Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Прибыль, Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 10, 119–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3781>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:11:05

УДК 517.984.5

М. А. Прибыль

Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости

Исследуется спектр оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости, заданными на торе. Эти уравнения получены линеаризацией нелинейных уравнений вязкой сжимаемой жидкости на произвольном решении, зависящем от переменной x . Установлено, что спектр оператора состоит из дискретного множества точек и лежит в секторе комплексной плоскости, симметричном относительно вещественной прямой и с вершиной на положительной полупрямой.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию спектра оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости.

Исследование спектра таких операторов необходимо для изучения поведения при больших временах решений соответствующих нестационарных уравнений, в частности, для изучения их устойчивости. В известных нам работах о поведении решений таких уравнений при больших временах [1]–[3] линеаризация проводилась на нулевой скорости и единичном удельном объеме. Такая линеаризация приводит к уравнениям с постоянными коэффициентами. Исследованием спектра оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами, занимался Нунез [4].

В настоящей работе исследуется спектр оператора, описываемого линеаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости на заданном решении $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \bar{v}(x))$, зависящем от x . Здесь $\bar{u}(x) = (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$ – скорость, $\bar{v}(x) > 0$ – удельный объем жидкости. Основная цель работы – доказать, что спектр оператора, состоящий из дискретного множества точек, лежит в симметричном относительно вещественной прямой секторе комплексной плоскости с вершиной на положительной полупрямой. Так как исследуемый оператор порождает систему с переменными коэффициентами, то решение этой проблемы связано с преодолением существенных трудностей. В частности, некоторые компоненты оператора непрерывно действуют в одном и том же соболевском пространстве, что приводит к тому, что мы не можем доказать компактность обратного оператора стандартными методами.¹ Несмотря на это,

¹Напомним, что оператор Лапласа, заданный в ограниченной области Ω , действует из $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, поэтому обратный к нему оператор компактен в $L_2(\Omega)$.

в настоящей работе с помощью теории псевдодифференциальных операторов удается доказать дискретность спектра исследуемого оператора и принадлежность спектра некоторому сектору комплексной плоскости.

Мы рассчитываем, что результаты этой работы можно будет использовать в ряде задач. В частности, метод стабилизации для параболических уравнений и системы Навье–Стокса, предложенный в [5], [6], обобщается на случай уравнений вязкой сжимаемой жидкости, если рассматриваемый оператор секториален и его спектр состоит из дискретного множества точек. Секториальность оператора означает, что спектр лежит в симметричном относительно вещественной прямой секторе комплексной плоскости и выполнена оценка на резольвенту. Доказательство оценки на резольвенту оператора приведено в работе [7].

Работа построена по следующему плану. Параграф 2 посвящен постановке задачи. В § 3 рассматривается оператор с постоянными коэффициентами и доказывается, что его спектр состоит из дискретного множества точек и лежит в симметричном относительно вещественной прямой секторе комплексной плоскости с вершиной на положительной полупрямой. В § 4 доказан главный результат работы, а именно, что оператор с переменными коэффициентами, описываемый линейаризованными стационарными уравнениями вязкой сжимаемой жидкости, имеет дискретный спектр, который также лежит в некотором симметричном относительно вещественной прямой секторе комплексной плоскости.

Автор выражает благодарность А. В. Фурсикову за постановку задачи и ряд полезных советов в работе над статьей.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарные уравнения вязкой сжимаемой жидкости:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{v(x)} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{v(x)} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial p(v)}{\partial x_1} = f_1(x), \quad (2.1)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{v(x)} \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{v(x)} \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial p(v)}{\partial x_2} = f_2(x), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} = 0, \quad (2.3)$$

где $x = (x_1, x_2)$ – лагранжевы координаты, $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ – скорость жидкости, $v(x) > 0$ – удельный объем жидкости, $\mu = \text{const} > 0$ – коэффициент вязкости, $p(v) \in C^1(0, \infty)$ – давление, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ – внешняя сила. Все функции в (2.1)–(2.3) удовлетворяют периодическим краевым условиям с периодом 2π , т.е. предполагается, что x пробегает тор $T = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$.

Покажем, что решение системы (2.1)–(2.3) существует. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, $v(x)$ – произвольные бесконечно дифференцируемые на T функции. Подставляя их в левую часть системы (2.1)–(2.3), получим некоторую правую часть. Такую вектор-функцию $(u_1(x), u_2(x), v(x))$ и будем считать решением системы уравнений (2.1)–(2.3).

Предположим для простоты, что $\mu = 1$. Пусть $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \bar{v}(x))$ – произвольное решение системы (2.1)–(2.3). Линеаризуя систему на этом решении, получаем

$$\frac{1}{\bar{v}(x)} \Delta u_j(x) + b_{j1}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + b_{j2}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} u(x) = 0, \quad (2.5)$$

где

$$b_{jj}(x) = -\left(\frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_j(x)}{\partial x_j} + p'(\bar{v}) \right), \quad b_{j3-j}(x) = -\frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_j(x)}{\partial x_{3-j}}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

В дальнейшем мы будем использовать функциональное пространство Соболева $H^k(T)$, которое определяется как пополнение пространства $C_0^\infty(T)$ функций $y(x)$ по норме

$$\|y\|_{H^k} = \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\xi|^2)^k |(Fy)(\xi)|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.6)$$

где $(Fy)(\xi)$ – коэффициенты Фурье. При натуральном k эта норма в силу равенства Парсеваля эквивалентна норме

$$\left(\int_T \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha y(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}, \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Введем пространство $H = L_2(T) \times L_2(T) \times H^1(T)$ с нормой

$$\|y\|_H^2 = \|y_1\|_{L_2}^2 + \|y_2\|_{L_2}^2 + \|y_3\|_{H^1}^2$$

для любого $y \in H$. Обозначим через $A(x, D) = (a_{nm}(x, D))_{n,m=1}^3$ оператор, который задается левой частью системы (2.4)–(2.5). Элементы $a_{nm}(x, D)$ определяются следующим образом:

$$a_{nn}(x, D) = \frac{1}{\bar{v}(x)} \Delta, \quad a_{n3}(x, D) = b_{nn}(x) \frac{\partial}{\partial x_n} + b_{n3-n}(x) \frac{\partial}{\partial x_{3-n}}, \quad (2.7)$$

$$n = 1, 2,$$

$$a_{n3-n}(x, D) = a_{33}(x, D) = 0, \quad a_{3n}(x, D) = \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad n = 1, 2. \quad (2.8)$$

Область определения $D(A(x, D))$ и область значений $R(A(x, D))$ оператора $A(x, D): H \rightarrow H$ определяются соотношениями:

$$D(A(x, D)) = H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T), \quad R(A(x, D)) \subset H.$$

Норма в пространстве $H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T)$ определяется аналогично норме в H , т.е. для любого $y \in H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T)$ норма

$$\|y\|_{H^2 \times H^2 \times H^1}^2 = \|y_1\|_{H^2}^2 + \|y_2\|_{H^2}^2 + \|y_3\|_{H^1}^2.$$

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = 0, \quad (2.9)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $U(x) = (u_1(x), u_2(x), v(x))$, E – единичный оператор.

Множество всех чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $R((A(x, D) - \lambda E)^{-1}) = H$ и определен обратный оператор

$$(A(x, D) - \lambda E)^{-1}: H \rightarrow H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T),$$

называется резольвентным множеством оператора $A(x, D)$. Это множество обозначим через $\rho(A(x, D))$. Множество $\sigma(A(x, D)) = \mathbb{C} \setminus \rho(A(x, D))$ называется спектром оператора $A(x, D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [8]). Замкнутый оператор $A(x, D): H \rightarrow H$ называется *секториальным*, если существуют $\varphi \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \in \mathbb{R}$ и $M > 0$ такие, что сектор

$$S_{a_0, \varphi} = \{\lambda : 0 \leq |\arg(\lambda - a_0)| \leq \varphi, \lambda \neq a_0\}$$

лежит в $\rho(A(x, D))$ и $\|(A(x, D) - \lambda E)^{-1}\| \leq M/|\lambda - a_0|$ для любого $\lambda \in S_{a_0, \varphi}$.

