_+$. Пространству $D_d(\mathbb{R}_+)$ на основании леммы 2.3 принадлежат функции системы (2.22), а также их линейные комбинации.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Существуют финитные функции $\varphi \in C_W^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$, не принадлежащие пространству $D_d(\mathbb{R}_+)$. Примером может служить функция $\varphi(x) = X_{[0,1)}(x)$ (см. замечание 2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Как было доказано (см. [24; лемма 5.4]), линейная оболочка, натянутая на систему функций (2.22), плотна в двоичном пространстве Харди $H(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, пространство $D_d(\mathbb{R}_+)$ обладает достаточно большим запасом функций.

Введем в пространстве $D_d(\mathbb{R}_+)$ класс сходящихся последовательностей. При этом, как обычно, будем считать $f^{(0)} = f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset D_d(\mathbb{R}_+)$ назовем *сходящейся в $D_d(\mathbb{R}_+)$ к функции $\varphi_0 \in D_d(\mathbb{R}_+)$* (это будет записываться так: $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$), если:

- 1) существует такой двоичный отрезок Δ , что $\text{supp } \varphi_n^{(\alpha)} \subset \Delta$ для всех $n, \alpha \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $\varphi_n^{(\alpha)}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ равномерно сходится к $\varphi_0^{(\alpha)}(x)$ на Δ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Из этого определения следует, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $D(\mathbb{R}_+)$, то $\varphi_n^{(\alpha)} \rightarrow \varphi_0^{(\alpha)}$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}$. Линейное пространство $D_d(\mathbb{R}_+)$ с введенным классом сходящихся последовательностей является *линейным пространством сходимости* (мы придерживаемся терминологии из книги С. Л. Соболева [25; гл. 8]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из определения 3.3 вытекает, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n^{(\alpha)} - \varphi_0^{(\alpha)}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+.$$

Это следует из того, что $\text{supp } \varphi_n^{(\alpha)} \subset \Delta$ для всех $n, \alpha \in \mathbb{Z}_+$, где Δ – некоторый двоичный отрезок.

Рассмотрим функционал $f: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$. Его значение на элементе $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать символом (f, φ) . Напомним два известных определения в применении к пространству $D_d(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Функционал $f: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейным*, если

$$(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

для любых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и функций $\varphi_1, \varphi_2 \in D_d(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Линейный функционал $f: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывным*, если из $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi_0)$.

Теперь введем двоичные обобщенные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Линейный непрерывный функционал $f: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *двоичной обобщенной функцией*.

Множество всех двоичных обобщенных функций обозначим через $D'_d(\mathbb{R}_+)$.

Операции сложения двоичных обобщенных функций f_1, f_2 и умножения их на константу определим как обычно:

$$(c_1f_1 + c_2f_2, \varphi) = c_1(f_1, \varphi) + c_2(f_2, \varphi), \quad \varphi \in D_d(\mathbb{R}_+), \quad (3.1)$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. В результате множество $D'_d(\mathbb{R}_+)$ превратится в действительное линейное пространство. Это пространство является сопряженным к линейному пространству $D_d(\mathbb{R}_+)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Всякая локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция f порождает двоичную обобщенную функцию, если положить*

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D_d(\mathbb{R}_+). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ финитна, то интеграл в правой части (3.2) существует. Линейность на пространстве $D_d(\mathbb{R}_+)$ функционала, определяемого равенством (3.2), очевидна. Докажем его непрерывность.

Пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$. Тогда существует такой двоичный отрезок Δ , что $\text{supp } \varphi_n \subset \Delta$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ и $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi_0(x)$ на $\mathbb{R}_+$. Поэтому при $n \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} (f, \varphi_n) &= \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \varphi_n(x) dx = \int_{\Delta} f(x) \varphi_n(x) dx \\ &\rightarrow \int_{\Delta} f(x) \varphi_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \varphi_0(x) dx = (f, \varphi_0). \end{aligned}$$

Двоичную обобщенную функцию, порожденную обычной функцией $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ по формуле (3.2), назовем *регулярной*. Остальные двоичные обобщенные функции назовем *сингулярными*.