В настоящей работе мы ограничились лишь доказательством существования сектора $S_{a_0, \varphi}$, который лежит в $\rho(A(x, D))$, а также доказательством дискретности спектра оператора $A(x, D) = (a_{nm}(x, D))_{n,m=1}^3$, элементы которого определены в (2.7), (2.8). Доказательству оценки на резольвенту посвящена работа [7].

§ 3. Случай постоянных коэффициентов

Рассмотрим уравнение (2.9) для оператора с постоянными коэффициентами

$$(A(D) - \lambda E)U(x) = 0, \quad (3.1)$$

где элементы оператора $A(D)$ – суть элементы (2.7), (2.8) с коэффициентами, не зависящими от x : $a_{nm}(x, D) = a_{nm}(D)$.

Найдем собственные значения оператора $A(D)$. Собственные векторы оператора $A(D)$ будем искать в следующем виде:

$$(FU)(\xi)e^{i(x, \xi)}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.2)$$

где $(x, \xi) = (x_1\xi_1 + x_2\xi_2)$, $(FU)(\xi) = ((Fu_1)(\xi), (Fu_2)(\xi), (Fv)(\xi))$. Здесь

$$(Fw)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_T w(x)e^{-i(x, \xi)} dx$$

– коэффициенты Фурье 2π -периодической функции $w(x)$. Подставляя собственные векторы (3.2) в (3.1) и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(e^{i(x,\xi)}) = i\xi_n e^{i(x,\xi)},$$

получим систему уравнений

$$(A(\xi) - \lambda E)(FU)(\xi)e^{i(x,\xi)} = 0, \quad \xi \in \mathbb{Z}^2. \quad (3.3)$$

Элементы матрицы $A(\xi) = (a_{nm}(\xi))_{n,m=1}^3$ определяются равенствами:

$$a_{nn}(\xi) = -\frac{|\xi|^2}{v}, \quad a_{n3}(\xi) = ib_{n1}\xi_1 + ib_{n2}\xi_2, \quad n = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$a_{n3-n}(\xi) = a_{33}(\xi) = 0, \quad a_{3n}(\xi) = i\xi_n, \quad n = 1, 2, \quad (3.5)$$

где $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. Вычислим определитель матрицы $A(\xi) - \lambda E$:

$$\det(A(\xi) - \lambda E) = -\left(\frac{|\xi|^2}{v} + \lambda\right)\left(\lambda^2 + \lambda\frac{|\xi|^2}{v} + \xi_1(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2) + \xi_2(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2)\right).$$

Из равенства $\det(A(\xi) - \lambda E) = 0$ находим

$$\lambda_1(\xi) = -\frac{|\xi|^2}{v}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.6)$$

$$\lambda_{2,3}(\xi) = -\frac{|\xi|^2}{2v} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tilde{b}(\xi_1, \xi_2)}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^2, \quad (3.7)$$

где

$$\tilde{b}(\xi_1, \xi_2) = \frac{|\xi|^4}{v^2} - 4\xi_1(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2) - 4\xi_2(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2). \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. Верны следующие утверждения.

1. Вектор $(FU)(\xi)e^{i(x,\xi)}$, где

$$(FU)(\xi) = (\xi_2, -\xi_1, 0), \quad (3.9)$$

является собственным вектором оператора $A(D)$ с собственным значением (3.6).

2. Векторы $(FU)(\xi)e^{i(x,\xi)}$, где

$$(FU)(\xi) = \left(i(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2), i(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2), \left(-\frac{|\xi|^2}{v} - \lambda_{2,3}(\xi)\right)\right), \quad (3.10)$$

являются собственными векторами оператора $A(D)$ с собственными значениями, определяемыми формулой (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим числа $\lambda_1(\xi)$ из (3.6) в систему (3.3):

$$\begin{aligned} i(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2)v(\xi) &= 0, & i(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2)v(\xi) &= 0, \\ i\xi_1 u_1(\xi) + i\xi_2 u_2(\xi) + \frac{|\xi|^2}{v} v(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторы (3.9) являются решением этой системы, а значит,

$$(FU)(\xi)e^{i(x,\xi)} = (\xi_2, -\xi_1, 0)e^{i(x,\xi)}$$

является собственным вектором оператора $A(D)$, который соответствует собственному значению $\lambda_1(\xi)$. Подставим числа $\lambda_{2,3}(\xi)$ из (3.7) в систему (3.3):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{|\xi|^2}{\bar{v}} - \lambda_{2,3}(\xi)\right)u_1(\xi) + i(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2)v(\xi) &= 0, \\ \left(-\frac{|\xi|^2}{\bar{v}} - \lambda_{2,3}(\xi)\right)u_2(\xi) + i(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2)v(\xi) &= 0, \\ i\xi_1 u_1(\xi) + i\xi_2 u_2(\xi) - \lambda_{2,3}(\lambda)v(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторы (3.10) являются решением этой системы, а значит,

$$(FU)(\xi)e^{i(x,\xi)} = \left(i(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2), i(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2), \left(-\frac{|\xi|^2}{\bar{v}} - \lambda_{2,3}(\xi)\right)\right)e^{i(x,\xi)}$$

являются собственными векторами оператора $A(D)$, которые соответствуют собственным значениям $\lambda_{2,3}(\xi)$.

Рассмотрим множество

$$M = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \lambda(\xi) \text{ определены (3.6), (3.7) при } \xi \in \mathbb{Z}^2\}. \quad (3.11)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $\lambda \notin M$. Тогда оператор

$$(A(D) - \lambda E)^{-1} : H \rightarrow H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T)$$

определен и непрерывен, т.е. $\lambda \in \rho(A(D))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью элементарных алгебраических операций найдем матрицу, обратную к $A(\xi) - \lambda E$, где $A(\xi) = (a_{nm}(\xi))_{n,m=1}^3$ определяется элементами (3.4), (3.5). Тогда элементы матрицы $(A(\xi) - \lambda E)^{-1} = (a_{nm}^{-1}(\xi, \lambda))_{n,m=1}^3$ при $\lambda \notin M$ определяются соотношениями:

$$a_{nn}^{-1}(\xi, \lambda) = \frac{\xi_n(b_{nn}\xi_n + b_{n3-n}\xi_{3-n})}{(|\xi|^2/\bar{v} + \lambda)d(\xi, \lambda)} - \frac{1}{|\xi|^2/\bar{v} + \lambda}, \quad n = 1, 2, \quad (3.12)$$

$$a_{n3-n}^{-1}(\xi, \lambda) = \frac{\xi_{3-n}(b_{nn}\xi_n + b_{n3-n}\xi_{3-n})}{(|\xi|^2/\bar{v} + \lambda)d(\xi, \lambda)}, \quad n = 1, 2, \quad (3.13)$$

$$a_{33}^{-1}(\xi, \lambda) = \frac{|\xi|^2/\bar{v} + \lambda}{d(\xi, \lambda)},$$

$$a_{3n}^{-1}(\xi, \lambda) = -\frac{i\xi_n}{d(\xi, \lambda)}, \quad a_{n3}^{-1}(\xi, \lambda) = -\frac{i(b_{nn}\xi_n + b_{n3-n}\xi_{3-n})}{d(\xi, \lambda)}, \quad n = 1, 2, \quad (3.14)$$

где

$$d(\xi, \lambda) = \lambda^2 + \lambda \frac{|\xi|^2}{\bar{v}} + \xi_1(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2) + \xi_2(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2). \quad (3.15)$$

Из теории псевдодифференциальных операторов [9] известно, что для любой бесконечно гладкой комплекснозначной функции $G(x, \xi)$, для которой выполнено неравенство

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad \text{для любых } \alpha, \beta \text{ и } m \in \mathbb{R},$$

определен псевдодифференциальный оператор, причем этот оператор имеет вид

$$G(x, D)y(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} G(x, \xi)(Fy)(\xi)e^{i(x, \xi)},$$

где $G(x, \xi)$ называется символом оператора $G(x, D)$, $y(x)$ – это 2π -периодическая функция, $(Fy)(\xi)$ – коэффициенты Фурье функции $y(x)$. Используя этот факт, оценим норму оператора $(A(D) - \lambda E)^{-1}$.