Двоичная дельта-функция Дирака. Приведем пример сингулярной двоичной обобщенной функции. Рассмотрим функционал $\delta_d: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый равенством

$$(\delta_d, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D_d(\mathbb{R}_+). \quad (3.3)$$

Легко видеть, что этот функционал линеен и непрерывен на $D_d(\mathbb{R}_+)$, т.е. является двоичной обобщенной функцией. Предположим, что она регулярна, т.е. существует такая функция $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, что

$$(\delta_d, \varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D_d(\mathbb{R}_+). \quad (3.4)$$

Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(x) = \psi(x, 2^n) X_{[0, 2^{-n})}(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}_+$. Легко видеть, что $\varphi_n(x) = \varphi_{1, -n}(x)$, где $\varphi_{1, -n}(x)$ — функции системы (2.22), т.е. $\varphi_n \in D_d(\mathbb{R}_+)$ для $n \in \mathbb{Z}_+$. Но из (3.4) в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем

$$|(\delta_d, \varphi_n)| \leq \int_0^{2^{-n}} |f(x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

что противоречит равенству $(\delta_d, \varphi_n) = \varphi_n(0) = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, двоичная обобщенная функция δ_d является сингулярной. Назовем ее *двоичной дельта-функцией Дирака*.

Помимо двоичной дельта-функции Дирака (3.3) существуют и другие сингулярные двоичные обобщенные функции. Например, для любого $a \in \mathbb{R}_+$ определим функционал $\delta_d^a: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$, положив $(\delta_d^a, \varphi) = \varphi(a)$, $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$. Легко видеть, что этот функционал линеен и непрерывен на $D_d(\mathbb{R}_+)$, т.е. является двоичной обобщенной функцией. Как и в случае двоичной дельта-функции Дирака, легко убедиться, что обобщенная функция δ_d^a сингулярна.

ТЕОРЕМА 3.1. Если функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет модифицированную сильную двоичную производную (МСДП) $D^{(\alpha)}(f)$ при некотором натуральном α , то для любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$(D^{(\alpha)}(f), \varphi) = (f, \varphi^{(\alpha)}). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы согласно определению 2.2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \Lambda_n^\alpha - D^{(\alpha)}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0. \quad (3.6)$$

Так как функция φ ограничена, то из (3.6) получим

$$\begin{aligned} (D^{(\alpha)}(f), \varphi) &= \int_{\mathbb{R}_+} D^{(\alpha)}(f)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} D^{(\alpha)}(f)(x) \varphi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (f * \Lambda_n^\alpha)(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, вспоминая определение двоичной свертки и меняя порядок интегрирования на основании теоремы Фубини, придем к равенству

$$\begin{aligned} (D^{(\alpha)}(f), \varphi) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \Lambda_n^\alpha(t \oplus x) dt \right\} \varphi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) \Lambda_n^\alpha(t \oplus x) dx \right\} f(t) dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поскольку $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$, то последовательность $(\varphi * \Lambda_n^\alpha)$ при $n \rightarrow +\infty$ сходится к $\varphi^{(\alpha)}(x)$ равномерно на $\mathbb{R}_+$. Поэтому из (3.7) имеем

$$(D^{(\alpha)}(f), \varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (\varphi * \Lambda_n^\alpha)(t) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi^{(\alpha)}(t) f(t) dt = (f, \varphi^{(\alpha)}),$$

т.е. равенство (3.5) доказано.

Введем операцию двоичного дифференцирования двоичных обобщенных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Если $f \in D'_d(\mathbb{R}_+)$, а $\alpha \in \mathbb{N}$, то положим

$$(f^{(\alpha)}, \varphi) = (f, \varphi^{(\alpha)}), \quad \varphi \in D_d(\mathbb{R}_+). \quad (3.8)$$

Отметим, что определение 3.7 согласовано с утверждением теоремы 3.1.

Поскольку из условия $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ следует $\varphi^{(\alpha)} \in D_d(\mathbb{R}_+)$ при любом $\alpha \in \mathbb{N}$, то из (3.8) вытекает, что $f^{(\alpha)} \in D'_d(\mathbb{R}_+)$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}$. Таким образом, любая двоичная обобщенная функция бесконечно двоично-дифференцируема. В частности, из (3.8) и определения 3.7 вытекает, что

$$(\delta_d^{(\alpha)}, \varphi) = (\delta_d, \varphi^{(\alpha)}) = \varphi^{(\alpha)}(0), \quad \varphi \in D_d(\mathbb{R}_+),$$

для любых натуральных α . Очевидно, двоичные обобщенные функции $\delta_d^{(\alpha)}$ также являются сингулярными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Последовательность двоичных обобщенных функций $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ назовем *сходящейся к двоичной обобщенной функции f_0* , если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi) = (f_0, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$. При этом будем писать: $f_n \rightarrow f_0$ в $D'_d(\mathbb{R}_+)$.

Обозначим через $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ пространство локально интегрируемых в $\mathbb{R}_+$ функций, т.е. $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, если функция f интегрируема по Лебегу на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Последовательность локально интегрируемых в $\mathbb{R}_+$ функций $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ назовем *сходящейся к локально интегрируемой функции f_0 в пространстве $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$* , если на любом двоичном отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}_+$ эта последовательность сходится к функции $f_0(x)$ по норме пространства $L(\Delta)$. При этом будем писать $f_n \rightarrow f_0$ в $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если $f_n \rightarrow f_0$ в $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, то $f_n \rightarrow f_0$ в $D'_d(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_n \rightarrow f_0$ в $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Тогда для произвольной функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ с носителем $\text{supp } \varphi \subset \Delta$, где Δ – двоичный отрезок, имеем

$$|(f_n - f_0, \varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f_0(x)| |\varphi(x)| dx \leq C(\varphi) \|f_n - f_0\|_{L(\Delta)}. \quad (3.9)$$

Поскольку $\|f_n - f_0\|_{L(\Delta)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то из (3.9) следует, что $(f_n, \varphi) \rightarrow (f_0, \varphi)$ при $n \rightarrow +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Последовательность двоичных обобщенных функций $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty}$ называется *фундаментальной*, если для любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна.

Для фундаментальной последовательности двоичных обобщенных функций $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty}$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}_{n=0}^{+\infty}$ сходится при любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$, т.е. существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$.

Следующая теорема устанавливает полноту пространства $D'_d(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Если последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty} \subset D'_d(\mathbb{R}_+)$ фундаментальна, то функционал f , определяемый равенством $(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$ для $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$, линеен и непрерывен на $D_d(\mathbb{R}_+)$, т.е. $f \in D'_d(\mathbb{R}_+)$.

Для доказательства этой теоремы потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty} \subset D'_d(\mathbb{R}_+)$ такова, что при любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}_{n=0}^{+\infty}$ сходится, а $\varphi_n \rightarrow 0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$. Тогда $(f_n, \varphi_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство леммы 3.1 и теоремы 3.2 проводится тем же методом, которым доказана полнота классического пространства обобщенных функций $D(\mathbb{R}^m)$ в [14].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $|(f_n, \varphi_n)| \geq c > 0$, $n = 0, 1, \dots$. Поскольку $\varphi_n \rightarrow 0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$, то существует такой двоичный отрезок Δ , что $\text{supp } \varphi_n \subset \Delta$, $n = 0, 1, \dots$, и при

каждом $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ последовательность $\varphi_n^{(\alpha)}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ сходится к нулю равномерно на Δ .

Снова переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $|\varphi_n^{(\alpha)}(x)| \leq 4^{-n}$ для $0 \leq \alpha \leq n$, $n = 0, 1, \dots$. Введем обозначение $\psi_n = 2^n \varphi_n$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда

$$|\psi_n^{(\alpha)}(x)| \leq 2^{-n}, \quad 0 \leq \alpha \leq n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.10)$$

Следовательно, $\psi_n \rightarrow 0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$ и любой ряд вида $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_{n_k}(x)$ сходится в $D_d(\mathbb{R}_+)$. При этом

$$|(f_n, \psi_n)| = 2^n |(f_n, \varphi_n)| \geq 2^n c \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3.11)$$

Построим по индукции две подпоследовательности $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ следующим образом. На основании (3.11) выберем f_{n_1}, ψ_{n_1} так, что $|(f_{n_1}, \psi_{n_1})| \geq 2$. Пусть $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\nu-1}$ и $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^{\nu-1}$ уже построены. Построим f_{n_ν} и ψ_{n_ν} . Так как $\psi_n \rightarrow 0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$, то $(f_{n_j}, \psi_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ для $j = 1, 2, \dots, \nu-1$. Поэтому найдется такой номер N , что при всех $n \geq N$

$$|(f_{n_j}, \psi_n)| \leq \frac{1}{2^{\nu-j}}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-1. \quad (3.12)$$

По условию для любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi) \equiv (f, \varphi)$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \psi_{n_j}) = (f, \psi_{n_j})$ для $j = 1, 2, \dots, \nu-1$. Следовательно, найдется такой номер N_1 , что при всех $n \geq N_1$

$$|(f_n, \psi_{n_j})| \leq |(f, \psi_{n_j})| + 1, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-1. \quad (3.13)$$