Напомним, что $a_{nm}^{-1}(D, \lambda)$, $n, m = 1, 2, 3$, – это элементы оператор-матрицы $(A(D) - \lambda E)^{-1}$. Обозначим строки $(A(D) - \lambda E)^{-1}$ через $A_n^{-1}(D, \lambda)$, где

$$A_n^{-1}(D, \lambda) = (a_{n1}^{-1}(D, \lambda), a_{n2}^{-1}(D, \lambda), a_{n3}^{-1}(D, \lambda)).$$

Для любого $y \in H$

$$\begin{aligned} & \| (A(D) - \lambda E)^{-1} y \|_{H^2 \times H^2 \times H^1}^2 \\ &= \| A_1^{-1}(D, \lambda) y \|_{H^2}^2 + \| A_2^{-1}(D, \lambda) y \|_{H^2}^2 + \| A_3^{-1}(D, \lambda) y \|_{H^1}^2 \\ &= \left\| \sum_{m=1}^3 a_{1m}^{-1}(D, \lambda) y_m \right\|_{H^2}^2 + \left\| \sum_{m=1}^3 a_{2m}^{-1}(D, \lambda) y_m \right\|_{H^2}^2 + \left\| \sum_{m=1}^3 a_{3m}^{-1}(D, \lambda) y_m \right\|_{H^1}^2 \\ &\leq 3 \sum_{m=1}^3 (\| a_{1m}^{-1}(D, \lambda) y_m \|_{H^2}^2 + \| a_{2m}^{-1}(D, \lambda) y_m \|_{H^2}^2 + \| a_{3m}^{-1}(D, \lambda) y_m \|_{H^1}^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оценим каждую норму правой части неравенства (3.16). Заметим, что элементы $a_{nm}^{-1}(\xi, \lambda)$, определенные в (3.12)–(3.14), суть символы псевдодифференциальных операторов $a_{nm}^{-1}(D, \lambda)$ для любых $n, m = 1, 2, 3$. Поэтому в силу (3.12) существует такая константа $c_{nn}(\lambda)$, что

$$\begin{aligned} \| a_{nn}^{-1}(D, \lambda) y_n \|_{H^2}^2 &= \left\| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} a_{nn}^{-1}(\xi, \lambda) (Fy_n)(\xi) e^{i(x, \xi)} \right\|_{H^2}^2 \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\xi|^2)^2 |a_{nn}^{-1}(\xi, \lambda) (Fy_n)(\xi)|^2 \\ &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} ((1 + |\xi|^2)^2 |a_{nn}^{-1}(\xi, \lambda)|^2) |(Fy_n)(\xi)|^2 \\ &= \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left((1 + |\xi|^2)^2 \left| \frac{\xi_n(b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2) - d(\xi, \lambda)}{(|\xi|^2/\bar{v} + \lambda)d(\xi, \lambda)} \right|^2 \right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} |(Fy_n)(\xi)|^2 \\ &\leq c_{nn}(\lambda) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} |(Fy_n)(\xi)|^2 = c_{nn}(\lambda) \| y_n \|_{L_2}^2, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Аналогично, в силу (3.13) имеем

$$\begin{aligned} \| a_{n3-n}^{-1}(D, \lambda) y_n \|_{H^2}^2 &\leq \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left((1 + |\xi|^2)^2 \left| \frac{\xi_{3-n}(b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2)}{(|\xi|^2/\bar{v} + \lambda)d(\xi, \lambda)} \right|^2 \right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} |(Fy_{3-n})(\xi)|^2 \\ &\leq c_{n3-n}(\lambda) \| y_{3-n} \|_{L_2}^2, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Вследствие (3.14) получаем:

$$\begin{aligned} \|a_{n3}^{-1}(D, \lambda)y_n\|_{H^2}^2 &\leq \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left((1 + |\xi|^2) \left| \frac{i(b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2)}{d(\xi, \lambda)} \right|^2 \right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\xi|^2) |(Fy_3)(\xi)|^2 \\ &\leq c_{n3}(\lambda) \|y_3\|_{H^1}^2, \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \|a_{3n}^{-1}(D, \lambda)y_n\|_{H^1}^2 &\leq \left(\max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\xi|^2) \left| \frac{i\xi_n}{d(\xi, \lambda)} \right|^2 \right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} |(Fy_n)(\xi)|^2 \\ &\leq c_{3n}(\lambda) \|y_n\|_{L_2}^2, \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \|a_{33}^{-1}(D, \lambda)y_3\|_{H^1}^2 &\leq \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left(\left| \frac{|\xi|^2/\bar{v} + \lambda}{d(\xi, \lambda)} \right|^2 \right) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\xi|^2) |(Fy_3)(\xi)|^2 \\ &\leq c_{33}(\lambda) \|y_3\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из неравенств (3.17)–(3.21) следует оценка

$$\begin{aligned} &\|(A(D) - \lambda E)^{-1}y\|_{H^2 \times H^2 \times H^1}^2 \\ &\leq 3(c_{11}(\lambda) + c_{21}(\lambda) + c_{31}(\lambda)) \|y_1\|_{L_2}^2 + 3(c_{12}(\lambda) + c_{22}(\lambda) + c_{32}(\lambda)) \|y_2\|_{L_2}^2 \\ &\quad + 3(c_{13}(\lambda) + c_{23}(\lambda) + c_{33}(\lambda)) \|y_3\|_{H^1}^2 \\ &\leq 3 \max_{n,m} (c_{nm}(\lambda)) (\|y_1\|_{L_2}^2 + \|y_2\|_{L_2}^2 + \|y_3\|_{H^1}^2) \leq c(\lambda) \|y\|_H^2. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что оператор

$$(A(D) - \lambda E)^{-1} : H \rightarrow H^2(T) \times H^2(T) \times H^1(T)$$

непрерывен для $\lambda \notin M$, т.е. $\lambda \in \rho(A(D))$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Справедливо равенство $M = \sigma(A(D))$, где M – множество (3.11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.2 $\sigma(A(D)) \subset M$, а в силу леммы 3.1 $M \subset \sigma(A(D))$.

ЛЕММА 3.3. *Множество M , определенное в (3.11), содержится в множестве*

$$\begin{aligned} M' = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda = 0, \operatorname{Re} \lambda \in (-\infty, -C_2) \cup (0, C_0] \} \\ \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in [-C_2, 0], \operatorname{Im} \lambda \in [-C_1, C_1] \}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные значения, определенные в (3.6), принадлежат $(-\infty, 0]$.

Рассмотрим собственные значения, определенные в (3.7). Пусть выполнено неравенство $\tilde{b}(\xi_1, \xi_2) \leq 0$, т.е.

$$\frac{|\xi|^4}{\bar{v}^2} \leq 4\xi_1(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2) + 4\xi_2(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2).$$

Заметим, что это условие будет справедливо только при достаточно малых $|\xi|$. В этом случае существуют $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Im} \lambda_{2,3}(\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{b}(\xi_1, \xi_2)} \leq C_1 \quad (3.23)$$

и

$$-C_2 \leq \operatorname{Re} \lambda_{2,3}(\xi) = -\frac{|\xi|^2}{2v} \leq 0. \quad (3.24)$$

Следовательно, при $\tilde{b}(\xi_1, \xi_2) \leq 0$ получаем, что

$$\lambda_{2,3}(\xi) \in [-C_2, 0] \times i[-C_1, C_1]. \quad (3.25)$$

Если $\tilde{b}(\xi_1, \xi_2) > 0$, т.е. $|\xi|$ достаточно велико, то $\lambda_{2,3}(\xi) \in \mathbb{R}$ и существуют $C_0 > 0$, $C_3 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3}(\xi) &= -\frac{|\xi|^2}{2v} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{b}(\xi_1, \xi_2)} \\ &= -\frac{|\xi|^2}{2v} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\xi_1(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2) + 4\xi_2(b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2)}{|\xi|^4/v^2}} \right) \\ &\leq -\frac{|\xi|^2}{2v} \left(1 \pm \left(1 + \frac{C_3}{|\xi|^2} \right) \right) \leq C_0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\lambda_{2,3}(\xi) \in (-\infty, C_0]. \quad (3.26)$$

Объединяя множества $(-\infty, 0]$ и множества из (3.25) и (3.26), получаем утверждение леммы.

Из лемм 3.1, 3.2, 3.3 следует основное утверждение этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. *Спектр оператора $A(D)$ состоит из дискретного множества точек, которое лежит в симметричном относительно вещественной прямой секторе комплексной плоскости с вершиной на положительной полупрямой. Более того, $\sigma(A(D)) \subset M'$, где M' – множество (3.22).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3.1 и леммы 3.2 вытекает, что оператор $\sigma(A(D)) = M \subset M'$, а из леммы 3.1 и следствия 3.1 следует, что спектр оператора дискретен.

Пусть

$$S = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda - C_0)| < \pi - \arctg \frac{C_1}{C_0}, \lambda \neq C_0 \right\}, \quad (3.27)$$

где C_0 из (3.26), C_1 из (3.23). Очевидно, $M' \cap S = \emptyset$, т.е. $S \subset \rho(A(D))$.

§ 4. Случай переменных коэффициентов

В этом параграфе докажем результат, аналогичный теореме 3.1, в случае оператора $A(x, D)$ с переменными коэффициентами.

4.1. Формула композиции. Рассмотрим уравнение (2.9) для оператора $A(x, D) = (a_{nm}(x, D))_{n,m=1}^3$ с переменными коэффициентами, где элементы $a_{nm}(x, D)$ определяются равенствами (2.7), (2.8). У этого оператора рассмотрим символ $(a_{nm}(x, \xi))_{n,m=1}^3$, определенный равенствами (3.4), (3.5) с $\bar{v} = \bar{v}(x)$, $b_{nm} = b_{nm}(x)$. Подставляя в формулы (3.6)–(3.8) $\bar{v} = \bar{v}(x)$, $b_{nm} = b_{nm}(x)$, получим выражения для $\lambda_j(\xi) = \lambda_j(x, \xi)$, $j = 1, 2, 3$. Определим множество

$$M(x) = \{ \lambda(x, \xi) \text{ определены в (3.6), (3.7)} \\ \text{при } \bar{v} = \bar{v}(x), b_{nm} = b_{nm}(x), n, m = 1, 2 \}. \quad (4.1)$$

При $a_{nm}(\xi) = a_{nm}(x, \xi)$ множество M , определенное в (3.11), совпадает с множеством $M(x)$, а величины $C_0 = C_0(x)$, $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ определены в (3.26), (3.23), (3.24). Введем следующие константы:

$$N_0 = \max_{x \in T} C_0(x), \quad N_1 = \max_{x \in T} C_1(x), \quad N_2 = \max_{x \in T} C_2(x).$$

Тогда объединение $\bigcup_{x \in T} M(x)$ содержится в множестве

$$M_1 = (-\infty, -N_2) \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in [-N_2, 0], \operatorname{Im} \lambda \in [-N_1, N_1] \} \cup (0, N_0]. \quad (4.2)$$

Определим сектор

$$S_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda - N_0)| < \pi - \arctg \frac{N_1}{N_0}, \lambda \neq N_0 \right\}. \quad (4.3)$$

Очевидно, сектор S_1 не содержит множества M_1 . Пусть $\lambda \in S_1$. Из (3.12)–(3.14), в которых $\bar{v} = \bar{v}(x)$, $b_{nm} = b_{nm}(x)$, получаем выражения для элементов

$$(a_{nm}^{-1}(x, \xi, \lambda))_{n,m=1}^3 = (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1}.$$

Напомним, что решение уравнения (2.9) $U(x) = (u_1(x), u_2(x), v(x))$ определено на торе T . Для любого $h \in H$ решение уравнения

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = h(x) \quad (4.4)$$

будем искать в виде ряда, определенного следующим образом:

$$U(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \psi(\xi) (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} (E - Q(x, \xi, \lambda)) (Fh_1)(\xi) e^{i(x, \xi)}. \quad (4.5)$$

Функция $\psi(x)$ определена равенством

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| > \xi_0, \\ 0, & |\xi| \leq \xi_0, \end{cases}$$

где $\xi_0 > 1$ будет выбрано позже. Матрица $Q(x, \xi, \lambda)$ имеет вид

$$Q(x, \xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1(x, \xi, \lambda) \\ 0 & 0 & q_2(x, \xi, \lambda) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in S_1.$$

При этом элементы $q_n(x, \xi, \lambda)$ матрицы $Q(x, \xi, \lambda)$ возникают при действии оператора $A(x, D) - \lambda E$ на матрицу $(A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} e^{i(x, \xi)}$:

$$q_n(x, \xi, \lambda) = a_{n3}(x, D) a_{33}^{-1}(x, \xi, \lambda) + \frac{2i}{\bar{v}(x)} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (a_{n3}^{-1}(x, \xi, \lambda)), \quad (4.6)$$

$$n = 1, 2, \quad \lambda \in S_1,$$

где $a_{nm}(x, D)$ – элементы оператора $A(x, D)$, определенные равенствами (2.7) и (2.8). Вид (4.5) решения U уравнения (4.4) подсказан формулой коммутации псевдодифференциальных операторов и выбран так, чтобы получить оператор, обратный к $A(x, D) - \lambda E$ с точностью до вполне непрерывных операторов. Подставляя (4.5) в (4.4) и используя формулу коммутации псевдодифференциальных операторов [9], получим:

$$\begin{aligned} & (A(x, D) - \lambda E) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \psi(\xi) (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} (E - Q(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} (Fh_1)(\xi) \\ &= (A(x, D) - \lambda E) \sum_{|\xi| > \xi_0} (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} e^{i(x, \xi)} (Fh_1)(\xi) \\ &\quad - (A(x, D) - \lambda E) \sum_{|\xi| > \xi_0} (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} Q(x, \xi, \lambda) e^{i(x, \xi)} (Fh_1)(\xi) \\ &= \sum_{|\xi| > \xi_0} (E + K_1(x, \xi, \lambda) + Q(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} (Fh_1)(\xi) \\ &\quad - \sum_{|\xi| > \xi_0} (K_2(x, \xi, \lambda) + Q(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} (Fh_1)(\xi) \\ &= \sum_{|\xi| > \xi_0} (E + K(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} (Fh_1)(\xi) = h(x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Элементы матрицы $K(x, \xi, \lambda) = (k_{nm}(x, \xi, \lambda))_{n,m}^\infty$ состоят из суммы элементов матриц $K_1(x, \xi, \lambda)$ и $-K_2(x, \xi, \lambda)$, а именно при $\lambda \in S_1$:

$$k_{nm}(x, \xi, \lambda) = \left(a_{nn}(x, D) + \frac{2i}{\bar{v}(x)} (\xi_1 a_{31}(x, D) + \xi_2 a_{32}(x, D)) \right) a_{nm}^{-1}(x, \xi, \lambda) + a_{n3}(x, D) a_{3n}^{-1}(x, \xi, \lambda), \quad n, m = 1, 2, \quad (4.8)$$

$$k_{3n}(x, \xi, \lambda) = a_{3n}(x, D) a_{nn}^{-1}(x, \xi, \lambda) + a_{33-n}(x, D) a_{3-nn}^{-1}(x, \xi, \lambda), \quad n = 1, 2, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} k_{n3}(x, \xi, \lambda) &= a_{nn}(x, D) a_{n3}^{-1}(x, \xi, \lambda) - \left(a_{nn}(x, D) + \frac{2i}{\bar{v}(x)} (\xi_1 a_{31}(x, D) \right. \\ &\quad \left. + \xi_2 a_{32}(x, D)) \right) (a_{n1}^{-1}(x, \xi, \lambda) q_1(x, \xi, \lambda) + a_{n2}^{-1}(x, \xi, \lambda) q_2(x, \xi, \lambda)) \\ &\quad + a_{n3}(x, D) (a_{31}^{-1}(x, \xi, \lambda) q_1(x, \xi, \lambda) + a_{32}^{-1}(x, \xi, \lambda) q_2(x, \xi, \lambda)), \\ &\quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 k_{33}(x, \xi, \lambda) = & a_{31}(x, D)a_{13}^{-1}(x, \xi, \lambda) + a_{32}(x, D)a_{23}^{-1}(x, \xi, \lambda) \\
 & - (i\xi_1 + a_{31}(x, D))(a_{11}^{-1}(x, \xi, \lambda)q_1(x, \xi, \lambda) + a_{12}^{-1}(x, \xi, \lambda)q_2(x, \xi, \lambda)) \\
 & - (i\xi_2 + a_{32}(x, D))(a_{21}^{-1}(x, \xi, \lambda)q_1(x, \xi, \lambda) + a_{22}^{-1}(x, \xi, \lambda)q_2(x, \xi, \lambda)) \\
 & - \lambda(a_{31}^{-1}(x, \xi, \lambda)q_1(x, \xi, \lambda) + a_{32}^{-1}(x, \xi, \lambda)q_2(x, \xi, \lambda)),
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $a_{nm}^{-1}(x, \xi, \lambda)$ – элементы матрицы $(A(x, \xi) - \lambda E)^{-1}$, которые определены в (3.12)–(3.14) при $\bar{v} = \bar{v}(x)$, $b_{nm} = b_{nm}(x)$, $n, m = 1, 2$, $a_{nm}(x, D)$ – элементы оператора $A(x, D)$, определенные в (2.7), (2.8), $q_n(x, \xi, \lambda)$ определены в (4.6).