Наконец, в силу (3.11) найдем такой номер $n_\nu \geq N_1$, что

$$|(f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu})| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f, \psi_{n_j})| + 2\nu. \quad (3.14)$$

Таким образом, построены такие системы функций $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\nu$ и $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^\nu$, что

$$|(f_{n_j}, \psi_{n_\nu})| \leq \frac{1}{2^{\nu-j}}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-1, \quad (3.15)$$

$$|(f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu})| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{n_\nu}, \psi_{n_j})| + \nu + 1. \quad (3.16)$$

Тем самым, по индукции построены две бесконечные последовательности $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, удовлетворяющие неравенствам (3.15) и (3.16) для всех натуральных ν .

Положим

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \psi_{n_\nu}(x). \quad (3.17)$$

По построению ряд в правой части (3.17) сходится в $D_d(\mathbb{R}_+)$ и поэтому его сумма $\psi \in D_d(\mathbb{R}_+)$. Из (3.17) имеем

$$(f_{n_\nu}, \psi) = (f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu}) + \sum_{j=1, j \neq \nu}^{+\infty} (f_{n_\nu}, \psi_{n_j}).$$

Отсюда на основании (3.15) и (3.16) получим

$$\begin{aligned} |(f_{n_\nu}, \psi)| &\geq |(f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu})| - \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{n_\nu}, \psi_{n_j})| - \sum_{j=\nu+1}^{+\infty} |(f_{n_\nu}, \psi_{n_j})| \\ &\geq \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu, \end{aligned}$$

т.е. $(f_{n_\nu}, \psi) \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$. Но это противоречит предположению леммы 3.1 о том, что существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$ для любой функции $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Докажем сначала линейность функционала $f: D_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемого равенством $(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$, $\varphi \in D_d(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} (f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi) + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \psi) \\ &= \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi), \quad \varphi, \psi \in D_d(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Докажем теперь его непрерывность. Пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi = 0$. (В противном случае можно рассмотреть последовательность $\varphi'_n = \varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ в $D_d(\mathbb{R}_+)$.) Нам надо доказать, что $(f, \varphi_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Предположим противное. Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что выполняются неравенства $|(f, \varphi_\nu)| \geq 2c$, $\nu = 1, 2, \dots$, для некоторого $c > 0$. А так как

$$(f, \varphi_\nu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi_n),$$

то для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ найдется такой номер n_ν , что $|(f_{n_\nu}, \varphi_\nu)| \geq c$. Но это противоречит лемме 3.1.

§ 4. Пространство двоичных обобщенных функций медленного роста

Введем двоичное пространство $S_d(\mathbb{R}_+)$ функций, быстро убывающих в окрестности $+\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем говорить, что функция $\varphi \in C_W^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ принадлежит множеству $S_d(\mathbb{R}_+)$, если для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x))^{-\beta} \varphi^{(\alpha)}(x) = 0. \quad (4.1)$$

Напомним, что символ $\varphi^{(\alpha)}$ здесь, как и всюду в настоящей работе, обозначает двоичную производную порядка α функции φ .

Поскольку $h(x) \approx 1/x$ при $x \rightarrow +\infty$, то условие (4.1) равносильно следующему: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta \varphi^{(\alpha)}(x) = 0$.

Из определения 4.1 следует, что если $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, то $\varphi^{(\alpha)} \in S_d(\mathbb{R}_+)$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, множество $S_d(\mathbb{R}_+)$ является действительным линейным пространством относительно обычных операций сложения и умножения функций на действительные числа.

Для функции (2.15) имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = +\infty.$$

Будем считать, что $(h(0))^{-1} = 0$. При этом условии функция $(h(x))^{-1}$ станет непрерывной, а значит, и ρ^* -непрерывной в точке $x = 0$, причем $(h(x))^{-1} = 2^n$ для $2^n \leq x < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Более того, на каждом двоичном отрезке функция $(h(x))^{-1}$ является равномерно ρ^* -непрерывной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для функции $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |(h(x))^{-\beta} \varphi^{(\alpha)}(x)| \equiv c_{\alpha, \beta} < +\infty. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ функция $(h(x))^{-\beta} \varphi^{(\alpha)}(x)$ равномерно ρ^* -непрерывна на любом двоичном отрезке, в частности на $[0, 2^n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому она ограничена на двоичных отрезках вида $[0, 2^n)$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда, учитывая условие (4.1), получаем (4.2).

Если $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, то, заменяя в (4.2) β на $\beta + 2$, получим

$$|(h(x))^{-\beta} \varphi^{(\alpha)}(x)| \leq c_{\alpha, \beta+2} (h(x))^2 \approx x^{-2}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из (4.2) легко следует, что $h^{-\beta} \varphi^{(\alpha)} \in L(\mathbb{R}_+)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$.

Сравнивая определения 3.2 и 4.1, легко убедиться, что $D_d(\mathbb{R}_+) \subset S_d(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что это вложение строгое.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n^2} \varphi_{1,n}(x), \quad (4.3)$$

где $\varphi_{1,n}$ – функции системы (2.22). Согласно лемме 2.3 для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ у функции $\varphi_{1,n}$ существует двоичная производная $\varphi_{1,n}^{(\alpha)}(x) = 2^{-n\alpha} \varphi_{1,n}(x)$ во всех точках $x \in \mathbb{R}_+$. Но по лемме 2.2 эта двоичная производная $\varphi_{1,n}^{(\alpha)}(x)$ равномерно ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$. А так как почленно двоично продифференцированный ряд (4.3), т.е. ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n^2-n\alpha} \varphi_{1,n}(x)$, равномерно сходится на $\mathbb{R}_+$, то и его сумма, равная $\varphi^{(\alpha)}(x)$, равномерно ρ^* -непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Далее, считая, что $2^k \leq x < 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и учитывая равенство $h(x) = 2^{-k}$, из (4.3) при любом $\beta > 0$ получим

$$|\varphi^{(\alpha)}(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n^2-n\alpha} \varphi_{1,n}(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} 2^{-n^2-n\alpha} = o(\{h(x)\}^\beta), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, для функции, определяемой равенством (4.3), при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ выполняется условие (4.1). Следовательно, $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$. А так как эта функция, очевидно, не финитна, то $\varphi \notin D_d(\mathbb{R}_+)$. Тем самым, доказано, что вложение $D_d(\mathbb{R}_+) \subset S_d(\mathbb{R}_+)$ строгое.

Введем в пространстве $S_d(\mathbb{R}_+)$ класс сходящихся последовательностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset S_d(\mathbb{R}_+)$ назовем *сходящейся в $S_d(\mathbb{R}_+)$ к функции $\varphi_0 \in S_d(\mathbb{R}_+)$* (это будет записываться так: $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$), если для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ последовательность $(h(x))^{-\beta} \varphi_n^{(\alpha)}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ сходится к функции $(h(x))^{-\beta} \varphi_0^{(\alpha)}(x)$ равномерно на $\mathbb{R}_+$.

Из этого определения следует, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$, то $h^{-\beta} \varphi_n^{(\alpha)} \rightarrow h^{-\beta} \varphi_0^{(\alpha)}$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$.

Линейное пространство $S_d(\mathbb{R}_+)$ с введенным классом сходящихся последовательностей является линейным пространством сходимости.

Рассмотрим функционал $f: S_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$. Его значение на элементе $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ обозначим символом (f, φ) . Напомним два известных определения в применении к пространству $S_d(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Функционал $f: S_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейным*, если

$$(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

для любых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ и функций $\varphi_1, \varphi_2 \in S_d(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Линейный функционал $f: S_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывным*, если из $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi_0)$.

Теперь мы можем ввести двоичные обобщенные функции медленного роста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Линейный непрерывный функционал $f: S_d(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *двоичной обобщенной функцией медленного роста*.

Множество всех двоичных обобщенных функций медленного роста обозначим через $S'_d(\mathbb{R}_+)$.

Операции сложения обобщенных функций $f_1, f_2 \in S'_d(\mathbb{R}_+)$ и умножения их на действительные числа определим как обычно: $(c_1f_1 + c_2f_2, \varphi) = c_1(f_1, \varphi) + c_2(f_2, \varphi)$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, а $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$. В результате множество $S'_d(\mathbb{R}_+)$ превратится в действительное линейное пространство. Это пространство называется *сопряженным к пространству $S_d(\mathbb{R}_+)$* .