4.2. Свойства оператора $K(x, D, \lambda)$. Докажем некоторые вспомогательные утверждения. Напомним, что S_1 – сектор (4.3), M_1 – множество (4.2). Обозначим через $r(\lambda, M_1)$ – расстояние от $\lambda \in S_1$ до множества M_1 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\lambda \in S_1$. Существуют числа $\Lambda, C > 0$ такие, что для любого $|\lambda| \geq \Lambda$ выполнено $r(\lambda, M_1) \geq |\lambda|/C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.3) следует, что N_0 – вершина сектора S_1 . Если $|\lambda|/2 > N_0$, то имеем

$$|\lambda - N_0| \geq ||\lambda| - |N_0|| \geq |\lambda| - \frac{|\lambda|}{2} = \frac{|\lambda|}{2}. \tag{4.12}$$

Пусть $M'_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < N_0, \operatorname{Im} \lambda = 0\}$. Покажем, что существует константа $C_1 > 0$ такая, что при $|\lambda|/2 > N_0$, $\lambda \in S_1$, выполнено

$$r(\lambda, M'_1) \geq \frac{|\lambda|}{c_1}. \tag{4.13}$$

Рассмотрим два случая. Если ближайшая точка от λ до множества M'_1 есть точка N_0 , то в силу (4.12) расстояние $r(\lambda, M'_1) = |\lambda - N_0| \geq |\lambda|/2$.

Пусть $\varphi = \arctg(N_1/N_0)$ – угол из определения сектора S_1 . Если ближайшая точка от λ до множества M'_1 не совпадает с N_0 , то

$$r(\lambda, M'_1) = \operatorname{Im}|\lambda - N_0| \geq |\lambda - N_0| \sin \varphi \geq \frac{|\lambda|}{2} \sin \varphi$$

и мы получаем (4.13).

Рассмотрим $r(\lambda, M_1)$ при $|\lambda|/2 > N_0$. Если ближайшая точка от λ до M_1 лежит в M'_1 , то $r(\lambda, M_1) = r(\lambda, M'_1) \geq |\lambda|/c_1$. Пусть ближайшая точка от $\lambda \in S_1$ до M_1 лежит в множестве

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in [-N_2, 0], \operatorname{Im} \lambda \in [-N_1, N_1]\}.$$

При $|\lambda| > 2c_1N_1$ имеем

$$N_1 < \frac{|\lambda|}{2c_1} \leq \frac{1}{2} r(\lambda, M'_1).$$

Тогда

$$r(\lambda, M_1) \geq r(\lambda, M'_1) - N_1 \geq \frac{1}{2} r(\lambda, M'_1) \geq \frac{|\lambda|}{2c_1}.$$

Положим $C = 2c_1$ и $\Lambda = \max(2N_0, 2c_1N_1)$, и тогда утверждение леммы 4.1 доказано.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\lambda \in S_1$. Производные:

- 1) $D_x^\alpha k_{nm}(x, \xi, \lambda)$, $n = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$, $|\alpha| \leq 4$,
- 2) $|\xi| D_x^\alpha k_{3m}(x, \xi, \lambda)$, $m = 1, 2$, $|\alpha| \leq 4$,
- 3) $D_x^\alpha k_{33}(x, \xi, \lambda)$, $|\alpha| \leq 6$,

стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент из п. 2) формулировки леммы. Имеем

$$k_{3m}(x, \xi, \lambda) = a_{3m}(x, D) a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda) + a_{33-m}(x, D) a_{3-mm}^{-1}(x, \xi, \lambda), \quad m = 1, 2,$$

где операторы $a_{3m}(x, D)$ определены в (2.8). Функцию $|\xi| a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)$ оцениваем максимумом по $x \in T$, а затем считаем порядок по ξ . Оказывается, что порядок равен $1/|\xi|$. Производную по x_m , а именно

$$|\xi| \frac{\partial}{\partial x_m} a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda),$$

также сначала оцениваем максимумом по $x \in T$, а затем показываем, что она имеет порядок $1/|\xi|$. Элемент $|\xi| a_{3-mm}(x, \xi, \lambda)$ не превосходит функции $|\xi| a_{mm}(x, \xi, \lambda)$, поэтому он и его первая производная по x_{3-m} , т.е.

$$|\xi| \frac{\partial}{\partial x_m} a_{3-mm}^{-1}(x, \xi, \lambda),$$

имеют порядок $1/|\xi|$. Получили, что элемент $k_{3m}(x, \xi, \lambda)$ имеет порядок $1/|\xi|$. Далее по индукции доказываем, что производная по переменной x порядка α , $|\alpha| \leq 4$, т.е. $|\xi| D_x^\alpha k_{3m}(x, \xi, \lambda)$, имеет порядок $1/|\xi|$ и поэтому стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in T$.

Аналогично доказывается, что элементы $D_x^\alpha k_{nm}(x, \xi, \lambda)$, $n = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$, $|\alpha| \leq 4$, и $D_x^\alpha k_{33}(x, \xi, \lambda)$, $|\alpha| \leq 6$, стремятся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in T$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\lambda \in S_1$. Производные:

- 1) $D_x^\alpha k_{nm}(x, \xi, \lambda)$, $n = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$, $|\alpha| \leq 4$,
- 2) $|\xi| D_x^\alpha k_{3m}(x, \xi, \lambda)$, $m = 1, 2$, $|\alpha| \leq 4$,
- 3) $D_x^\alpha k_{33}(x, \xi, \lambda)$, $|\alpha| \leq 6$,

стремятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in S_1$, равномерно по $\xi \in \mathbb{Z}^2$ и $x \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементы $|\xi| D_x^\alpha k_{3m}(x, \xi, \lambda)$, $m = 1, 2$, $|\alpha| \leq 4$. Оценим модуль элементов $|\xi| a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)$, $m = 1, 2$. Существуют константы

$m_1, m_2 > 0$ такие, что

$$\max_{x \in T} \frac{|\xi_n(b_{mm}(x)\xi_m + b_{m3-m}(x)\xi_{3-m})| |\xi|}{||\xi|^2/\bar{v}(x) + \lambda| |d(x, \xi, \lambda)|} \leq \frac{m_1 |\xi|^3}{||\xi|^2 + \lambda| |d(\xi, \lambda)|},$$

$$\max_{x \in T} \frac{|\xi|}{||\xi|^2/\bar{v}(x) + \lambda|} \leq \frac{m_2 |\xi|}{||\xi|^2 + \lambda|}.$$