Напомним известную терминологию: функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ имеет полиномиальный рост в окрестности $+\infty$, если существует такое $\beta \in \mathbb{Z}_+$, что $f(x) = O(x^\beta)$ при $x \rightarrow +\infty$. Последнее условие можно записать также в виде: $f(x) = O((h(x))^{-\beta})$ при $x \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 4.1. Если локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $f(x)$ имеет полиномиальный рост в окрестности $+\infty$, то она порождает двоичную обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in S_d(\mathbb{R}_+). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что интеграл в правой части равенства (4.4) сходится, если $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, а локально интегрируемая функция $f(x)$ имеет полиномиальный рост в окрестности $+\infty$. Действительно, для функции $f(x)$ найдется такое $\beta \in \mathbb{Z}_+$, что $f(x) = O((h(x))^{-\beta})$, $x \rightarrow +\infty$. Поэтому существуют такие числа $C > 0$ и $A > 0$, что $|f(x)| < C((h(x))^{-\beta})$ при $x \geq A$. А так как функция $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ ограничена на сегменте $[0, A]$, то найдется такая постоянная $M > 0$, что $|\varphi(x)| \leq M$ для $x \in [0, A]$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)\varphi(x)| dx \leq M \int_{[0, A]} |f(x)| dx + C \int_A^{+\infty} (h(x))^{-\beta} |\varphi(x)| dx < +\infty,$$

так как функция $f(x)$ локально интегрируема, а $h^{-\beta} \varphi^{(\alpha)} \in L(\mathbb{R}_+)$.

Докажем непрерывность на пространстве $S_d(\mathbb{R}_+)$ функционала f , порожденного равенством (4.4). Действительно, пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$, а функция f имеет полиномиальный рост в окрестности $+\infty$. Подберем такие числа $\beta \in \mathbb{Z}_+$ и $C > 0$, $A > 0$, чтобы было справедливо неравенство $|f(x)| < C((h(x))^{-\beta})$ при $x \geq A$. Тогда

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_n) - (f, \varphi_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(x)(\varphi_n(x) - \varphi_0(x)) dx \right| \leq \int_0^A |f(x)| |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| dx \\ &+ C \int_A^{+\infty} ((h(x))^{-\beta}) |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| dx \equiv I_n^1 + I_n^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (4.5) подберем такое натуральное число n_1 , чтобы для $n > n_1$ было справедливо неравенство

$$|\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| < \frac{\varepsilon}{B}$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+$, где

$$B = \int_0^A |f(x)| dx + 1.$$

Тогда для $n > n_1$ имеем

$$I_n^1 \leq \frac{\varepsilon(B-1)}{B} < \varepsilon. \quad (4.6)$$

Так как $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$, то найдется такое натуральное n_2 , что для $n > n_2$ будет выполняться неравенство

$$K \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (1 + (h(x))^{-2})(h(x))^{-k} |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| < \frac{\varepsilon}{\pi}. \quad (4.7)$$

Тогда при $n > n_2$ для второго слагаемого из правой части (4.5), учитывая (4.7) и неравенство $(h(x))^{-1} \geq x/2$, имеем

$$I_n^2 \leq CK \int_A^{+\infty} \frac{dx}{1 + (h(x))^{-2}} \leq \frac{\varepsilon}{\pi} C \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x^2/4)} = C\varepsilon. \quad (4.8)$$

Следовательно, для $n \geq \max(n_1, n_2)$ из (4.5), (4.6) и (4.8) получим

$$|(f, \varphi_n) - (f, \varphi_0)| \leq (C+1)\varepsilon.$$

Тем самым, теорема 4.1 доказана.

Введем теперь в пространстве $S'_d(\mathbb{R}_+)$ класс сходящихся последовательностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset S'_d(\mathbb{R}_+)$ назовем *сходящейся* в $S'_d(\mathbb{R}_+)$ к элементу $f_0 \in S'_d(\mathbb{R}_+)$, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi) = (f_0, \varphi)$ для любой функции $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty} \subset S'_d(\mathbb{R}_+)$ назовем *фундаментальной* в $S'_d(\mathbb{R}_+)$, если для любой функции $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$.

Для фундаментальной последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty} \subset S'_d(\mathbb{R}_+)$ при любой функции $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}_{n=0}^{+\infty}$ сходится, т.е. существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$.

Следующая теорема устанавливает полноту пространства $S'_d(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Если последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в $S'_d(\mathbb{R}_+)$, то функционал f , определяемый равенством $(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$ для $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, линеен и непрерывен на $S_d(\mathbb{R}_+)$, т.е. $f \in S'_d(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 4.1. *Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{+\infty} \subset S'_d(\mathbb{R}_+)$ такова, что при любой функции $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ числовая последовательность $\{(f_n, \varphi)\}_{n=0}^{+\infty}$ сходится, а $\varphi_n \rightarrow 0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$. Тогда $(f_n, \varphi_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.*

Доказательство этой леммы и теоремы 4.2 проводится тем же методом, которым подобные утверждения доказаны для классического пространства обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^m)$ в [14].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $|(f_n, \varphi_n)| \geq c$, $n = 0, 1, \dots$, для некоторой постоянной $c > 0$. Поскольку $\varphi_n \rightarrow 0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ последовательность $(h(x))^{-\beta} \varphi_n^{(\alpha)}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ стремится к нулю равномерно на $\mathbb{R}_+$.

Снова переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что

$$|(h(x))^{-\beta} \varphi_n^{(\alpha)}(x)| \leq 4^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Введем обозначение $\psi_n = 2^n \varphi_n$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда

$$|(h(x))^{-\beta} \psi_n^{(\alpha)}(x)| \leq 2^{-n}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, $\psi_n \rightarrow 0$ в $S_d(\mathbb{R}_+)$ и любой ряд вида $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_{n_k}(x)$ сходится в $S_d(\mathbb{R}_+)$. При этом

$$|(f_n, \psi_n)| = 2^n |(f_n, \varphi_n)| \geq 2^n \quad c \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

После этого, как и при доказательстве леммы 3.1, построим такие системы функций $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset S'_d(\mathbb{R}_+)$ и $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset S_d(\mathbb{R}_+)$, что

$$|(f_{n_j}, \psi_{n_\nu})| \leq \frac{1}{2^{\nu-j}}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu - 1, \quad (4.9)$$

$$|(f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu})| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{n_\nu}, \psi_{n_j})| + \nu + 1 \quad (4.10)$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$, причем ряд

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \psi_{n_\nu}(x) \quad (4.11)$$

сходится в $S_d(\mathbb{R}_+)$ и поэтому $\psi \in S_d(\mathbb{R}_+)$. Из (4.11) имеем

$$(f_{n_\nu}, \psi) = (f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu}) + \sum_{j=1, j \neq \nu}^{+\infty} (f_{n_\nu}, \psi_{n_j}).$$

Отсюда на основании (4.9) и (4.10) получим

$$\begin{aligned} |(f_{n_\nu}, \psi)| &\geq |(f_{n_\nu}, \psi_{n_\nu})| - \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{n_\nu}, \psi_{n_j})| - \sum_{j=\nu+1}^{+\infty} |(f_{n_\nu}, \psi_{n_j})| \\ &\geq \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu, \end{aligned}$$

т.е. $(f_{n_\nu}, \psi) \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$. Но это противоречит предположению леммы о том, что для любой функции $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi)$.

Доказательство теоремы 4.2 проводится на основании леммы 4.1 точно так же, как теорема 3.2 доказана на основании леммы 3.1. Поэтому мы его опускаем.

Определим операцию двоичного дифференцирования обобщенных функций медленного роста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Если $f \in S'_d(\mathbb{R}_+)$ и $\alpha \in \mathbb{N}$, то положим

$$(f^{(\alpha)}, \varphi) = (f, \varphi^{(\alpha)}), \quad \varphi \in S_d(\mathbb{R}_+).$$

Как отмечалось выше, если $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, то $\varphi^{(\alpha)} \in S_d(\mathbb{R}_+)$ при любом натуральном α . Поэтому из определения 4.7 следует, что всякая обобщенная функция медленного роста бесконечно двоично-дифференцируема.

К сожалению, пространство $S_d(\mathbb{R}_+)$ не инвариантно относительно преобразования Уолша. Это вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для функций системы (2.22) при любом $\alpha > 0$ имеем

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) \approx x^{-\alpha-1}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tilde{\varphi}_{m,n}(x) = 2^n X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(x)$ (см. [23; лемма 1]), то функция $\tilde{\varphi}_{m,n} \in L(\mathbb{R}_+)$ финитна на $\mathbb{R}$. Докажем, что она бесконечно двоично-дифференцируема на $\mathbb{R}_+$.