Так как $d(\xi, \lambda) = (\lambda - \lambda_2(\xi))(\lambda - \lambda_3(\xi))$ ($\lambda_i(\xi)$ определены в (3.7)), то $\lambda_i(\xi) \in M(x) \subset M_1$, $i = 2, 3$, где $M(x)$ определено в (4.1), M_1 в (4.2). Тогда $|\lambda - \lambda_i(\xi)| \geq r(\lambda, M_1) \geq |\lambda|/C$ по лемме 4.1 и имеем оценку:

$$\begin{aligned} ||\xi| a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)| &\leq \max_{x \in T} \frac{|\xi_n(b_{mm}(x)\xi_m + b_{m3-m}(x)\xi_{3-m})| |\xi|}{||\xi|^2/\bar{v}(x) + \lambda| |d(x, \xi, \lambda)|} + \max_{x \in T} \frac{|\xi|}{||\xi|^2/\bar{v}(x) + \lambda|} \\ &\leq \frac{m_1 |\xi|^3}{||\xi|^2 + \lambda| |\lambda - \lambda_1(\xi)| |\lambda - \lambda_2(\xi)|} + \frac{|\xi|}{m_2 ||\xi|^2 + \lambda|} \\ &\leq \frac{m_1 C}{|\lambda|^2} \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left| \frac{|\xi|^3}{||\xi|^2 + \lambda|} \right| + m_2 \max_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left| \frac{|\xi|}{||\xi|^2 + \lambda|} \right|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Пусть

$$g_1(|\xi|, \lambda) = \frac{|\xi|^3}{||\xi|^2 + \lambda|}, \quad g_2(|\xi|, \lambda) = \frac{|\xi|}{||\xi|^2 + \lambda|}.$$

Находим производную по $|\xi|$ от функции $g_1(|\xi|, \lambda)$ и приравняем к нулю. Максимум функции достигается в точке $|\xi|^2 = -3\lambda$. Аналогично находим, что максимум функции $g_2(|\xi|, \lambda)$ достигается в точке $|\xi|^2 = -\lambda$. Продолжая неравенство (4.14), получим, что существуют константы $m_3, m_4 > 0$:

$$||\xi| a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{m_3}{|\lambda|^{3/2}} + \frac{m_4}{|\lambda|^{1/2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Докажем стремление к нулю производной

$$|\xi| \frac{\partial}{\partial x_m} a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda), \quad m = 1, 2,$$

при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in \mathbb{Z}^2$ и $x \in T$. Оценивая модуль элементов и считая производную по $|\xi|$, получаем, что существует константа $m_5 > 0$ такая, что

$$\left| |\xi| \frac{\partial}{\partial x_m} a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda) \right| \leq \frac{m_5}{|\lambda|^{1/2}},$$

т.е. стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Заметим, что порядки по λ самого элемента $|\xi| |a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)|$ и его производной по x_m совпадают. Поэтому по индукции следует, что порядок элемента $|\xi| |D^\alpha a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)|$, $|\alpha| \leq 4$, будет не больше, чем $|\lambda|^{-1/2}$.

Функция $|\xi| |a_{3-mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)|$ не превосходит $|\xi| |a_{mm}^{-1}(x, \xi, \lambda)|$, поэтому все ее производные также стремятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in \mathbb{Z}^2$ и $x \in T$. Мы доказали, что $|\xi| |D_x^\alpha k_{3m}(x, \xi, \lambda)|$, $|\alpha| \leq 4$, стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in \mathbb{Z}^2$ и $x \in T$.

Аналогично доказывается стремление к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$ элементов из пп. 1) и 3) равномерно по $\xi \in \mathbb{Z}^2$ и $x \in T$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\lambda \in S_1$. Существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 > \Lambda$ (Λ определено в лемме 4.1), такое, что для любого $|\lambda| \geq \lambda_0$ выполнена оценка $\|K(x, D, \lambda)\| < 1$, где оператор $K(x, D, \lambda)$ определяется следующим образом:

$$K(x, D, \lambda)y(x) = \sum_{|\xi| > \xi_0} K(x, \xi, \lambda)(Fy)(\xi)e^{i(x, \xi)} \quad (4.15)$$

с символом $K(x, \xi, \lambda) = (k_{nm}(x, \xi, \lambda))_{n,m=1}^3$, заданным в (4.8)–(4.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K_n(x, D, \lambda)$, $n = 1, 2, 3$, – строки $K(x, D, \lambda)$, а $k_{nm}(x, D, \lambda)$ – элементы оператора $K(x, D, \lambda)$, $n, m = 1, 2, 3$. Напомним определение нормы в пространстве H :

$$\begin{aligned} \|K(\cdot, D, \lambda)y\|_H^2 &= \|K_1(\cdot, D, \lambda)y\|_{L_2}^2 + \|K_2(\cdot, D, \lambda)y\|_{L_2}^2 + \|K_3(\cdot, D, \lambda)y\|_{H^1}^2, \\ \|K_n(\cdot, D, \lambda)y\|_{L_2}^2 &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} |F(K_n(x, D, \lambda)y(x))(\eta)|^2, \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $F(K_n(x, D, \lambda)y(x))(\eta)$ – коэффициенты Фурье $K_n(x, D, \lambda)y(x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} F(K_n(x, D, \lambda)y(x))(\eta) &= F\left(\sum_{m=1}^3 k_{nm}(x, D, \lambda)y_m(x)\right)(\eta) \\ &= (2\pi)^{-2} \int_T e^{-i(x, \eta)} \sum_{m=1}^3 k_{nm}(x, D, \lambda)y_m(x) dx \\ &= (2\pi)^{-2} \int_T e^{-i(x, \eta)} \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} k_{nm}(x, \xi, \lambda)(Fy_m)(\xi)e^{i(x, \xi)} dx \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)(Fy_m)(\xi), \quad n = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda) = (2\pi)^{-2} \int_T e^{-i(x, \eta - \xi)} k_{nm}(x, \xi, \lambda) dx. \quad (4.18)$$

Проинтегрировав правую часть (4.18) по частям и учитывая, что элементы $k_{nm}(x, \xi, \lambda)$ периодические по x , получаем

$$\begin{aligned} (1 + |\eta - \xi|^2)b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda) &= (2\pi)^{-2} \int_T k_{nm}(x, \xi, \lambda)(\Delta - 1)^2 e^{-i(x, \eta - \xi)} dx \\ &= (2\pi)^{-2} \int_T e^{-i(x, \eta - \xi)} (\Delta - 1)^2 k_{nm}(x, \xi, \lambda) dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Заметим, что существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\xi = c_1. \quad (4.20)$$

Последний интеграл вычисляется с помощью перехода к полярной системе координат $\eta_1 - \xi_1 = \rho \cos \theta$, $\eta_2 - \xi_2 = \rho \sin \theta$ и с учетом того, что якобиан равен ρ . В силу леммы 4.3 существует $\lambda_0^1 \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $|\lambda| \geq \lambda_0^1$

$$\max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |(\Delta - 1)^2 k_{nm}(x, \xi, \lambda)| < \frac{1}{3c_1}, \quad (4.21)$$

где c_1 определено в (4.20). Поэтому вследствие (4.19)

$$|b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \leq \frac{1}{3c_1} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2}, \quad n = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Подставляя (4.17) в (4.16), учитывая (4.22), (4.21) и используя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\begin{aligned} \|K_n(\cdot, D, \lambda)y\|_{L_2}^2 &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left| \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda) (Fy_m)(\xi) \right|^2 \\ &\leq 3 \sum_{m=1}^3 \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(Fy_m)(\xi)|^2 \right) \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \right) \\ &\leq 3 \sum_{m=1}^3 \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(Fy_m)(\xi)|^2 \right) \left(\left(\sum_{\substack{|\xi| > \xi_0 \\ \xi_1 > \eta_1, \xi_2 > \eta_2}} + \sum_{\substack{|\xi| > \xi_0 \\ \xi_1 > \eta_1, \xi_2 < \eta_2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{|\xi| > \xi_0 \\ \xi_1 < \eta_1, \xi_2 > \eta_2}} + \sum_{\substack{|\xi| > \xi_0 \\ \xi_1 < \eta_1, \xi_2 < \eta_2}} \right) \frac{1}{3c_1} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} \right) \\ &\leq 3 \sum_{m=1}^3 \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(Fy_m)(\xi)|^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{3c_1} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\xi \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} |(Fy_m)(\xi)|^2 \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} |b_{nm}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \\ &\leq \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} |(Fy_m)(\xi)|^2 \int_{\eta \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{3c_1} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\eta \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} |(Fy_m)(\xi)|^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 \|y_m\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{3} \|y\|_H^2, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Оценим норму оператора $K_3(\cdot, D, \lambda)$:

$$\|K_3(\cdot, D, \lambda)y\|_{H^1}^2 = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) |F(K_3(x, D, \lambda)y(x))(\eta)|^2.$$

Для коэффициентов Фурье $F(K_3(x, D, \lambda)y(x))(\eta)$ имеем формулу

$$F(K_3(x, D, \lambda)y(x))(\eta) = \sum_{m=1}^3 \sum_{|\xi| > \xi_0} b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda) (Fy_m)(\xi), \quad (4.24)$$

где $b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda)$ заданы в (4.18). Существуют константы $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ такие, что

$$\max_{\eta \in \mathbb{R}^2} \int_{|\xi| > \xi_0} \frac{\sqrt{1 + |\eta|^2}}{|\xi|} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\xi < M_1, \quad (4.25)$$

$$\max_{|\xi| > \xi_0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sqrt{1 + |\eta|^2}}{|\xi|} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\eta < M_2. \quad (4.26)$$

Тогда в силу леммы 4.3 существует $\lambda_0^2 \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $|\lambda| \geq \lambda_0^2$ и $m = 1, 2$

$$\max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |\xi| |(\Delta - 1)^2 k_{3m}(x, \xi, \lambda)| < \frac{1}{\sqrt{3M_1 M_2}}, \quad (4.27)$$

поэтому вследствие (4.19)

$$|b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{3M_1 M_2} |\xi|} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2}, \quad m = 1, 2, \quad |\xi| > \xi_0, \quad (4.28)$$

где M_1 и M_2 определены в (4.25), (4.26). Учитывая (4.28), (4.24), (4.27) и используя неравенство Гёльдера, получаем следующую оценку при $m = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \|k_{3m}(\cdot, D, \lambda) y_m\|_{H^1}^2 &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) |F(k_{3m}(x, D, \lambda) y_m(x))(\eta)|^2 \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) \left| \sum_{|\xi| > \xi_0} b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda) (F y_m)(\xi) \right|^2 \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left| \sum_{|\xi| > \xi_0} \sqrt{1 + |\eta|^2} b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda) (F y_m)(\xi) \right|^2 \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} \sqrt{1 + |\eta|^2} |b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(F y_m)(\xi)|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} \sqrt{1 + |\eta|^2} |b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \right) \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} \sqrt{1 + |\eta|^2} |b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(F y_m)(\xi)|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\max_{\eta \in \mathbb{R}^2} \int_{|\xi| > \xi_0} \frac{\sqrt{1 + |\eta|^2}}{\sqrt{3M_1 M_2} |\xi|} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\xi \right) \\ &\leq \frac{M_1}{\sqrt{3M_1 M_2}} \sum_{|\xi| > \xi_0} |(F y_m)(\xi)|^2 \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (\sqrt{1 + |\eta|^2} |b_{3m}(\eta - \xi, \xi, \lambda)|) \\ &\leq \frac{1}{3M_2} \sum_{|\xi| > \xi_0} |(F y_m)(\xi)|^2 \max_{|\xi| > \xi_0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sqrt{1 + |\eta|^2}}{|\xi|} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-2} d\eta \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{|\xi| > \xi_0} |(F y_3)(\xi)|^2 \leq \frac{1}{3} \|y_m\|_{L_2}^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Заметим, что существуют $c_2, c_3 > 0$ такие, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-3} d\xi = c_2, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |\eta|^2)}{(1 + |\eta - \xi|^2)^3} d\eta \leq c_3(1 + |\xi|^2). \quad (4.30)$$

В силу леммы 4.3 существует $\lambda_0^3 \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $|\lambda| \geq \lambda_0^3$

$$\max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |(\Delta - 1)^3 k_{33}(x, \xi, \lambda)| < \frac{1}{3c_2 c_3}, \quad (4.31)$$

поэтому

$$|b_{33}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \leq \frac{1}{3c_2 c_3} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-3}. \quad (4.32)$$

Учитывая (4.32), (4.31) и используя неравенство Гёльдера, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|k_{33}(\cdot, D, \lambda)y_3\|_{H^1}^2 &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) |F(k_{33}(x, D, \lambda)y_3(x))(\eta)|^2 \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{33}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(Fy_3)(\xi)|^2 \right) \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{33}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \right) \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) \left(\sum_{|\xi| > \xi_0} |b_{33}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| |(Fy_3)(\xi)|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{3c_2 c_3} (1 + |\eta - \xi|^2)^{-3} d\xi \right) \\ &\leq \frac{1}{3c_3} \sum_{|\xi| > \xi_0} |(Fy_3)(\xi)|^2 \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} (1 + |\eta|^2) |b_{33}(\eta - \xi, \xi, \lambda)| \\ &\leq \frac{1}{3c_3} \sum_{|\xi| > \xi_0} |(Fy_3)(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\eta|^2) (1 + |\eta - \xi|^2)^{-3} d\eta \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{|\xi| > \xi_0} |(Fy_3)(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2) \leq \frac{1}{3} \|y_3\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Положим

$$\lambda_0 = \max \left\{ \lambda_0^1, \lambda_0^2, \lambda_0^3, \sqrt{N_1^2 + N_2^2}, N_0 \right\},$$

где N_0, N_1, N_2 определены в (4.2). Учитывая оценки (4.23), (4.29), (4.33), получим неравенство $\|K(\cdot, D, \lambda)y\|_H \leq \|y\|_H$ при $|\lambda| \geq \lambda_0$.

Заметим, что число λ_0 , выбранное в лемме 4.4, не зависит от ξ_0 в операторе $K(x, D, \lambda)$, определенного в (4.15).

ЛЕММА 4.5. *Для любого $\lambda \in S_1$ оператор $K(x, D, \lambda): H \rightarrow H$, определенный в (4.15), компактен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P: H \rightarrow H$ – проектор на подпространство, порожденное векторами $e^{i(x, \xi)}$ с $\xi_0 \leq |\xi| \leq \xi^*$. Рассмотрим единичный шар B . Тогда образ B при отображении $PK(x, D, \lambda)$, т.е. множество

$$PK(x, D, \lambda)y(x) = \sum_{\xi_0 \leq |\xi| \leq \xi^*} K(x, \xi, \lambda) e^{i(x, \xi)} (Fy)(\xi), \quad y \in B,$$

лежит в конечномерном пространстве и является ограниченным множеством. Значит, это множество предкомпактно.

Для каждого $\lambda \in S_1$ выберем ε -сеть в образе единичного шара B при отображении оператором $PK(x, D, \lambda)$. Тогда для любого $y \in B$ существует элемент ε -сети y^j такой, что

$$\|PK(\cdot, D, \lambda)y - y^j\|_H \leq \varepsilon(\lambda).$$

Покажем, что для каждого $\lambda \in S_1$ выбранная ε -сеть является 2ε -сетью для образа единичного шара B при отображении $K(x, D, \lambda)$, т.е.

$$\|K(\cdot, D, \lambda)y - y^j\|_H \leq 2\varepsilon(\lambda).$$

Рассмотрим норму разности

$$\|K(\cdot, D, \lambda)y - PK(\cdot, D, \lambda)y\|_H = \left\| \sum_{|\xi| > \xi^*} K(\cdot, \xi, \lambda) e^{i(\cdot, \xi)} (Fy)(\xi) \right\|_H.$$

Мы хотим доказать, что эта норма не превосходит $\varepsilon(\lambda)$. Так как по лемме 4.2 элементы матрицы $K(x, \xi, \lambda)$ стремятся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ равномерно по x , то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\lambda \in S_1$ существует $\xi^* \in \mathbb{R}$ такое, что для $|\xi| > \xi^*$ выполнены оценки, аналогичные (4.21), (4.27), (4.31), т.е.

$$\max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |D_x^3 k_{nm}(x, \xi, \lambda)| + \max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |k_{nm}(x, \xi, \lambda)| < \frac{2\varepsilon(\lambda)}{3},$$

$$n = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3,$$

$$\max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |D_x^4 k_{3m}(x, \xi, \lambda)| + \max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |k_{3m}(x, \xi, \lambda)| < \frac{\varepsilon(\lambda)}{\sqrt{3M_1M_2}},$$

$$m = 1, 2,$$

$$\max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |D_x^5 k_{33}(x, \xi, \lambda)| + \max_{x \in T, \xi: |\xi| > \xi_0} |k_{33}(x, \xi, \lambda)| < \frac{4\sqrt{3}\varepsilon(\lambda)}{\sqrt{7}}.$$

Далее, по схеме, аналогичной схеме из леммы 4.4, показываем, что норма разности $\|K(\cdot, D, \lambda)y - PK(\cdot, D, \lambda)y\|_H \leq \varepsilon(\lambda)$. Тогда имеем оценку для разности $K(\cdot, D, \lambda)y - y^j$, т.е.

$$\begin{aligned} \|K(\cdot, D, \lambda)y - y^j\|_H &\leq \|K(\cdot, D, \lambda)y - PK(\cdot, D, \lambda)y + PK(\cdot, D, \lambda)y - y^j\|_H \\ &\leq \|K(\cdot, D, \lambda)y - PK(\cdot, D, \lambda)y\|_H + \|PK(x, D, \lambda)y - y^j\|_H \leq 2\varepsilon(\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $K(x, D, \lambda)$ компактен.