Действительно, согласно определению двоичной производной порядка α

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\varphi}_{m,n}(t) \Lambda_k^\alpha(x \oplus t) dt. \quad (4.13)$$

Докажем, что этот предел действительно существует и конечен для любого натурального α . Применяя равенство $f * g = \tilde{f} \tilde{g}$, запишем (4.13) в эквивалентной форме

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_{m,n}(t) \tilde{\Lambda}_k^\alpha(t) \psi(x, t) dt. \quad (4.14)$$

Но так как $\tilde{\Lambda}_k^\alpha(t) = (h(t))^{-\alpha} X_{[0, 2^k)}(t)$, то конечный предел в правой части (4.14) действительно существует и равен интегралу $\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_{m,n}(t) (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt$. Поэтому равенство (4.14) примет вид

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_{m,n}(t) (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt.$$

Подставляя значение функции

$$\varphi_{m,n}(x) \equiv \psi(x, m2^{-n})X_{[0,2^n)}(x), \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

под знак интеграла в предыдущем равенстве, получим

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, m2^{-n})X_{[0,2^n)}(x) \psi(x, t) dt.$$

Как отмечалось выше после следствия 2.2, $(h(t))^{-\alpha}X_{[0,2^n)}(x) = \tilde{\Lambda}_n^\alpha(x)$ для $x > 0$. Поэтому из предыдущего равенства, используя предложение 2.2 и ρ^* -непрерывность ядер Λ_n^α , на основании теоремы В получим

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\Lambda}_n^\alpha(t) \psi(t, x \oplus m2^{-n}) dt = \Lambda_n^\alpha(x \oplus m2^{-n}).$$

Следовательно, применяя следствие 2.1, имеем

$$(\tilde{\varphi}_{m,n})^{(\alpha)}(x) \approx (x \oplus m2^{-n})^{-\alpha-1} \approx x^{-\alpha-1}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Предложение 4.2 доказано.

Из (4.12) следует, что $\tilde{\varphi}_{m,n} \notin S_d(\mathbb{R}_+)$, так как условие (4.1) для преобразования Уолша функций системы (2.22) не выполняется при $\beta \geq \alpha + 1$. Поэтому определить преобразование Уолша $\tilde{f}$ для двоичной обобщенной функции медленного роста f естественным образом с помощью равенства $(\tilde{f}, \varphi) = (f, \tilde{\varphi})$, $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$, не удастся, так как условие $\tilde{\varphi} \in S_d(\mathbb{R}_+)$ для некоторых функций $\varphi \in S_d(\mathbb{R}_+)$ не выполняется.

Список литературы

- [1] S. Soboleff, “Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaire hyperboliques normales”, *Матем. сб.*, **1(43)**:1 (1936), 39–72.
- [2] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1950; англ. пер. 3-го изд.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [3] L. Schwartz, “Generalisation de la notion de fonction, de derivation, de transformation de Fourier et applications mathematiques et physique”, *Ann. Univ. Grenoble*, **21** (1946), 57–74.
- [4] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. 1, Hermann, Paris, 1950.
- [5] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. 2, Hermann, Paris, 1951.
- [6] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции*, т. 1–3, Физматгиз, М., 1959, 1958; англ. пер.: I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, vol. 1–3, Academic Press, New York–London, 1964, 1968, 1967.
- [7] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, М., 1959; англ. пер.: I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Pergamon Press, London–Paris–Frankfurt, 1962.
- [8] П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier, Amsterdam, 1973.

- [9] A. H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis. An introduction to generalized functions, with applications*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1965.
- [10] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1976; англ. пер. 2-го изд.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
- [11] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [12] Y. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, New York, 1985.
- [13] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 2, Мир, М., 1985; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, vol. 2, Grad. Texts in Math., **85**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [14] Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, М., 1965.
- [15] Л. Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, т. 2, Высшая школа, М., 1970.
- [16] С. М. Никольский, *Курс математического анализа*, т. 2, Наука, М., 1973.
- [17] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, Элм, Баку, 1981.
- [18] N. J. Fine, "The generalized Walsh functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69**:1 (1950), 66–77.
- [19] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [20] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Hilger, Bristol, 1990.
- [21] C. W. Onneweer, "On the definition of dyadic differentiation", *Appl. Anal.*, **9**:4 (1979), 267–278.
- [22] C. W. Onneweer, "Fractional differentiation and Lipschitz spaces on local fields", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:1 (1980), 155–165.
- [23] Б. И. Голубов, "Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 3–14; англ. пер.: B. I. Golubov, "On an analogue of Hardy's inequality for the Walsh–Fourier", *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 425–435.
- [24] Б. И. Голубов, "О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной", *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60; англ. пер.: B. I. Golubov, "A modified strong dyadic integral and derivative", *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 507–529.
- [25] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Cubature formulas and modern analysis: An introduction*, Gordon and Breach, Montreux, 1992.

Б. И. Голубов (B. I. Golubov)
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
E-mail: golubov@mail.mipt.ru

Поступила в редакцию
18.04.2005 и 30.10.2006