4.3. Доказательство основной теоремы. Выберем число ξ_0 :

$$\xi_0 = \max\left(\sqrt{2\bar{v}^* \lambda_0}, \sqrt{N_1^2 + N_2^2}, N_0, 1\right), \quad (4.34)$$

где N_0, N_1, N_2 определены в (4.2), $\bar{v}^* = \max_{x \in T} \bar{v}(x)$, λ_0 – число, выбранное при доказательстве леммы 4.4. Напомним, что элементы матрицы $K(x, \xi, \lambda) =$

$(k_{nm}(x, \xi, \lambda))_{n,m=1}^3$, введенные в (4.8)–(4.11), элементы матрицы $Q(x, \xi, \lambda)$, введенные в (4.6), и $(A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} = (a_{nm}^{-1}(x, \xi, \lambda))_{n,m=1}^3$, введенные в (3.12)–(3.14), были корректно определены для $\lambda \in S_1$. Заметим, что число ξ_0 из (4.34) выбрано столь большим, что при $|\lambda| \leq \lambda_0$ и $|\xi| > \xi_0$ матрицы $K(x, \xi, \lambda)$, $Q(x, \xi, \lambda)$ и $(A(x, \xi) - \lambda E)^{-1}$ определены для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \lambda_0$, а при $|\lambda| \geq \lambda_0$ и любом ξ определены для $\lambda \in S_1$.

Докажем основные теоремы настоящей работы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\lambda \in S_1$. Оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен для всех $\lambda \in S_1$ за исключением дискретного множества точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\lambda| < \lambda_0$, где λ_0 выбрано в доказательстве леммы 4.4. В силу леммы 4.5 оператор $K(x, D, \lambda)$, определенный в (4.15), является компактным, где ξ_0 – число из (4.34). Тогда по теореме Гохберга [10] оператор $(E + K(x, D, \lambda))^{-1}$ определен для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \lambda_0$, за исключением дискретного множества точек. Следовательно, из равенства (4.7) $h_1(x) = (E + K(x, D, \lambda))^{-1}h(x)$. Подставляем $h_1(x)$ в (4.5):

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{|\xi| > \xi_0} (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} (E - Q(\lambda, x, \xi)) (E + K(\lambda, x, \xi))^{-1} (Fh)(\xi) e^{i(x, \xi)} \\ &= (A(x, D) - \lambda E)^{-1} h(x). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Получаем, что при $|\lambda| < \lambda_0$ оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен для всех λ , за исключением дискретного множества точек.

Рассмотрим некоторое число $\lambda_1 > \lambda_0$. Тогда для λ_1 выбираем новое ξ_0 по формуле (4.34) и обозначим это ξ_0 через ξ_1 . Точно так же при $|\lambda| < \lambda_1$ по теореме Гохберга псевдодифференциальный оператор $(E + K(x, D, \lambda))^{-1}$, а значит, и $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определены для всех λ , за исключением дискретного множества точек.

Покажем, что новые точки спектра оператора $A(x, D)$, появляющиеся при $|\lambda| < \lambda_1$, будут лежать в кольце $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda_0 \leq |\lambda| < \lambda_1\}$. От противного, пусть при $|\lambda| < \lambda_1$ появилась новая точка спектра в круге $|\lambda| < \lambda_0$. Но мы уже доказали, что при $|\lambda| < \lambda_0$ в этой точке оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен.

И так далее, выбирая каждый раз $\lambda_i > \lambda_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, получаем, что оператор $(E + K(x, D, \lambda))^{-1}$ определен для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением дискретного множества точек.

Таким образом, оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением дискретного множества точек.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\lambda \in S_1$. При $|\lambda| \geq \lambda_0$ оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен для всех $\lambda \in S_1$, где λ_0 выбрано в лемме 4.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|\lambda| \geq \lambda_0$ норма $\|K(x, D, \lambda)\| < 1$ по лемме 4.4. Получаем, что оператор в левой части (4.7), т.е. $E + K(x, D, \lambda)$, есть сумма единичного оператора и оператора с малой нормой. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $(E + K(x, D, \lambda))^{-1}$, который определен для всех $\lambda \in S_1$, $|\lambda| \geq \lambda_0$. Из равенства (4.7) вытекает, что $h_1(x) =$

$(E + K(x, D, \lambda))^{-1}h(x)$. Подставляя $h_1(x)$ в (4.5), получаем, что оператор $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$ определен для всех $\lambda \in S_1$, $|\lambda| \geq \lambda_0$.

Из теорем 4.1 и 4.2 получаем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 4.3. *Спектр оператора $A(x, D)$, состоящий из дискретного множества точек, лежит в симметричном относительно вещественной прямой секторе комплексной плоскости с вершиной на положительной полупрямой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.1 следует, что при $|\lambda| < \lambda_0$ спектр оператора $A(x, D)$ состоит из дискретного множества точек. Из теорем 4.1, 4.2 следует, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ спектр оператора $A(x, D)$ также дискретен и содержится в множестве $\mathbb{C} \setminus S_1$, где сектор S_1 определен в (4.3). Получили, что спектр оператора $A(x, D)$, состоящий из дискретного множества точек, содержится в множестве

$$(\mathbb{C} \setminus S_1) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \lambda_0\}, \quad (4.36)$$

где λ_0 выбрано в лемме 4.4. Определим сектор

$$S_2 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda - \sqrt{2}\lambda_0)| \leq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Сектор S_2 выбран таким образом, чтобы он не содержал объединения (4.36). Мы показали, что спектр оператора $A(x, D)$ состоит из дискретного множества точек и лежит в секторе S_2 . Теорема 4.3 доказана.

Список литературы

- [1] Y. Kagei, T. Kobayashi, “Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier–Stokes equations on the half space”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **177**:2 (2005), 231–330.
- [2] A. Matsumura, T. Nishida, “The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **55**:9 (1979), 337–342.
- [3] A. Matsumura, T. Nishida, “The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **20**:1 (1980), 67–104.
- [4] M. Núñez, “Spectral analysis of viscous static compressible fluid equilibria”, *J. Phys. A*, **34**:20 (2001), 4341–4352.
- [5] А. В. Фурсиков, “Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью”, *Матем. сб.*, **192**:4 (2001), 115–160; англ. пер.: A. V. Fursikov, “Stabilizability of a quasi-linear parabolic equation by means of a boundary control with feedback”, *Sb. Math.*, **192**:4 (2001), 593–639.
- [6] А. В. Фурсиков, “Стабилизация с границы решений системы Навье–Стокса: разрешимость и обоснование численного моделирования”, *Дальневост. матем. журн.*, **4**:1 (2003), 86–100.
- [7] М. А. Прибыль, “Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, заданных в $\mathbb{R}^3$ с периодическими краевыми условиями”, *Алгебра и анализ* (в печати).

- [8] Д. Хенри, *Геометрическая теория полуминейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.
- [9] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. Vol. III: Pseudodifferential operators*, Grundlehren Math. Wiss., **274**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [10] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

М. А. Прибыль (М. А. Pribyl')

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: zcd043@sectorb.msk.ru

Поступила в редакцию

17.10.2006 и 15.05.2007